



Universidad Politécnica  
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de  
Ingenieros Informáticos**



Grado en Matemática e Informática

Trabajo Fin de Grado

**Sobre la Definición de Caos en  
Sistemas Dinámicos Discretos  
Unidimensionales.**

Autor: Alessia Pérez Daniel  
Tutor: Miguel Reyes

Madrid, Junio 2024

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

*Trabajo Fin de Grado*  
*Grado en Matemática e Informática*

*Título:* Sobre la Definición de Caos en Sistemas Dinámicos Discretos  
Unidimensionales.

Junio 2024

*Autor:* Alessia Pérez Daniel

*Tutor:* Miguel Reyes

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos  
Universidad Politécnica de Madrid

# Resumen

Al inicio de este trabajo se proporciona una sólida introducción a los sistemas dinámicos y los conceptos básicos asociados a ellos. A través del estudio del sistema logístico  $\mu x(1 - x)$ , originalmente popularizado por Robert May, se ilustra cómo un sistema dinámico determinista puede transitar del orden al caos. Este capítulo no solo sirve como una base teórica sino también como un puente hacia comprensiones más complejas, introduciendo la definición de caos según Devaney, que incluye las nociones de sensibilidad a las condiciones iniciales, transitividad topológica y puntos periódicos densos.

Seguidamente se explora la perspectiva de Li y Yorke sobre el caos, destacando cómo diferentes enfoques dentro de la misma disciplina pueden conducir a variadas interpretaciones y entendimientos del comportamiento caótico. Este análisis no solo refleja la diversidad de pensamiento en el campo, sino que también subraya la importancia de una comprensión matizada cuando se abordan sistemas complejos.

Para cerrar las bases teóricas sobre los sistemas dinámicos se avanza hacia una evaluación crítica de la redundancia en la definición de caos de Devaney. Mediante una argumentación rigurosa, se demuestra que la densidad de los puntos periódicos y la transitividad topológica son suficientes para implicar la dependencia sensible en las condiciones iniciales. Además, se analizan dos definiciones adicionales de caos propuestas por Wiggins y Martelli, ofreciendo una visión más amplia de cómo el caos puede ser caracterizado dentro de diferentes marcos teóricos.

Finalmente, el último capítulo propone y desarrolla el diseño de una página web dedicada a facilitar el estudio y la visualización de sistemas dinámicos. Este recurso digital está pensado para proporcionar a estudiantes y profesionales una herramienta interactiva que les permita experimentar con sistemas dinámicos y observar la evolución de comportamientos caóticos. El desarrollo de esta herramienta no solo refleja la aplicación práctica de la teoría estudiada, sino que también subraya la importancia de la tecnología en la educación y la investigación matemática.



# Abstract

A solid introduction to dynamical systems and the basic concepts associated with them is provided at the beginning of this paper. Through the study of the logistic system  $\mu x(1 - x)$ , originally popularized by Robert May, it illustrates how a deterministic dynamic system can transition from order to chaos. This chapter not only serves as a theoretical foundation but also as a bridge to more complex understandings, introducing Devaney's definition of chaos, which includes the notions of sensitivity to initial conditions, topological transitivity, and dense periodic points.

Li and Yorke's perspective on chaos is then explored, highlighting how different approaches within the same discipline can lead to varied interpretations and understandings of chaotic behavior. This analysis not only reflects the diversity of thought in the field, but also underscores the importance of a nuanced understanding when dealing with complex systems.

To close the theoretical foundations on dynamical systems, a critical evaluation of the redundancy in Devaney's definition of chaos is advanced. By rigorous argumentation, it is demonstrated that the density of periodic points and topological transitivity are sufficient to imply sensitive dependence on initial conditions. Additionally, two alternative definitions of chaos proposed by Wiggins and Martelli are analyzed, offering a broader view of how chaos can be characterized within different theoretical frameworks.

Finally, the last chapter proposes and develops the design of a web page dedicated to facilitating the study and visualization of dynamic systems. This digital resource is intended to provide students and professionals with an interactive tool that allows them to experiment with dynamic systems and observe the evolution of chaotic behaviors. The development of this tool not only reflects the practical application of the studied theory but also underscores the importance of technology in education and mathematical research.



# Tabla de contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Definición de caos</b>	<b>3</b>
2.1. Definición de Sistemas Dinámicos . . . . .	3
2.1.1. Puntos periódicos y puntos fijos . . . . .	4
2.2. Parábola logística de May . . . . .	11
2.2.1. Caso $0 \leq \mu \leq 1$ . . . . .	11
2.2.2. Caso $1 < \mu \leq 3$ . . . . .	13
2.2.3. Caso $3 < \mu \leq 4$ . . . . .	16
2.3. Definición de caos de Davaney . . . . .	25
2.4. Códificación binaria . . . . .	26
2.5. Caso $\mu > 4$ . . . . .	28
2.6. Conjugación topológica . . . . .	30
<b>3. Periodo tres implica caos</b>	<b>35</b>
3.1. El teorema principal . . . . .	35
3.2. Comportamiento cerca de un punto periódico . . . . .	39
<b>4. Más definiciones de caos</b>	<b>41</b>
4.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales . . . . .	41
4.2. Definición de Wiggins y Definición de Martelli . . . . .	43
<b>5. Diseño de la web</b>	<b>49</b>
5.1. Frontend con React . . . . .	49
5.1.1. Razones para elegir React . . . . .	49
5.2. Backend con Flask . . . . .	49
5.2.1. Razones para elegir Flask: . . . . .	50
5.3. Clean Architecture . . . . .	50
5.4. Docker . . . . .	53
5.5. Código . . . . .	56
<b>6. Análisis de impacto</b>	<b>67</b>
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>

## TABLA DE CONTENIDOS

---

<b>Anexos</b>	<b>75</b>
<b>A. Primer anexo</b>	<b>75</b>
<b>B. Informe Turnitin</b>	<b>79</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En el campo de los sistemas dinámicos, el estudio del caos se ha establecido como un área fundamental para entender comportamientos complejos en sistemas naturales y tecnológicos.

El estudio del caos comenzó a tomar forma a finales del siglo XIX con los trabajos del matemático francés Henri Poincaré. Investigando el problema de los tres cuerpos, Poincaré descubrió que el movimiento de tres cuerpos bajo la influencia de la gravitación mutua podía ser extremadamente complejo y no predecible a largo plazo. Sus trabajos sentaron las bases de la teoría de sistemas dinámicos y la sensibilidad a las condiciones iniciales, aunque él no utilizó el término “caos”. Estos descubrimientos revelaron que incluso sistemas deterministas pueden exhibir comportamientos impredecibles, desafiando la noción clásica de que el determinismo implica previsibilidad.

El siguiente gran avance en el estudio del caos vino en la década de 1960 con el meteorólogo estadounidense Edward Lorenz. Mientras trabajaba en modelos matemáticos del clima, Lorenz descubrió que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales de su modelo podían llevar a comportamientos drásticamente diferentes. Este descubrimiento, conocido como el “efecto mariposa”, marcó el inicio formal del estudio del caos en los sistemas dinámicos. Lorenz utilizó un conjunto de ecuaciones diferenciales, ahora conocidas como el sistema de Lorenz, para ilustrar este comportamiento caótico, demostrando que incluso sistemas simples pueden producir resultados impredecibles.

En las décadas de 1970 y 1980, matemáticos como Stephen Smale y James Yorke hicieron contribuciones significativas a la teoría de sistemas dinámicos. Smale introdujo conceptos como el atractor extraño y las “herraduras de Smale”, que ayudaron a formalizar el comportamiento caótico. Yorke, junto con su estudiante Tien-Yien Li, acuñó el término “caos” en su famoso artículo “Period Three Implies Chaos” [1]. Este trabajo demostró que la existencia de un ciclo periódico de periodo tres en un sistema discreto implica la existencia de un comportamiento caótico, estableciendo así un criterio matemático para el caos.

En 1978, Mitchell Feigenbaum descubrió que ciertos sistemas no lineales exhiben una estructura de bifurcaciones en cascada antes de entrar en el régimen

## Capítulo 1. Introducción

---

caótico. Encontró que las razones entre las longitudes de intervalos sucesivos de bifurcación se acercaban a una constante universal, ahora conocida como la constante de Feigenbaum. Este descubrimiento mostró la universalidad del comportamiento caótico en diferentes sistemas y fue un avance crucial en la comprensión de cómo y por qué el caos aparece en sistemas aparentemente diversos.

Durante las décadas de 1980 y 1990, el estudio del caos se expandió a diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Se encontraron ejemplos de comportamiento caótico en una variedad de sistemas naturales, incluyendo la dinámica de poblaciones, los sistemas eléctricos, el flujo de fluidos, el ritmo cardíaco y las reacciones químicas. La popularización del concepto de caos llevó a una mayor apreciación de la complejidad en sistemas que anteriormente se consideraban “ruidosos” o simplemente complicados. Este período también vio un interés creciente en los fractales, popularizados por Benoît Mandelbrot. Los atractores caóticos a menudo tienen estructuras fractales, y el estudio de la dimensión fractal de estos atractores ha sido crucial para entender mejor la geometría del caos.

Actualmente, la teoría del caos se aplica en múltiples disciplinas. En meteorología, mejora la comprensión de los patrones climáticos. En ingeniería, se utiliza para diseñar sistemas más eficientes y seguros, como los algoritmos de control en sistemas de automoción. En biología, ayuda a modelar la dinámica de poblaciones y en medicina, a entender ritmos cardíacos irregulares y otros fenómenos complejos.

## Capítulo 2

# Definición de caos

### 2.1. Definición de Sistemas Dinámicos

Antes de comenzar a hablar de caos, tenemos que entender qué es un Sistema Dinámico. Para entender este tipo de sistemas, pongamos un ejemplo, tomemos un número cualquiera y apliquemos la función que deseemos, al resultado volvamos a aplicar la misma función y así sucesivamente. Este proceso iterativo, es un ejemplo de un sistema dinámico discreto, es decir, un Sistema Dinámico es aquel en el que las variables evolucionan a lo largo del tiempo. Existen los sistemas dinámicos continuos y discretos, ejemplo de sistemas dinámicos continuos son las ecuaciones diferenciales, pero en este trabajo solo vamos a trabajar con sistemas dinámicos discretos unidimensionales. Desde el punto de vista matemático, un sistema dinámico discreto es una ecuación de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

donde  $f$  es una función  $f : X \rightarrow X$  definida en un cierto conjunto  $X$  que recibe el nombre de **espacio de fases** o **espacio de estados**. Cuando el espacio de fases es  $\mathbb{R}$  o un subconjunto de  $\mathbb{R}$  se trata de un sistema dinámico **unidimensional**. Notando  $f^0(x) = x$  y  $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , el conjunto de valores

$$O^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}$$

recibe el nombre de **órbita** de  $x$ . Esta notación se utilizará a lo largo de todo el trabajo.

El objetivo de los sistemas dinámicos es comprender la naturaleza de todas las órbitas e identificar el conjunto de órbitas que son periódicas o eventualmente periódicas, conceptos que explicaremos más adelante. En general, esta es una tarea difícil.

Muchos fenómenos en la naturaleza están modelados por este tipo de ecuaciones, uno de los más conocidos y estudiados es la parábola logística de May, formulada por el biólogo Robert May en 1976 para estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema cerrado. La ecuación de la parábola logística de May es,

$$x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k) \tag{2.1}$$

## Capítulo 2. Definición de caos

---

definida sobre el espacio de fases  $X = [0, 1]$  y en  $0 \leq \mu \leq 4$ .

Este sistema dinámico nos va a ayudar a comprender el comportamiento de los sistemas dinámicos y a pasar de los sistemas dinámicos deterministas a los que llamaremos “caóticos”, para ello vamos a estudiar las tendencias de este sistema según varía el valor de  $\mu$ , estudiaremos los puntos fijos, puntos periódicos, puntos eventualmente periódicos y si converge o diverge la órbita de los puntos. Para poder realizar este estudio, es necesario entender las principales definiciones de Sistemas Dinámicos que se darán a continuación

### 2.1.1. Puntos periódicos y puntos fijos

Dado un sistema dinámico  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $f : X \rightarrow X$ , se dice que  $p \in X$  es un **punto periódico** con periodo  $n$ , si  $p = f^n(p)$ , y  $p \neq f^k(p)$  para  $1 \leq k < n$ . Diremos que  $q$  es un **punto eventualmente periódico** si para algún entero positivo  $m$ ,  $p = f^m(q)$  es periódico. Observemos que como  $f$  puede no ser inyectiva, pueden existir puntos eventualmente periódicos que no son periódicos. Por ejemplo, si  $f(x) = x^2$ , puesto que  $f(1) = 1$ , el punto  $x = 1$  es un punto periódico de periodo 1 (punto fijo), y al ser  $f(-1) = 1$ , el punto  $x = -1$  es un punto eventualmente periódico.

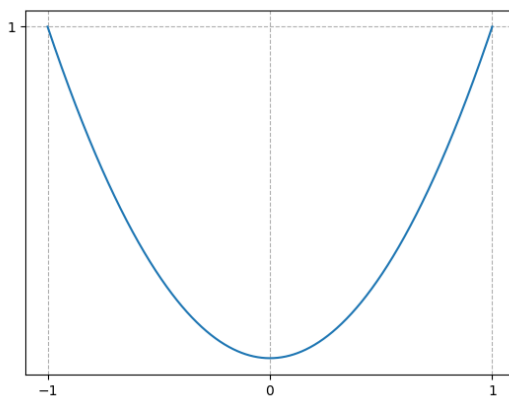


Figura 2.1:  $f(x) = x^2$

Cuando  $p$  es un punto periódico de periodo 1, es decir cuando  $f(p) = p$ , se dice que  $p$  es un **punto fijo** del sistema, esto significa que  $f^k(p) = p$  para todo valor de  $k \leq 1$ , con lo que los puntos fijos son estados de equilibrio, una vez el sistema entra en ellos, permanece invariante en todos los instantes futuros. Podemos clasificar los puntos fijos según el comportamiento de las órbitas con condiciones iniciales cercanas a ellos, en puntos fijos atractivos, repulsivos e indiferentes. A partir de ahora consideraremos  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow X$  derivable con continuidad en  $X$ , aunque esta hipótesis se podría suavizar en algunos casos.

Si  $p$  un punto fijo de  $f$ , es decir, tal que  $f(p) = p$ . Entonces

- El punto  $p$  es un punto fijo atractivo si  $|f'(p)| < 1$
- EL punto  $p$  es un punto fijo repulsivo si  $|f'(p)| > 1$

## 2.1. Definición de Sistemas Dinámicos

- El punto  $p$  es un punto fijo indiferente si  $|f'(p)| = 1$

**Teorema 2.1.1.** Si  $p$  es un punto fijo atractivo, entonces existe un intervalo abierto  $I \subseteq X$  conteniendo a  $p$  tal que para cualquier  $x \in I$ , se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$$

*Demostración.* Por la continuidad de  $f'$  en  $X$ , existe un intervalo cerrado  $I$  centrado en  $p$  e incluido en  $X$ , tal que para todo  $x \in I$  es  $|f'(x)| \leq K < 1$ . Aplicando el Teorema del Valor Medio, si  $a, b \in I$

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$$

donde, según el caso,  $\xi \in (a, b)$  o  $\xi \in (b, a)$ . Si tomamos valor absoluto en ambos miembros y tenemos en cuenta que  $|f'(\xi)| \leq K < 1$  obtenemos

$$d(f(a), f(b)) = |f(a) - f(b)| = |f'(\xi)| |a - b| \leq K d(a, b) \quad (2.2)$$

siendo  $d(x, y)$  la distancia euclidiana de  $x$  a  $y$ .

Como  $d(f(x), f(p)) = d(f(x), p)$  y  $p \in I$ , tenemos que

$$d(f(x), p) = d(f(x), f(p)) \leq K d(x, p) < d(x, p)$$

lo que significa que  $f(x)$  dista del centro  $p$  de  $I$  menos que  $x \in I$ , luego  $f(x) \in I$  y  $f(I) \subseteq I$ . Además solo existe un punto fijo en  $I$ , ya que si  $f(x) = x$  y  $f(y) = y$ . Entonces

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$$

lo que es imposible ya que  $K < 1$ .

Tomemos ahora un punto arbitrario  $x \in I$  y definimos la sucesión

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) \end{aligned}$$

E inductivamente para todo  $m$ ,

$$x_{m+1} = f(x_m) = f^{m+1}(x_0)$$

Probaremos que la sucesión  $\{x_m\}$  así obtenida es de Cauchy, es decir, para cualquier  $\xi > 0$  podemos encontrar un número natural  $N$  tal que si  $p, q > N$  entonces  $d(x_p, x_q) < \xi$ . Si  $p < q$

## Capítulo 2. Definición de caos

---

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q)$$

y podemos estimar la distancia entre dos términos consecutivos de la sucesión  $\{x_m\}$  aplicando (2.2)

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq Kd(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd(x_1, x_2) \leq K^2d(x_0, x_1)$$

y sucesivamente se obtiene

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq K^m d(x_0, x_1)$$

Sustituyendo esta aproximación en la acotación obtenida para  $d(x_p, x_q)$  se obtiene

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq K^p d(x_0, x_1) + K^{p+1} d(x_0, x_1) + \cdots + K^{q-1} d(x_0, x_1) = \\ &d(x_0, x_1) \sum_{i=p}^{q-1} K^i \leq d(x_0, x_1) \frac{K^p}{1-K} \end{aligned}$$

Como  $K < 1$  la expresión  $d(x_0, x_1) \frac{K^p}{1-K}$  tiende a cero cuando  $p \rightarrow \infty$  y podemos hacerla más pequeña que un  $\xi > 0$  arbitrario tomando  $p$  suficientemente grande, con lo que la sucesión  $x_m$  es de Cauchy en el conjunto compacto  $I$  y, por tanto, existe  $x \in I$  tal que  $\{x_m\}$  converge a  $x$ . Además como  $f$  es continua

$$f(x) = f\left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{m+1} = x$$

Por tanto  $x$  es un punto fijo de  $f$  y debería ser  $x = p$ , con lo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p, \quad \forall x \in I$$

■

Sea  $p$  un punto fijo de  $f$ , si consideramos el conjunto de puntos

$$\{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p\}$$

el interior  $C(p)$  de este conjunto se llama **cuenca de atracción** de  $p$ .

**Teorema 2.1.2.** *Si  $p$  es un punto fijo repulsivo debe pertenecer a algún intervalo abierto  $I \subseteq X$  verificando que para cualquiera  $x_0 \in I$ , existe un  $k$  tal que  $f^k(x_0) \notin I$  (esto significa que las soluciones con condición inicial en el intervalo  $I$  escapan de  $I$  al cabo de un número finito de iteraciones como se puede apreciar en la figura 2.4).*

## 2.1. Definición de Sistemas Dinámicos

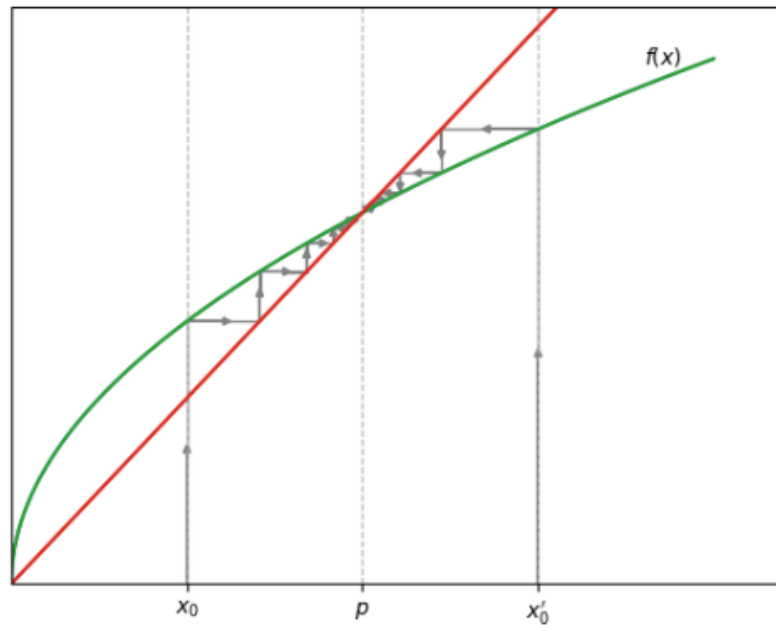


Figura 2.2: Convergencia de órbitas a un punto fijo  $p$  con  $0 < f'(p) < 1$

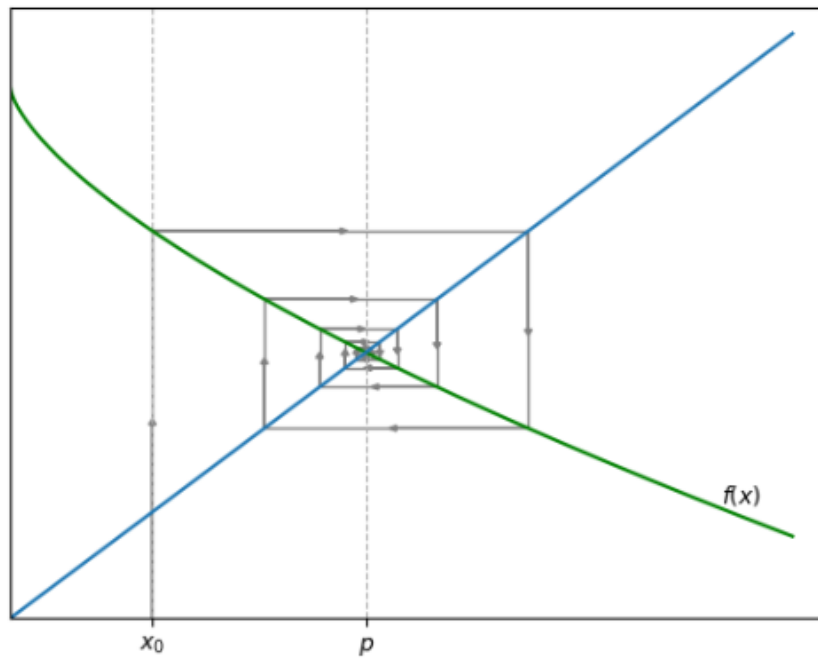


Figura 2.3: Convergencia de órbitas a un punto fijo  $p$  con  $-1 < f'(p) < 0$

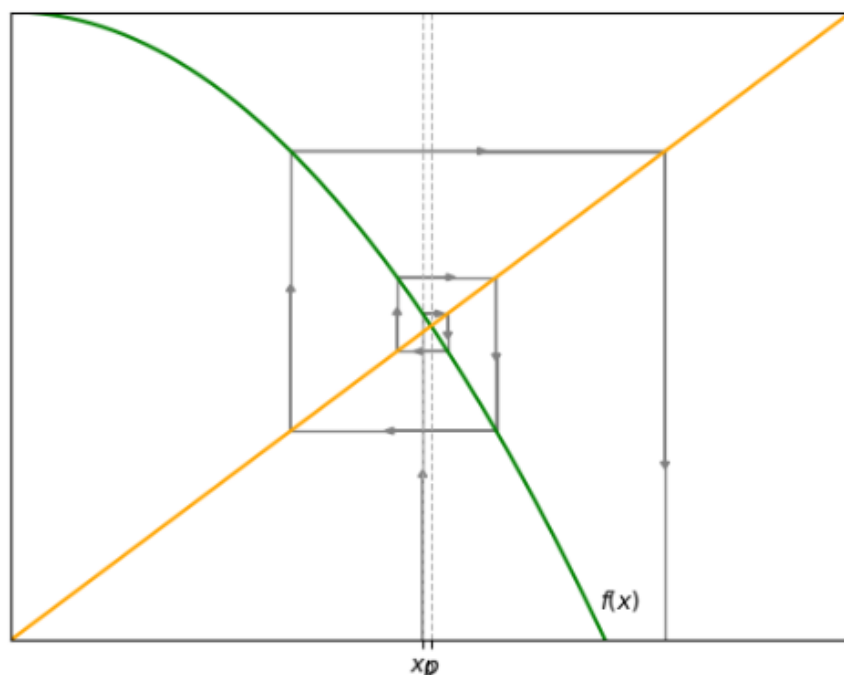


Figura 2.4:  $p$  punto repulsivo

*Demostración.* Tomamos un  $\epsilon > 0$  tal que  $K - \epsilon > 1$ , existirá por continuidad un intervalo abierto  $I$  tal que  $p \in I$ , y  $|f'(x)| > K - \epsilon$  si  $x \in I$ . Como consecuencia del Teorema del Valor Medio, si  $x \in I$  tenemos

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(\xi)| |x - p| \quad (2.3)$$

con, según sea el caso,  $\xi \in (p, x) \subseteq I$ , ó  $\xi \in (x, p) \subseteq I$ .

Entonces, puesto que  $|f'(\xi)| > K - \epsilon$ , se tiene que:

$$|f(x) - p| = |f'(\xi)| |x - p| > (K - \epsilon) |x - p|$$

para todo  $x \in I$ .

$$|f(x) - p| > (K - \epsilon) |x - p|$$

Supongamos que  $f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)$  pertenecen a  $I$ . Por la regla de la cadena sabemos que  $(f^2(x))' = (f(f(x)))' = f'(f(x))f'(x)$  y se tiene

$$|(f^2(x))'| = f'(f(x))f'(x) > (k - \epsilon)^2$$

Si aplicamos ahora a  $f^2(x)$  el mismo razonamiento que usamos arriba con  $f(x)$  obtenemos

## 2.1. Definición de Sistemas Dinámicos

---

$$|f^2(x) - p| > (K - \epsilon)^2 |x - p|$$

y podemos generalizar a

$$|f^k(x) - p| > (K - \epsilon)^k |x - p|$$

y como tenemos que  $(K - \epsilon) > 1$ , la expresión se hace arbitrariamente grande y  $f^k(x)$  debe terminar saliendo de  $I$  para  $k$  suficientemente grande. ■

En el caso de los punto fijos indiferentes, estos pueden comportarse de manera muy distinta, como se puede apreciar en las figuras 2.5a y 2.5b

**Teorema 2.1.3.** Si  $p \in I$  es un punto fijo indiferente con  $f'(p) = 1$  y  $f'(x) < 1$  en todos los puntos del intervalo  $I$  de la forma  $(p, b]$ , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$$

para cualquier  $x \in I$ . (Ver figura 2.5a)

*Demostración.* Por continuidad de la función  $f$ , podemos suponer, disminuyendo  $b$  si es necesario que  $0 < f(x) < 1$  para todo  $x \in [p, b)$ . Aplicando el Teorema del Valor Medio, dado  $x \in (p, b]$ , existe  $\xi \in (p, x)$  tal que:

$$f(x) - f(p) = f(x) - p = f(\xi)(x - p)$$

y entonces

$$\begin{cases} f(x) - p = f(\xi)(x - p) < (x - p) \implies f(x) < x, \\ f(x) - p = f(\xi)(x - p) > 0 \implies f(x) > p \end{cases}$$

Por tanto  $f(x) \in (p, x) \subset (p, b]$  y podemos volver a aplicar el Teorema del Valor Medio llegando a que

$$f^{k+1}(x) - p = f^{k+1}(x) - f(p) = f(\xi)(f^k(x) - p) < f^k(x) - p$$

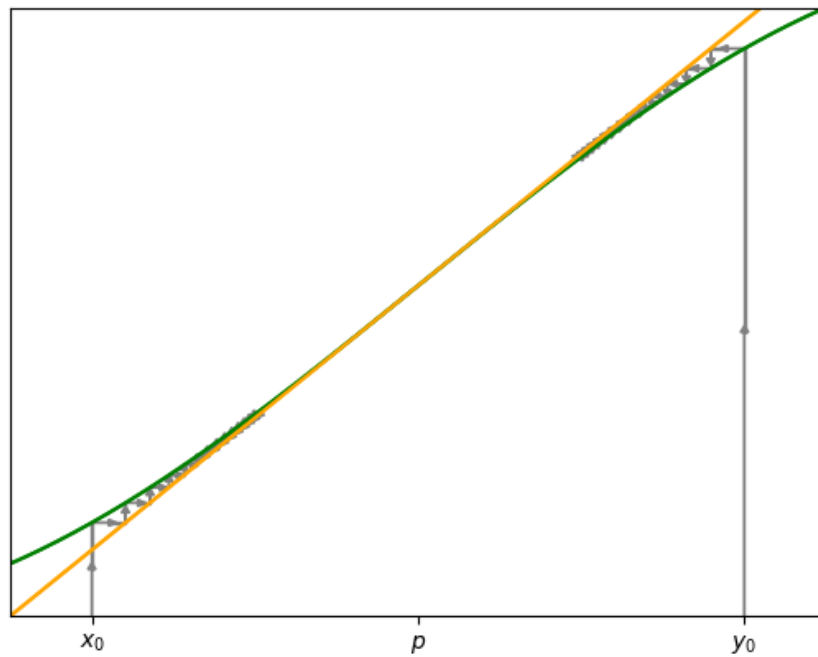
de donde podemos deducir como antes que:

$$p < f^{k+1}(x) < f^k(x)$$

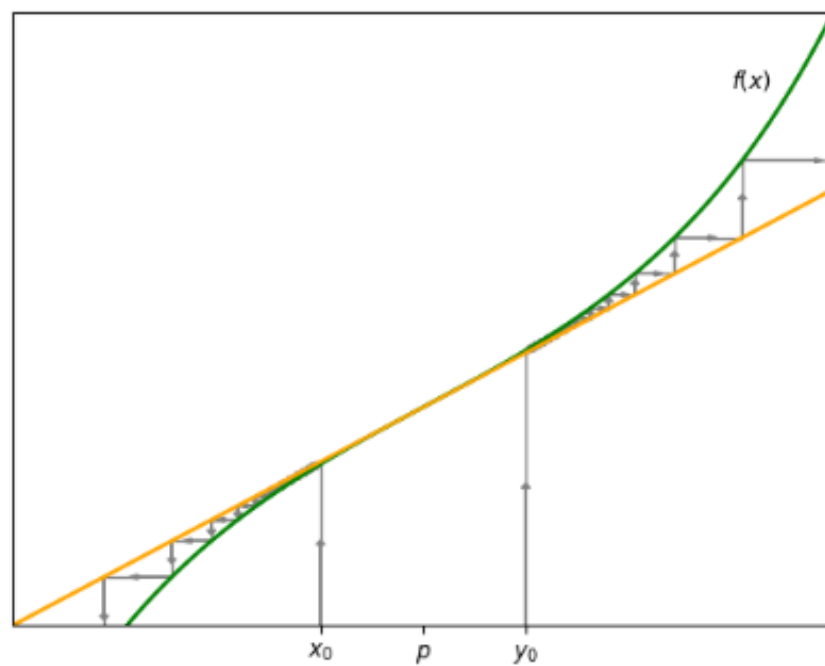
, y  $\{f^k\}$  es una sucesión decreciente acotada inferiormente por  $p$ .

Sea  $\alpha > p$ , tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = \alpha$$



(a) Débilmente atractivo



(b) Débilmente repulsivo

Figura 2.5: Punto indiferente

Por la continuidad de la función

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{k+1}(x) = \alpha$$

## 2.2. Parábola logística de May

y, por tanto,  $\alpha$  es un punto fijo de la función  $f$ . Volviendo a aplicar el Teorema del Valor Medio, existe  $\xi \in (p, \alpha)$ , tal que

$$\alpha - p = f(\alpha) - f(p) = f(\xi)(\alpha - p) \implies f(\xi) = 1$$

con lo que llegamos a una contradicción, ya que  $\xi \in (p, \alpha) \subset (p, b]$  y  $f(x) < 1 \forall x \in (p, b]$ . ■

Siguiendo el mismo razonamiento de la demostración anterior se puede demostrar que:

**Teorema 2.1.4.** Si  $p \in I$  es un punto fijo indiferente con  $f'(p) = 1$  y  $f'(p) < 1$  en todos los puntos del intervalo  $I$  de la forma  $[a, p)$ , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$$

para cualquier  $x \in I$ . Ver figura 2.5a

## 2.2. Parábola logística de May

Con las técnicas vistas en la sección anterior estamos listos para comenzar el estudio de la familia de sistemas dinámicos (2.1)

$$x_{k+1} = f_\mu(x_k)$$

donde  $f_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , viene definida por:

$$f_\mu(x) = \mu x(1 - x) \quad \text{con} \quad 0 \leq \mu \leq 4$$

### 2.2.1. Caso $0 \leq \mu \leq 1$

Vamos a empezar estudiando el caso  $0 \leq \mu \leq 1$ . Si  $\mu = 0$  el análisis es trivial, ya que  $f_0(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , con lo que  $x = 0$  es el único punto fijo y el resto son puntos eventualmente periódicos con órbita

$$O^+(x) = \{x, 0, 0, \dots\}.$$

Centrémonos entonces en los casos  $0 < \mu \leq 1$ , para ello vamos a resolver la ecuación  $f_\mu(x) = x$  para encontrar los puntos fijos. Esta ecuación tiene como soluciones

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1 - \frac{1}{\mu}$$

pero como  $0 < \mu \leq 1$ , entonces  $x = 1 - \frac{1}{\mu} < 0$  si  $\mu \in (0, 1)$  y es igual a cero si  $\mu = 1$ . Por tanto, el único punto fijo es  $x = 0$  y, puesto que  $f(1) = 0$  para todo valor de  $\mu$ ,  $x = 1$  es un punto eventualmente periódico. Además puesto que

$$f'_\mu(x) = \mu(1 - 2x)$$

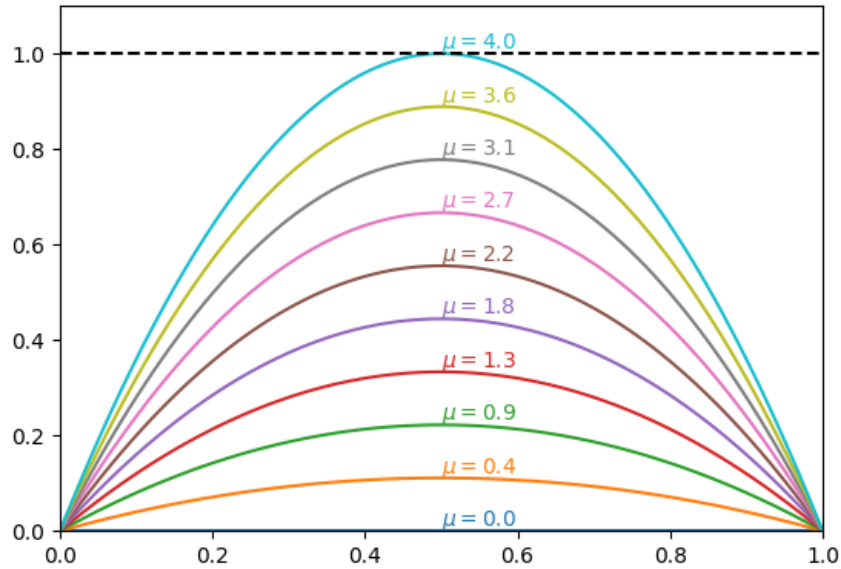


Figura 2.6: Parábola logística variando el parámetro  $\mu$

podemos comprobar que  $f'_\mu(0) = \mu$ , con lo cual  $|f'_\mu(0)| = \mu$ , y consecuentemente  $x = 0$  es un punto fijo atractivo si  $0 < \mu < 1$  y un punto fijo indiferente si  $\mu = 1$ .

Veamos cuál es la cuenca de atracción de  $x = 0$  para ambos casos, siendo la **cuenca de atracción** del punto fijo  $p$  el interior del conjunto

$$\{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p\}$$

Como se aprecia en la figura 2.7, la función está por debajo de la recta  $y = x$  si  $x \in (0, 1]$ , entonces

$$0 < f_\mu(x) < x \leq 1$$

Como consecuencia se tiene que si  $n \geq 1$

$$0 < f_\mu^n(x) < f_\mu^{n-1}(x) < \dots < f_\mu(x) < 1$$

deduciéndose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = 0$$

ya que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = a > 0$$

entonces, por la continuidad de la función  $f$  se tendría que

$$f_\mu(a) = f_\mu(\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^{n+1}(x) = a$$

lo que contradice el hecho de que  $x = 0$  sea el único punto fijo de  $f_\mu$  en  $[0, 1]$ .

Tenemos ya determinado el comportamiento de nuestro sistema dinámico en los casos  $0 \leq \mu \leq 1$ .

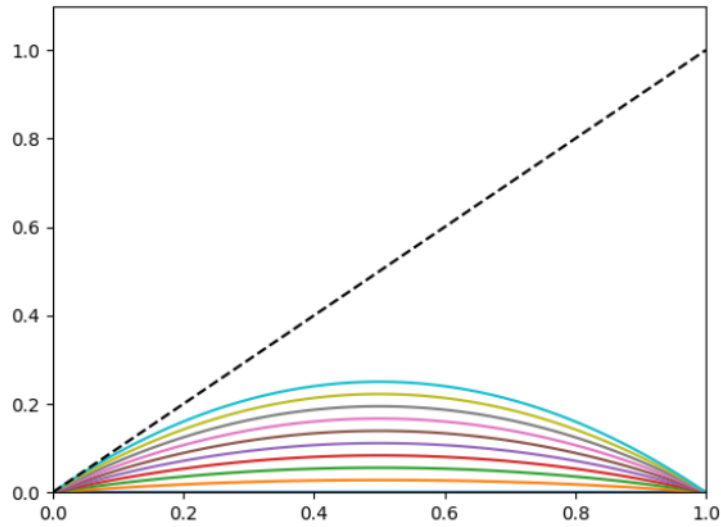


Figura 2.7: Parábola logística  $0 < \mu \leq 1$

### 2.2.2. Caso $1 < \mu \leq 3$

Como vimos en la sección anterior  $f_\mu(x) = x$ , si  $x = 0$  o  $x = 1 - \frac{1}{\mu}$ , y en este caso

$$0 < 1 - \frac{1}{\mu} \leq \frac{2}{3}$$

por lo que  $x = 1 - \frac{1}{\mu}$  es también un punto fijo de  $f_\mu$ . Si analizamos la derivada de  $f_\mu$

$$f'_\mu(x) = \mu(1 - 2x) \implies f'_\mu(0) = \mu > 1$$

por lo que  $x = 0$  es un punto fijo repulsivo. Sin embargo

$$f'_\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 2 - \mu \implies \begin{cases} -1 < f'_\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) < 1 & \text{si } 1 < \mu < 3 \\ f'_\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = -1 & \text{si } \mu = 3 \end{cases}$$

Entonces, llamando  $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$ , se tiene que  $|f'_\mu(p_\mu)| < 1$  y  $p_\mu$  es punto fijo atractivo si  $1 < \mu < 3$  y punto fijo indiferente si  $\mu = 3$  ya que en este caso  $f'_\mu(p_\mu) = -1$ . Por simetría, existe un punto  $\tilde{p}_\mu = 1 - p_\mu = \frac{1}{\mu}$ , para el que  $f_\mu(\tilde{p}_\mu) = f_\mu(p_\mu) = p_\mu$ , por lo que  $\tilde{p}_\mu$  es un punto eventualmente periódico, igual que  $x = 1$  ya que  $f_\mu(1) = f_\mu(0) = 0$ , y  $\tilde{p}_\mu = p_\mu$  solo cuando  $\mu = 2$ .

Analícemos ahora que la órbita de cualquier punto  $x \in (0, 1)$  converge a  $p_\mu$  para

## Capítulo 2. Definición de caos

---

todo  $\mu$  si  $1 < \mu \leq 3$ . Comencemos por el caso  $1 < \mu \leq 2$  y  $x \in (0, p_\mu)$ , tenemos que

$$f_\mu(x) = \mu(1-x)x > \mu(1-p_\mu)x = \mu\left(1-1+\frac{1}{\mu}\right)x = x \implies f_\mu(x) > x$$

y puesto que  $f_\mu$  es creciente en  $(0, p_\mu)$ , al ser  $p_\mu \leq \frac{1}{2}$ , se tiene que

$$f_\mu(x) = \mu(1-x)x < f_\mu(p_\mu) = \mu\left(1-1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{1}{\mu}\right) = 1-\frac{1}{\mu} = p_\mu \implies f_\mu(x) < p_\mu$$

de donde se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$  ya que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = a < p_\mu$$

por la continuidad de  $f_\mu(x)$  se tendría que

$$f_\mu(a) = f_\mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^{n+1}(x) = a$$

lo que contradice el hecho de que no hay puntos fijos en el intervalo  $(0, p_\mu)$ .

En el caso  $1 < \mu \leq 2$  y  $x \in \left(p_\mu, \frac{1}{2}\right]$

$$f_\mu(x) = \mu(1-x)x < \mu\left(1-1+\frac{1}{\mu}\right)x = x \implies f_\mu(x) < x$$

$$f_\mu(x) = \mu(1-x)x > f_\mu(p_\mu) = \mu\left(1-1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{1}{\mu}\right) = 1-\frac{1}{\mu} = p_\mu \implies f_\mu(x) < p_\mu$$

y con un razonamiento análogo al anterior tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$ .

Finalmente si  $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , se tiene que  $f_\mu(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  y aplicando los resultados anteriores tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^{n-1}(f_\mu(x)) = p_\mu$$

Queda así demostrado el resultado para todo  $x \in [0, 1]$  y  $1 < \mu \leq 2$

Si  $2 < \mu < 3$ , el comportamiento de las órbitas es diferente al caso anterior, tenemos que

$$\frac{1}{2} < p_\mu < \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} < \tilde{p}_\mu < \frac{1}{2}$$

así que vamos a considerar primero el caso  $x \in [\tilde{p}_\mu, p_\mu]$ .

Gráficamente podemos ver que:

$$f_\mu^2([\tilde{p}_\mu, p_\mu]) = f_\mu\left(\left[p_\mu, f_\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right)$$

## 2.2. Parábola logística de May

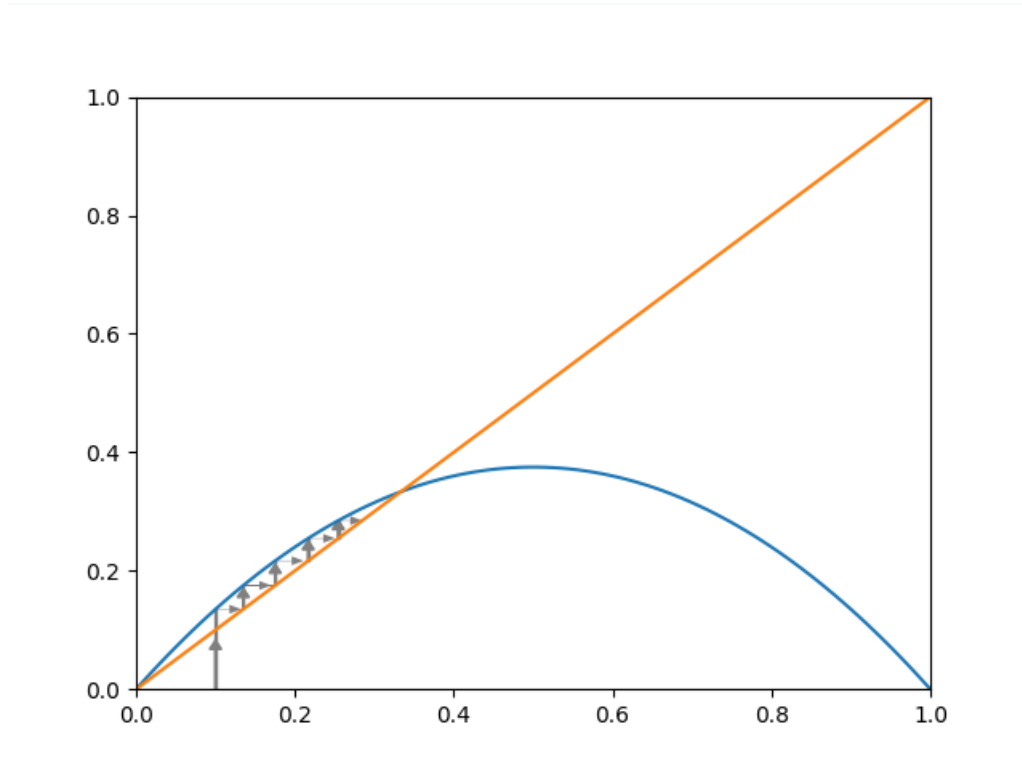


Figura 2.8: Ejemplo con  $\mu = 1,5$

y como  $f_\mu$  es monótona decreciente en  $\left[p_\mu, f_\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right]$  y  $f_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

$$f_\mu^2([\tilde{p}_\mu, p_\mu]) = f_\mu\left(\left[p_\mu, f_\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, p_\mu\right]$$

Por lo que  $f_\mu^2(x)$  lleva el intervalo  $[\tilde{p}_\mu, p_\mu]$  dentro del  $[\frac{1}{2}, p_\mu]$  y en consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = p_\mu \quad \forall x \in [\tilde{p}_\mu, p_\mu]$$

Ahora si  $x \in (0, \tilde{p}_\mu)$  se tiene que

$$f_\mu(x) < f_\mu(\tilde{p}_\mu) = \mu \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 1 - \frac{1}{\mu} = p_\mu$$

y por otro lado

$$f(x) = \mu x(1-x) > \mu x\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu x - x > 2x - x = x$$

Por lo que aplicando un razonamiento análogo a los anteriores para series acotadas y monótonas podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = p_\mu, \quad \forall x \in (0, \tilde{p}_\mu)$$

## Capítulo 2. Definición de caos

---

En el caso  $x \in (p_\mu, 1)$  tenemos que  $f(x) \in (0, f_\mu(x))$  con lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^{n-1}(f(x)) = p_\mu$$

Con esto tenemos esta determinado el comportamiento de nuestro sistema dinámico para los casos  $2 < \mu \leq 3$ .

### 2.2.3. Caso $3 < \mu \leq 4$

Cuando  $\mu$  supera el valor 3, aparece un problema, los dos puntos fijos  $p_0 = 0$  y  $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$  que han jugado el papel fundamental hasta el momento se vuelven repulsivos ya que como vimos anteriormente

$$f'(0) = \mu > 3 \quad f'(p_\mu) = |2 - \mu| > 1$$

Por lo que las órbitas de  $x \in (0, 1)$  de manera general ya no van a converger a estos puntos y de momento solo tenemos determinadas las órbitas de los puntos fijos y de  $x = 1$  y  $x = p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$ , es decir:

$$\begin{aligned} O^+(0) &= \{0, 0, 0, 0, \dots\} \\ O^+(1) &= \{1, 0, 0, 0, \dots\} \\ O^+(p_\mu) &= \{p_\mu, p_\mu, p_\mu, p_\mu, \dots\} \\ O^+(\tilde{p}_\mu) &= \{\tilde{p}_\mu, p_\mu, p_\mu, p_\mu, \dots\} \end{aligned}$$

Si utilizando un programa de ordenador hacemos, por ejemplo, 300 iteraciones para  $\mu = 3,3$  sobre todos los punto de  $[0, 1]$ , se obtiene el resultado de la figura 2.9a, la figura 2.9b muestra la iteración 300 y la figura 2.9c muestra la gráfica de  $f_\mu$  iteración 301.

Si observa la gráfica de la figura 2.9b algo raro parece estar ocurriendo, ¿qué ha pasado con  $f(p_\mu)$  y  $f(0)$ ? ¿no eran puntos fijos?, algo parecido ocurre con  $x = \tilde{p}_\mu$  y  $x = 1$ .

Los casos de  $x = 0$  y  $x = 1$  no se ven porque están encima de los ejes de la gráfica, pero en los casos  $x = p_\mu = 0.\overline{70}$  y  $x = \tilde{p}_\mu = 0.\overline{30}$ , estos errores se deben a la precisión finita del ordenador, ya que en el intervalo  $(0, 1)$  hay un número infinito no numerable de puntos, pero el ordenador solo dispone de un número finito de espacio para almacenar los valores y de píxeles para representarlos, por lo tanto, si no elegimos su valor exacto (algo imposible en estos casos, por ser números infinitos periódicos) el ordenador no los considera, y al ser repulsivos la órbita se separa de ellos. Este ejemplo nos ayuda a entender que en el estudio de los sistemas dinámicos el ordenador puede ser de mucha ayuda, ya que nos permite intuir el comportamiento general pero necesitamos de las Matemáticas para justificar y asegurar los resultados.

## 2.2. Parábola logística de May

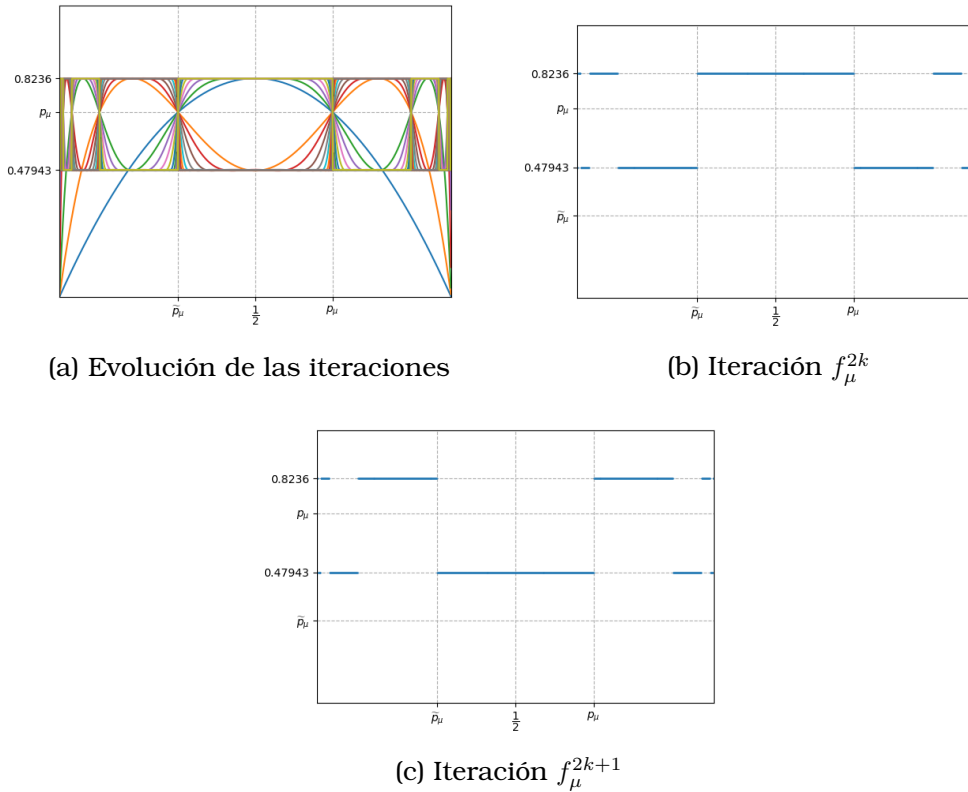


Figura 2.9:  $\mu = 3,3$

Siguiendo con el caso de  $\mu = 3,3$ , a pesar de que el ordenador nos ha engañado un poco, es cierto que la órbita de cualquier punto que no sean los puntos fijos 0 y  $p_\mu$  y los eventualmente puntos fijos, 1 y  $\tilde{p}_\mu$ , mencionados anteriormente, converge a la órbita periódica de los dos puntos de periodo 2 que presenta este sistema dinámico.

Podemos obtener los puntos de periodo 2 al resolver el sistema  $f(f(x)) = x$ . De manera general para cualquier valor de  $\mu$  se tiene:

$$\begin{aligned} f_\mu^2(x) &= f_\mu(\mu x(1-x)) = \mu \mu x(1-x)(1-\mu x(1-x)) = x \implies \\ &\implies \mu^2 x(\mu x^2 - \mu x + 1 - \mu x^3 + \mu x^2 - x) - x = 0 \implies \\ &\implies x(\mu^3 x^2 - \mu^3 x + \mu^2 - \mu^3 x^3 + \mu^3 x^2 - \mu^2 x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que  $p_\mu$  es un punto fijo y por tanto es periódico de cualquier periodo, entonces  $p_\mu$  es raíz del polinomio anterior y tendríamos:

$$x \left( x - \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right) \right) \left( \mu^3 x^2 - \mu^2(\mu + 1)x + \mu(\mu + 1) \right) = 0 \implies$$

## Capítulo 2. Definición de caos

---

$$\implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 - \frac{1}{\mu} \\ \mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + (\mu + 1) = 0 \end{cases}$$

Cuyas raíces son

$$x = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

que solo existen si  $\mu \geq 3$  (en el caso  $\mu = 3$  coinciden con el punto fijo  $p_3 = 2/3$ ), para el caso  $\mu = 3,3$ , los puntos de periodo dos son aproximadamente  $q_{3,3} \simeq 0,8236$  y  $\tilde{q}_{3,3} \simeq 0,47943$ , los que aparecen en las gráficas de la figura 2.9, cuyas órbitas, de manera general para cualquier valor de  $\mu$  son (ambas órbitas son las mismas)

$$O^+(q_\mu) = \{q_\mu, \tilde{q}_\mu, q_\mu, \tilde{q}_\mu, q_\mu, \tilde{q}_\mu, \dots\}$$

$$O^+(\tilde{q}_\mu) = \{\tilde{q}_\mu, q_\mu, \tilde{q}_\mu, q_\mu, \tilde{q}_\mu, q_\mu, \dots\}$$

Al igual que estudiamos la atracción o repulsión de los puntos fijos, se pueden estudiar para los puntos periódicos siguiendo los mismos criterios de estudio de la derivada.

$$(f^2)'(q_\mu) = f'(f(q_\mu))f'(q_\mu) = f'(q_\mu)f'(\tilde{q}_\mu) = (f^2)'(\tilde{q}_\mu)$$

y como  $f'_\mu(x) = \mu(1 - 2x)$ , sustituyendo con  $x = q_\mu$  y  $x = \tilde{q}_\mu$ , se llega a que

$$(f^2)'(q_\mu) = -\mu^2 + 2\mu + 4$$

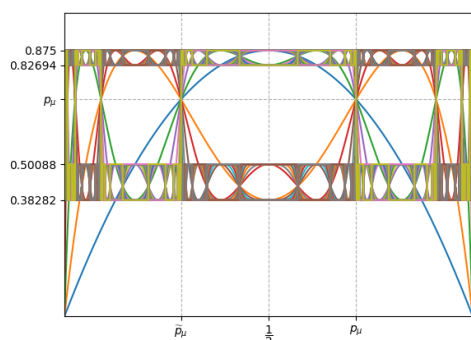
de lo que podemos deducir que  $|(f^2)'(q_\mu)| < 1$  si  $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ , con lo cual en estos casos, el sistema dinámico tiene un punto periódico de periodo 2 que es atractivo y se puede comprobar que la órbita de cualquier punto que no sean los puntos fijos y los eventualmente periódicos convergen a la órbita de este punto.

Cuando  $\mu$  pasa por el valor  $1 + \sqrt{6}$ , los puntos periódicos de periodo 2 que ya existían antes se convierten en repulsivos y se duplican para dar una órbita periódica de periodo 4, que será atractiva hasta aproximadamente 3.55, que se puede determinar de manera similar al caso de los de periodo 2, solo que con cálculos más complejos. Podemos representarlo para el caso  $\mu = 3,5$ .

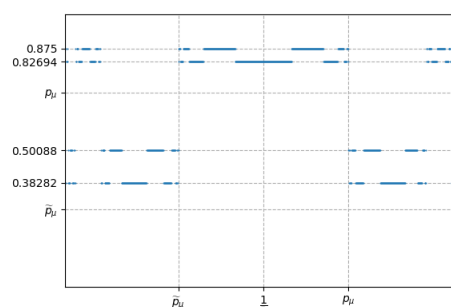
Al pasar el valor  $\mu = 3,55$  ocurre algo similar a lo anterior, los puntos de periodo 4 se convierten en repulsivos, y se bifurcan para dar lugar a una órbita atractiva de periodo 8. Este proceso se repite a medida que avanzamos hacia  $\mu = 4$ , van apareciendo órbitas atractivas de periodos  $2^4, 2^5, 2^6, \dots$ , mientras se van convirtiendo en repulsivas las órbitas que le preceden. Este proceso diverge hacia infinito antes que  $\mu$  llegue al valor 4, apareciendo casos extraños. Para  $\mu = 4$  se obtiene el siguiente resultado tras 300 iteraciones.

Para visualizar esta transición del orden al caos es de gran utilidad el diagrama de Feigenbaum [2]. En este diagrama se representan, las órbitas periódicas atractivas de toda una familia de sistemas dinámicos. La figura 2.12 representa el diagrama correspondiente a la familia de la curva logística. El diagrama nos

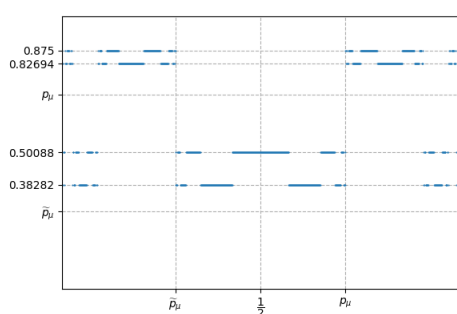
## 2.2. Parábola logística de May



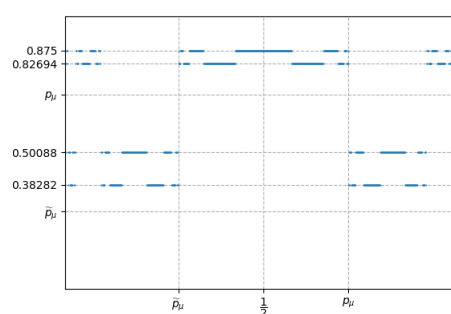
(a) Evolución de las iteraciones



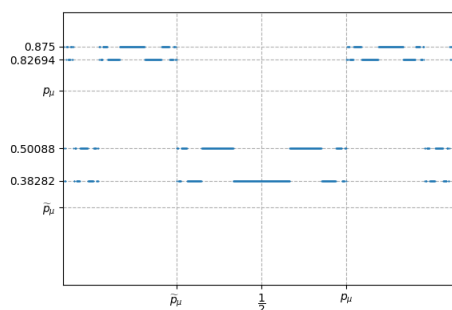
(b) Iteración  $f^{4k}$



(c) Iteración  $f^{4k+1}$



(d) Iteración  $f^{4k+2}$



(e) Iteración  $f^{4k+3}$

Figura 2.10:  $\mu = 3,5$

permite visualizar el fenómeno de duplicación de periodo que comentamos anteriormente y cómo diverge hacia infinito antes de llegar a  $\mu = 4$ . Si ampliamos la figura 2.12 para visualizar el diagrama para  $1 \leq \mu \leq 4$ , se obtiene un diagrama semejante al anterior, donde se aprecia como se repite la estructura de doble ramificación, como se observa en la imagen 2.13.

Para la construcción del diagrama se toma un punto aleatorio  $x_0 \in X$ , y para los distintos valores del parámetro  $\mu$  se representan los puntos  $(\mu, x_k)$  para todos los  $k$  entre dos valores  $n$  y  $m$ , que corresponden a puntos suficiente avanzados de la órbita del punto  $x_0$ .

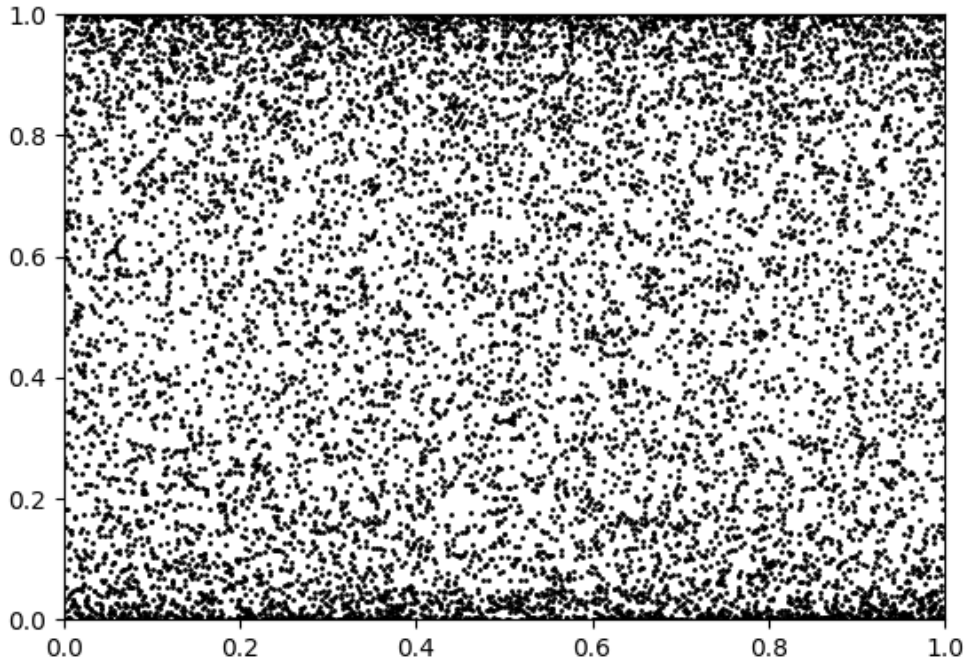


Figura 2.11:  $\mu = 4$

Como se ve en el diagrama, y como se mencionó, el fenómeno de duplicación comienza en  $\mu = 3$  y diverge a infinito antes de llegar a  $\mu = 4$ . Vamos a llamar  $\mu_\infty$  al valor de  $\mu$  que separa la zona donde ocurre este fenómeno de duplicación de la zona donde aparece el caos y podríamos dividir el diagrama en dos partes, la zona de  $[0, \mu_\infty)$  y la zona  $(\mu_\infty, 4]$ . (figura 2.14, 2.15). De la misma manera llamamos  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , a los valores de  $\mu$  donde ocurre las sucesivas duplicaciones.

De la sección 2.2.3, sabemos que  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1 + \sqrt{6}$  y podríamos calcular  $\mu_3$  resolviendo la ecuación  $f_\mu^4(x) = x$ ,  $\mu_4$  resolviendo  $f_\mu^8(x) = x$  y así sucesivamente. Obtener estos valores no es sencillo y se pueden obtener por métodos de aproximación, para a partir de ellos calcular:

$$d_k = \mu_{k+1} - \mu_k \quad \text{y} \quad \delta_k = \frac{d_k}{d_{k+1}} \quad k \geq 1$$

Feigenbaum observó que los valores  $\delta_k$  están cada vez más cerca y obtuvo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 4,6692016091029 \dots$$

que se conoce como la **constante de Feigenbaum**

Se puede decir que la sucesión  $\{d_k\}$  es aproximadamente geométrica de razón  $1/\delta$ , ya que

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{1}{\delta_k} \approx \frac{1}{\delta}$$

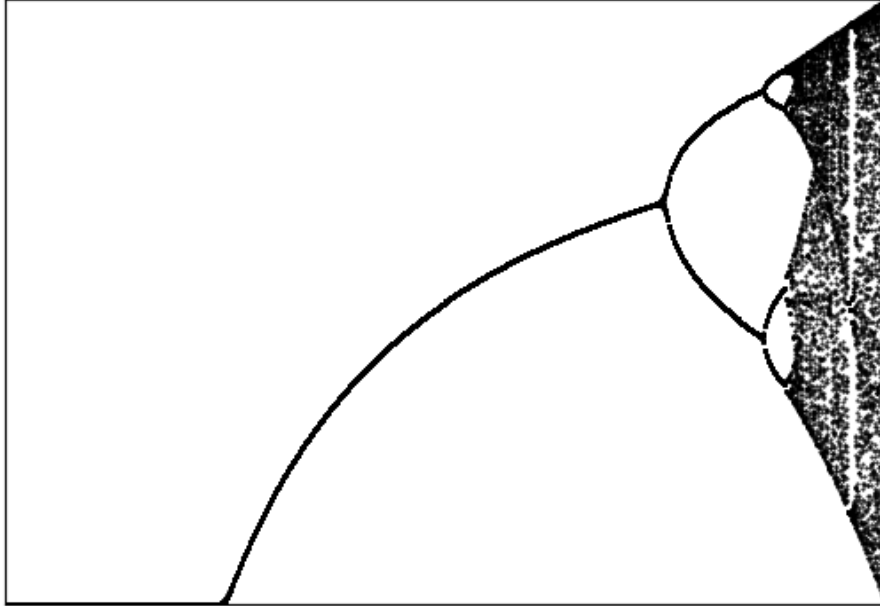


Figura 2.12: Diagrama de Feigenbaum  $x_{n+1} = \mu x(1 - x)$

y si admitimos que la sucesión es geométrica podemos determinar  $\mu_\infty$

$$\begin{aligned}
 \mu_\infty &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \mu_1 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots \\
 &= \mu_1 + d_1 + d_1 \delta^{-1} + d_2 \delta^{-2} + \dots \\
 &= \mu_1 + d_1 (1 + \delta^{-1} + \delta^{-2} + \dots) \\
 &= \mu_1 + d_1 \frac{1}{1 - \delta^{-1}} \approx 3,57199221 \dots
 \end{aligned}$$

Este punto es conocido como el **punto de Feigenbaum**, quien lo determinó de manera más precisa.

$$\mu_\infty = 3,5699456 \dots$$

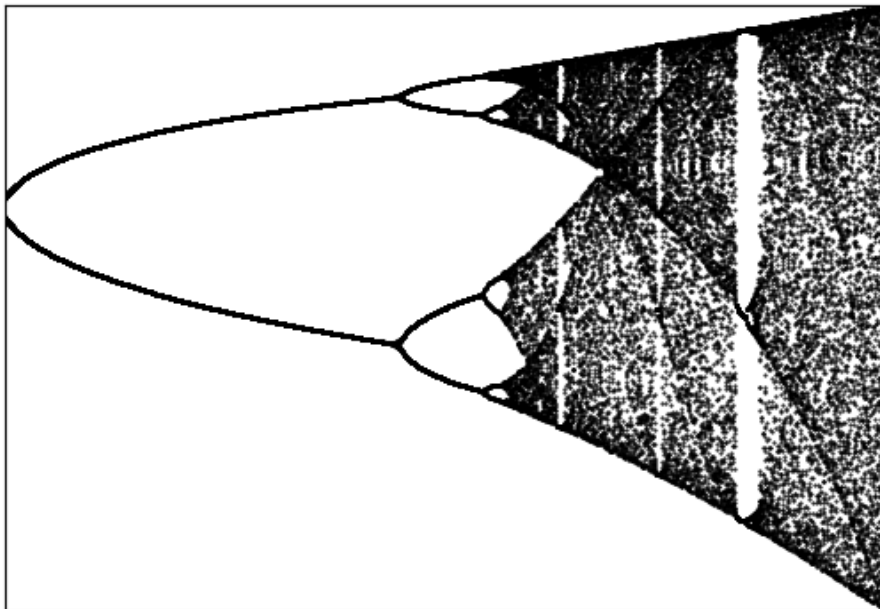


Figura 2.13: Diagrama de Feigenbaum  $3 \leq \mu \leq 4$

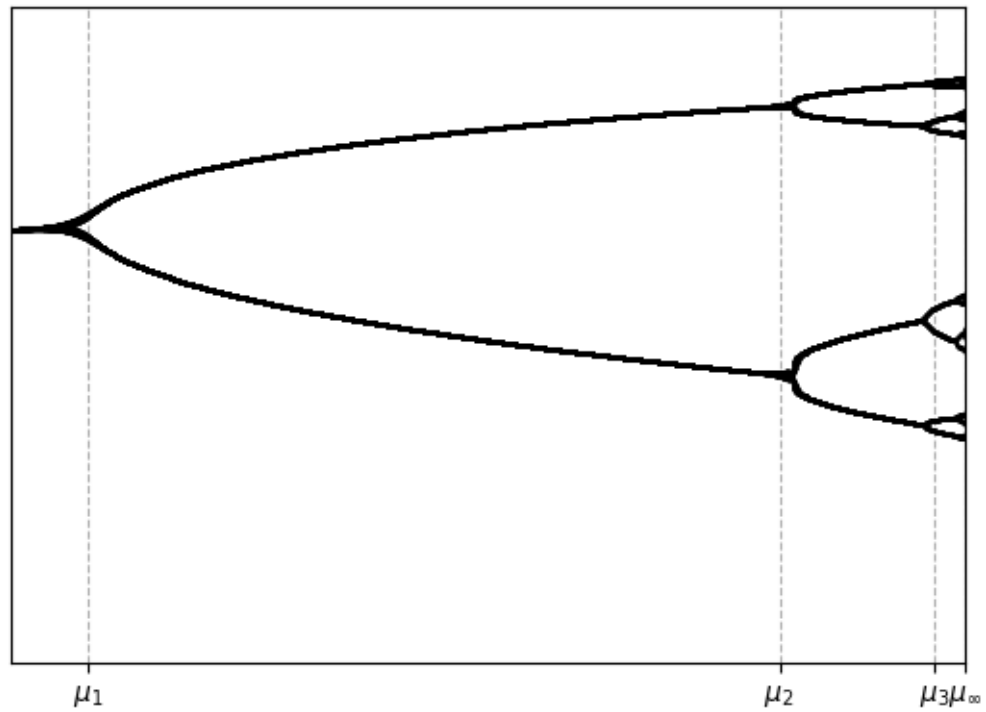


Figura 2.14: Zona de duplicación

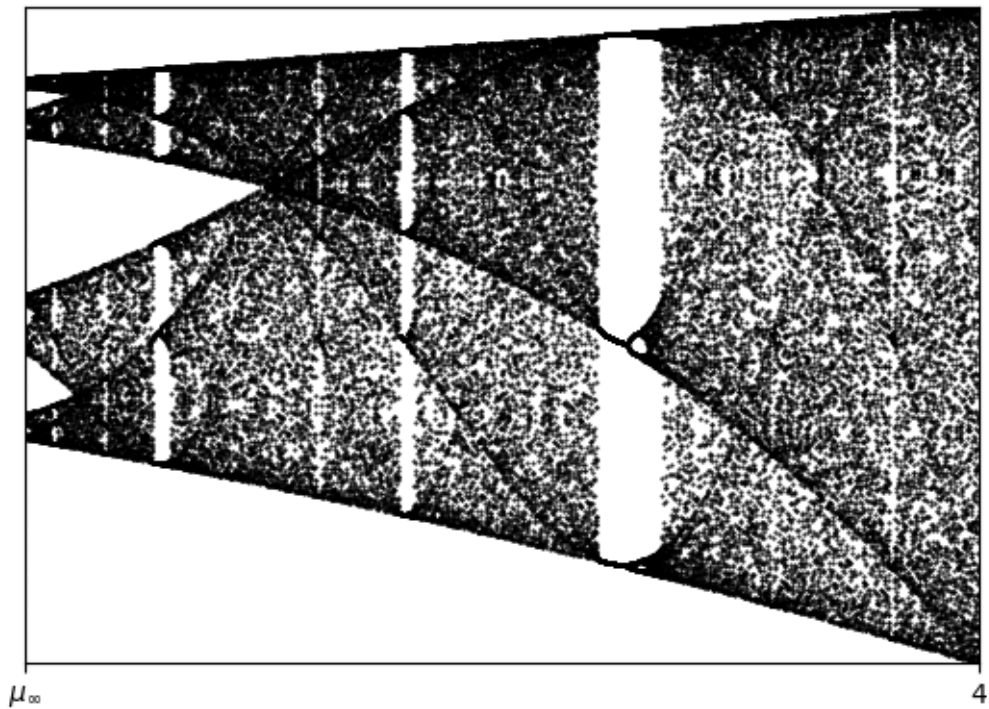


Figura 2.15: Zona de caos

## 2.3. Definición de caos de Davaney

En nuestro estudio de sistemas dinámicos, hemos explorado inicialmente la familia de la parábola logística propuesta por Robert May, que ofrece una ventana a la complejidad emergente de sistemas aparentemente tan simples. Comprender esta familia de sistemas dinámicos es crucial, ya que nos brinda una perspectiva única, pasando de sistemas determinísticos a sistemas en los que es difícil entender el comportamiento de todas las órbitas. Este estudio nos permite revelar los mecanismos subyacentes detrás de la aleatoriedad y complejidad de muchos sistemas dinámicos y así poder comprender la definición que dio en 1989 Robert Luke Devaney, en su libro *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* [3] de caos. Devaney definió un sistema como caótico si verifica tres propiedades.

Un **sistema dinámico**  $(X, f)$ ,  $f : X \rightarrow X$ , se dice **caótico** en  $X$  si verifica las siguientes tres propiedades:

1.  $f$  es topológicamente transitiva
2.  $f$  es sensible a las condiciones iniciales
3. Los puntos periódicos de  $f$  son densos en  $X$

**Definición 2.3.1.**  $f : X \rightarrow X$  se dice que es **topológicamente transitivo** si para cualquier par de conjuntos abiertos  $U, V \subset X$  existe un  $k > 0$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

De manera intuitiva, una función es topológicamente transitiva si tiene puntos que eventualmente se mueven bajo iteración desde un entorno arbitrariamente pequeño a cualquier otro. En consecuencia, el sistema dinámico no puede descomponerse en dos conjuntos abiertos disjuntos que sean invariantes bajo la función. A esta propiedad también se le conoce como la propiedad de mezcla, ya que nos dice que  $f$  va a mezclar todo los puntos, como se puede apreciar en la figura 2.11.

**Definición 2.3.2.**  $f : X \rightarrow X$  es **sensible a las condiciones iniciales** si existe  $\delta > 0$  tal que, para cualquier  $x \in X$  y cualquier entorno  $I$  de  $x$ , existe  $y \in I$  y  $n \geq 0$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

Es decir, una función es sensible de las condiciones iniciales si existen puntos cercanos a  $x$  que eventualmente se separan de  $x$  por al menos  $\delta$  bajo la iteración de  $f$ . Hay que destacar que no todos los puntos cercanos a  $x$  necesitan separarse eventualmente de  $x$  bajo la iteración, pero debe haber al menos uno de esos puntos en cada entorno de  $x$ . Si una función es sensible de las condiciones iniciales, entonces, para todos los propósitos prácticos, la dinámica de la función desafía la computación numérica. Pequeños errores en la computación que se introducen por redondeo pueden magnificarse con la iteración, y es esta la idea intuitiva de caos.

Esta propiedad explica el incidente que le ocurrió al meteorólogo Edward Lorenz cuando intentaba predecir el tiempo, iterando un complejo sistema dinámico en el ordenado, y es que en lugar de iterar durante varias horas, detuvo el proceso

## Capítulo 2. Definición de caos

---

para retomarlo cuando fuera a tomar una taza de té y anotó los valores de la órbita en un instante intermedio de lo que ya había realizado. Se suponía que al poner a funcionar nuevamente el sistema con los valores que había anotado, se repetiría la segunda mitad que ya había iterado, pero que le serviría de comprobación y luego seguiría por donde lo detuve, pero resultó que la nueva ejecución no repitió la segunda mitad del anterior, comenzaba de la misma manera pero lentamente divergía de los resultados anteriores.

**Definición 2.3.3.** Un subconjunto  $U$  de  $X$  es **denso** en  $X$  si  $\bar{U} = X$ .

Este significa que en medio de este comportamiento aleatorio, sin embargo, hay un elemento de regularidad, los puntos periódicos que son densos.

En la próxima sección veremos como se ponen de manifiesto estas propiedades en algunos sistemas dinámicos caóticos.

### 2.4. Códificación binaria

En esta sección definiremos un espacio que nos ayudará a ejemplificar la definición de Devaney de caos y a su vez nos ayudará a entender el comportamiento de los sistemas dinámicos asociados a la curva logística de May cuando  $\mu > 4$ .

**Definición 2.4.1.**  $\Sigma_2 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j = 0 \text{ o } 1\}$ .

Necesitamos definir en  $\Sigma_2$  un espacio métrico. Sean dos secuencias  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  y  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ , definimos la distancia entre ellos como:

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

y la serie anterior converge ya que como  $|s_i - t_i| \in \{0, 1\}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

Además  $d(s, t)$  es una métrica en  $\Sigma_2$ , pues  $d(s, t) \geq 0$  para todo  $s, t \in \Sigma_2$  y  $d(s, t) = 0$  si y solo si  $s_i = t_i$  para todo  $i$ , es decir,  $s = t$ .

Como  $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ ,  $d(s, t) = d(t, s)$  y si  $r, s, t \in \Sigma_2$ , entonces,

$$|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$$

por lo que  $d(r, s) + d(s, t) \geq d(r, t)$ .

La siguiente proposición nos va a ayudar a distinguir cuando dos secuencias están juntas o no.

**Proposición 2.4.1.** Sean  $s, t \in \Sigma_2$ , si  $s_i = t_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , entonces

$$d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$$

Si  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ , entonces  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$

*Demostración.* Si  $s_i = t_i$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Ahora supongamos que  $s_j \neq t_j$  para algún  $j \leq n$  entonces se tendría

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

por tanto si  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ ,  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$ . ■

Ahora vamos a definir una función de  $\Sigma_2$  a  $\Sigma_2$  que nos va a ser de gran utilidad para el estudio posterior de la curva logística en el caso  $\mu > 4$ , la vamos a llamar la función **desplazamiento**.

**Definición 2.4.2.**

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma_2 &\rightarrow \Sigma_2 \\ (s_0 s_1 s_2 \dots) &\rightarrow (s_1 s_2 s_3 \dots) \end{aligned}$$

**Proposición 2.4.2.**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  es una función continua.

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$  y sea  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ , tomamos  $n$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ , sea  $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ ,  $t = (t_0 t_1 \dots)$  tal que la distancia  $d(s, t) < \delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ , entonces por la proposición 2.4.1,  $s_i = t_i$  para todo  $i \leq n + 1$  y por consiguiente las primeras  $n$  entradas de  $\sigma(s)$  y  $\sigma(t)$  son iguales y  $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$ . ■

Analícemos el sistema dinámico representado por la función  $\sigma$  definida en 2.4.2. Este sistema puede ser entendido en su totalidad, se puede ver fácilmente que los puntos periódicos de periodo  $n$  corresponden a secuencias de la forma  $(s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots)$ , por lo que hay  $2^n$  secuencias de periodo  $n$ . Por otro lado los puntos eventualmente periódicos son los puntos con una secuencia eventualmente periódica, es decir,  $(s_0 s_1 \dots s_j s_{j+1} s_{j+2} \dots s_{j+n} s_{j+1} s_{j+2} \dots s_{j+n} \dots)$ . Es importante destacar que los puntos periódicos son un conjunto denso en  $\Sigma_2$ , recordando la definición 2.3.3, los puntos periódicos son un conjunto denso en  $\Sigma_2$  si el cierre del conjunto es  $\Sigma_2$ , para demostrarlo tenemos que encontrar una secuencia de puntos periódicos que converge a  $s \in \Sigma_2$ .

Sea  $\tau_n = (s_0 s_1 \dots s_n s_0 s_1 \dots s_n \dots)$  de modo que las  $n$  primeras entradas de  $\tau_n$  coinciden con las  $n$  primeras entradas de  $s$ , sabemos por la proposición 2.4.1 que  $d(\tau_n, s) \leq \frac{1}{2^n}$ , por lo que  $\tau_n \rightarrow s$ . El hecho de que los puntos periódicos sean densos en  $\Sigma_2$  no significa que todos los puntos sean periódicos o eventualmente

## Capítulo 2. Definición de caos

periódicos, de hecho el número de secuencias no repetitivas excede con diferencia a estas, incluso hay órbitas no periódicas que son densa en  $\Sigma_2$ , por ejemplo,

$$s^* = ( \underbrace{01}_{\text{bloque 1}} \mid \underbrace{00011011}_{\text{bloque 2}} \mid \underbrace{000001010}_{\text{bloque 3}} \dots \mid \underbrace{\dots}_{\text{bloque 4}} )$$

$s^*$  se construye listando sucesivamente todos los bloques de 0's y 1's de longitud  $n, n+1$  etc. Claramente, alguna iteración de  $\sigma$  aplicada a  $s^*$  produce una secuencia que concuerda con cualquier secuencia dada en un número arbitrariamente grande de lugares.

Resumiendo lo anterior, tenemos que  $\sigma$  cumple las siguientes propiedades:

1. El cardinal del conjunto formado por los puntos periódicos de periodo  $n$  es  $2^n$ .
2. Los puntos periódicos son densos en  $\Sigma_2$ .
3. Existe una órbita densa de  $\sigma$  en  $\Sigma_2$ .

### 2.5. Caso $\mu > 4$

Note que cuando  $\mu > 4$ , el máximo valor de  $f_\mu, \frac{\mu}{4}$ , es mayor que 1 y por tanto se sale del intervalo unidad. Así que definiremos el sistema dinámico

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \mu x(1-x)$ .

Denotemos por  $A_0$  el conjunto de puntos que se van de  $I$  después de una iteración de  $f_\mu$ . Si  $x \in A_0$  entonces  $f_\mu(x) > 1, f_\mu^2(x) < 0$  y  $f_\mu^n u(x) \rightarrow -\infty$ . De la misma forma  $A_1$  representa los puntos que salen de  $I$  en la segunda iteración de  $f_\mu$ . Consecuentemente definimos

$$A_n = \{x \in I \mid f_\mu^i(x) \in I \ \forall i \leq n \text{ y } f_\mu^{n+1}(x) \notin I\}$$

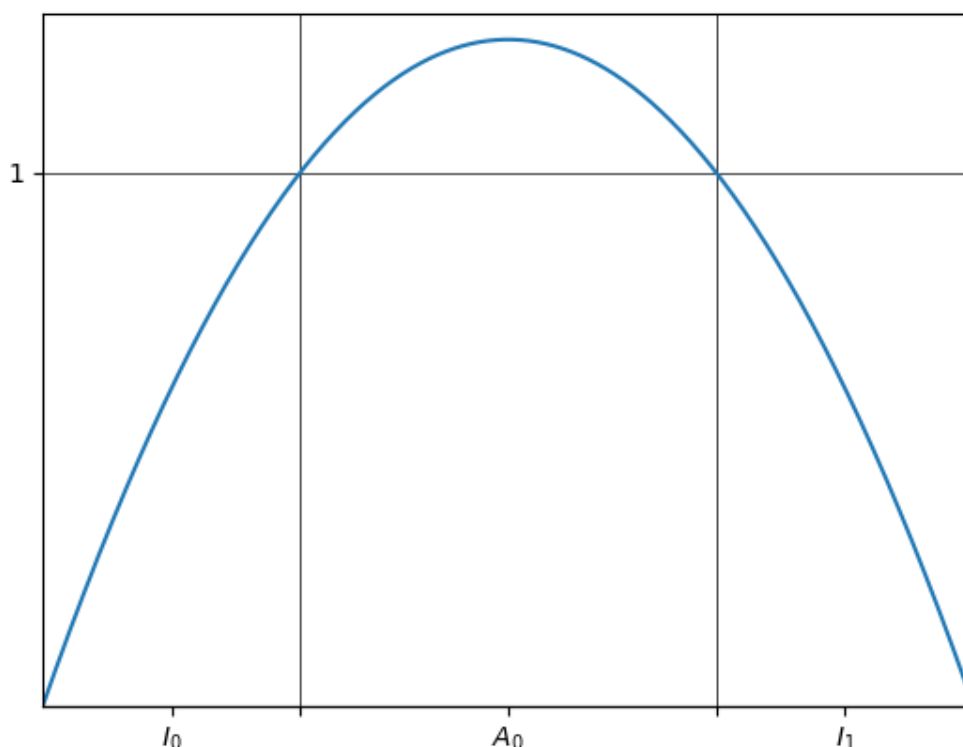
es decir,  $A_n$  representa todos los puntos que salen de  $I$  en la  $n+1$  iteración. Como anteriormente, si  $x$  pertenece a  $A_n$ , la órbita de  $x$  tiende a  $-\infty$ , y como sabemos lo que le ocurre a dichos puntos, solo nos concierne analizar el comportamiento de los puntos que nunca escapan de  $I$ , es decir, los puntos que pertenecen a

$$\Lambda = I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Podemos entender mejor  $\Lambda$  si describimos su construcción recursiva.

$A_0$  es un intervalo abierto centrado en  $\frac{1}{2}$ , por lo tanto  $I - A_0$  consiste en dos intervalos cerrados que denotaremos  $I_0$  y  $I_1$  como se observa en la figura 2.16.

Como se ve,  $f_\mu$  lleva tanto a  $I_0$  como a  $I_1$  a  $I$  y es creciente en  $I_0$  y decreciente en  $I_1$ , es decir,  $f_\mu(I_0) = f_\mu(I_1) = I$ , esto implica que hay un intervalo en  $I_0$  y otro en

Figura 2.16:  $I - A_0$ 

$I_1$ , cuyas imágenes están en  $A_0$ . En la figura 2.17 se muestra la gráfica de  $f_\mu^2$  para  $\mu = 4,3$ , en la que se puede ver como las imágenes de todos los puntos de  $A_0$  es menor que 1 y que en los intervalos  $I_0$  e  $I_1$  los puntos cuyas imágenes pertenecían a  $A_0$  se escapan del intervalo unidad, es decir, estos puntos pertenecen a  $A_1$  y entonces  $I - (A_0 \cup A_1)$  consiste en 4 intervalos cerrados.

Cada uno de estos 4 intervalos, es transformado por  $f_\mu$  en el intervalo  $I$ , y por tanto se vuelve a repetir el proceso anterior en cada uno de estos intervalos. Si seguimos con este proceso, podemos percatarnos que  $A^n$  consiste en  $2^n$  intervalos abiertos disjuntos, y por lo tanto  $I - (A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n)$  consiste en  $2^{n+1}$  intervalos cerrados ya que

$$|(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n)| = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

La construcción de  $\Lambda$  recuerda la construcción del conjunto de Cantor, pues consiste en ir quitando sucesivamente intervalos abiertos de el medio de cada uno de los intervalos de un conjunto de intervalos cerrados. De hecho  $\Lambda$  es un conjunto de Cantor por lo que es cerrado, totalmente desconexo y un conjunto perfecto de  $I$ . Que  $\Lambda$  sea desconexo significa que no contiene intervalos, y que sea un conjunto perfecto significa que cada punto en  $\Lambda$  es un punto de acumulación de otros puntos en el conjunto.

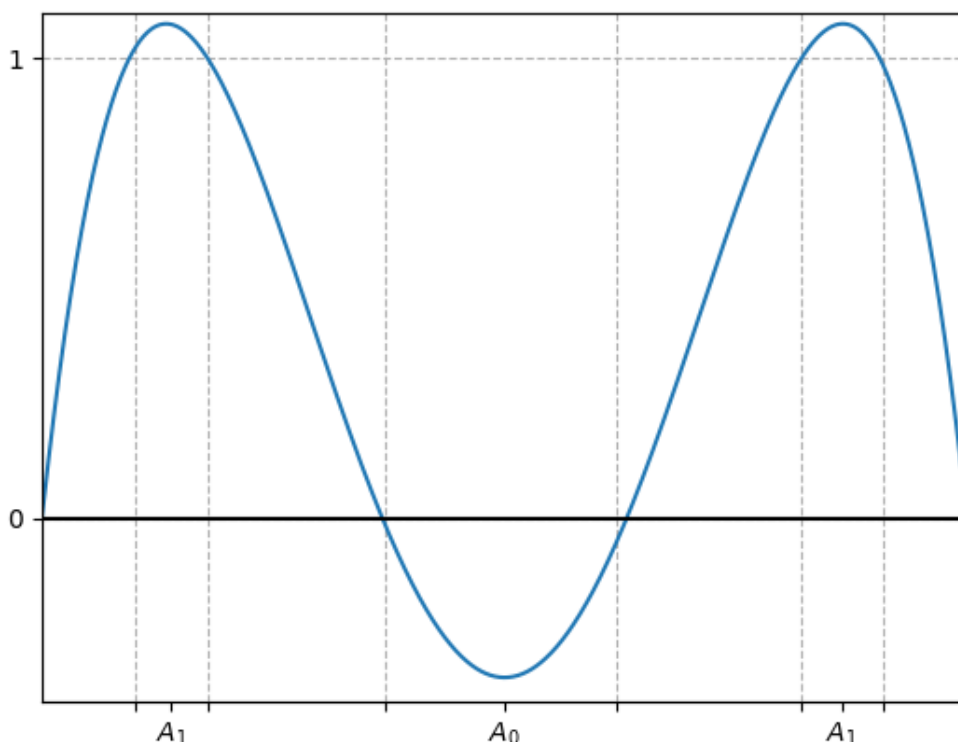


Figura 2.17:  $f_\mu^2$

Hasta este punto, hemos sido capaces de entender de manera muy general el comportamiento de las órbitas de  $f_\mu$  cuando  $\mu > 4$ , o bien un punto tiende a  $-\infty$  bajo las iteraciones de  $f_\mu$  o su órbita entera pertenece a  $\Lambda$ , por lo que mientras el punto no pertenezca a  $\Lambda$  entendemos perfectamente su órbita. En la siguiente sección analizaremos completamente el comportamiento dinámico de  $f_\mu$  en  $\Lambda$ .

## 2.6. Conjugación topológica

Entender completamente la dinámica de sistemas puede ser un desafío cuando se intenta analizar únicamente el sistema en sí y sus trayectorias. En ocasiones, es beneficioso buscar enfoques alternativos. En este sentido, las conjugaciones topológicas representan una herramienta invaluable. Estas conjugaciones permiten establecer conexiones entre sistemas aparentemente diferentes, revelando similitudes subyacentes que pueden simplificar el análisis y la comprensión de la dinámica global.

**Definición 2.6.1.** Sea  $f : A \rightarrow A$  y  $g : B \rightarrow B$ ,  $f$  y  $g$  son **topológicamente conjugadas** si existe un homeomorfismo  $h : A \rightarrow B$  tal que,  $h \circ f = g \circ h$ . El homeomorfismo  $h$  se llama **conjugación topológica**.

Funciones que son topológicamente conjugadas son completamente equivalen-

## 2.6. Conjugación topológica

tes en relación a su dinámica, por ejemplo si  $p$  es un punto fijo de  $f$ , entonces  $h(p)$  es un punto fijo de  $g$ .

Vamos a utilizar esta propiedad para entender el comportamiento dinámico de la curva logística de May cuando  $\mu > 4$ . Comencemos definiendo el homeomorfismo que utilizaremos como conjugación topológica, como necesitamos conocer el comportamiento en  $\Lambda$ , definiremos una aplicación  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ .

**Definición 2.6.2.** *El itinerario de  $x \in \Lambda$  es una secuencia  $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$  donde  $s_j = 0$  si  $f_\mu^j(x) \in I_0$ ,  $s_j = 1$  si  $f_\mu^j(x) \in I_1$ .*

**Teorema 2.6.1.** *Si  $\mu > 4$ , entonces  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Comencemos demostrando que  $S$  es inyectiva, sean  $x, y \in \Lambda$ . Supongamos que  $S(x) = S(y)$ , esto implica que para todo  $n$ ,  $f_\mu^n(x)$  y  $f_\mu^n(y)$  se encuentran en el mismo lado de  $\frac{1}{2}$  y por tanto  $f_\mu$  es monótona en el intervalo entre  $f_\mu^n(x)$  y  $f_\mu^n(y)$ , lo que implica que todos los puntos de este intervalo permanecen en  $\Lambda$ , lo que contradice que  $\Lambda$  es totalmente desconexa.

Ahora veamos que  $S$  es sobreyectiva. Sea  $J \in I$ , denotamos

$$f_\mu^{-n}(J) = \{x \in I \mid f_\mu^n(x) \in J\}$$

es decir,  $f_\mu^{-n}(J)$  denota la preimagen de  $J$  por  $f_\mu^n$ .

Ahora sea  $s = s_0 s_1 s_2 \dots$ , debemos encontrar  $x \in \Lambda$ , tal que  $S(x) = s$ . Para ello definimos

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} &= \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, f_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, f_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_\mu^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Note que si  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  forma una secuencia no vacía donde cada intervalo esta incluido en el siguiente cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces si  $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ ,  $x \in I_{s_0}$ ,  $f_\mu(x) \in I_{s_1}$  y así sucesivamente. Como consecuencia,  $S(x) = (s_0 s_1 \dots)$ , lo que demostraría que  $S$  es un sobreyección.

Veamos que efectivamente  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  forma una secuencia no vacía donde cada intervalo esta incluido en el siguiente. De la definición de  $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$  se tiene que:

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$$

y por inducción podemos asumir que  $I_{s_1 s_2 \dots s_n}$  es un subintervalo no vacío.

Note que la imagen de un conjunto  $J \subset I$ , son dos intervalos cerrados, uno en  $I_0$  y otro en  $I_1$  (observad figura 2.18), por tanto  $f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$  consiste en dos intervalos cerrados, y por tanto  $I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$  es un único intervalo cerrado en  $I_{s_0}$ . Ahora, estos intervalos están uno dentro del otro porque

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_\mu^{-n}(I_{s_n}) = I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \cap f_\mu^{-n}(I_{s_n})$$

Por lo que podemos concluir que  $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  es no vacía.

## Capítulo 2. Definición de caos

Probemos ahora que  $S$  es una función continua. Elegimos  $x \in \Lambda$  tal que

$$S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$$

Sea  $\epsilon > 0$ , elegimos un  $n$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ . Hay  $2^{n+1}$  intervalos cerrados y disjuntos de la forma  $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$  y  $\Lambda$  está incluida en la unión de estos intervalos, esto garantiza que podamos elegir un  $\delta$  menor que la máxima distancia entre cualquiera dos puntos pertenecientes a distintos intervalos de los anteriores, de tal forma que si  $|x - y| < \delta$  entonces  $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ , con lo que  $S(y)$  y  $S(x)$  coinciden en las primeras  $n + 1$  entradas y aplicando la proposición 2.4.1, se tiene

$$d(S(x), S(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

Solo nos queda por probar que  $S^{-1}$  es también continua. Elegimos  $s \in \Sigma_2$  tal que  $s = s_0 s_1 \dots$  y  $S^{-1}(s) = x$  si  $x \in I_{s_0}, f_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots$ . Sea  $\epsilon > 0$ , tomamos  $n$  tal que  $\frac{1}{2^{n+1}} < \epsilon$ . Tomamos  $\delta < \frac{1}{2^n}$ , tal que si  $d(s, t) < \delta$ , por la proposición 2.4.1,  $s_i = t_i$  para todo  $i \leq n$ . Esto implica que si  $S(s) \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ , entonces  $S(t) \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  y por tanto

$$|S(s) - S(t)| < \frac{1}{2^{n+1}} < \epsilon$$

■

El teorema anterior muestra que los conjuntos  $\Sigma_2$  y  $\Lambda$  son el mismo, pero el siguiente teorema nos da una equivalencia entre la dinámica de  $f_\mu$  en  $\Lambda$  y  $\sigma$  en  $\Sigma_2$ .

**Teorema 2.6.2.**  $S \circ f_\mu = \sigma \circ S$

*Demostración.* Como observamos en la demostración del teorema 2.6.1, un punto  $x$  en  $\Lambda$  está definido unívocamente por

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

También tenemos que

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_\mu^{-n}(I_{s_n})$$

con lo que  $f_\mu(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) = I_{s_0} \cap I_{s_1} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap f_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 \dots s_n}$ .

Entonces

$$\begin{aligned} S(f_\mu(x)) &= S(f_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n})) \\ &= S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n}) \\ &= s_1 s_2 \dots \\ &= \sigma(S(x)) \end{aligned}$$

■

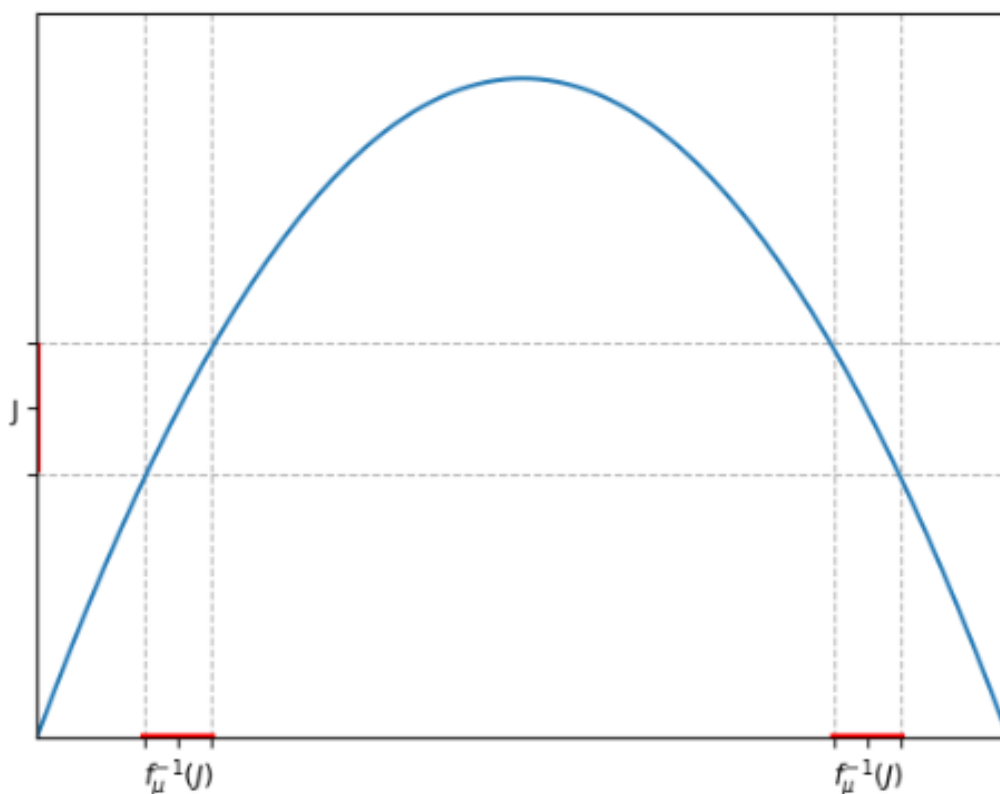


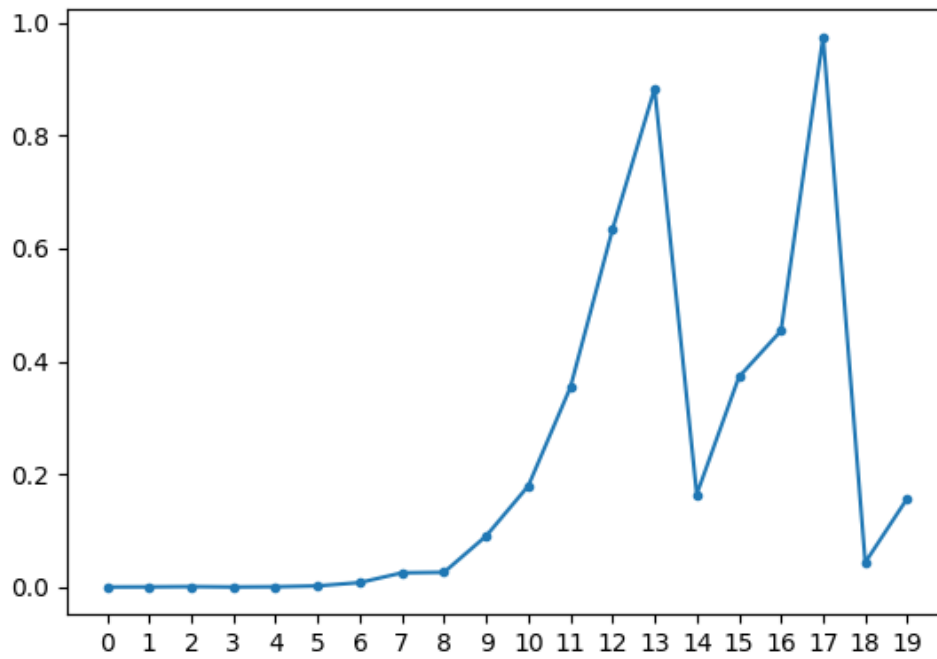
Figura 2.18: La preimagen de  $J$

Por lo tanto podemos concluir que  $f_\mu = \mu x(1 - x)$ , si  $\mu > 4$  cumple:

1. El cardinal del conjunto formado por los puntos periódicos de periodo  $n$  de  $f_\mu$  es  $2^n$ .
2. El conjunto de los puntos periódicos es denso en  $\Lambda$ .
3.  $f_\mu$  tiene una órbita densa en  $\Lambda$ .

Pongamos de manifiesto la naturaleza caótica de dicho sistema. La figura 2.19 muestra como al tomar dos puntos relativamente cercanos e iterar con el sistema  $f_\mu$ , las órbitas de ambos diverge.

Figura 2.19: Sensibilidad a las condiciones iniciales



## Capítulo 3

# Periodo tres implica caos

### 3.1. El teorema principal

Entender los sistemas dinámicos implica entender las situaciones en las cuales las iteraciones de un punto son muy irregulares. En 1975 Li-York publicaron un artículo titulado “Period three implies chaos”, en el que analizaron el caso en el que si existe un punto periódico de periodo 3, entonces para cada entero  $n = 1, 2, 3, \dots$ , existe un punto periódico con periodo  $n$  y además existe un conjunto no numerable de puntos  $x$  en  $X$ , que no son ni siquiera “asintóticamente estable”.

$x \in X$  es **asintóticamente estable** si existe un punto periódico  $p$  para el cual  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(p)| = 0$ . Es decir un punto es asintóticamente estable si su órbita converge a la órbita de un punto periódico.

El siguiente resultado fue publicado por Li y York en 1975 [1].

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $X$  un intervalo y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Asumimos que hay un punto  $a \in X$  para el cual los puntos  $b = f(a)$ ,  $c = f^2(a)$ ,  $d = f^3(a)$ ,*

$$d \leq a < b < c \quad (\text{o } d \geq a > b > c)$$

Entonces

- (a) Para cada  $k = 1, 2, \dots$ , hay un punto periódico en  $X$  de periodo  $k$ .
- (b) Existe un conjunto no numerable  $S \in X$  (conteniendo puntos no periódicos) que satisface

$$i) \quad \forall p, q \in S, p \neq q \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(p) - f^n(q)| > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f^n(p) - f^n(q)| = 0 \end{cases}$$

ii)  $\forall p \in S$ , y  $\forall q \in X$  punto periódico

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

Es imprescindible destacar que si  $f$  tiene un punto periódico de periodo 3, se satisface la hipótesis del teorema.

### Capítulo 3. Periodo tres implica caos

Las funciones que cumplen las propiedades del teorema anterior se denominan caóticas en el sentido de Li y York. Esta definición tiene la ventaja de que puede ser fácilmente comprobada con métodos gráficos, comprobando si la función tiene una órbita de periodo 3, pero solo puede ser utilizada en  $\mathbb{R}$ .

Para poder demostrar el anterior teorema nos vamos a apoyar en algunos lemas que iremos enunciando y demostrando a lo largo de esta sección.

**Lema 3.1.1.** Sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $I$  es un intervalo. Para cualquier intervalo compacto  $I_1 \subset g(I)$ , hay un intervalo compacto  $Q \subset I$  tal que  $g(Q) = I_1$ .

*Demostración.* Sea  $I_1 = [g(p), g(q)]$ , donde  $p, q \in I$ . Si  $p < q$ , tomamos  $r$  el último punto de  $[p, q]$  donde  $g(r) = g(p)$  y  $s$  el primer punto de  $[p, q]$  mayor que  $r$  donde  $g(s) = g(q)$ . Entonces  $g([r, s]) = I_1$ . (si  $q < p$  se razona de manera similar). ■

Para entender mejor la demostración anterior hay que tener en cuenta que al tomar  $s$  como el menor punto después de  $r$  tal que  $g(s) = g(q)$ , si existiese un  $x \in [r, s]$  tal que  $g(x) > g(s)$ , existiría un  $s_1 \in [r, x]$ , tal que  $g(s_1) = g(q)$ , lo que es imposible, igualmente si existiese un  $x$  tal que  $g(x) < g(r)$ , entonces existiría  $r_1 \in [r, s]$  tal que  $g(r_1) = g(p)$  que también es imposible.

La figura 3.1, ilustra el lema anterior.

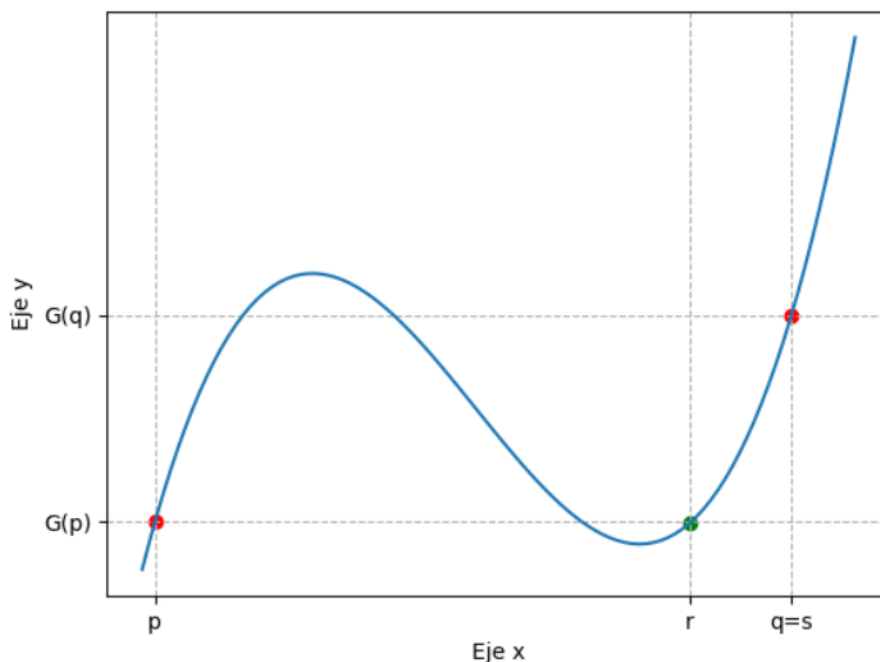


Figura 3.1: Ilustración del lema 3.1.1

### 3.1. El teorema principal

**Lema 3.1.2.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una función continua y sea  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$  una secuencia de intervalos compactos con  $I_n \in X$  y  $I_{n+1} \subset f(I_n)$  para todo  $n$ . Entonces hay una secuencia de intervalos compactos  $Q_n$  tal que  $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$  y  $f^n(Q_n) = I_n$  para todo  $n$ .

*Demostración.* Definimos  $Q_0 = I_0$ . Entonces  $f^0(Q_0) = I_0$ . Si  $Q_{n-1}$  ha sido definido tal que  $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$ , entonces  $I_n \subset f(I_{n-1}) = f^n(Q_{n-1})$ . Si aplicamos el lema 3.1.1 para  $g = f^n$  en  $Q_{n-1}$ , hay un  $Q_n$  intervalo compacto  $Q_n \subset Q_{n-1}$  tal que  $f^n(Q_n) = I_n$ , con lo que se cumple la inducción. ■

La idea de este lema es que podemos transformar una secuencia de intervalos en una secuencia de intervalos uno dentro de otro y más aún que cumplen que  $f^n(Q_n) = I_n$ .

**Lema 3.1.3.** Sea  $g : X \rightarrow R$  una función continua. Sea  $I \subset X$  un intervalo compacto. Asumimos  $I \subset g(I)$ . Entonces hay un punto  $p \in I$  tal que  $g(p) = p$ .

*Demostración.* Sea  $I = [\beta_0, \beta_1]$ . Elegimos  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1$ ) en  $I$  tal que  $g(\alpha_i) = \beta_i$ .

$$\begin{cases} \alpha_0 - g(\alpha_0) \geq 0 \longrightarrow \alpha_0 - \beta_0 \geq 0 \\ \alpha_1 - g(\alpha_1) \leq 0 \longrightarrow \alpha_1 - \beta_1 \leq 0 \end{cases}$$

Puesto que la función

$$\begin{aligned} h : [\alpha_0, \alpha_1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow h(x) = x - g(x) \end{aligned}$$

es una función continua.

$$\left. \begin{array}{l} h(\alpha_0) \geq 0 \\ h(\alpha_1) \leq 0 \end{array} \right\} \implies \exists p \in [\alpha_0, \alpha_1] \subset I \text{ tal que } h(p) = 0 \longrightarrow p - g(p) = 0, g(p) = p \quad \blacksquare$$

Ya tenemos las herramientas necesarias para poder demostrar el teorema 3.1.1.

*Demostración.* Comenzamos por el apartado (a) Definimos  $K = [a, b]$ ,  $L = [b, c]$

Sea  $k \in \mathbb{N}^+$ , si  $k > 1$ , definimos

$$\{I\} = \begin{cases} L & n = 0, \dots, k-2 \\ K & n = k-1 \\ I_{n-k} & n = k, \dots \end{cases}$$

Si  $k = 1$  hacemos  $I_n = L$  para todo  $n$ .

Veamos que  $\{I_n\}$  cumple las condiciones del 3.1.2, es decir,  $I_{n+1} \subset f(I_n)$

- $L \subset f(K) \longrightarrow f(K) = f([a, b]) \supset [f(a), f(b)] = [b, c] = L$
- $K \subset f(L) \longrightarrow f(L) = f([b, c]) \supset [f(c), f(b)] = [d, c] \supset [a, b]$
- $L \subset f(L) \longrightarrow [b, c] \subset [d, c]$

### Capítulo 3. Periodo tres implica caos

Por lo que podemos aplicar el lema 3.1.2 para obtener una sucesión  $\{Q_n\}$  de intervalos compactos tal que

$$\begin{cases} f^n(Q_n) = I_n \\ Q_{n+1} \subset Q_n \end{cases} \quad \forall n$$

Puesto que  $Q_k \subset Q_{k-1} \subset \dots$ , entonces  $Q_k \supset Q_0 = I_0 = L$  y  $f^k(Q_k) = I_k = I_0$  y por el lema 3.1.3 aplicado a  $g = f^k$ ,  $f^k$  tiene un punto fijo  $p_k$  en  $Q_k$  ( $p_k \in Q_k$ ),  $f^k(p_k) = p_k$ . El periodo de  $p_k$  no puede ser menos de  $k$  para  $f$  ya que

$$f^n(Q_n) = \begin{cases} L & \text{si } n \leq k-2 \\ K & \text{si } n = k-1 \\ I_n & \text{si } n > k \end{cases}$$

y se tendría que cumplir  $f^{k-1}(p_k) = b$  ya que  $L \cap K = b$  y si fuera periodo  $k^* < k$ , entonces  $f^{k-1}(p_k) = f^{k-1-k^*}(p_k)$  y entonces  $f^{k+1}(p_k) = f^2(f^{k-1}(p_k)) = f^2(b) = d$  pero  $f^{k+1}(p_k) = f(p_k) \in f(Q_0) = I_0 = L$  y  $d \notin L$

Por tanto  $p_k$  es un punto periódico de periodo  $k$ .

Ya hemos demostrado la primera parte del teorema, veamos ahora el apartado (b).

Sea  $\mathcal{M}$  el conjunto de secuencias  $M = \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  de intervalos con

$$M_n = K \quad \text{o} \quad M_n \subset L, \text{ y } f(M_n) \supset M_{n+1}$$

si  $M_n = K$  entonces

$n$  es el cuadrado de un entero.

donde  $K = [a, b]$  y  $L = [b, c]$ . Para  $M \in \mathcal{M}$ , denotamos por  $P(M, n)$  el número de  $i$ 's en  $\{1, \dots, n\}$  para los cuales  $M_i = K$ . Para cada  $r \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ , elegimos

$$M^r = \{M_n^r\}_{n=1}^{\infty}$$

una secuencia en  $\mathcal{M}$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M^r, n^2)/n = r$$

Sea  $\mathcal{M}_0 = \{M^r : r \in (3/4, 1)\} \subset \mathcal{M}$ . Entonces  $\mathcal{M}_0$  es incontable ya que  $M^{r_1} \neq M^{r_2}$  para  $r_1 \neq r_2$ . Para cada  $M^r \in \mathcal{M}_0$ , por el lema 3.1.2, existe un punto  $x_r$ , con  $f^n(x_r) \in M_n^r$  para todo  $n$ . Sea  $S = \{x_r : r \in (3/4, 1)\}$ . Entonces  $S$  es también incontable. Para  $x \in S$ , denote  $P(x, n)$  el número de  $i$ 's en  $1, \dots, n$  para los cuales  $f^i(x) = b$ , porque entonces  $x_r$  tendría eventualmente periodo 3. ■

### 3.2. Comportamiento cerca de un punto periódico

Como vimos en el capítulo 2 mientras estudiábamos la curva logística de May, para los valores del parámetro  $\mu$  para los cuales cada punto es asintóticamente estable es suficiente con estudiar los puntos periódicos y su estabilidad, por lo que resulta interesante extender las definiciones de puntos periódicos atractivos o repulsivos.

Para cualquier función  $f$ , un punto  $y \in J$  con periodo  $k$ , es **asintóticamente estable** si para algún intervalo  $I = (y - \delta, y + \delta)$  tenemos

$$|f^k(x) - y| < |x - y| \quad \text{para todo } x \in I$$

Si  $f$  es derivable en los puntos  $y, f(y), f(f(y)), \dots, f^{k-1}(y)$ , hay una condición que garantiza la existencia de puntos asintóticamente estables, es decir, si

$$\left| \frac{d}{dx} f^k(y) \right| < 1$$

entonces  $y$  es asintóticamente estable.

Aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^k(y) &= \frac{d}{dx} f(f^{k-1}(y)) \frac{d}{dx} f^{k-1}(y) \\ &= \frac{d}{dx} f(f^{k-1}(y)) \frac{d}{dx} f(f^{k-2}(y)) \dots \frac{d}{dx} f(y) \\ &= \prod_{n=0}^{k-1} \frac{d}{dx} f(f^n(y)) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $y$  es asintóticamente estable si  $\left| \prod_{n=0}^{k-1} \frac{d}{dx} f(y_i) \right| < 1$ , donde  $y_i = f^i(y)$ .

En posteriores secciones será de utilidad el concepto de conjunto límite  $L(x_0)$ , que denota al conjunto de puntos  $y$  que son un puntos límites de  $O^+(x_0)$ , es decir, los puntos  $y$  para los que existe una subsucesión de puntos de  $O^+(x_0)$  que converge a  $y$ . Por ejemplo si  $x$  es un punto asintóticamente periódico, entonces

$$L(x) = \{y, f(y), \dots, f^{k-1}(y)\}$$

para algún punto periódico  $y$  de período  $k$ .

Se tiene además que el conjunto  $L(x)$  es cerrado y acotado, satisfaciendo que  $f(L(x)) = L(x)$ .  $L(x)$  es finito si y solo si la órbita de  $x$  es asintóticamente periódica.

En la figura 2.10 se aprecia como la órbita de cualquier  $x_0 \in (0, 1) \setminus \{1/\mu, 1 - 1/\mu\}$  recorre varios puntos de  $X$  pero converge hacia una órbita de período 4, luego  $L(x_0) = \{0.38282, 0.50088, 0.82694, 0.875\}$ .



## Capítulo 4

# Más definiciones de caos

### 4.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Aunque en 1992 no había una definición matemática de caos aceptada universalmente, las propiedades planteadas por Devaney [1] vistas en el capítulo 2 aislaban las características esenciales de caos.

Vamos a recordar estas tres propiedades:

Un sistema dinámico  $(X, f)$ ,  $f : X \rightarrow X$ , se dice **caótico** en  $X$  si verifica las siguientes tres propiedades:

1.  $f$  es topológicamente transitiva
2.  $f$  es sensible a las condiciones iniciales
3. Los puntos periódicos de  $f$  son densos en  $X$

Si analizamos las anteriores propiedades podemos percatarnos, que tanto la transitividad como la densidad de los puntos periódicos son propiedades topológicas y por consiguiente se conservan por conjugación topológica, pero la sensibilidad a las condiciones iniciales es una propiedad métrica y no tiene por qué conservarse por conjugación topológica, de hecho, como muestra el siguiente ejemplo no siempre se conserva.

Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = 2x$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 1$  y  $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \log_2 x$  se cumple que

$$h(f(x)) = \log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x = g(h(x))$$

Así que  $f$  y  $g$  son topológicamente conjugadas, sin embargo  $f$  es sensible a las condiciones iniciales, ya que dado  $x, y$  y  $\delta > 0$  tales que  $\|x - y\| < \delta$  se tiene que  $\|f^n(x) - f^n(y)\| = \|2^n x - 2^n y\| = 2^n \|x - y\|$ , y podemos tomar  $n$  tal  $2^n \|x - y\| > \epsilon > 0$ , mientras que por otra parte  $g$  no es sensible a las condiciones iniciales porque si suponemos que existe un  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $x, d > 0$  existe  $y$  con  $\|x - y\| < d$  y  $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \epsilon$ , se tendría que  $\|x - y\| > \epsilon$  para todo  $d$ , lo que sería una contradicción.

## Capítulo 4. Más definiciones de caos

---

Este hecho sugiere que en una función donde se cumple la propiedad 1 y 3, la sensibilidad a las condiciones iniciales se va a conservar bajo conjugación topológica, como demostraron J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey [4].

**Teorema 4.1.1.** *Si  $f : X \rightarrow X$  es topológicamente transitiva y tiene puntos periódicos densos, entonces  $f$  es sensible a las condiciones iniciales.*

Antes de comenzar con la demostración, como vamos a estar trabajando con distancia entre puntos y órbitas, necesitamos definir un concepto importante, la distancia de un punto a una órbita.

**Definición 4.1.1.** *Sea  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $f : X \rightarrow X$ , un sistema dinámico,  $x, p \in X$ , se define la distancia de  $p$  a la órbita de  $x$*

$$d(p, O^+(x)) = \inf_{x_i \in O^+(x)} d(p, x_i)$$

donde  $d(p, x_i)$  es la distancia euclidiana.

La siguiente demostración se apoya en la idea de que un sistema transitivamente topológico, puede acceder a regiones ampliamente separadas del espacio de fase a partir de cualquier condición inicial arbitraria, esto establece una forma de conexión entre regiones distantes, y por otra parte, las órbitas periódicas densas permite que podemos encontrar órbitas periódicas arbitrariamente cerca de cualquier punto inicial. Si consideremos dos puntos  $x, y$  arbitrariamente cercanos entre sí, por la densidad de las órbitas periódicas, podemos seleccionar órbitas periódicas cerca de ambos puntos. Comencemos con la demostración del teorema 4.1.1.

*Demostración.* Primeramente destaquemos que existe un  $\delta_0$  tal que para todo  $x \in X$ , hay un punto periódico  $q \in X$ , existe un punto periódico  $q$ , cuya órbita,  $O^+(q)$ , está al menos a distancia  $\delta_0$  de  $x$ .

Sea  $x \in X$  y sea  $N$  un entorno de  $x$ , como  $f$  tiene puntos periódicos densos, existe un punto periódico  $p$  en la intersección  $U = N \cap B_\delta(x)$ , donde  $B_\delta(x)$  es la bola de radio  $\delta$  centrada en  $x$ . Si denotamos  $n$  al período de  $p$  y tomamos otro punto periódico  $q$  cuya órbita diste al menos  $4\delta$  de  $x$ , que sabemos que existe por lo mencionado al comienzo de la demostración, podemos definir:

$$V = \bigcap_{i=1}^n f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$$

$V$  es un conjunto abierto por ser la intersección de conjuntos abiertos (preimágenes de conjuntos abiertos), y es no vacío ya que  $q \in V$ .

Aplicando ahora que  $f$  es topológicamente transitiva, existe  $y \in U$  y  $k$  tal que  $f^k(y) \in V$ .

Definimos  $j$  como la parte entera de  $\frac{k}{n} + 1$ , por lo que  $1 \leq nj - k \leq n$  y por construcción se tiene:

## 4.2. Definición de Wiggins y Definición de Martelli

---

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \stackrel{f^k(y) \in V}{\in} f^{nj-k}(V) \stackrel{V \subseteq f^{-(nj-k)}(B_\delta(f^{nj-k}(q)))}{\subseteq} B_\delta(f^{nj-k}(q))$$

Ahora aplicando la desigualdad triangular siguiente

$$d(x, f^{nj-k}(q)) \leq d(x, p) + d(p, f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q))$$

tenemos

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &= d(p, f^{nj}(y)) \\ &\geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(x, p) - d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) \\ &> 4\delta - \delta - \delta = 2\delta \end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene del hecho de que  $d(O^+(q), x) \leq 4\delta$ ,  $p \in B_\delta(x)$  y  $f^{nj-k}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$ .

Aplicando de nuevo la propiedad de desigualdad triangular

$$2\delta < d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) \leq d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y))$$

Por lo que

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > \delta \quad \text{o} \quad d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > \delta$$

con lo que hemos encontrado, en cualquiera de los dos casos, un punto perteneciente al entorno  $N$ , cuya  $n$ -ésima iteración está a una distancia mayor que  $\delta$  de la  $n$ -ésima iteración de  $x$  y por tanto  $f$  es sensible a las condiciones iniciales. ■

## 4.2. Definición de Wiggins y Definición de Martelli

A lo largo de este trabajo se ha hablado de la definición de Caos propuesta por Devaney y posteriormente en el capítulo 3 se analizó la caracterización brindada por Li-York, así que ahora vamos a comparar otras importantes aportaciones a la definición de caos que fueron analizadas por Mario Martelli, May Dang y Tanya Seph [5].

Como bien vimos en la sección anterior la definición de Devaney es redundante y podemos eliminar la condición de sensibilidad a las condiciones iniciales, pero hay otro hecho interesante, podemos encontrar sistemas que merecen la etiqueta de “caótico” y que no cumplen la condición de puntos periódicos densos.

Veamos el siguiente ejemplo:

Definimos la función  $f : D(0,1) \rightarrow D(0,1)$  en coordenadas polares en donde  $D(0,1)$  es la bola cerrada de centro 0 y radio 1 y  $f(\rho, \theta) = (4\rho(1-\rho), \theta + 1)$ . El origen  $(0,0)$  es el único punto fijo de  $f$ , ahora bien, como  $f$  estira o estrecha la distancia de cualquier punto al centro, a la vez que rota al punto por un ángulo de 1 radian y como  $\frac{1}{\pi}$  es irracional, ningún punto  $x_n \in O^+(x_0)$  puede regresar

## Capítulo 4. Más definiciones de caos

al mismo rayo que contiene a  $x_0$ , por tanto,  $f$  no tiene puntos periódicos de periodo  $n > 1$ , sin embargo tiene órbitas que pasan tan cerca como queramos de cualquier punto de  $D(0, 1)$ .

Si vamos a la definición de caos propuesta por los científicos experimentales, habla principalmente de la dependencia a las condiciones iniciales, ya que es una característica que se puede comprobar numéricamente, pero esta definición tiene algunos problemas ya que incluye a sistemas dinámicos que no son caóticos. Por ejemplo, si consideramos la función  $f : D(0, 2) \rightarrow D(0, 2)$ ,  $f(\rho, \theta) = (\rho, \theta + \rho)$  en coordenadas polares y donde  $D(0, 2)$  representa la bola cerrada de centro 0 y radio 2.

Si tomamos  $C_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \rho\}$  con  $\rho \in (0, 2]$ , estos conjuntos son invariantes por  $f$  ya que  $f$  es una rotación que no afecta la distancia de los puntos al centro de la bola, por lo que no parece apropiado considerar al sistema como “caótico”. Sin embargo, por otro lado el sistema tiene dependencia a las condiciones iniciales en  $C_\rho$ , si tomamos  $x_0 = (\rho_0, \theta_0)$ ,  $d > 0$  y elegimos un  $n$  tal que  $\frac{\pi}{n} < d$  y  $\rho_0 - \frac{2\pi}{n} > 0$ , podemos tomar un  $y_0 = (\rho_0 - \frac{\pi}{n}, \theta)$ , de forma que  $x_0, y_0 \in C_\rho$ , y por la elección de  $n$ ,  $\|x_0 - y_0\| < d$ .

Ahora bien,

$$x_n = (\rho_0, \theta_0 + n\rho_0), \quad y_n = (\rho_0 - \frac{\pi}{n}, \theta_0 + n\rho_0 - \pi)$$

y en consecuencia  $\|x_n - y_n\| = \sqrt{\frac{\pi^2}{n^2} + \pi^2} > \pi > \rho_0$ , por lo que el sistema es caótico en  $C_\rho$ , pero el sistema no es caótico en la bola cerrada.

Si seguimos abordando diferentes definiciones de caos, según Weggings [6]:

**Definición 4.2.1.** Una función  $f$  es caótica en un conjunto invariante  $X$  si

- $f$  es topológicamente transitiva.
- $f$  tiene en  $X$  dependencia a las condiciones iniciales.

La definición de Weggings puede tener problema cuando hablamos de “caos degenerado”, que es caos en un conjunto finito de puntos. Esta definición admite que una función sea caótica en un conjunto formado por un único punto, es decir,  $X = \{x_0\}$ . Para ejemplificarlo, tomemos la función:

$$f(x) = -2|x| + 1$$

$f$  es caótica en  $X = \{1/3\}$ , como se aprecia en la figura 4.1, las órbitas que comienzan cerca de este punto, se alejan del punto de equilibrio.

Martelli [7], por su parte definió caos:

**Definición 4.2.2.** Una función  $f$  es caótica en un conjunto invariante  $X$ , si existe  $x_0 \in X$  tal que:

- $L(x_0) = X$ .

## 4.2. Definición de Wiggins y Definición de Martelli

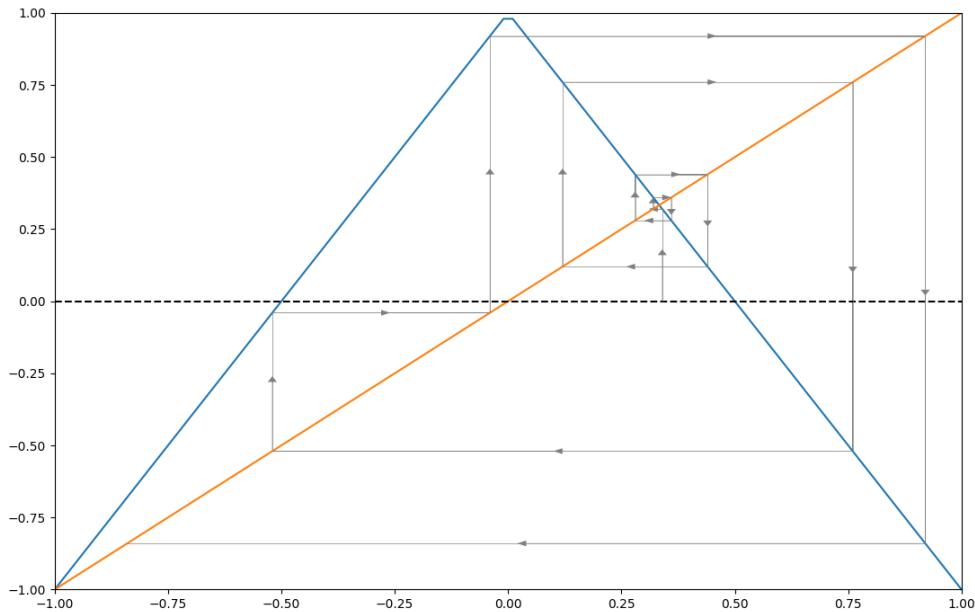


Figura 4.1:  $O^+(0,34)$  se alejan del punto fijo

- $O^+(x_0)$  es inestable con respecto a  $X$ .

Antes de analizar la definición anterior, recordemos del capítulo 3 que  $L(x_0)$  denota al conjunto de puntos límites de  $O^+(x_0)$ , es decir, los puntos  $y$ , tales que una subsucesión de  $O^+(x_0)$  converge a  $y$ .

Por otra parte, definiremos que significa que  $O^+(x_0)$  sea inestable con respecto a  $X$ .

**Definición 4.2.3.** Una órbita  $O^+(x_0)$  se dice que es inestable, si existe  $r(x_0)$  tal que para cualquier  $d > 0$ , podemos encontrar  $y_0 \in \text{Dom}(f)$  y  $n \geq 1$ , que satisface  $\|y_0 - x_0\| \leq d$  y  $\|y_n - x_n\| > r(x_0)$ . Decimos que la órbita es inestable con respecto a  $X$  si  $y_0 \in X$ .

Pero la definición de Wiggins y la de Martelli son equivalentes, ya que como comprobaremos ahora:

- Una función  $f$  es topológicamente transitiva si y solo si existe un  $x_0 \in X$  tal que  $L(x_0) = X$ .
- $f$  tiene en  $X$  sensibilidad a las condiciones iniciales con respecto a  $X$  si y solo si  $O^+(x_0)$  es inestable con respecto a  $X$ .

Hay una importante diferencia entre ambas definiciones, y es que Wiggins no exige sensibilidad a las condiciones iniciales con respecto a  $X$ .

Al igual que en la definición anterior, si  $f$  es sensible a las condiciones iniciales y por tanto existe  $\delta > 0$  tal que, para cualquier  $x \in X$  y cualquier entorno  $I$  de

## Capítulo 4. Más definiciones de caos

$x$ , existe  $y \in I$  y  $n \geq 0$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ , entonces  $f$  es sensible a las condiciones iniciales con respecto a  $X$  si  $y \in X$ .

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $X \subset \mathbb{R}^q$  un intervalo cerrado y acotado y  $f : X \rightarrow X$ , una función continua, entonces  $f$  es topológicamente transitiva en  $X$  si y solo si existe  $x_0 \in X$  tal que  $L(x_0) = X$ .*

*Demostración.* Comencemos demostrando la primera implicación

$$L(x_0) = X \implies f \text{ es topológicamente transitiva.}$$

Sean  $U, V \subset X$ , dos abiertos tales que  $x \in U$ ,  $U \cap V = \emptyset$ , como  $L(x_0) = X$ , existe una subsucesión  $\{n_k\}$  tal que  $f^{n_k}(x_0) \rightarrow y \in V$  cuando  $n_k \rightarrow \infty$ . Esto implica que para un  $k$  suficientemente grande  $f^{n_k}(x_0) \in V$  y por tanto  $f^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$ , es decir  $f$  es topológicamente transitiva.

Demostremos ahora:

$$f \text{ topológicamente transitiva} \implies L(x_0) = X.$$

Como  $X \subset \mathbb{R}^q$  es cerrado y acotado,  $X$  es compacto, por lo que existe un recubrimiento finito de  $X$  de bolas de radio  $1/n$  que podemos enumerar  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Denotamos  $W_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_k)$ ,  $W_k$  es un conjunto abierto, veamos que además es denso en  $X$ .

Sabemos que como  $f$  es transitiva, dados  $U, V \subset X$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ , luego existe  $x \in U$ , tal que  $f^k(x) \in V$ , es decir,  $f^{-k}(V) \cap U \neq \emptyset$  y por tanto  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(V)$  es denso en  $X$ , consecuentemente  $W_k$  es denso en  $X$ .

Por otra lado  $X$  es un espacio métrico completo y por tanto un espacio de Baire, por lo que aplicando el Teorema de Categorías de Baire [8], se tiene que

$$W = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k$$

es también un conjunto denso en  $X$ , y por tanto hay un punto  $x_0 \in X$ , tal que  $x_0 \in W$  y por tanto  $O^+(x_0) \cap U_k \neq \emptyset$  para todo  $k$  y  $\overline{O^+(x_0)} = X$

Ahora bien, usando nuevamente que  $f$  es topológicamente transitiva, tenemos que la unión  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(U)$  es densa en  $X$ , y entonces para todo  $x \in X$  existe una sucesión  $\{f^{n_m}(u_m)\}$  tal que  $f^{n_m}(u_m) \rightarrow x$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Entonces existe una subsucesión  $\{u_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , tal que  $f^{n_{m_j}-1}(u_{m_j})$  converge a algún  $y \in X$ . Si llamamos  $x_j = f^{n_{m_j}-1}(u_{m_j})$ , se tiene

$$x = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = f(\lim_{j \rightarrow \infty} x_j) = f(y)$$

Luego, para cualquier  $x \in X$ , existe  $y \in X$ , tal que  $f(y) = x$ .

Por lo tanto, siguiendo con la demostración, tenemos que existe  $y \in X$  tal que  $f(y) = x_0$ , si:

## 4.2. Definición de Wiggins y Definición de Martelli

---

- $y \in O^+(x_0) \implies x_0$  es periódico y

$$L(x_0) = \overline{O^+(x_0)} = X$$

- $y \notin O^+(x_0) \implies y \in X = \overline{O^+(x_0)}$  y  $y \in L(x_0)$ , como  $f(y) = x_0$ , entonces  $x_0 \in L(x_0)$ ,  $O^+(x_0) \subset L(x_0)$ , y como  $L(x_0)$  es un conjunto cerrado e invariante

$$L(x_0) = \overline{O^+(x_0)} = X$$

■

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $x_0 \in X$ , tal que  $L(x_0) = X$ , entonces  $f$  tiene en  $X$  sensibilidad a las condiciones iniciales con respecto a  $X$  si y solo si  $O^+(x_0)$  es inestable con respecto a  $X$ .*

*Demostración.* Primero veamos que si  $O^+(x_0)$  es inestable con respecto a  $X$  y  $L(x_0) = X$ , entonces  $f$  tiene en  $X$  sensibilidad a las condiciones iniciales con respecto a  $X$ .

Como  $L(x_0) = X$ , para cualquier  $y \in X$  podemos encontrar  $x_n$  tal que  $\|x_n - y\| \leq d/2$ .

Ahora, dado que la constante de inestabilidad de  $O^+(x_0)$  es la misma para  $O^+(x_n)$  para todo  $n > 1$ , es decir,  $r(x_0) = r(x_n) = r$ , se tiene que, o bien,  $\|f^p(y) - f^p(x_n)\| > r(x_0) > r(x_0)/2$ , o existe un  $z$  tal que  $\|z - x_n\| \leq d/2$  y por tanto  $\|z - y\| \leq d$  y  $\|f^p(x_n) - f^p(z)\| > r(x_0)$ , con lo que  $\|f^p(z), f^p(y)\| > r(x_0)/2$

Por tanto, para cualquier  $y \in X$  podemos encontrar  $x_n$  tal que  $\|x_n - y\| \leq d$  y  $\|f^p(x_n), f^p(y)\| > r$ .

La segunda implicación es inmediata, si  $f$  tiene en  $X$  sensibilidad a las condiciones iniciales con respecto a  $X$ , la  $O^+(x)$  es inestable con respecto a  $X$ . ■



# Capítulo 5

## Diseño de la web

### 5.1. Frontend con React

**React** es una biblioteca de JavaScript desarrollada por Facebook, diseñada para construir interfaces de usuario de forma eficiente y escalable. Es especialmente potente para aplicaciones web dinámicas donde el contenido cambia frecuentemente, lo cual es común en el estudio y simulación de sistemas dinámicos.

#### 5.1.1. Razones para elegir React

1. **Componentes Reutilizables:** React se basa en componentes que se pueden reutilizar en diferentes partes de la aplicación. Esto es ideal para desarrollar diversas herramientas y visualizaciones interactivas para sistemas dinámicos, donde elementos como gráficos o controles pueden ser modulares.
2. **Virtual DOM:** React implementa un Virtual DOM que permite actualizar de manera eficiente solo partes de la página que han cambiado, sin necesidad de recargar toda la página. Esto es crucial para aplicaciones que requieren una respuesta inmediata a la interacción del usuario, como en simulaciones en tiempo real de sistemas dinámicos.
3. **Amplio Ecosistema y Comunidad:** React tiene un amplio soporte comunitario y un vasto ecosistema de librerías y herramientas, facilitando la integración de funcionalidades avanzadas como gráficos complejos y animaciones, esenciales para visualizar sistemas dinámicos.

### 5.2. Backend con Flask

**Flask** es un micro-framework de Python que proporciona las herramientas básicas necesarias para construir aplicaciones web, permitiendo que se pueda ampliar con numerosas extensiones según las necesidades del proyecto. Es una opción popular para prototipos rápidos y aplicaciones no demasiado complejas.

### 5.2.1. Razones para elegir Flask:

1. **Simplicidad y Flexibilidad:** Flask ofrece un núcleo simple que se puede extender con extensiones para agregar funcionalidades como autenticación, bases de datos y más. Esta flexibilidad lo hace ideal para construir un backend personalizado que maneje las necesidades específicas del estudio de sistemas dinámicos.
2. **Compatibilidad con Python:** Dado que Python es ampliamente utilizado en la comunidad científica y de ingeniería por sus bibliotecas de cálculo y análisis, Flask permite una integración directa con herramientas de Python para cálculos y procesamiento de datos complejos necesarios en sistemas dinámicos.

### 5.3. Clean Architecture

La **Clean Architecture**, propuesta por Robert C. Martin (también conocido como Uncle Bob), es una filosofía de diseño de software que se enfoca en la separación de las preocupaciones en diferentes capas con el fin de hacer que el software sea más entendible, flexible y mantenible. La arquitectura está diseñada para permitir que los sistemas evolucionen con menos fricción en el mantenimiento y la extensibilidad. Sus principios claves son:

- **Independencia de Frameworks:** El sistema no debe depender de la existencia de alguna librería o framework. Esto permite usar tales herramientas como herramientas, sin casarse con ellas.
- **Testabilidad:** El negocio (las reglas del dominio) puede ser testeado sin la UI, la base de datos, el servidor web, u otros elementos externos.
- **Independencia de la UI:** La interfaz de usuario debe poder cambiar fácilmente, sin alterar el resto del sistema. Por ejemplo, una consola de UI podría ser reemplazada por una interfaz web sin cambiar la lógica de negocio.
- **Independencia de la base de datos:** La lógica de negocio no debe estar ligada a la base de datos. Si la base de datos cambia, esto no debería afectar la lógica de negocio. Independencia de cualquier agente externo: La lógica de negocio no debería ser afectada por cambios en cualquier agente externo como bases de datos o webservices. Los datos externos deben convertirse a la forma que necesita la lógica de negocio antes de ser procesados.

La estructura del código ejemplifica algunos de estos principios de la siguiente manera: La estructura de carpetas, como se muestra en el anexo ?? y el código que se proporciona a continuación sugiere una separación en capas, con diferentes directorios para diferentes aspectos del sistema:

- **Controllers** (controladores): Se manejan las solicitudes de entrada y las respuestas del sistema.

- **Models y Services** (modelos y servicios): Contienen la lógica de negocio y las reglas de dominio.
- **Adapters y Ports** (adaptadores y puertos): Se utilizan para separar la lógica de negocio de los detalles de implementación como bases de datos o interfaces de usuario.

Ejemplo de Código Aquí están algunas partes específicas del código que reflejan la Clean Architecture:

**commons\_router.py:** Define cómo las rutas son manejadas en la aplicación. Utiliza Blueprint de Flask para definir puntos de conexión modulares, lo que ayuda a mantener la lógica de enrutamiento separada de la lógica de negocio.

Listing 5.1: commons\_router.py

```
from flask import Blueprint
from flask_restx import Api

from .commons.controllers.info import api as info_api

blueprint = Blueprint('commons_api', __name__,
    url_prefix='/')
api = Api(blueprint)
api.add_namespace(info_api)
```

**run.py:** Es el punto de entrada de la aplicación. Aquí, la configuración y la creación de la aplicación están separadas, lo que facilita, por ejemplo, cambiar de entorno de desarrollo a producción sin alterar el código base.

Listing 5.2: run.py

```
from app import create_app
from config.config import get_config

config = get_config()
app = create_app(config)

def main():
    app.run(host='0.0.0.0', debug=config.DEBUG, port=
        config.PORT)

if __name__ == '__main__':
    main()
```

**functions.py:** Contiene definiciones de endpoints específicos como /orbit, /iteration, y /distance. Cada uno maneja una parte distinta de la lógica de negocio, evidenciando una buena separación entre la lógica de los diferentes tipos de datos y operaciones que maneja tu aplicación.

Listing 5.3: functions.py

## Capítulo 5. Diseño de la web

---

```
from flask_restx import Namespace, Resource

from apps.api.graph.orbit.adapter import iterative_orbit
from apps.api.graph.iteration.adapter import iteration
from apps.api.graph.distance.adapter import distance

api = Namespace('graph', description='Graph functions')

@api.route('/orbit')
class Orbit(Resource):
    from apps.api.graph.orbit.response import orbit
    from apps.api.graph.orbit.validator import body
    @api.doc(parser=body)
    @api.expect(body, validate=True)
    @api.marshal_with(orbit, code=201)
    def post(self):
        try:
            api.payload['x_max']
        except KeyError:
            api.payload['x_max'] = 1
        try:
            api.payload['x_min']
        except KeyError:
            api.payload['x_min'] = 0
        response = iterative_orbit(api.payload['x_0'],
            api.payload['function'], api.payload['
            iterations'], api.payload['x_max'], api.
            payload['x_min'])
        return response, 201

@api.route('/iteration')
class Iteration(Resource):
    from apps.api.graph.iteration.response import
        iterationResponse
    from apps.api.graph.iteration.validator import body
    @api.doc(parser=body)
    @api.expect(body, validate=True)
    @api.marshal_list_with(iterationResponse, code=201)
    def post(self):
        print(api.payload)
        response = iteration(api.payload['x_start'], api
            .payload['x_end'], api.payload['function'],
            api.payload['iterations'])
        return response, 201

@api.route('/distance')
class Iteration(Resource):
```

```

from apps.api.graph.distance.response import
    distanceResponse
from apps.api.graph.distance.validator import body
api.doc(parser=body)
@api.expect(body, validate=True)
@api.marshall_list_with(distanceResponse, code=201)
def post(self):
    print(api.payload)
    response = distance(api.payload['x_0'], api.
        payload['y_0'], api.payload['function'], api.
        payload['iterations'])
    return response, 201

```

Esta separación ayuda a que cada componente del sistema pueda ser desarrollado, probado, y mantenido en aislamiento, reduciendo la complejidad y mejorando la mantenibilidad del software.

## 5.4. Docker

Docker es una plataforma de software que permite la creación, el despliegue y la gestión de contenedores. Los contenedores son entornos de ejecución ligeros y portátiles que permiten empaquetar una aplicación y todas sus dependencias (bibliotecas, binarios, archivos de configuración, etc.) en una unidad cohesiva que puede ejecutarse consistentemente en cualquier infraestructura. Docker es ampliamente utilizado porque simplifica el despliegue de aplicaciones y gestiona de forma eficiente los recursos del sistema, lo que lo hace ideal para el desarrollo, las pruebas y la producción.

Docker es popular entre la comunidad de desarrolladores por su utilidad:

- **Consistencia:** Garantiza que la aplicación se comportará de la misma manera en cualquier entorno, ya que el contenedor incluye todo lo necesario para que la aplicación se ejecute.
- **Rapidez en el despliegue:** Permite un despliegue rápido y fácil de aplicaciones.
- **Aislamiento:** Cada contenedor se ejecuta de manera aislada, lo que mejora la seguridad y reduce las interacciones no deseadas entre aplicaciones.
- **Escalabilidad y gestión:** Docker facilita la escalabilidad horizontal de la aplicación y la gestión de múltiples contenedores.

En la página web desarrollada por el estudio de los sistemas dinámicos se utilizó Docker para asegurar un entorno controlado para la aplicación. A continuación, describo brevemente los archivos utilizados:

**Dockerfile:** Este archivo contiene las instrucciones para construir la imagen del contenedor de Docker. Define el entorno, las dependencias y el software que debe estar presente, así como las instrucciones para ejecutar la aplicación. El

## Capítulo 5. Diseño de la web

---

Dockerfile especifica desde qué imagen base comenzar, qué comandos ejecutar para la configuración del ambiente y cómo ejecutar la aplicación.

**docker-compose.yml:** Este archivo se utiliza para definir y orquestar múltiples contenedores (servicios) que necesitan trabajar juntos. En este caso, se han configurado servicios tanto para el backend como para el frontend.

Listing 5.4: docker-compose

```
services:
  backend:
    build:
      context: .
      dockerfile: ./app/backend/Dockerfile
      target: development
    container_name: backend
    volumes:
      - ./app/backend:/usr/src/app/
    ports:
      - 5200:5200
    environment:
      - FLASK_APP=run
      - FLASK_ENV=development
      - FLASK_RUN_PORT=5200
      - FLASK_RUN_SECRET=6
        fc98270f37304fcec41d07d0ac28bed
      - SERVER_NAME=app
      - SERVER_VERSION=1.0

  frontend:
    build:
      context: .
      dockerfile: ./app/frontend/Dockerfile
    container_name: frontend
    entrypoint: /entrypoint.sh
    command: npm start
    volumes:
      - ./app/frontend:/app
      - /app/node_modules
    ports:
      - 3000:3000
    environment:
      - REACT_APP_API_BASE=http://localhost:5200
    depends_on:
      - backend
```

**Servicio backend:** Se construye a partir de un Dockerfile en el directorio de backend, con un entorno de desarrollo configurado, y expone el puerto 5200. El contenedor está configurado con variables de entorno necesarias

para ejecutar una aplicación Flask.

**Listing 5.5: Dockerfile para backend**

```
# syntax = docker/dockerfile:1.2

FROM python:3.9-slim as base

ENV PYTHONUNBUFFERED=1
ENV PYTHONDONTWRITEBYTECODE=1

RUN useradd -m user
WORKDIR /usr/src/app
COPY ./app/backend/requirements.txt /usr/src/app
/
RUN pip install --upgrade pip && \
    pip install --no-cache-dir -r requirements.
    txt

FROM base as development

CMD ["python", "run.py"]

FROM base as production

COPY --chown=user:user . /usr/src/app
USER user
CMD ["gunicorn", "-w", "3", "-t", "60", "-b", "
    0.0.0.0:8000", "app:app"]
```

**Servicio frontend:** Similarmente, se construye desde otro Dockerfile destinado al frontend, una aplicación React, expone el puerto 3000, y depende del servicio backend para funcionar correctamente. Utiliza volúmenes para mantener el código sincronizado y para conservar los nodos módulos fuera del contenedor, optimizando el tiempo de desarrollo.

**Listing 5.6: Dockerfile para backend**

```
# syntax = docker/dockerfile:1.2

FROM node:20-alpine

WORKDIR /app

COPY ./app/frontend/package.json /app
RUN npm install
COPY ./app/frontend/ /app
COPY ./app/frontend/entrypoint.sh /
RUN chmod +x /entrypoint.sh
```

Estos archivos Docker facilitan la configuración y el manejo de las dependencias entre los servicios, asegurando que tanto el frontend como el backend trabajen coherentemente en un entorno controlado, lo que es esencial para pruebas y producción.

### 5.5. Código

El código principal de la página web corresponde a la generación de los datos para la visualización de las gráficas.

El siguiente código se encarga de generar los datos de la  $n$ -ésima iteración de una función y contiene la función `create_function` que se convierte la función en formato string a una función ejecutable de python.

Listing 5.7: iteration/adapter.py

```
from sympy import symbols, sympify, sqrt, log, exp #
    type: ignore
import numpy as np
import math

def create_function(expression_str):
    x = symbols('x')
    formatted_expr = expression_str
    if type(expression_str) is str:
        formatted_expr = expression_str.replace('^', '**')
    expr = sympify(formatted_expr)

    def func(x_value):
        # Ensure we evaluate for real numbers and handle
        # exceptions
        try:
            result = expr.subs(x, x_value).evalf()
            return float(result)
        except (ValueError, TypeError):
            return float('nan') # Convert errors/
            unsupported types to NaN

    return func

def iteration(x_start, x_end, function, iterations):

    x_values = np.linspace(x_start, x_end, 500)
    print(x_values)
    fun = create_function(function)
    response = [[]]
    y_values = x_values # Start with float dtype
```

```

for i in range(iterations):
    if i == iterations - 1:
        break_fun = False
        count = 0
        for x, y in zip(x_values, y_values):
            y_value = fun(y)
            if np.isinf(y_value) | np.isnan(y_value)
               | math.isnan(y_value):
                count = count+1 if break_fun ==
                    False else count
            if break_fun == False:
                response.append([])
                break_fun = True
        else:
            response[count].append({'x': x, 'y':
                y_value})
        break;
    y_values = [fun(y) for y in y_values] # Apply
        function

return {
    'series': [{'name': 'function', 'type': 'line',
        'data': serie, 'marker': {'enabled': False},
        'showInLegend': False, 'color': 'rgb
            (170,150,219)'} for serie in response],
    'yMin': np.nanmin(y_values),
    'yMax': np.nanmax(y_values),
    'xMin': x_start,
    'xMax': x_end
}

```

Para la generación del Diagrama de Feigenbaum se ha utilizado código que genera un numero aleatorio entre  $x_{start}$  y  $x_{end}$  para luego generar un subconjunto de la órbita de ese punto para los distintos valores del parámetro.

Listing 5.8: feigenbaum/adapter.py

```

import random
import sympy as sp
import numpy as np
from sympy import symbols, sympify
from ..iteration.adapter import create_function

def feigenbaum(x_start , x_end , y_start, y_end,
    function, parameter_char):
    response = []
    a = sp.symbols(parameter_char)
    random_number = random.uniform(y_start, y_end)
    parameter_range = np.linspace(x_start, x_end, 300)

```

```
function = function.replace('^', '**')
function = sp.sympify(function)

for parameter in parameter_range:
    function_not_parameterized = function.subs(a,
        parameter)
    fun = create_function(function_not_parameterized
        )
    x_0 = random_number
    y_values = []
    for i in range(0, 100, 1):
        x_0 = fun(x_0)
        if i >= 80:
            new_x = True
            for y in y_values:
                if abs(x_0 - y) < 0.001 or len(
                    y_values) == 0:
                    new_x = False
                    break
            if new_x:
                y_values.append(x_0)
                response.append({'x': parameter, 'y'
                    : x_0})

return {'series':
        [({'name': 'Diagrama de Feigenbaum',
            'type': 'scatter',
            'data': response,
            'marker': {
                'enabled': 'true',
                'radius': 3
            },
            'showInLegend': 'false',
        }
        )],
        'xMin': x_start,
        'xMax': x_end,
        'yMin': y_start,
        'yMax': y_end
    }
```

Se implementaron también dos algoritmos, uno para determinar la distancia entre las órbitas de dos puntos en las  $n$  primeras iteraciones de la función y otro para dibujar la evolución de la órbita de un punto  $x_0$ .

Listing 5.9: distance/adapter.py

```
from ..iteration.adapter import create_function
```

```

def distance(x_0, y_0, function, iterations):
    fun = create_function(function)
    response = []
    yMax = 0
    for i in range(0, iterations, 1):
        x_0 = fun(x_0)
        y_0 = fun(y_0)
        distance = abs(x_0-y_0)
        if distance > yMax:
            yMax = distance
        response.append({'x': i, 'y': distance})

    return {'series':
            [
                {'name': 'orbita',
                 'type': 'line',
                 'data': response,
                 'marker': {
                     'enabled': 'true',
                 },
                 'showInLegend': 'false',
                },
            ],
            'xMin': '0',
            'xMax': iterations,
            'yMin': '0',
            'yMax': yMax+0.1*yMax
            }

```

Listing 5.10: orbit/adapter.py

```

import numpy as np
from ..iteration.adapter import create_function

def iterative_orbit(x_0, function, iterations, x_max, x_min):
    fun = create_function(function)

    min_x = x_0
    min_y = 0
    max_x = x_0
    max_y = 0

    start = (x_0, 0)
    end = (x_0, fun(x_0))

    min_x = min(min_x, end[0])
    max_x = max(max_x, end[0])
    min_y = min(min_y, end[1])
    max_y = max(max_y, end[1])

```

```
response = [{'x': start[0], 'y': start[1]}, {'x': end[0], 'y': end[1]}]

for i in range(0, iterations):
    end = (fun(x_0), fun(x_0))

    min_x = min(min_x, end[0])
    max_x = max(max_x, end[0])
    min_y = min(min_y, end[1])
    max_y = max(max_y, end[1])

    response.append({'x': end[0], 'y': end[1]})

    x_0 = fun(x_0)

    end = (x_0, fun(x_0))

    min_x = min(min_x, end[0])
    max_x = max(max_x, end[0])
    min_y = min(min_y, end[1])
    max_y = max(max_y, end[1])

    response.append({'x': end[0], 'y': end[1]})

if max_x > x_max:
    x_max = max_x
if min_x < x_min:
    x_min = min_x
try:

    x_max = float(x_max)
    x_min = float(x_min)
    x_range = np.linspace(x_min, x_max, 100)

    data_function = []
    diagonal = []

    for x in x_range:
        data_function.append({'x': x, 'y': fun(x)})
        diagonal.append({'x': x, 'y': x})
except TypeError:

    data_function = []

return {'series':
```

```

    [
      {
        'name': 'orbita',
        'type': 'line',
        'data': response,
        'marker': {
          'enabled': 'true',
          'symbol': 'arrow',
        },
        'showInLegend': 'false',
        'color': 'red'
      },
      {
        'name': 'function',
        'type': 'line',
        'data': data_function,
        'marker': {
          'enabled': 'false',
        },
        'showInLegend': 'false'
      },
      {
        'name': 'diagonal',
        'type': 'line',
        'data': diagonal,
        'marker': {
          'enabled': 'false',
        },
        'showInLegend': 'false'
      }
    ],
    'xMin': x_min,
    'xMax': x_max,
    'yMin': min_y,
    'yMax': max_y
  }
}

```

Finalmente, para presentar esta información al usuario, se ha utilizado la librería *Highcharts* de React para crear las visualizaciones.

Listing 5.11: FunctionGraph.jsx

```

import React, { useEffect, useRef, useState } from "
  react";
import Highcharts, { format } from "highcharts";
import HighchartsReact from "highcharts-react-official";
import { Box, Button } from "@components";

const FunctionGraph = ({ data, xMin, xMax, yMin, yMax,
  refreshData, onError }) => {

  const chartRef = useRef(null);
  const [annotations, setAnnotations] = useState([

```

## Capítulo 5. Diseño de la web

---

```
      labels: [{ point: {x:1, y:0.2}, text: 'Hola'}],
      labelOptions: {
        x: 40, y: -10
      }, draggable: 'xy'}}]);

const initData = () => {
  try {
    return data.map(series => ({
      ...series,
      data: series.data || [],
      marker: { ...series.marker },
      showInLegend: series.showInLegend,
      point: {
        events: {
          click: function () {
            handlePointClick(this);
          }
        }
      }
    }));
  } catch (e) {
    onError();
  }
}

const [chartOptions, setChartOptions] = useState(
  initData);

const handlePointClick = (event) => {
  const chart = chartRef.current.chart;
  const newData = chartOptions.map(series => ({
    ...series,
    data: series.data.map(point => {
      if (point.x === event.x && point.y === event.y) {
        {
          annotations[0].labels.push({
            point: {x: point.x, y: point.y},
            text: `(${point.x}, ${point.y})`
          });
        }
        if (point.marker?.fillColor === '#BF0B23') {
          return { ...point, marker: {}, datalabel: {
            enabled: false }};
        }
      }
      return { ...point, marker: { enabled: true,
        fillColor: '#BF0B23', radius: 5 },
```

```

        datalabel: { enabled: true, format: `(${
            point.x}, ${point.y})` } };
    }
    return point;
  })
  }));
  setChartOptions(newData);
  setAnnotations(annotations);
};

// Calcular los intervalos de ticks basados en las
// dimensiones proporcionadas
useEffect(() => {
  setChartOptions(initData);
}, [data]);

useEffect(() => {
  const chart = chartRef.current.chart;

  let startPosition = { x: 0, y: 0 };
  let isDragging = false;

  const handleWheel = (e) => {
    e.preventDefault();
    const yAxis = chart.yAxis[0];
    const xAxis = chart.xAxis[0];

    const increment = e.deltaY * 0.01;

    let newYMax = yAxis.max + increment;
    let newYMin = yAxis.min - increment;
    let newXMax = xAxis.max + increment;
    let newXMin = xAxis.min - increment;

    if (newXMax < newXMin) {
      const aux = newXMax;
      newXMax = newXMin;
      newXMin = aux;
    }

    refreshData({ newXMin, newXMax, newYMin, newYMax
    });
  };
};

```

```
const handleMouseDown = (e) => {
  isDragging = true;
  startPosition.x = e.offsetX;
  startPosition.y = e.offsetY;
};

const handleMouseUp = async (e) => {
  if (isDragging) {
    const currentPosition = { x: e.offsetX, y: e.offsetY };
    const increment = 0.01;
    const deltaX = currentPosition.x - startPosition.x;
    const deltaY = currentPosition.y - startPosition.y;

    if (Math.abs(deltaX) > Math.abs(deltaY)) {
      const xAxis = chart.xAxis[0];

      let newXMax = xAxis.max + increment * deltaX;
      let newXMin = xAxis.min + increment * deltaX;
      refreshData({ newXMin, newXMax });
    }
    else {
      const yAxis = chart.yAxis[0];

      let newYMax = yAxis.max + increment * deltaY;
      let newYMin = yAxis.min + increment * deltaY;

      // Ajustar los límites del eje Y
      yAxis.update({
        max: newYMax,
        min: newYMin
      });
    }
  }

  isDragging = false;
};

const container = chart.container;
container.addEventListener('wheel', handleWheel);
container.addEventListener('mousedown',
  handleMouseDown);
container.addEventListener('mouseup', handleMouseUp);
;
```

```
// Limpiar el evento
return () => {
  container.removeEventListener('mousedown',
    handleMouseDown);
  container.removeEventListener('mouseup',
    handleMouseUp);
  container.removeEventListener('wheel', handleWheel
    );
};
}, [data, xMin, xMax, yMin, yMax]);

const options = {
  chart: {
    type: 'line',
    backgroundColor: 'transparent',
    alignTicks: true
  },
  title: {
    text: null
  },
  xAxis: {
    title: null,
    type: 'linear',
    max: xMax,
    min: xMin,
    gridLineWidth: 1,
    endOnTick: false,
  },
  annotations: annotations,
  yAxis: {
    title: null,
    type: 'linear',
    max: yMax,
    min: yMin,
    gridLineWidth: 1,
    endOnTick: false,
  },
  series: chartOptions,
  credits: {
    enabled: false
  },
  tooltip: {
    format: '({point.x}, {point.y})'
```

```
    }  
  };  
  
  return (  
    <Box width="100%" height="100%">  
      <HighchartsReact  
        highcharts={Highcharts}  
        options={options}  
        ref={chartRef}  
        containerProps={{ style: { width: '100%', height  
          : '100%' } }}  
      />  
    </Box>  
  );  
  
};  
  
export default FunctionGraph;
```

## Capítulo 6

# Análisis de impacto

El estudio de los sistemas caóticos tiene un impacto en diversas áreas de la sociedad. Comprender la dinámica de estos sistemas nos permite desentrañar comportamientos complejos e impredecibles en múltiples contextos, lo cual es esencial para el avance del conocimiento científico. Más allá de su valor teórico, la teoría del caos proporciona herramientas prácticas que son cruciales para abordar problemas reales en campos como la tecnología, la economía, la medicina y el medio ambiente. Al aplicar estos conocimientos, podemos desarrollar soluciones innovadoras que mejoren la eficiencia de los sistemas tecnológicos, optimicen estrategias económicas y permitan avances en tratamientos médicos. En última instancia, la comprensión de los sistemas caóticos no solo enriquece nuestro conocimiento científico, sino que también tiene el potencial de generar beneficios tangibles y duraderos para la sociedad.

El desarrollo de una página web como herramienta educativa y de investigación subraya la aplicación práctica de los conceptos teóricos explorados, ofreciendo a los usuarios una plataforma interactiva para visualizar y experimentar con sistemas dinámicos, por lo que se espera que este trabajo tenga un impacto positivo en el objetivo 9 de los Objetivos de Desarrollo Sostenible.

A nivel personal, la realización de este trabajo, no solo implicó el aprendizaje de nuevos conocimientos, sino la iniciación en un área de las matemáticas en la que podría continuar mi formación futura. Las habilidades y los conceptos aprendidos, así como el interés despertado por el mundo de la dinámica caótica me animan a continuar con trabajos enfocados a profundizar en el estudio del caos.



## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo ha explorado profundamente la teoría del caos a través de varias perspectivas y definiciones, enfatizando la rica diversidad y la complejidad inherente a los sistemas dinámicos caóticos. El análisis comenzó con una introducción a los fundamentos de los sistemas dinámicos, utilizando el modelo logístico de May como un caso de estudio para ilustrar la transición de un sistema determinista al caos. Esta base teórica fue esencial para entender las propiedades subyacentes que caracterizan a los sistemas caóticos, como la dependencia sensible en las condiciones iniciales, que se reveló a través de la definición de caos de Devaney.

El examen de las perspectivas de Li y Yorke y su comparación con la definición de Devaney destacó cómo diferentes enfoques pueden llevar a una comprensión más rica y matizada del caos. Además, la discusión sobre la redundancia de la definición de Devaney y el análisis de las definiciones propuestas por Wiggins y Martelli ampliaron nuestra comprensión del caos, demostrando que el campo está lejos de ser monolítico y sigue evolucionando.

Mirando hacia el futuro, hay varias direcciones prometedoras que este trabajo puede tomar para expandir aún más nuestra comprensión del caos y su aplicabilidad. Una de estas direcciones es la exploración de sistemas dinámicos en dimensiones superiores. Aunque este estudio se centró principalmente en sistemas unidimensionales, los sistemas de dimensiones superiores, como los sistemas de Lorenz y Rössler en sistemas tridimensionales, ofrecen una complejidad aún mayor y fenómenos como el atractor extraño, que merecen un estudio detallado.

Además, la interacción entre teoría y aplicación podría ser explorada más a fondo desarrollando algoritmos de control de caos. Estos algoritmos podrían utilizarse para estabilizar sistemas caóticos en aplicaciones prácticas, desde la ingeniería hasta la economía y la biología. La investigación en este ámbito no solo ayudaría a gestionar mejor los sistemas caóticos en la práctica, sino que también podría revelar nuevas teorías y métodos en el control de sistemas dinámicos.

Finalmente, el desarrollo continuo y la expansión de la página web como herra-

## **Capítulo 7. Conclusiones y trabajo futuro**

---

mienta educativa ofrecen un vasto terreno para la innovación. Integrar tecnologías emergentes podría transformar la manera en que los usuarios interactúan con estos conceptos, haciendo la educación más accesible e intuitiva.

# Bibliografía

- [1] J. A. Y. Tien-Yien Li, *Period Three Implies Chaos*. The American Mathematical Monthly, 1975, vol. 82, págs. 985-992.
- [2] M. R. Miguel Ángel Martín Manuel Morán, *Iniciación al caos*. Editorial Síntesis, 1995.
- [3] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, 1987.
- [4] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey, «On Devaney's Definition of Chaos», *Amer. Math. Monthly*, vol. 99, págs. 332-334, abr. de 1992. DOI: 10.2307/2324899.
- [5] M. Martelli, M. Dang y T. Seph, «Defining Chaos», *Mathematics Magazine*, vol. 71, n.º 2, págs. 112-122, 1998. dirección: <https://www.jstor.org/stable/2691012>.
- [6] S. Wiggins, «Chaotic Transport in Dynamic Systems», *Springer-verlag*, vol. 92, pág. 28228, jul. de 1992. DOI: 10.1063/1.2809741.
- [7] M. Martelli, *Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos* (Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization). New York: Wiley-Interscience, 1999, pág. 344, ISBN: 978-0471319757. dirección: <https://www.wiley.com/en-ie/Introduction+to+Discrete+Dynamical+Systems+and+Chaos-p-9780471319757>.
- [8] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, 3rd. New York: Springer-Verlag, 1993, cap. 2.



# **Anexos**



# Apéndice A

## Primer anexo

Las siguientes imágenes corresponden a la interfaz de la página web desarrollada para el estudio de los sistemas dinámicos y la figura A.5 corresponde con la estructuración del código de la página web.

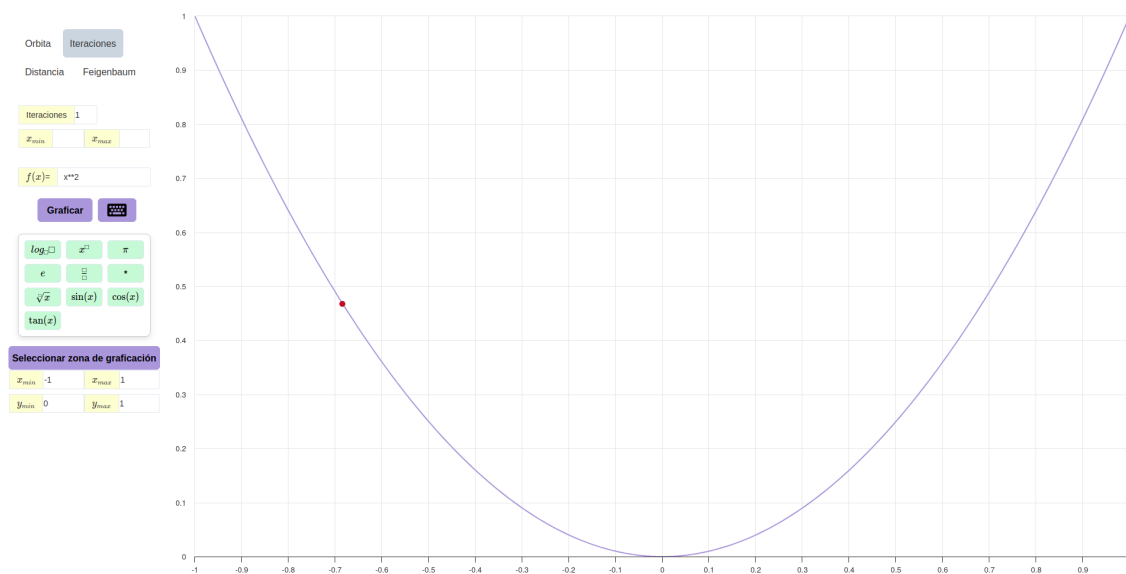


Figura A.1: Graficador de la  $n$ -ésima iteración de una función

## Capítulo A. Primer anexo

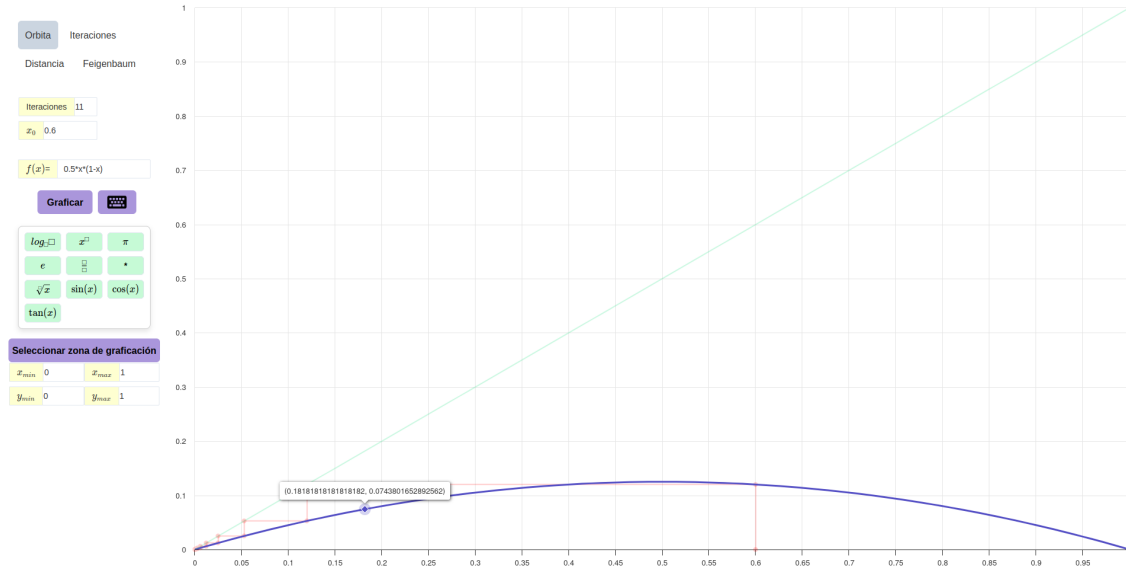


Figura A.2: Órbita de un punto

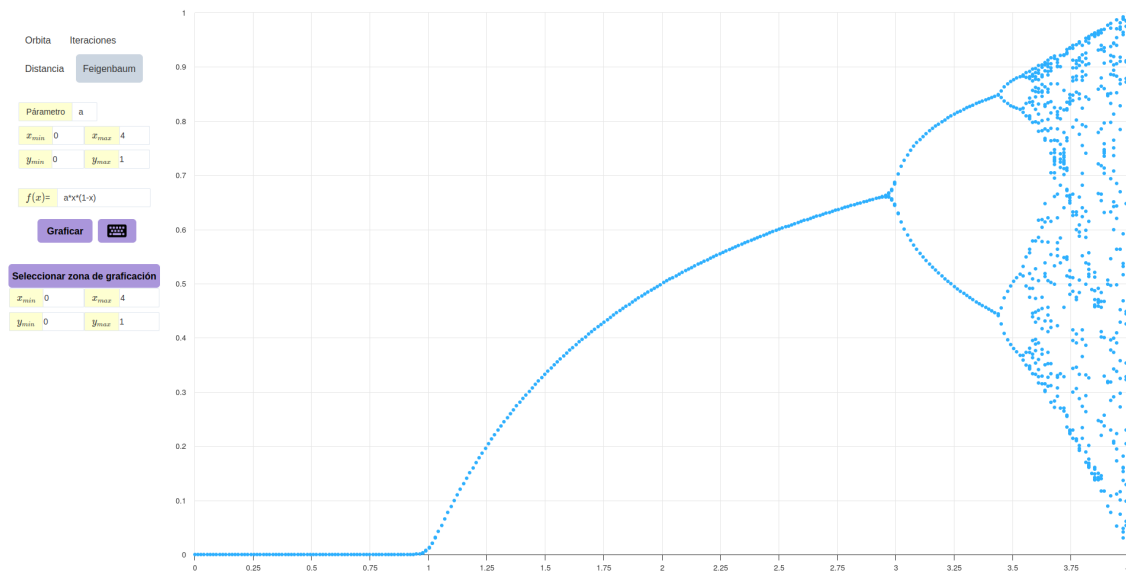


Figura A.3: Diagrama de Feigenbaum

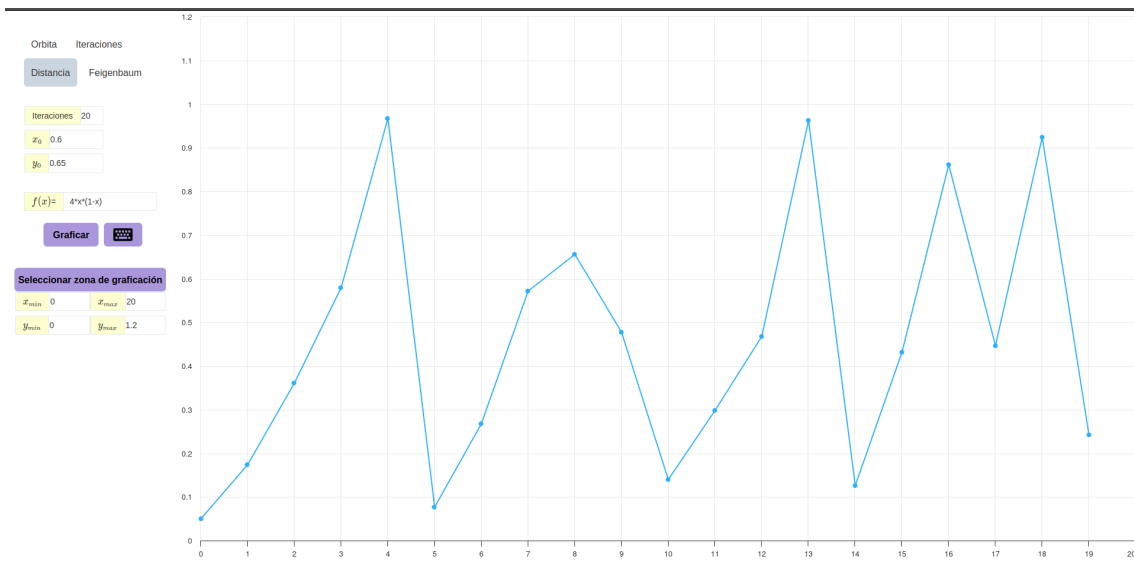
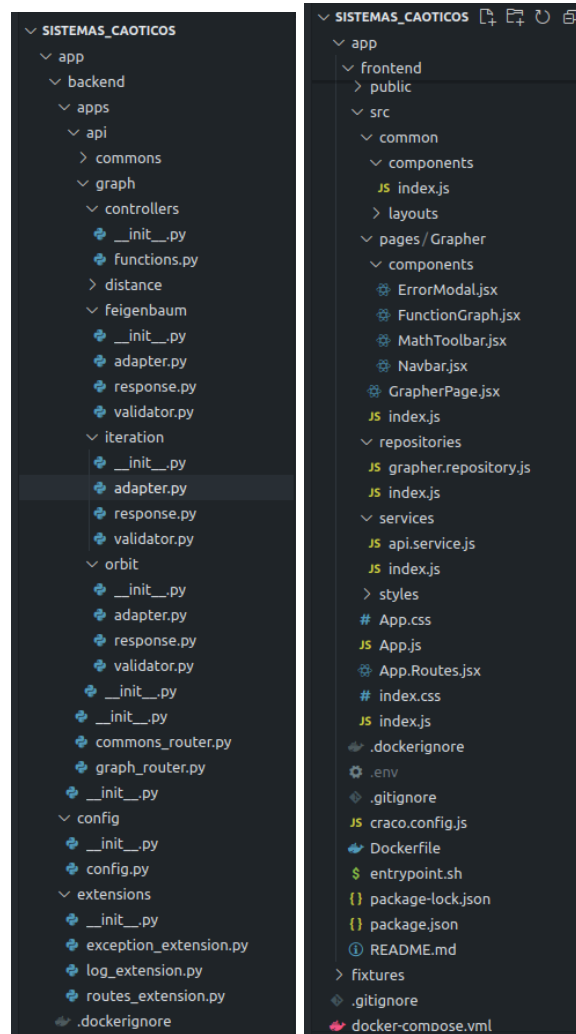


Figura A.4: Distancia entre dos órbitas

## Capítulo A. Primer anexo



(a) Estructura del backend (b) Estructura del frontend

Figura A.5: Estructura del proyecto

## **Apéndice B**

# **Informe Turnitin**

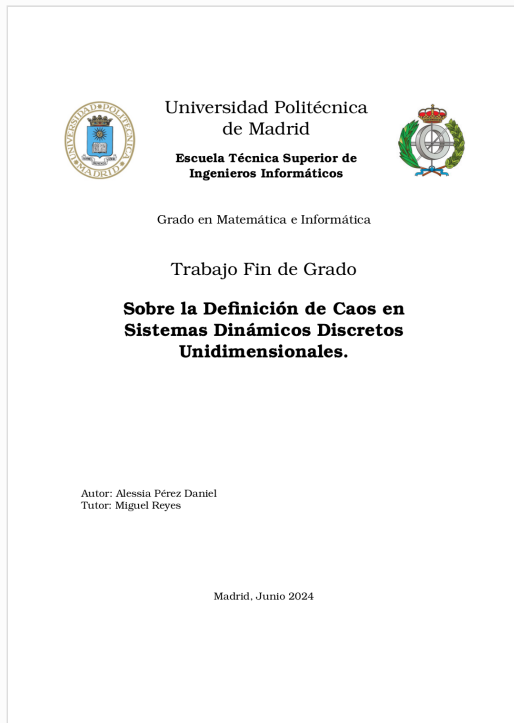


## Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: F AGUEDA MATA HERNANDEZ  
Título del ejercicio: Turnitin Memoria Final (Moodle PP)  
Título de la entrega: TFG\_ALESIA\_PEREZ\_DANIEL-4.pdf  
Nombre del archivo: 961\_F\_AGUEDA\_MATA\_HERNANDEZ\_TFG\_ALESIA\_PEREZ\_DANI...  
Tamaño del archivo: 1.85M  
Total páginas: 88  
Total de palabras: 17,327  
Total de caracteres: 80,032  
Fecha de entrega: 03-jun.-2024 08:05p. m. (UTC+0200)  
Identificador de la entre... 2394776458



# TFG\_ALESIA\_PEREZ\_DANIEL-4.pdf


## INFORME DE ORIGINALIDAD

<b>1</b> %	<b>1</b> %	<b>0</b> %	<b>%</b>
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

## FUENTES PRIMARIAS

<b>1</b>	<b>oa.upm.es</b> Fuente de Internet	<1 %
<b>2</b>	<b>uvadoc.uva.es</b> Fuente de Internet	<1 %
<b>3</b>	<b>es.mathigon.org</b> Fuente de Internet	<1 %
<b>4</b>	<b>www.encuentros-multidisciplinares.org</b> Fuente de Internet	<1 %
<b>5</b>	<b>es.slideshare.net</b> Fuente de Internet	<1 %
<b>6</b>	<b>dspace.esPOCH.edu.ec</b> Fuente de Internet	<1 %
<b>7</b>	<b>Brown, B.. "Critical issues in juvenile delinquency", Behaviour Research and Therapy, 1982</b> Publicación	<1 %
<b>8</b>	<b>www.goconqr.com</b> Fuente de Internet	<1 %

Este documento esta firmado por

	<b>Firmante</b>	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
	<b>Fecha/Hora</b>	Mon Jun 03 22:13:07 CEST 2024
	<b>Emisor del Certificado</b>	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
	<b>Numero de Serie</b>	561
	<b>Metodo</b>	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)