



Universidad Politécnica  
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de  
Ingenieros Informáticos**



Grado en Matemáticas e Informática

Trabajo Fin de Grado

**Optimización del Tiempo de Espera y  
el Tiempo en Transporte en una Red de  
Transporte**

Autor: Pablo Rodríguez Beceiro  
Tutor(a): Alfonso Mateos Caballero

Madrid, Junio 2024

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

*Trabajo Fin de Grado*  
*Grado en Matemáticas e Informática*

*Título:* Optimización del Tiempo de Espera y el Tiempo en Transporte  
en una Red de Transporte

Junio 2024

*Autor:* Pablo Rodríguez Beceiro

*Tutor:* Alfonso Mateos Caballero

Catedrático de Universidad

Departamento de Inteligencia Artificial

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Universidad Politécnica de Madrid

# Resumen

A raíz del crecimiento de la población que ha habido durante los últimos años, se ha generado un gran aumento de la demanda del transporte público, especialmente en zonas densamente pobladas como núcleos urbanos. Por ello, la optimización de la red de transportes de una localidad se ha convertido en uno de los principales puntos de investigación para mejorar la calidad de vida de los ciudadanos. Esta optimización no solo ayuda a los usuarios a perder menos tiempo durante su día a día, sino que también abarata costos para los ayuntamientos, contribuye a la reducción de emisiones en el medio ambiente e incluso puede llegar a jugar un papel clave en la prevención de la propagación de virus y enfermedades, como fue el caso de la COVID-19.

Por todo esto, en este trabajo se investigarán diferentes algoritmos y métodos de optimización de redes de transporte que están siendo aplicados en todo el mundo. De entre todos ellos, se analizará el más adecuado para aplicarse en una línea del metro. Además, se planteará una modelización lineal al problema de optimización de una red de transporte y, finalmente, se utilizará el solver matemático CPLEX para optimizar una simulación de la línea 1 del Metro de Madrid.



# **Abstract**

Due to the population growth that has occurred in recent years, there has been a significant increase in the demand for public transportation, especially in densely populated areas such as urban centers. Therefore, optimizing the transportation network of a locality has become one of the main research points to improve the quality of life for citizens. This optimization not only helps users save time in their daily routines but also reduces costs for municipalities, contributes to the reduction of environmental emissions, and can even play a key role in preventing the spread of viruses and diseases, as was the case with COVID-19.

For all these reasons, this work will investigate different algorithms and methods for optimizing transportation networks that are being applied worldwide. Among all of them, the most suitable one for application on a metro line will be analyzed. Also, a linear modeling approach to the transportation network optimization problem will be proposed, and finally, the mathematical solver CPLEX will be used to optimize a simulation of line 1 of the Madrid Metro.



# Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia. A mi madre y mi padre, quienes han sido mi pilar fundamental a lo largo de este camino. Gracias por cuidarme, apoyarme y enseñarme los valores que me han guiado hasta aquí, no hay palabras suficientes para expresar lo que siento por vosotros.

A mi hermano, por estar siempre ahí para mí, brindándome su apoyo y comprensión en cada etapa de mi vida. Gracias por ser mi confidente, mi amigo y mi compañero de aventuras. Tu presencia ha sido un constante recordatorio de que nunca estoy solo.

A mis amigos y compañeros, gracias por confiar en mí y por haber estado a mi lado en los momentos más difíciles. Su amistad y ayuda han sido esenciales para poder superar los desafíos que han aparecido por el camino. Estoy inmensamente agradecido por cada risa compartida, cada palabra de ánimo y cada momento juntos.

A mis tutores y profesores. Su dedicación, conocimiento y paciencia han sido cruciales para mi crecimiento académico y personal. Gracias por haberme enseñado todo lo que sé, por haberme inspirado a seguir adelante y por haberme hecho crecer como persona.

Finalmente quiero dar las gracias al proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación "Sistema de Ayuda a la Decisión basado en Aprendizaje Estadístico y Optimización en Redes. Aplicaciones a la Propagación de Pandemias a través del Transporte", PID2021-122209OB-C31. Sin el apoyo de este proyecto, no habría podido realizar este trabajo con el que tanto he aprendido y disfrutado.



# Tabla de contenidos

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos del trabajo . . . . .	2
1.2. Tipos de optimizaciones . . . . .	2
1.2.1. Local express . . . . .	2
1.2.2. Short turning . . . . .	4
1.2.3. Skip-stop . . . . .	5
1.3. Técnica elegida en el proyecto . . . . .	7
<b>2. Modelizado del problema</b>	<b>9</b>
2.1. Conceptos previos . . . . .	9
2.2. Parámetros de variables . . . . .	11
2.3. Restricciones . . . . .	15
2.3.1. Restricciones de servicio a estaciones . . . . .	16
2.3.2. Restricciones de horarios . . . . .	17
2.3.3. Restricciones de material rodante. . . . .	19
2.3.4. Restricciones de demanda . . . . .	20
2.4. Función objetivo . . . . .	28
<b>3. Modificaciones al modelo</b>	<b>31</b>
3.1. Modelización usada . . . . .	31
<b>4. Resultados obtenidos</b>	<b>37</b>
4.1. Obtención de los datos . . . . .	37
4.1.1. Matriz de demanda temporal . . . . .	37
4.1.2. Tiempo de viaje entre estaciones . . . . .	41
4.1.3. Resto de valores . . . . .	42
4.2. Simulaciones y resultados . . . . .	42
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro:</b>	<b>55</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	55
5.2. Trabajo futuro . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

## TABLA DE CONTENIDOS

---

<b>Anexos</b>	<b>61</b>
<b>A. Anexo: Datos usados</b>	<b>61</b>
A.1. Matriz de demanda $OD[\tau]$ para la primera simulación. . . . .	61
A.2. Matriz de demanda $OD[\tau]$ para la segunda simulación. . . . .	63
A.3. Matriz de demanda $OD[\tau]$ para la tercera simulación. . . . .	65

# Capítulo 1

## Introducción

La población mundial ha aumentado en casi 2 mil millones de personas desde el año 2000, y se espera que para 2092 el número de habitantes en el planeta se incremente otros 2.5 mil millones [1]. Este crecimiento desproporcionado de la población está generando un aumento en la demanda de transporte en todo el mundo, especialmente en las grandes ciudades y zonas de alta densidad de población. Entre los diferentes medios de transporte disponibles, el uso del transporte público se está convirtiendo en una alternativa cada vez más popular debido a, entre otras razones, su bajo costo en comparación con los vehículos particulares. Por ejemplo, según los últimos estudios realizados por el INE, el transporte urbano en Madrid experimentó un incremento de más del 15% entre 2022 y 2023 [2].

El incremento de la demanda de transporte público ha motivado a investigadores de todo el mundo a desarrollar nuevas técnicas para optimizarlo, aumentando su eficacia y mejorando su disponibilidad. Esta optimización de las redes de transporte no solo conlleva un aumento en la calidad de vida de los ciudadanos, al minimizar el tiempo que pasan viajando, sino que también implica una reducción de costos para las localidades, una disminución de la huella de carbono generada por los vehículos e incluso puede ayudar a reducir la propagación de enfermedades transmitidas por el aire. Esto se debe a que al reducir el tiempo de exposición de los usuarios a posibles infectados durante el viaje, se reduce significativamente la probabilidad de contagio.

A raíz de estos datos, la mejora en la disponibilidad y eficiencia del transporte público se está convirtiendo en un importante objeto de estudio en todo el mundo. Sin embargo, el diseño eficiente de las redes de transporte público no solo implica aumentar la frecuencia de los servicios o expandir la infraestructura, sino también implementar tecnologías innovadoras y estrategias inteligentes que permitan una gestión óptima de los recursos disponibles. En este sentido, la aplicación de algoritmos de optimización y simulación, junto con el análisis de datos masivos, desempeña un papel crucial. Estas herramientas proporcionan a los planificadores de transporte una comprensión profunda de los patrones de movilidad de la población, lo que les permite tomar decisiones informadas para mejorar la eficiencia y la accesibilidad del sistema.

### 1.1. Objetivos del trabajo

Los principales objetivos de este trabajo son los siguientes:

- **Estudio de las técnicas actuales:** Se investigarán y explicarán las técnicas de optimización más utilizadas en la actualidad, destacando sus ventajas e inconvenientes.
- **Comparación de técnicas:** Se realizará una comparación entre las diferentes técnicas utilizadas para determinar cuál de ellas es la más adecuada para implementar en el metro de Madrid.
- **Modelización del problema:** Se presentará una modelización matemática general para el problema planteado, que permita una comprensión clara de sus componentes y relaciones.
- **Resolución del problema:** Se utilizará el software matemático CPLEX para resolver el problema planteado, utilizando datos reales de la línea 1 del metro de Madrid.
- **Exposición y explicación de resultados:** Se mostrarán los resultados obtenidos y se destacarán posibles mejoras o trabajos futuros a realizar, con el objetivo de ofrecer una visión completa del estudio y sus implicaciones prácticas.

Después de haber establecido la importancia de abordar el problema y haber presentado la estructura del trabajo, es esencial examinar las soluciones que se están implementando actualmente, así como sus ventajas e inconvenientes.

### 1.2. Tipos de optimizaciones

Actualmente las tres principales técnicas que se están usando para la optimización de una red de transporte son: *local express*, *short turning* y *skip-stop* [3].

#### 1.2.1. Local express

Esta técnica consiste en dividir una línea de transporte en dos o más tramos diferenciados: el local, en el que los vehículos pararán en todas y cada una de las estaciones de la línea, y los exprés en los que los vehículos pararán únicamente en un número reducido de estaciones. Este enfoque agiliza significativamente el transporte de los usuarios que desean realizar viajes largos, ya que evita el tiempo de espera en la mayoría de las estaciones. Esta técnica ha demostrado reducir el tiempo de viaje de los pasajeros en aproximadamente un 5% y el coste energético del servicio en casi un 10% [4]. Ejemplos de esta técnica se pueden encontrar en algunas líneas de metro de Japón, Australia, París o Estados Unidos.

Para ilustrar un ejemplo concreto, consideremos la Hanshin Express Loop Line de Osaka, como se muestra en la Figura 1.1. Esta línea de metro que conecta Nishidai y Umeda, se ha dividido en varios servicios diferentes. Nos centraremos

## 1.2. Tipos de optimizaciones

únicamente en los servicios azul oscuro, rojo y rosa, ya que los demás son ejemplos que combinan la técnica de *Local Express* con la técnica de *short turning*, que explicaremos a continuación.

En el servicio azul oscuro, que corresponde al recorrido local, el tren para en todas y cada una de las estaciones, siguiendo un sistema tradicional. Sin embargo, en los otros servicios, los trenes solo hacen paradas en ciertos núcleos urbanos importantes. De este modo, se agiliza enormemente el tiempo de transporte para los usuarios que deseen bajar en alguna de estas ciudades importantes, evitando que esperen en paradas innecesarias.

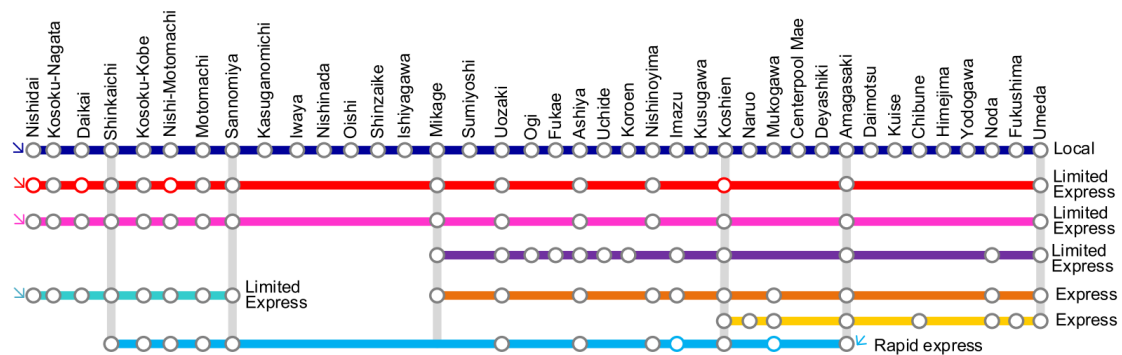


Figura 1.1: Metro del aeropuerto de Tokio: Fuente [5]

Los principales problemas de este método son:

- La necesidad de una infraestructura especializada: Para evitar choques de los servicios dentro de la línea es necesario crear pequeñas desviaciones. Estas rutas adicionales sirven para que los vehículos que no vayan a parar en una estación puedan pasar de largo sin chocarse con otro que se encuentre parado. En la Figura 1.2 podemos ver tres esquemas diferentes que solucionan este problema añadiendo vías extras.

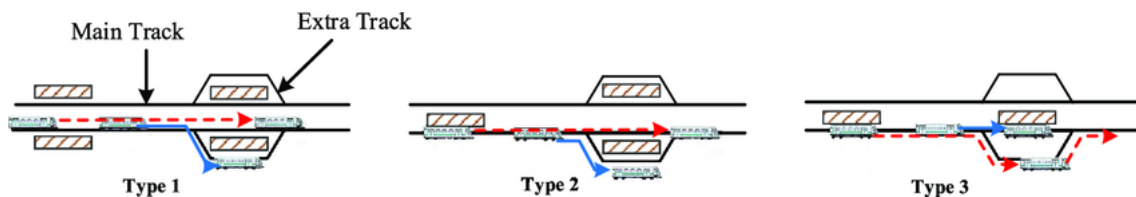


Figura 1.2: Esquemas que ejemplifican posibles adaptaciones de la infraestructura de una estación para permitir la coexistencia de un servicio express y local, Fuente [6]

- Poco eficiente para estaciones poco concurridas: Aunque este sistema sea especialmente útil para usuarios que hacen viajes largos entre estaciones importantes, no ayuda en absoluto a otros que viajen desde o hacia núcleos poco transitados. Por ejemplo, si en la Figura 1.1 un usuario tiene que ir desde Nishidai hasta la estación de Kuise, este estaría obligado a usar la opción local y, por tanto, su recorrido no se verá acortado en absoluto.

### 1.2.2. Short turning

Esta técnica consiste en permitir a algunos vehículos no recorrer la línea completa, cambiando de sentido antes de llegar a la parada final. A diferencia de en *local express*, todos los vehículos de esta solución paran en todas las estaciones por las que pasan, pero no todos los servicios pasan por todas las estaciones de la línea. Al eliminar un fragmento de la línea se reduce el tiempo que un servicio tarda en completar su recorrido, acortando la frecuencia de pasada por las estaciones. De esta forma, aunque no se reduzca el tiempo de viaje de los usuarios dentro del transporte, si que se reduce el tiempo que estos esperan en el andén.

Un ejemplo de esta técnica se puede ver en la línea 2 del metro de Shanghai, mostrada en la Figura 1.3. En este ejemplo la estación de Guanglan Rd. se han designado como estaciones de giro, donde algunos de los trenes que vengan de Xujing darán la vuelta en vez de llegar hasta el final de la línea.

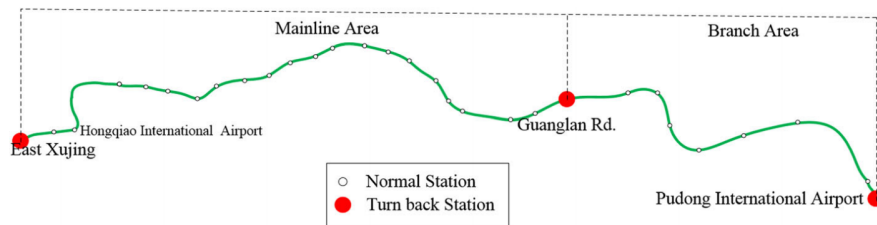


Figura 1.3: Línea 2 del metro de Shanghai. Fuente [7]

En la Figura 1.4 podemos ver un ejemplo gráfico del funcionamiento de esta técnica en una línea de metro con 2 trenes circulando. En este podemos ver como la frecuencia de trenes entre las estaciones intermedias aumenta considerablemente en ambas direcciones a cambio de reducir la disponibilidad de servicios en la primera y ultima estación.

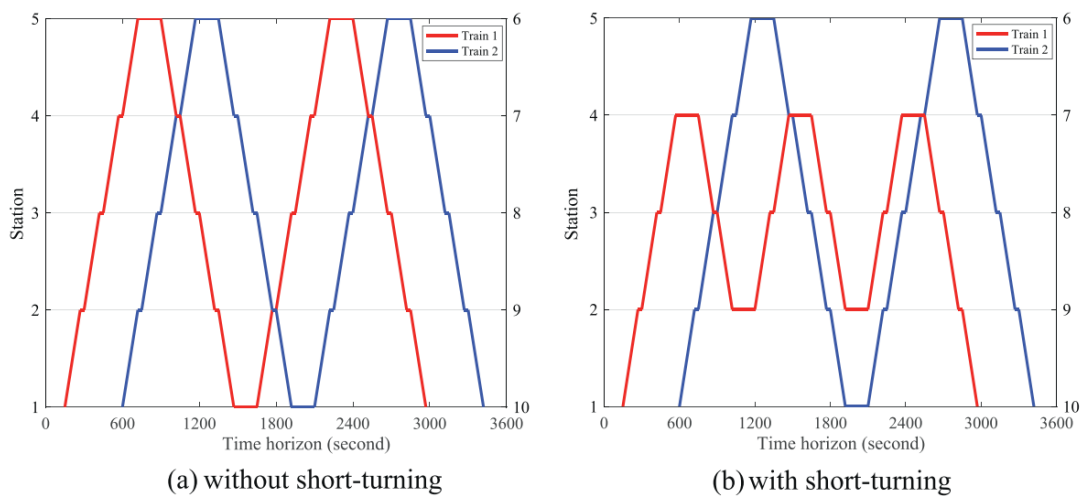


Figura 1.4: Comparación gráfica del uso de *short turning* en una línea de metro. Fuente [8]

Las principales desventajas de esta técnica son las siguientes:

- La necesidad de una infraestructura que permita cambiar de dirección: En el caso de medios de transportes poco manejables, como podría ser un metro, se necesitaría construir la infraestructura necesaria para realizar un cambio de dirección en una estación intermedia. Por este motivo este tipo de métodos son especialmente útiles para transportes como los autobuses los cuales no tienen ningún tipo de restricción para girar.
- Empeora la situación de algunos usuarios: A diferencia del método *local express*, este sistema puede llegar a aumentar el tiempo de espera de algunos usuarios si estos se encuentran o quieren desplazarse a alguna de las estaciones de las afueras. Por ejemplo, volviéndonos a fijar en la Figura 1.4, si un usuario que se encuentra en la estación 2 en el segundo 1200 quiere desplazarse hasta la estación número 5 este tardaría 200 segundos más si se aplica *short turning*.

### 1.2.3. Skip-stop

Esta última técnica consiste en permitir a los vehículos que recorren una línea saltarse ciertas paradas en su recorrido. A diferencia de en el método *local express*, en este caso no existe un tren local que pare en todas las estaciones si no que, en base a la demanda u otros factores, cada servicio se saltará ciertas paradas. Esta técnica reduce el tiempo que los pasajeros pasan dentro de los vehículos, ya que permite al servicio ahorrarse tanto el tiempo de abastecimiento de una parada como el tiempo perdido durante el frenado y el acelerado. Las tres variaciones principales que ofrece el *skip-stop* son: los patrones A/B, los multipatrones y el *skip-stop* Dinámico.

La política *skip-stop* con patrones A/B consiste en separar los vehículos en dos categorías diferentes, los tipo A y los tipo B. A su vez, también se dividen las estaciones de la línea en 3 tipos diferentes: las A, las B y las AB. Durante el recorrido por la línea, cada vehículo parará exclusivamente en las estaciones que coincidan con su tipo. Dicho de otro modo, los vehículos A solo pararán en las estaciones A y en las AB mientras que los vehículos B pararán en las estaciones B y AB [9]. La única restricción que deben cumplir las estaciones de este tipo de política es que tanto la primera como la última estación deben ser de tipo AB para asegurar que siempre haya una ruta entre dos estaciones cualesquiera. Véase la Figura 1.5 para un ejemplo.

La variación mediante el uso de multipatrones consiste en realizar una división similar a la del patrón A/B pero con una clasificación más compleja, con 3 tipos de servicios o más. En la Figura 1.6 puede verse un ejemplo.

Finalmente, la técnica *skip-stop* dinámica consiste en determinar las paradas de cada servicio dependiendo de factores dinámicos, como la demanda. Por tanto, en este caso, los trenes no se paran en estaciones determinadas en base a su tipo si no que las paradas de un tren serán determinadas por la hora del día, las paradas del servicio anterior e incluso eventos externos [12].



Figura 1.5: Posible implementación de la técnica *skip-stop* con patrones A/B en la línea 8 del metro de Madrid. Fuente [10]

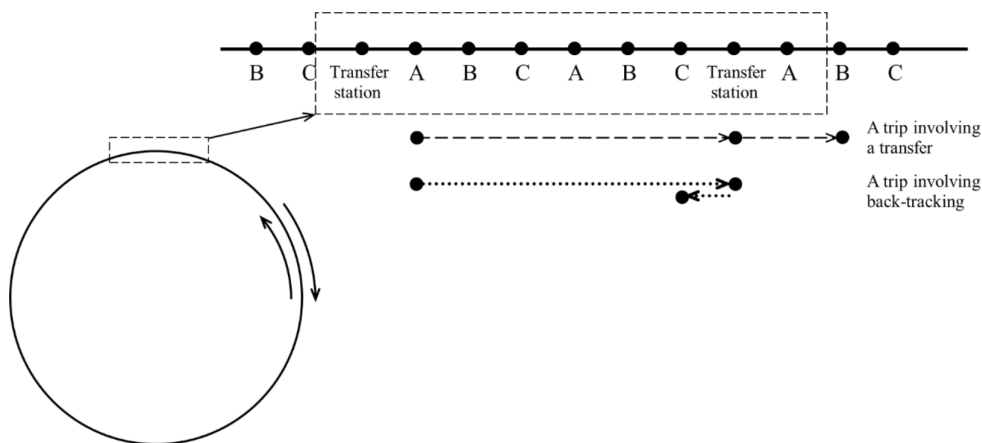


Figura 1.6: Ejemplo de una implementación multipatrón. Fuente [11]

Los principales inconvenientes de esta técnica son los siguientes:

- Empeora la situación de algunos usuarios: Similar a como pasaba con la técnica de *short turning*, algunos usuarios que quieran viajar entre estaciones de dos tipos distintos perderán más tiempo en este formato que al usar un método tradicional. Por ejemplo, si volvemos al ejemplo de la Figura 1.5, un usuario que quiera ir de Colombia a Pinar del Rey se verá forzado a desplazarse hasta Nuevos ministerios o Mar de Cristal para realizar un transbordo. Por ello, esta técnica es especialmente útil en recorridos largos con muchas paradas.
- Puede ser confuso para los usuarios: Debido a la complejidad del modelo, sobretodo en las variaciones de multipatrones o de *skip-stop* dinámico, puede ser confuso para los usuarios que usen el metro por primera vez. Estos no solo tendrán que descubrir qué tipo de servicio usar si no que también tendrán que tener en cuenta donde bajarse si el servicio en el que se encuentran no llega a su estación de destino.

### 1.3. Técnica elegida en el proyecto

---

Aunque parezca una técnica poco útil, *skip-stop* está siendo usada en los transportes públicos de varias partes del mundo, como Nueva York, China o Seul donde han conseguido reducir el tiempo medio de viaje de los usuarios más de un 20% y el coste total del sistema de tránsito en más de un 10% [[9], [13]].

### 1.3. Técnica elegida en el proyecto

Una vez analizadas las ventajas y los inconvenientes de cada método es necesario elegir cual de ellos va a ser aplicado en este trabajo para optimizar el transporte en la línea 1 del Metro de Madrid.

Por un lado el método *local express* ofrece buenos resultados sin necesidad de realizar estudios rigurosos sobre la demanda o aumentar la complejidad de la línea para los usuarios. Además, ayuda a reducir la posibilidad de propagación de enfermedades durante el transporte reduciendo el tiempo medio que un usuario pasa dentro de un vehículo. Ahora bien, debido a la necesidad de modificar por completo la infraestructura del metro no es una solución viable a implementar a corto plazo, y menos aún en una infraestructura cerrada y tan concurrida como el metro de Madrid.

Por otro lado, el *short turning* es un método que también ofrece grandes resultados sin aumentar innecesariamente la complejidad del uso del metro. Además, las necesidades de mejora de la infraestructura en este caso son mucho menores ya que solamente haría falta cortar un pequeño número de estaciones para habilitar la posibilidad de cambiar de sentido a un vehículo. Ahora bien, este método reduce únicamente el tiempo de espera en una estación y no el tiempo que pasan los usuarios dentro de los vehículos. Por tanto, esta solución no se adapta a los requisitos de este trabajo ya que realmente no ayuda a reducir la transmisión de enfermedades, debido a que el momento de mayor posibilidad de contagio es cuando uno se encuentra dentro de un transporte cerrado.

Por estos motivos, el método utilizado en el trabajo será el de *skip-stop*, ya que no requiere ninguna modificación de las vías ferroviarias, ayuda a reducir el tiempo medio de transporte de los usuarios, lo que a su vez disminuye las posibilidades de contagio de enfermedades, y ha ofrecido los mejores resultados hasta el momento en las zonas en las que ha sido aplicado.

De entre todas las variantes explicadas anteriormente, se utilizará la variante de *skip-stop* dinámico. Esto se debe a que es el método que genera mejores resultados y es el que mejor puede extrapolarse a un caso general.



## Capítulo 2

# Modelizado del problema

Una vez decidida la técnica a aplicar para resolver el problema, se va a proceder a explicar la modelización utilizada. Dicha modelización es una adaptación y corrección de la realizada en [14] donde se aplica la técnica de *skip-stop* dinámica para minimizar el tiempo que tardan los pasajeros en llegar a su destino.

### 2.1. Conceptos previos

Antes de proceder con la explicación matemática, van a definirse algunos conceptos previos necesarios para su comprensión:

1. *Sentido de la línea*: Se ha diferenciado la dirección en la que se desplaza un metro en dos sentidos diferentes *upstream*, que hace referencia a todos los servicios que van desde la primera estación hasta la última de la línea, y *downstream* que hace referencia a los transportes que van en la dirección contraria.
2. *Andenes de una línea*: Andenes en los que paran los trenes y esperan los usuarios. Se considerará que existen dos andenes diferentes para cada sentido de la línea.
3. *Servicio*: Es el recorrido que va a realizar un tren entre la primera y última estación. Hace referencia a las estaciones en las que va a pararse el vehículo. Es posible que una dirección presente más servicios que la otra.
4. *Depósitos*: Depósitos de trenes donde se almacenan los vehículos. Existen únicamente dos depósitos ubicados en los extremos de las líneas. Va a suponerse que solo existen dos razones por las que un servicio entraría en uno de estos depósitos:
  - a) Que haya habido una avería y requiera mantenimiento.
  - b) Que ya no sea necesario para suplir la demanda de pasajeros en lo que queda de día.

En ambos casos, si el tren entra en el depósito, éste no va a volver a salir hasta el día siguiente. Por tanto, en la modelización se va a suponer que

## Capítulo 2. Modelizado del problema

---

cuando un tren entre en uno de los dos depósitos, este ya no puede volver a las vías.

5. *Material rodante*: Cualquier tren que circule por la vía o esté esperando en un depósito.
6. *Giro*: Movimiento que realiza un tren para cambiar de sentido. Cabe destacar que los servicios están diferenciados por sentido, es decir, cuando un tren realice un giro se considerará que éste está realizando un servicio nuevo.
7. *Headway*: Tiempo que transcurre entre la pasada de dos trenes consecutivos por un mismo andén.
8. *Capacidad del tren*: Aforo máximo de personas que pueden estar de manera simultánea dentro de un mismo tren.
9. *Pasajero*: Persona que está utilizando un medio de transporte. En la modelización se hace una diferenciación entre diferentes tipos de pasajeros dependiendo de su situación concreta:
  - *Pasajeros esperando*: El número de pasajeros totales que se encuentran esperando en una estación concreta. Este tipo de pasajero incluye todas las personas que estén en el andén sin ninguna restricción adicional.
  - *Pasajeros potenciales*: De entre el número de personas que están esperando, los *pasajeros potenciales* son el número de usuarios a los que les interesa subirse a un servicio. Aunque inicialmente esta diferenciación no parezca tener mucho sentido hay que tener en cuenta que, al utilizar una estrategia *skip-stop*, no todos los servicios pueden llevar a un usuario a su estación de destino de manera directa.
  - *Pasajeros que embarcan*: De entre el número de *pasajeros potenciales* que quieren subir a un servicio los usuarios que realmente consiguen subir al tren. En el caso general, este número será igual al número de *pasajeros potenciales* pero, por temas de aforo, los *pasajeros que embarcan* podrían ser menos.
  - *Pasajeros sobrantes*: Número de *pasajeros potenciales* que se hayan quedado en el andén por limitaciones de aforo o debido a que el servicio no paraba en su estación de destino.
  - *Pasajeros que bajan*: Número de pasajeros que se bajan de un servicio en una estación.
  - *Pasajeros que viajan*: Número de pasajeros que se encuentran dentro del tren cuando este sale de la estación.

Además de las definiciones anteriores es necesario entender los siguientes conceptos:

1. *Origen de los servicios*: Todo servicio tiene dos orígenes posibles:

- *Salir de un depósito.* Para que este caso suceda el número de trenes en el depósito tiene que ser distinto de 0.
  - *Un cambio de sentido.* Como se ha mencionado anteriormente, un servicio finaliza cuando el tren llega a la última estación de su sentido. Si después de terminar su recorrido el tren realiza un giro, dará origen a un servicio nuevo.
2. *Comportamiento de los pasajeros:* Todos los pasajeros esperarán a un servicio que conecte de manera directa su estación de origen con su estación de destino, es decir, ningún pasajero se subirá a un tren que no le lleve a su destino sin necesidad de realizar un transbordo.

## 2.2. Parámetros de variables

Una vez explicados los conceptos básicos se va a indicar la notación utilizada en el modelaje y se dará una breve explicación de su significado:

<b>Parámetros</b>	<b>Definición</b>
$U$	Índice que indica el sentido <i>upstream</i> .
$D$	Índice que indica el sentido <i>downstream</i> .
$S^U$	Conjunto de estaciones que conforman el sentido <i>upstream</i> .
$S^D$	Conjunto de estaciones que conforman el sentido <i>downstream</i> .
$i, j$	Andenes cualesquiera pertenecientes a $S^U$ o $S^D$ .
$K^U$	Conjunto de todos los servicios pertenecientes al sentido <i>upstream</i> .
$K^D$	Conjunto de todos los servicios pertenecientes al sentido <i>downstream</i> .
$k, l$	Servicios cualquiera perteneciente a $K^U$ o $K^D$ .
$0^U$	Primer servicio del conjunto $K^U$ .
$0^D$	Primer servicio del conjunto $K^D$ .
$us^U$	Último servicio del conjunto $K^U$ .
$us^D$	Último servicio del conjunto $K^D$ .
$N$	Número total de andenes en una línea. Como existen dos andenes por cada estación, uno por cada dirección, el número total de plataformas será $2*N$ .
$h_{max}$	Tiempo máximo de <i>headway</i> entre dos servicios.
$h_{min}$	Tiempo mínimo de <i>headway</i> entre dos servicios.

## Capítulo 2. Modelizado del problema

---

$e_{max}$	Tiempo máximo que un tren estará parado en una estación recogiendo pasajeros.
$e_{min}$	Tiempo mínimo que un tren estará parado en una estación recogiendo pasajeros.
$s_{i,j}$	Tiempo que tarda un tren en desplazarse entre las estaciones $i$ y $j$ .
$\delta_{max}$	Tiempo máximo que tarda un tren en realizar un giro.
$\delta_{min}$	Tiempo mínimo que tarda un tren en realizar un giro.
$RS$	Número total de trenes.
$RS_{min}^F$	Variable entera que indica el número mínimo de trenes que deben acabar en cada uno de los depósitos al final del día. Sirve para poder asegurar el abastecimiento de la línea al día siguiente.
$C$	Capacidad máxima de un tren.
$M$	Número positivo muy grande, se usará en las restricciones para linealizarlas.
$T$	Espacio de tiempo total de la simulación.
$t$	Instante de tiempo perteneciente a $T$ .
$\mathcal{T}$	Conjunto ordenado de $T$ . Es un conjunto temporal con todos los instantes de $T$ ordenados.
$\tau$	Índice temporal de $\mathcal{T}$ correspondiente al instante de tiempo $t$ dentro del conjunto $T$ .
$ui\tau$	Último elemento de $\mathcal{T}$ .
$OD_{i,j}[\tau]$	Matriz de demanda temporal. Indica el número de pasajeros nuevos que quieren viajar entre las estaciones $i$ y $j$ en el instante de tiempo $\tau$ .
$p_i^U$	Pesos ponderados para los andenes del sentido <i>upstream</i> .
$p_i^D$	Pesos ponderados para los andenes del sentido <i>downstream</i> .

Antes de explicar las variables que nos encontraremos en la modelización, hay que aclarar el comportamiento de las variables binarias, las cuales solo pueden tomar el valor 0 o 1. En todos los casos planteados, si la variable vale 1 indica que el suceso que simbolizan ha sucedido y 0 en caso de que no.

### **Variables**    **Definición**

## 2.2. Parámetros de variables

$\tau_k$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ recorre la línea para cualquier $k \in K^U$ o $k \in K^D$ . Como se ha mencionado anteriormente, $\tau_k=1$ cuando el servicio recorre la línea y $\tau_k=0$ cuando no lo hace.
$\lambda_{k,i}$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ se detiene en el andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$a_{k,i}$	Variable entera que indica el instante de tiempo en el que llega un servicio $k$ a un andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$d_{k,i}$	Variable entera que indica el instante de tiempo en el que sale un servicio $k$ de un andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$e_{k,i}$	Variable entera que indica el tiempo que un servicio $k$ se mantiene parado en un andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$\gamma_{k,l}^U$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ realiza un giro en la última estación del sentido <i>upstream</i> para realizar un servicio $l$ en el sentido <i>downstream</i> , para cualquier servicio $k \in K^U$ y $l \in K^D$ .
$\gamma_{k,l}^D$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ realiza un giro en la última estación del sentido <i>downstream</i> para realizar un servicio $l$ en el sentido <i>upstream</i> , para cualquier servicio $k \in K^D$ y $l \in K^U$ .
$\alpha_k^U$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ sale del depósito 1 (depósito del sentido <i>upstream</i> ), para cualquier servicio $k \in K^U$ .
$\alpha_k^D$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ sale del depósito 2 (depósito del sentido <i>downstream</i> ), para cualquier servicio $k \in K^D$ .
$\beta_k^U$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ va a almacenarse en el depósito 2 (depósito del sentido <i>downstream</i> ), para cualquier servicio $k \in K^U$ .
$\beta_k^D$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ va a almacenarse en el depósito 1 (depósito del sentido <i>upstream</i> ), para cualquier servicio $k \in K^D$ .
$RS_1^I$	Variable entera que indica el número de trenes disponibles que hay inicialmente en el depósito 1 (depósito del sentido <i>upstream</i> ).
$RS_2^I$	Variable entera que indica el número de trenes disponibles que hay inicialmente en el depósito 2 (depósito del sentido <i>downstream</i> ).

## Capítulo 2. Modelizado del problema

---

$RS_1^F$	Variable entera que indica el número de trenes disponibles que hay al final del día en el depósito 1 (depósito del sentido <i>upstream</i> ).
$RS_2^F$	Variable entera que indica el número de trenes disponibles que hay al final del día en el depósito 2 (depósito del sentido <i>downstream</i> ).
$w_{k,i}$	Variable entera que indica el número de pasajeros esperando al servicio $k$ en el andén $i$ . Para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$w_{k,i,j}$	Variable entera que indica el número de pasajeros en el andén $i$ esperando al servicio $k$ para viajar hasta el andén $j$ . Para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andenes $i, j \in S^U$ o $i, j \in S^D$ con $i < j$ .
$w_{k,i}^b$	Variable entera que indica el número de pasajeros potenciales esperando al servicio $k$ en el andén $i$ . Para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$w_{k,i,j}^b$	Variable entera que indica el número de pasajeros potenciales en el andén $i$ esperando al servicio $k$ para viajar hasta el andén $j$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andenes $i, j \in S^U$ o $i, j \in S^D$ con $i < j$ .
$c_{k,i}^b$	Variable entera que indica el número de pasajeros que embarcan en el servicio $k$ desde el andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$c_{k,i,j}^b$	Variable entera que indica el número de pasajeros que embarcan en el servicio $k$ desde el andén $i$ para viajar hasta el andén $j$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andenes $i, j \in S^U$ o $i, j \in S^D$ con $i < j$ .
$c_{k,i}^a$	Variable entera que indica el número de pasajeros que se bajan del servicio $k$ en el andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$c_{k,i}$	Variable entera que indica el número de pasajeros que se encuentran dentro del servicio $k$ en el momento que este sale del andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andén $i \in S^U$ o $i \in S^D$ .
$w_{k,i,j}^t$	Variable entera que indica el número de pasajeros que, después de la salida del servicio $k$ , se quedan esperando en el andén $i$ para viajar hasta el andén $j$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andenes $i, j \in S^U$ o $i, j \in S^D$ con $i < j$ .
$z_{k,i}^t$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ ya ha salido del andén $i$ en el instante $\tau$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ , andenes $i, j \in S^U$ o $i, j \in S^D$ y $t \in T$ .

## 2.3. Restricciones

$b_{k,i}^T$	Variable binaria que indica si, en el instante actual, nos encontramos entre la salida del servicio $k$ y el servicio $k - 1$ . Dicho de otra forma, indica si el servicio $k - 1$ ya ha salido del andén $i$ pero el servicio $k$ todavía no, para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ , andenes $i, j \in S^U$ o $i, j \in S^D$ y $t \in T$ .
$\phi_{i,j}^k$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ para en los andenes $i$ y $j$ . Para cualquier servicio $k \in K^U$ o $k \in K^D$ y andenes $i, j \in S^U$ o $i, j \in S^D$ .
$\psi_i^k$	Variable binaria que indica si el servicio $k$ para en alguna estación más a partir de la estación $i$ , para cualquier andén $0 \leq i < N$ si $i \in S^U$ o $N \leq i < 2 * N$ si $i \in S^D$ .
$x_{k,i}^U$	Variable entera que indica el número de pasajeros que pueden subir al servicio $k$ cuando éste llega al andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ y andenes $i, j \in S^U$ .
$x_{k,i}^D$	Variable entera que indica el número de pasajeros que pueden subir al servicio $k$ cuando éste llega al andén $i$ , para cualquier servicio $k \in K^D$ y andenes $i, j \in S^D$ .
$porc_{k,i,j}^U$	Variable continua que, en base a la modelización elegida, se utiliza para estimar $c_{k,i,j}^b$ a partir de $c_{k,i}^b$ , para cualquier servicio $k \in K^U$ y andenes $i, j \in S^U$ con $i < j$ .
$porc_{k,i,j}^D$	Variable continua que, en base a la modelización elegida, se utiliza para estimar $c_{k,i,j}^b$ a partir de $c_{k,i}^b$ , para cualquier servicio $k \in K^D$ y andenes $i, j \in S^D$ con $i < j$ .

En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo gráfico de una línea modelizada:

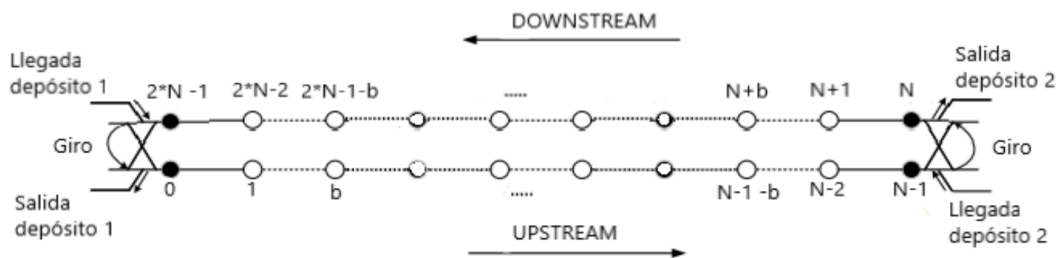


Figura 2.1: Ejemplo de una línea de metro genérica representada con la modelización dada. Fuente [14]

## 2.3. Restricciones

Una vez mencionadas todas las variables que van a usarse, pasemos a explicar las restricciones del modelo.

## Capítulo 2. Modelizado del problema

---

Para resolver el problema principal, éste se ha dividido en 4 subproblemas diferentes relacionados entre sí:

1. En qué estaciones deberá parar cada servicio.
2. Los horarios que deberán cumplir cada uno de los servicios programados.
3. La cantidad de trenes necesarios en un día.
4. Como distribuir las tres necesidades anteriores para suplir la demanda de usuarios.

Debido a que se utilizará el programa CPLEX para resolver el problema, se han linealizado todas las restricciones para su posterior implementación.

### 2.3.1. Restricciones de servicio a estaciones

1. Si un servicio  $k \in K^U$  no recorre la línea, entonces  $\tau_k = 0$  y, por tanto,  $k$  no para en ningún andén del sentido *upstream*. Esto da como resultado que  $\lambda_{k,i} = 0$  para todo andén  $i \in S^U$ . Dicho de otra forma, si el servicio  $k$  no recorre la línea,  $k$  no parará en ninguna estación. La ecuación que representa este comportamiento es la siguiente:

$$\lambda_{k,i} \leq \tau_k, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U. \quad (1.1)$$

Lo mismo pasa para el sentido *downstream*:

$$\lambda_{k,i} \leq \tau_k, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D. \quad (1.2)$$

2. También, va a imponerse que si un servicio es elegido para recorrer la línea, éste pare en al menos 2 estaciones. Esto se debe a que, en caso de que pare en menos, ningún usuario podrá subirse a él, gastando innecesariamente un tren.

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{k,i} \geq 2 * \tau_k, \quad \forall k \in K^U, \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=N}^{2*N-1} \lambda_{k,i} \geq 2 * \tau_k, \quad \forall k \in K^D. \quad (2.2)$$

3. Para evitar una espera excesivamente larga de los pasajeros, se va a imponer que al menos uno de cada dos servicios pare en el andén  $i$  para todo  $i \in S^U$  o  $i \in S^D$ . Por tanto:

$$\lambda_{k-1,i} + \lambda_{k,i} \geq 1, \quad \forall k-1, k \in K^U, i \in S^U, \quad (3.1)$$

$$\lambda_{k-1,i} + \lambda_{k,i} \geq 1, \quad \forall k-1, k \in K^D, i \in S^D. \quad (3.2)$$

### 2.3.2. Restricciones de horarios

#### Restricciones de llegadas y salidas

4. Para evitar que un tren realice una parada excesivamente larga o excesivamente corta, se va a imponer un tiempo máximo y mínimo de detención. También, se va a imponer que si un tren no se detiene en una estación su tiempo de detención valga 0.

Para anular el tiempo de detención en las estaciones donde  $k$  no vaya a detenerse se va a multiplicar las cotas del tiempo de detención por la variable binaria  $\lambda_{k,i}$ . Esta variable valdrá 0 cuando el tren no se detenga y, por tanto, restringirá el valor de  $e_{k,i}$  de la forma  $0 \leq e_{k,i} \leq 0$ .

$$e_{k,i} \leq e_{max} * \lambda_{k,i}, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (4.1)$$

$$e_{k,i} \leq e_{max} * \lambda_{k,i}, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D, \quad (4.2)$$

$$e_{k,i} \geq e_{min} * \lambda_{k,i}, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (4.3)$$

$$e_{k,i} \geq e_{min} * \lambda_{k,i}, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D. \quad (4.4)$$

5. Para calcular la hora de salida de un servicio de una estación, se va a sumar a la hora de llegada de éste el tiempo que está parado.

$$d_{k,i} = a_{k,i} + e_{k,i}, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (5.1)$$

$$d_{k,i} = a_{k,i} + e_{k,i}, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D. \quad (5.2)$$

6. Para calcular la hora de llegada de un servicio a la estación  $i$ , se va a sumar a la hora de salida del mismo servicio de la estación  $i-1$ , el tiempo que tarda un tren en viajar desde  $i-1$  a  $i$ .

$$d_{k,i-1} + s_{i-1,i} = a_{k,i}, \quad \forall k \in K^U, i-1, i \in S^U, \quad (6.1)$$

$$d_{k,i-1} + s_{i-1,i} = a_{k,i}, \quad \forall k \in K^D, i-1, i \in S^D. \quad (6.2)$$

Como  $s_{i-1,i}$  es una constante conocida, se puede calcular la hora de llegada de cualquier servicio a cualquier estación sabiendo únicamente su hora de salida de la estación anterior.

#### Restricciones de *headway*

7. Para evitar que dos trenes consecutivos choquen en las vías se tiene que imponer un tiempo mínimo de *headway*. Además, impondremos también un tiempo máximo para evitar esperas entre servicios excesivamente largas. Finalmente, si el servicio  $k$  no recorre la línea se impondrá que el tiempo de *headway* entre  $k$  y el servicio anterior sea 0.

Por tanto, la definición del tiempo entre servicios sería la siguiente:

## Capítulo 2. Modelizado del problema

---

$$\begin{aligned} h_{min} \leq d_{k,i} - d_{k-1,i} \leq h_{max}, \quad \text{si } \tau_k = 1, \quad \forall k-1, k \in K^U \text{ o } K^D, i \in S^U \text{ o } S^D \\ d_{k,i} - d_{k-1,i} = 0, \quad \text{si } \tau_k = 0, \quad \forall k-1, k \in K^U \text{ o } K^D, i \in S^U \text{ o } S^D. \end{aligned}$$

(Ecuaciones no lineales)

Como estas ecuaciones no son lineales se substituirán por las dos siguientes equivalentes:

$$h_{min} * \tau_k \leq d_{k,i} - d_{k-1,i} \leq h_{max} * \tau_k, \quad \forall k-1, k \in K^U, i \in S^U, \quad (7.1)$$

$$h_{min} * \tau_k \leq d_{k,i} - d_{k-1,i} \leq h_{max} * \tau_k, \quad \forall k-1, k \in K^D, i \in S^D. \quad (7.2)$$

Igual a como se hizo en la restricción 4, el *headway* entre  $k$  y  $k-1$  se anulará cuando  $\tau_k$  valga 0.

### Restricciones de giros

8. Igual a como hemos hecho con el *headway*, el tiempo que tarda un servicio  $k$  en girar para realizar un nuevo servicio  $l$ , tiene que estar comprendido entre dos constantes. Lo que se ha hecho para calcular el tiempo que un tren tarda en girar ha sido restarle a la hora de llegada del nuevo servicio  $l$  al andén  $N$  (el primero del sentido *downstream*) la hora de salida del servicio  $k$  del andén  $N-1$  (el último del sentido *upstream*). Ídem para el giro de *downstream* a *upstream*. Las ecuaciones no lineales que indican esto son:

$$\begin{aligned} \delta_{min} \leq a_{l,N} - d_{k,N-1} \leq \delta_{max}, \quad \text{si } \gamma_{k,l}^U = 1, \forall k \in K^U, l \in K^D, \\ \delta_{min} \leq a_{k,0} - d_{l,2*N-1} \leq \delta_{max}, \quad \text{si } \gamma_{k,l}^U = 1, \forall l \in K^D, k \in K^U. \end{aligned}$$

(Ecuaciones no lineales)

Si linealizamos estas dos ecuaciones e inicializamos el tiempo de giro de un tren que se queda en un depósito a un número muy grande, tenemos las siguientes restricciones:

$$a_{l,N} - d_{k,N-1} \geq \delta_{min} + M * (\gamma_{k,l}^U - 1), \quad \forall k \in K^U, l \in K^D, \quad (8.1.1)$$

$$a_{l,N} - d_{k,N-1} \leq \delta_{max} - M * (\gamma_{k,l}^U - 1), \quad \forall k \in K^U, l \in K^D, \quad (8.1.2)$$

$$a_{k,0} - d_{l,2*N-1} \geq \delta_{min} + M * (\gamma_{l,k}^D - 1), \quad \forall l \in K^D, k \in K^U, \quad (8.2.1)$$

$$a_{k,0} - d_{l,2*N-1} \leq \delta_{max} - M * (\gamma_{l,k}^D - 1), \quad \forall l \in K^D, k \in K^U. \quad (8.2.2)$$

La idea tras estas restricciones es acotar el tiempo de giro entre los valores  $\delta_{min}$  y  $\delta_{max}$  si  $\gamma_{k,l}^U = 1$  y, en caso contrario, no restringir en absoluto el tiempo de giro. Con esto conseguimos que este tiempo tome un valor “infinito” indicando que el servicio nunca llega a girar. Por ello, si  $\gamma_{k,l}^U = 0$ , en la primera ecuación se le resta el valor  $M$  a  $\delta_{min}$  y en la segunda se le suma  $\delta_{max}$  dando como resultado un número muy negativo y muy positivo, respectivamente.

**2.3.3. Restricciones de material rodante.**

9. Como dijimos al principio del capítulo, todo servicio  $k$  puede tener dos orígenes posibles: que el tren salga de un depósito ( $\alpha_k^U = 1$  o  $\alpha_k^D = 1$  y  $\gamma_{l,k} = 0$ ) o que el tren haya realizado un giro después de acabar un servicio en el sentido contrario ( $\alpha_k^U = 0$ ,  $\alpha_k^D = 0$  y  $\gamma_{l,k} = 1$ ). Dicho de otra forma, el servicio  $k$  recorre la línea ( $\tau_k = 1$ ) si y solo si  $k$  sale de un depósito o, si existe un servicio  $l$  que, al acabar su recorrido por el sentido contrario, haga un giro para realizar el servicio  $k$ , no pudiendo suceder ambas condiciones a la vez. Esta condición se modeliza de la siguiente manera:

$$\sum_{l \in K^D} \gamma_{l,k}^D + \alpha_k^U = \tau_k, \quad \forall k \in K^U, \quad (9.1)$$

$$\sum_{k \in K^U} \gamma_{k,l}^U + \alpha_l^D = \tau_l, \quad \forall l \in K^D. \quad (9.2)$$

10. De manera análoga a la restricción anterior, cuando un servicio termina su recorrido solo pueden suceder dos cosas: que este se quede en el depósito correspondiente ( $\beta_k^U = 1$  o  $\beta_k^D = 1$  y  $\gamma_{k,l} = 0$ ) o que realice un giro ( $\beta_k^U = 0$ ,  $\beta_k^D = 0$  y  $\gamma_{k,l} = 1$ ), no pudiendo suceder ambas situaciones a la vez.

$$\sum_{l \in K^D} \gamma_{k,l}^U + \beta_k^U = \tau_k, \quad \forall k \in K^U, \quad (10.1)$$

$$\sum_{k \in K^U} \gamma_{l,k}^D + \beta_l^D = \tau_l, \quad \forall l \in K^D. \quad (10.2)$$

A continuación hacen falta restricciones para controlar el número de trenes recorriendo la línea en cada momento, ya que estos no son infinitos.

11. Primero restringiremos el número de trenes que salen de cada depósito. Hay que recordar que cuando un tren entra en un depósito, este no puede volver a salir. Por tanto, vamos a limitar el número de trenes que salen de un depósito a siempre ser menor o igual al número de trenes que había inicialmente ese día:

$$RS_1^I \geq \sum_{k \in K^U} \alpha_k^U, \quad (11.1)$$

$$RS_2^I \geq \sum_{k \in K^D} \alpha_k^D. \quad (11.2)$$

12. Es necesario saber el número de trenes que terminan en cada uno de los dos depósitos para poder simular el día siguiente. Por tanto, este número va a calcularse a través de la siguientes restricciones:

$$RS_1^F = RS_1^I + \sum_{l \in K^D} \beta_l^D - \sum_{k \in K^U} \alpha_k^U, \quad (12.1)$$

## Capítulo 2. Modelizado del problema

---

$$RS_2^F = RS_2^I + \sum_{k \in K^U} \beta_k^U - \sum_{l \in K^D} \alpha_l^D. \quad (12.2)$$

En estas restricciones se calcula el número de trenes al final del día cogiendo el número de trenes que había al principio, sumándole el número de trenes que entran en ese andén y restándole el número de trenes que hayan salido de él.

13. La siguiente restricción se utiliza para evitar un número de trenes mayor a los disponibles, comparando los trenes que hay en los dos depósitos con el número de trenes totales. No se usará una igualdad porque en trabajos futuros podría simularse la avería de un tren, rompiendo la igualdad entre los trenes totales y los trenes disponibles.

$$RS_1^I + RS_2^I \leq RS. \quad (13)$$

14. Para evitar que alguno de los sentidos se pueda quedar sin trenes disponibles durante el día siguiente, se va a restringir el número de trenes disponibles al final del día a un valor mínimo (ya que se supone que el número de trenes disponibles al final del día será el mismo que al principio del día siguiente).

$$RS_1^F \geq RS_{min}^F, \quad (14.1)$$

$$RS_2^F \geq RS_{min}^F. \quad (14.2)$$

### 2.3.4. Restricciones de demanda

Las primeras restricciones de demanda que se crearán servirán para evitar el movimiento de pasajeros entre servicios, es decir, evitan que un pasajero esperando salga del metro o se mueva a otro andén sin subirse a un servicio.

15. El número de pasajeros esperando al servicio  $k$  en el andén  $i$ , se calculará como la suma de todos los pasajeros esperando a  $k$  en el andén  $i$  que quieren viajar hasta un andén  $j$ , con  $j$  un andén posterior a  $i$ :

$$w_{k,i} = \sum_{j=i+1}^N w_{k,i,j}, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (15.1)$$

$$w_{k,i} = \sum_{j=i+1}^{2*N-1} w_{k,i,j}, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D. \quad (15.2)$$

16. Siguiendo un razonamiento análogo al de la restricción anterior, se calcula el número de pasajeros potenciales de la siguiente forma:

$$w_{k,i}^b = \sum_{j=i+1}^N w_{k,i,j}^b, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (16.1)$$

$$w_{k,i}^b = \sum_{j=i+1}^{2*N-1} w_{k,i,j}^b, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D. \quad (16.2)$$

17. Y lo mismo se repite para calcular el número de pasajeros que realmente embarcan en el servicio  $k$ :

$$c_{k,i}^b = \sum_{j=i+1}^N c_{k,i,j}^b, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (17.1)$$

$$c_{k,i}^b = \sum_{j=i+1}^{2*N-1} c_{k,i,j}^b, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D. \quad (17.2)$$

18. A continuación, se calculará el número de pasajeros en el andén  $i$  esperando al servicio  $k$  que quieren ir hasta el andén  $j$ . Este número se calculará gracias a la matriz de demanda temporal  $OD_{i,j}[\tau]$ . Esta matriz indica, para cada instante de tiempo  $\tau$ , la cantidad de pasajeros nuevos que llegan al andén  $i$  para desplazarse al andén  $j$ , es decir, indica la cantidad de gente nueva que llega al andén en cada momento y la estación a la que éstos quieren llegar. Gracias a esta información, se puede calcular  $w_{k,i,j}$  como la suma de todos los pasajeros que no subieron al servicio  $k-1$ , ya sea porque no cabían o porque  $k-1$  no paraba en su destino, que querían irse a  $j$  más el número de nuevos usuarios que han llegado al andén entre la salida del servicio anterior y el servicio actual. En caso de que nos encontremos en el primer tren del día ( $k=0$ ) el número de pasajeros que van de  $i$  a  $j$  será solamente la suma los valores de la matriz de demanda temporal desde el instante 0 hasta la salida del primer servicio. En estas ecuaciones va a utilizarse la función  $P_i[\tau]$  que convierte el instante temporal  $\tau$  en una hora del día para poder aplicar los valores de la matriz de demanda temporal sobre un intervalo de tiempo:

$$w_{k,i,j} = \begin{cases} w_{k,i,j}^r + \int_{d_{k-1,i}}^{d_{k,i}} P_i[\tau] * OD_{i,j}[\tau] * dt, \\ \text{si } k > 0^U, \forall k \in K^U, \forall i, j \in S^U, i < j, \forall \tau \in \mathcal{T}, \\ \\ \int_{0^U}^{d_{k,i}} P_i[\tau] * OD_{i,j}[\tau] * dt, \\ \text{si } k = 0^U, \forall i, j \in S^U, i < j, \forall \tau \in \mathcal{T}, \end{cases}$$

$$w_{k,i,j} = \begin{cases} w_{k,i,j}^r + \int_{d_{k-1,i}}^{d_{k,i}} P_i[\tau] * OD_{i,j}[\tau] * dt, \\ \text{si } k > 0^D, \forall k \in K^D, \forall i, j \in S^D, i < j, \forall \tau \in \mathcal{T}, \\ \\ \int_{0^D}^{d_{k,i}} P_i[\tau] * OD_{i,j}[\tau] * dt, \\ \text{si } k = 0^D, \forall i, j \in S^D, i < j, \forall \tau \in \mathcal{T}. \end{cases}$$

Puesto que las restricciones anteriores no son lineales, se va a crear la variable binaria  $z_{k,i}^T$  para poder simular el comportamiento de éstas. Esta

## Capítulo 2. Modelizado del problema

variable indica si el servicio  $k$  ya ha salido del andén  $i$  en el instante temporal  $\tau$ . Es importante destacar que esta variable se activa exactamente en el mismo instante de la salida del servicio  $k$ , es decir, se activa en el primer instante en el que  $k$  ya ha abandonado el andén  $i$ . Para simular este comportamiento tenemos que obligar a que, en el momento que  $z_{k,i}^\tau$  sea igual a 1, todo  $z_{k,i}^{\tau^*}$  con  $\tau^* > \tau$  sea 1 también, es decir, que una vez ha salido el tren de la estación, la variable se mantenga activada para todo momento temporal posterior:

$$z_{k,i}^{\tau-1} \leq z_{k,i}^\tau, \quad \forall k \in K^U, \forall i \in S^U, \forall \tau \in \mathcal{T}, \tau \geq 2, \quad (18.1.1)$$

$$z_{k,i}^{\tau-1} \leq z_{k,i}^\tau, \quad \forall k \in K^D, \forall i \in S^D, \forall \tau \in \mathcal{T}, \tau \geq 2. \quad (18.1.2)$$

Como conocemos el valor de  $d_{k,i}$ , calculado en las restricciones 5 y 6, tenemos el instante temporal exacto en el que  $z_{k,i}^\tau$  se activa. Con esta información, podemos inicializar los valores de  $z_{k,i}^\tau$  con las siguientes restricciones:

$$d_{k,i} = \sum_{\tau=2}^{\mathcal{T}} \tau * (z_{k,i}^\tau - z_{k,i}^{\tau-1}), \quad \forall k \in K^U, \forall i \in S^U, \quad (18.2.1)$$

$$d_{k,i} = \sum_{\tau=2}^{\mathcal{T}} \tau * (z_{k,i}^\tau - z_{k,i}^{\tau-1}), \quad \forall k \in K^D, \forall i \in S^D. \quad (18.2.2)$$

Ahora crearemos la variable binaria  $b_{k,i}^\tau$ . Esta variable indica si el instante de tiempo  $\tau$  se encuentra dentro del intervalo conformado por el instante de salida del servicio  $k-1$  y el servicio  $k$  del andén  $i$ , es decir, si  $\tau \in [d_{k-1,i}, d_{k,i}]$ . Esta variable se usará para saber que instantes de tiempo de la matriz de demanda temporal tener en cuenta para contabilizar el número de pasajeros nuevos que entran en el andén. Para conocer su valor, tenemos que calcular para cada instante de tiempo la diferencia entre las variables  $z_{k-1,i}^\tau$  y  $z_{k,i}^\tau$  ya que, si el valor de estas difiere, significará que el servicio  $k-1$  ya ha abandonado el andén, pero el servicio  $k$  todavía no. Hay que tener en cuenta que si el servicio  $k$  es el primero del día ( $k=0$ ) entonces basta con calcular la diferencia entre  $z_{k,i}^\tau$  y 1.

$$b_{k,i}^\tau = \begin{cases} 1 - z_{k,i}^\tau, & \forall k \in K^U, k = 0^U, \forall i \in S^U, \forall \tau \in \mathcal{T}, \\ z_{k-1,i}^\tau - z_{k,i}^\tau, & \forall k \in K^U, k > 0^U, \forall i \in S^U, \forall \tau \in \mathcal{T}, \end{cases} \quad (18.3.1)$$

$$b_{k,i}^\tau = \begin{cases} 1 - z_{k,i}^\tau, & \forall k \in K^D, k = 0^D, \forall i \in S^D, \forall \tau \in \mathcal{T}, \\ z_{k-1,i}^\tau - z_{k,i}^\tau, & \forall k \in K^D, k > 0^D, \forall i \in S^D, \forall \tau \in \mathcal{T}. \end{cases} \quad (18.3.2)$$

Ahora, si aplicamos las variables creadas para modificar la ecuación original obtenemos la siguiente restricción lineal:

$$w_{k,i,j} = \begin{cases} w_{k-1,i,j}^r + \sum_{\tau=1}^{\mathcal{T}} b_{k,i}^{\tau} * OD_{i,j}[\tau], \\ \forall k \in K^U, k > 0^U, \forall i, j \in S^U, i < j, \end{cases} \quad (18.4.1)$$

$$w_{k,i,j} = \begin{cases} w_{k-1,i,j}^r + \sum_{\tau=1}^{\mathcal{T}} b_{k,i}^{\tau} * OD_{i,j}[\tau], \\ \forall k \in K^D, k > 0^D, \forall i, j \in S^D, i < j, \end{cases} \quad (18.4.2)$$

Cabe destacar que, como  $OD_{i,j}[\tau]$  es una matriz, en el momento de realizar la implementación, hay que asegurarse de que los índices  $\tau \in \mathcal{T}$ , vayan de 0 a  $HORAFINAL - 1$ , donde  $HORAFINAL$  es el último instante del día.

19. Ahora calcularemos el número de pasajeros potenciales que quieren subirse a  $k$  desde el andén  $i$  para bajarse en  $j$ . Este valor está condicionado por el servicio  $k$ , ya que si éste no para en los andenes  $i$  o  $j$  el valor de  $w_{k,i,j}^b$  será 0 y, en caso contrario,  $w_{k,i,j}^b = w_{k,i,j}$ . Por tanto, y teniendo en cuenta que  $\lambda_{k,i}$  es la variable binaria que indica si el servicio  $k$  para en el andén  $i$ , conseguimos las siguientes restricciones.

$$\begin{aligned} w_{k,i,j}^b &= w_{k,i,j} * \lambda_{k,i} * \lambda_{k,j} \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \\ w_{k,i,j}^b &= w_{k,i,j} * \lambda_{k,i} * \lambda_{k,j} \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j. \end{aligned} \quad (\text{Ecuaciones no lineales})$$

Estas dos ecuaciones no lineales pueden substituirse por los siguientes grupos de restricciones:

$$\lambda_{k,i} + \lambda_{k,j} \leq 1 + \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (19.1.1)$$

$$\lambda_{k,i} + \lambda_{k,j} \leq 1 + \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j, \quad (19.1.2)$$

$$\lambda_{k,i} + \lambda_{k,j} \geq 2 * \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (19.2.1)$$

$$\lambda_{k,i} + \lambda_{k,j} \geq 2 * \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j. \quad (19.2.2)$$

Estas 4 restricciones evitan casos imposibles, como que  $k$  pare tanto en  $i$  como en  $j$  pero que la variable  $\phi_{i,j}^k = 0$  o que  $\phi_{i,j}^k = 1$  pero alguna de las variables  $\lambda_{k,x} = 0$ .

$$w_{k,i,j}^b \leq M * \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (19.3.1)$$

$$w_{k,i,j}^b \leq M * \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j, \quad (19.3.2)$$

## Capítulo 2. Modelizado del problema

$$w_{k,i,j}^b \leq w_{k,i,j}, \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (19.4.1)$$

$$w_{k,i,j}^b \leq w_{k,i,j}, \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j, \quad (19.4.2)$$

$$w_{k,i,j}^b \geq w_{k,i,j} - M * (1 - \phi_{i,j}^k), \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (19.5.1)$$

$$w_{k,i,j}^b \geq w_{k,i,j} - M * (1 - \phi_{i,j}^k), \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j. \quad (19.5.2)$$

Las primeras 4 de estas restricciones sirven para restringir el valor de  $w_{k,i,j}^b$  a ser 0 cuando  $\phi_{i,j}^k = 0$ , se supone que  $w_{k,i,j}^b \geq 0$ . Los otros dos pares de desigualdades buscan restringir el valor de los pasajeros potenciales de la forma  $w_{k,i,j} \leq w_{k,i,j}^b \leq w_{k,i,j}$ . De esta forma se obliga a la igualdad cuando  $\phi_{i,j}^k = 1$  y, a que  $w_{k,i,j}^b = 0$  en caso contrario, en el cual las restricciones 19.3.1 y 19.3.2 serían suficientes para calcular  $w_{k,i,j}^b$ .

20. Ahora, procederemos a calcular el número de pasajeros que hay dentro del tren cuando éste sale de un andén. Para ello basta con sumarle al número de pasajeros que había al salir del andén anterior, el número de pasajeros que hayan subido en el andén actual y restarle el número de pasajeros que se hayan bajado. En caso de encontrarnos en el primer andén del sentido se supone que el tren comienza el recorrido estando vacío y, por tanto, basta con contabilizar la gente que se sube.

$$\begin{cases} c_{k,i} = c_{k,i}^b & \forall k \in K^U, i \in S^U, i = 0, \\ c_{k,i} = c_{k-1,i} + c_{k,i}^b - c_{k,i}^a & \forall k \in K^U, i \in S^U, i > 0, \end{cases} \quad (20.1)$$

$$\begin{cases} c_{k,i} = c_{k,i}^b & \forall k \in K^D, i \in S^D, i = N, \\ c_{k,i} = c_{k-1,i} + c_{k,i}^b - c_{k,i}^a & \forall k \in K^D, i \in S^D, i > N. \end{cases} \quad (20.2)$$

21. Para calcular el número de pasajeros que pueden embarcar en el tren se va a utilizar la variable auxiliar  $x_{k,i}^U$ . En esta variable vamos a almacenar el número de pasajeros que caben en el tren. Con esta información y con el número de pasajeros potenciales que quieren subir al servicio, el número de pasajeros que podrán embarcar será el máximo número de pasajeros potenciales que quepan dentro del tren. Para esto, inicializaremos  $x_{k,i}^U$  como la capacidad máxima del tren, en el caso de encontrarnos en el primer andén, o como la capacidad máxima del servicio menos la gente que ya está dentro del mismo. Por tanto obtenemos las siguientes restricciones:

$$x_{k,i}^U = \begin{cases} C - c_{k,i-1} + c_{k,i}^a, & \forall k \in K^U, i \in S^U, i > 0, \\ C, & \forall k \in K^U, i \in S^U, i = 0, \end{cases} \quad (21.1.1)$$

$$c_{k,i}^b \leq x_{k,i}^U, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (21.1.2)$$

$$c_{k,i}^b \leq w_{k,i}^b, \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (21.1.3)$$

$$x_{k,i}^D = \begin{cases} C - c_{k,i-1} + c_{k,i}^a, & \forall k \in K^D, i \in S^D, i > N, \\ C, & k \in K^D, i \in S^D, i = N, \end{cases} \quad (21.2.1)$$

$$c_{k,i}^b \leq x_{k,i}^D, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D, \quad (21.2.2)$$

$$c_{k,i}^b \leq w_{k,i}^b, \quad \forall k \in K^D, i \in S^D. \quad (21.2.3)$$

22. A continuación, calcularemos el número de pasajeros de  $k$  que se bajan en un andén  $i$ . Para ello, simplemente imponemos que este número sea igual a la suma de todos los pasajeros de andenes anteriores que se subieran a  $k$  con la intención de bajarse en  $i$ . En caso de encontrarnos en la primera estación del sentido ( $i = 0$  o  $i = N$ ), como el tren se encuentra vacío,  $c_{k,i}^a = 0$ .

$$\begin{cases} c_{k,i}^a = 0 & \forall k \in K^U, i \in S^U, i = 0, \\ c_{k,i}^a = \sum_{j=1}^{i-1} c_{k,j,i}^b & \forall k \in K^U, i \in S^U, i > 0. \end{cases} \quad (22.1)$$

$$\begin{cases} c_{k,i}^a = 0 & \forall k \in K^D, i \in S^D, i = N, \\ c_{k,i}^a = \sum_{j=N}^{i-1} c_{k,j,i}^b & \forall k \in K^D, i \in S^D, i > N. \end{cases} \quad (22.2)$$

23. A continuación, queremos calcular el valor de la variable  $c_{k,i,j}^b$ . Para ello, usaremos tanto el número total de pasajeros que pueden subir al tren ( $c_{k,i}^b$ ) como el número de pasajeros potenciales esperando a  $k$  en  $i$  con destino  $j$  ( $w_{k,i,j}^b$ ). Si la suma de todos los pasajeros esperando en  $i$  es menor al número de plazas disponibles en el servicio ( $w_{k,i}^b \leq c_{k,i}^b$ ), todos los pasajeros potenciales podrán subir al servicio ( $c_{k,i,j}^b = w_{k,i,j}^b$ ). Ahora bien, si el número de pasajeros esperando es mayor al espacio disponible en el tren, tenemos que decidir, de cada una de las variables  $w_{k,i,j}^b$ , qué pasajeros suben al tren y cuáles no.

Antes de explicar las dos formas que se han utilizado para el cálculo de  $c_{k,i,j}^b$ , se va a introducir la variable binaria  $\psi_i^k$ . Dicha variable indica si el servicio  $k$  se detiene en algún andén  $j$  posterior a  $i$ , y se usará para evitar incongruencias en la modelización. Para inicializar esta variable se han impuesto las siguientes restricciones:

$$\sum_{j=i+1}^N \phi_{i,j}^k \geq \psi_i^k \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (23.1.1)$$

$$\psi_i^k \geq \frac{\sum_{j=i+1}^N \phi_{i,j}^k}{N} \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (23.1.2)$$

$$\sum_{j=i+1}^{2*N-1} \phi_{i,j}^k \geq \psi_i^k \quad \forall k \in K^D, i \in S^D, \quad (23.2.1)$$

$$\psi_i^k \geq \frac{\sum_{j=i+1}^{2*N-1} \phi_{i,j}^k}{N} \quad \forall k \in K^D, i \in S^D. \quad (23.2.2)$$

## Capítulo 2. Modelizado del problema

En las restricciones anteriores se restringe el valor de  $\psi_i^k$  de la forma  $0 \geq \psi_i^k \geq 0$  si el servicio  $k$  no para en ninguna estación  $j$  posterior a  $i$ . En caso contrario, se inicializa como  $\sum_{j=i+1}^N \phi_{i,j}^k \geq \psi_i^k \geq \frac{\sum_{j=i+1}^N \phi_{i,j}^k}{N}$ . En este segundo caso,  $\psi_i^k$  está restringida entre un valor mayor que 0 y otro mayor o igual a 1 y, como esta variable es binaria por definición, al restringirla de esta forma aseguramos que su valor sea 1.

Una vez introducido  $\psi_i^k$  se explicarán dos aproximaciones para simular el comportamiento de  $c_{k,i,j}^b$ :

- a) En la primera aproximación se va a calcular la proporción de pasajeros que tienen como destino el andén  $j$  sobre el total de pasajeros esperando a  $k$ . De esta forma, si imponemos que esta proporción se mantendrá para las personas que pueden embarcar en el tren, se puede calcular  $c_{k,i,j}^b$  multiplicando este porcentaje por  $c_{k,i}^b$ :

$$c_{k,i,j}^b = \frac{w_{k,i,j}^b}{w_{k,i}^b} * c_{k,i}^b \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (\text{Ecuaciones no lineales})$$

$$c_{k,i,j}^b = \frac{w_{k,i,j}^b}{w_{k,i}^b} * c_{k,i}^b \quad \forall k \in K^D, i \in S^D.$$

Cabe destacar que no estamos teniendo en cuenta el número total de pasajeros esperando si no los pasajeros potenciales. Esto se debe a que si un servicio no se detiene en la estación de destino  $j$  de un pasajero, éste no se subirá al tren aunque haya un hueco disponible.

Se ha intentado linealizar este par de restricciones aproximando la proporción de pasajeros potenciales como la proporción de pasajeros que viajan de  $i$  a  $j$  sobre todo los instantes del día. Dicho de otro modo, en vez de calcular esta proporción sobre las personas que están esperando a un servicio  $k$  concreto, vamos a calcular la proporción de pasajeros totales en un día que viajan de  $i$  a  $j$  sin importar el servicio al que éstos estén esperando. Para ello usaremos la matriz de demanda temporal y la variable  $\phi_{i,j}^k$ , que indica si  $k$  se para en  $i$  y  $j$ :

$$c_{k,i,j}^b = \frac{\sum_{\tau} OD_{i,j}[\tau] * \phi_{i,j}^k}{\sum_{\tau} \sum_{j=i+1}^N (OD_{i,j}[\tau] * \phi_{i,j}^k)} * c_{k,i}^b \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (23.A.1)$$

$$c_{k,i,j}^b = \frac{\sum_{\tau} OD_{i,j}[\tau] * \phi_{i,j}^k}{\sum_{\tau} \sum_{j=i+1}^{2*N} (OD_{i,j}[\tau] * \phi_{i,j}^k)} * c_{k,i}^b \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j. \quad (23.A.2)$$

Cabe destacar que en el denominador se multiplica por  $\phi_{i,j}^k$  para no contabilizar las estaciones en las que  $k$  no se para, y así conseguir el porcentaje de pasajeros que viajan entre dos estaciones respecto a las

estaciones donde para  $k$ , y no sobre el total. Ahora bien, esta operación puede generar una división entre 0 si el servicio  $k$  no vuelve a parar en ninguna estación  $j$  posterior  $i$ . Por ello, para evitar este caso, se han impuesto las 2 siguientes restricciones en las que se utiliza la variable binaria  $\psi_i^k$  y que restringen el valor de  $c_{k,i,j}^b$  a 0 en caso de que el tren no se vuelva a detener:

$$c_{k,i,j}^b \leq M * \psi_i^k \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (23.A.3)$$

$$c_{k,i,j}^b \leq M * \psi_i^k \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j. \quad (23.A.4)$$

Otra solución a la posible división entre 0, sería modificar el problema principal imponiendo que todo servicio que recorre un sentido se detenga tanto en el primer como en el último andén de su sentido. De esta forma aseguraríamos que  $\psi_i^k$  siempre sería distinto de 0 para cualquier andén de los dos sentidos.

- b) En esta segunda aproximación se van a declarar una serie de porcentajes aleatorios que se multiplicarán por  $c_{k,i}^b$  para estimar el valor de  $c_{k,i,j}^b$ . Además, también se va a utilizar la variable binaria  $\psi_i^k$  para evitar incongruencias.

$$\sum_{j=i+1}^N (porc_{k,i,j}^U * \phi_{i,j}^k) = \psi_i^k \quad \forall k \in K^U, i \in S^U, \quad (23.B.1)$$

$$\sum_{j=i+1}^{2*N-1} (porc_{k,i,j}^D * \phi_{i,j}^k) = \psi_i^k \quad \forall k \in K^D, i \in S^D, \quad (23.B.2)$$

$$c_{k,i,j}^b = porc_{k,i,j}^U * c_{k,i}^b * \phi_{i,j}^k \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (23.B.3)$$

$$c_{k,i,j}^b = porc_{k,i,j}^D * c_{k,i}^b * \phi_{i,j}^k \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j. \quad (23.B.4)$$

En este caso hemos vuelto a multiplicar las ecuaciones por la variable binaria  $\phi_{i,j}^k$  para evitar que suban pasajeros que quieren bajarse en una estación en la que  $k$  no vaya a parar. Además, para evitar errores si el tren no para en ninguna estación más, se utiliza  $\psi_i^k$ .

Como se puede ver, algunas de las restricciones de ambas aproximaciones no son lineales. Esto imposibilita el uso de éstas en el solver CPLEX y, por tanto, no van a utilizarse en la solución que se plantará en los siguientes capítulos. Ahora bien, para asegurar la corrección matemática del modelizado, era necesario comentar y explicar estas dos aproximaciones.

24. Finalmente, la última variable a calcular será el número de pasajeros que se quedan en el andén  $i$  esperando para viajar a  $j$  después de la salida de servicio  $k$ . Este valor vendrá condicionado por el número total de pasajeros que hubiera en el andén y por la cantidad de personas que subieron al tren de la siguiente forma:

$$w_{k,i,j}^r = w_{k,i,j} - c_{k,i,j}^b \quad \forall k \in K^U, i, j \in S^U, i < j, \quad (24.1)$$

$$w_{k,i,j}^r = w_{k,i,j} - c_{k,i,j}^b \quad \forall k \in K^D, i, j \in S^D, i < j. \quad (24.2)$$

## 2.4. Función objetivo

La función objetivo planteada para la resolución del problema estará compuesta por varias funciones objetivo diferentes las cuales se ponderarán en base a la importancia que se le dará a cada uno de los objetivos.

En primer lugar, crearemos la función objetivo  $f_1$  la cual buscará minimizar el número de pasajeros esperando en cada una de las estaciones. De esta forma, se conseguirá la distribución de servicios que mejor se adapte a la demanda de pasajeros, reduciendo el tiempo entre servicios lo máximo posible. Cabe destacar que, como el valor de  $w_{k,i}$  depende directamente del valor de  $w_{k,i,j}^r$ , al minimizar  $w_{k,i}$  también minimizamos la cantidad de personas que no se suben al tren, intentando perjudicar al menor número de usuarios posibles.

$$f_1 = \sum_{k \in K^U} \sum_{i=0}^{N-1} w_{k,i} + \sum_{k \in K^D} \sum_{i=N}^{2*N-1} w_{k,i}. \quad (25.1)$$

Debido a que  $w_{k,i,j}^r$  no tiene en cuenta la cantidad de usuarios que se quedan en los andenes una vez ha pasado el último tren del día, la función  $f_1$  puede llegar a juntar demasiado los servicios sin cubrir en su totalidad el conjunto temporal. Es decir, para reducir la cantidad de personas que esperan en cada estación,  $f_1$  puede llegar a juntar demasiado los servicios disponibles, dejando muy pocos o incluso ningún servicio para las últimas horas del día. Por ello, se ha creado la función  $f_2$  la cual busca, por un lado, incentivar una distribución más equitativa de los servicios disponibles y, por otro, reducir la cantidad de personas que no llegan nunca a su destino, minimizando el número de personas que se quedan en cada estación una vez pasa el último servicio  $k$ :

$$\begin{aligned} f_2 = & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j>i}^{N-1} \sum_{\tau=0}^{\mathcal{T}} (z_{us^U,i}^\tau * OD_{i,j}[\tau]) + w_{us^U,i,j}^r \\ & + \sum_{i=N}^{2*N-1} \sum_{j>i}^{2*N-1} \sum_{\tau=0}^{\mathcal{T}} (z_{us^D,i}^\tau * OD_{i,j}[\tau]) + w_{us^D,i,j}^r. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Debido al comportamiento lógico del modelo, la mejor solución posible para el problema puede implicar no dejar embarcar a una serie de pasajeros, aunque haya espacio disponible en el servicio. Esto se hace para reservar espacio para los siguientes andenes y no llenar el servicio en las primeras estaciones. Como éste no es un comportamiento realista, ya que los pasajeros deberían subir al

## 2.4. Función objetivo

servicio sin importarles la disponibilidad en las siguientes estaciones, se ha definido la función  $f_3$  que busca priorizar el embarque de pasajeros en las primeras estaciones mediante los siguientes pesos:

$$\begin{aligned} p_i^U &= (N - i)^3, \quad \forall i \in S^U, \\ p_i^D &= (2 * N - i)^3, \quad \forall i \in S^D. \end{aligned} \quad \text{(Inicialización de pesos)}$$

Estos pesos van decreciendo conforme nos acercamos a las estaciones del final de cada sentido. Por tanto, buscaremos maximizar el resultado de multiplicar los pesos por el número de pasajeros que embarcan en cada estación:

$$\begin{aligned} f_3 &= \sum_{k \in K^U} \sum_{i=0}^{N-1} p_i^U * c_{k,i,j}^b + \\ &\quad \sum_{k \in K^D} \sum_{i=N}^{2*N-1} p_i^D * c_{k,i,j}^b. \end{aligned} \quad (25.3)$$

Para minimizar el número de de trenes utilizados en las operaciones se definirá  $f_4$ , la cual penalizará los movimientos de entrada y salida de los depósitos:

$$f_4 = \sum_{k \in K^U} \beta_k^U + \alpha_k^U + \sum_{l \in K^D} \beta_l^D + \alpha_l^D. \quad (25.4)$$

Una vez modelizadas todas las funciones objetivos, debido a que las magnitudes de cada una son distintas, se tienen que añadir pesos a cada una de éstas para asegurar que el comportamiento es el esperado o para priorizar el cumplimiento de una de ellas sobre las demás. Por ejemplo, las magnitudes de  $f_4$  son números enteros menores que 50, mientras que el número de pasajeros esperando en  $f_1$  puede fácilmente superar los 10,000 pasajeros en un día. Si no se aplican pesos, la solución obtenida nunca considerará la función  $f_4$  ya que una reducción de 10 servicios usados se vería eclipsada por reducir el número de pasajeros esperando en una estación en 11. Por otro lado, podría ser más beneficioso reducir el número de pasajeros que no llegan a su destino al final del día, incluso si esto implica que la mayoría de los pasajeros esperen un poco más, aumentando el peso de la función  $f_2$ . Por tanto la función objetivo final es la siguiente:

$$F = p_1 * f_1 + p_2 * f_2 - p_3 * f_3 + p_4 * f_4. \quad (25.5)$$

Como el objetivo de la función  $f_3$  es maximizar un valor, se ha cambiado el signo de esta para obtener el comportamiento deseado.

Por tanto, el modelo a resolver será la unión de todas las restricciones mencionadas anteriormente más la minimización de la función objetivo  $F$ :

## Capítulo 2. Modelizado del problema

---

$$modelo = \begin{cases} \min F \\ restricciones(1) \end{cases} - (24)$$

## Capítulo 3

# Modificaciones al modelo

Como se ha mencionado anteriormente, la modelización planteada en el capítulo anterior es correcta, pero no es lineal y, por tanto, no se puede introducir dentro de un programa de resolución matemática como CPLEX. Por ello, para poder utilizarla en una simulación, se ha adaptado eliminando la variable  $c_{k,i,j}^b$  y algunas restricciones estrechamente relacionadas con ella.

Además, para reducir el tiempo de cómputo del programa, se han eliminado todas las restricciones referentes al sentido *downstream*. A raíz de este cambio también se han eliminado todas las restricciones relacionadas con los giros o con la cantidad de material rodante utilizado, ya que éstas solo tienen sentido si la modelización tiene en cuenta ambos sentidos.

### 3.1. Modelización usada

Debido a la eliminación del sentido *downstream*, se han eliminado los superíndices  $U$  y  $D$  de todos los conjuntos que se diferenciaban por sentido. Por ejemplo, el conjunto de estaciones  $S^U$  ha pasado a llamarse solamente  $S$  para simplificar la notación.

Dicho esto, el modelo resultante de las modificaciones mencionadas es el siguiente:

#### 1. Restricciones de servicio o estaciones

Estas restricciones se han mantenido prácticamente iguales, eliminando solo las restricciones referentes al sentido *downstream*.

$$\lambda_{k,i} \leq \tau_k, \quad \forall k \in K, i \in S, \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{k,i} \geq 2 * \tau_k, \quad \forall k \in K, \quad (3.2)$$

## Capítulo 3. Modificaciones al modelo

---

$$\lambda_{k-1,i} + \lambda_{k,i} \geq 1, \quad \forall k-1, k \in K, i \in S. \quad (3.3)$$

### 2. Restricciones de horarios

Estas restricciones también se han mantenido iguales.

$$e_{k,i} \leq e_{max} * \lambda_{k,i}, \quad \forall k \in K, i \in S, \quad (3.4.1)$$

$$e_{k,i} \geq e_{min} * \lambda_{k,i}, \quad \forall k \in K, i \in S, \quad (3.4.2)$$

$$d_{k,i} = a_{k,i} + e_{k,i}, \quad \forall k \in K, i \in S, \quad (3.5)$$

$$d_{k,i-1} + s_{i-1,i} = a_{k,i}, \quad \forall k \in K, i-1, i \in S, \quad (3.6)$$

$$h_{min} * \tau_k \leq d_{k,i} - d_{k-1,i} \leq h_{max} * \tau_k, \quad \forall k-1, k \in K. \quad (3.7)$$

### 3. Restricciones de giros y de material rodante

Como se ha mencionado anteriormente, se va a prescindir tanto de las variables relacionadas con los giros como del número máximo de servicios que pueden recorrer la línea de manera simultánea. En su lugar, para intentar reducir el número de servicios usados en un día, se va a utilizar una nueva función objetivo que minimice el valor de  $\tau_k$ .

### 4. Restricciones de demanda

A partir de este punto la modelización utilizada comienza a diferir bastante de la planteada en el capítulo anterior. Esto se debe a que, al no es posible calcular  $c_{k,i,j}^b$  de manera lineal, no pueden calcularse ni el número de pasajeros que embarcan en cada estación ni los pasajeros que se quedan esperando en el andén. Para solucionar este problema, se ha optado por eliminar las restricciones de capacidad de los trenes, es decir, se ha supuesto que la capacidad de los trenes es infinita. A raíz de esta suposición, se tiene que todos los pasajeros potenciales que esperan en una estación pueden subirse al servicio y, por tanto,  $c_{k,i,j}^b = w_{k,i,j}^b$ . Se ha optado por implementar esta solución debido a que, normalmente, casi nadie se queda fuera de un tren, aunque éste esté muy lleno, ya que los pasajeros suelen preferir subirse a un tren abarrotado antes de perder tiempo de su día. Aun así, se va a mantener la variable  $c_{k,i}$  para controlar el número de pasajeros que se encuentran dentro del servicio. Esto se va a hacer así, para poder ver si realmente la solución propuesta es factible aplicarla en la línea o si en algún momento el número de pasajeros dentro del servicio es demasiado grande y, por tanto, el resultado no es realista.

### 3.1. Modelización usada

Por tanto, las restricciones de demanda quedarían de la siguiente manera:

De las primeras restricciones se va a prescindir de la encargada de calcular  $c_{k,i}^b$  porque este valor siempre será igual a  $w_{k,i}^b$ .

$$w_{k,i} = \sum_{j=i+1}^N w_{k,i,j}, \quad \forall k \in K, i \in S, \quad (3.8)$$

$$w_{k,i}^b = \sum_{j=i+1}^N w_{k,i,j}^b, \quad \forall k \in K, i \in S. \quad (3.9)$$

Las restricciones encargadas de calcular el valor de  $w_{k,i,j}$  no se van a modificar.

$$z_{k,i}^{\tau-1} \leq z_{k,i}^{\tau}, \quad \forall k \in K, \forall i \in S, \forall \tau \in \mathcal{T}, \tau \geq 2, \quad (3.10.1)$$

$$d_{k,i} = \sum_{\tau=2}^{\mathcal{T}} \tau * (z_{k,i}^{\tau} - z_{k,i}^{\tau-1}), \quad \forall k \in K, \forall i \in S, \quad (3.10.2)$$

$$b_{k,i}^{\tau} = \begin{cases} 1 - z_{k,i}^{\tau}, & \forall k \in K, k = 0, \forall i \in S, \forall \tau \in \mathcal{T}, \\ z_{k-1,i}^{\tau} - z_{k,i}^{\tau}, & \forall k \in K, k > 0, \forall i \in S, \forall \tau \in \mathcal{T}, \end{cases} \quad (3.10.3)$$

$$w_{k,i,j} = \begin{cases} \sum_{\tau=1}^{\mathcal{T}} b_{k,i}^{\tau} * OD_{i,j}[\tau], \\ \forall k \in K, k = 0, \forall i, j \in S, i < j, \\ w_{k-1,i,j}^r + \sum_{\tau=1}^{\mathcal{T}} b_{k,i}^{\tau} * OD_{i,j}[\tau], \\ \forall k - 1, k \in K, k > 0, \forall i, j \in S, i < j. \end{cases} \quad (3.10.4)$$

El cálculo de los pasajeros potenciales, al depender únicamente de los pasajeros esperando y de las paradas que realiza el servicio, tampoco se verá modificado.

$$\lambda_{k,i} + \lambda_{k,j} \leq 1 + \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K, i, j \in S, i < j, \quad (3.11.1)$$

$$\lambda_{k,i} + \lambda_{k,j} \geq 2 * \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K, i, j \in S, i < j, \quad (3.11.2)$$

$$w_{k,i,j}^b \leq M * \phi_{i,j}^k, \quad \forall k \in K, i, j \in S, i < j, \quad (3.11.3)$$

$$w_{k,i,j}^b \leq w_{k,i,j}, \quad \forall k \in K, i, j \in S, i < j, \quad (3.11.4)$$

$$w_{k,i,j}^b \geq w_{k,i,j} - M * (1 - \phi_{i,j}^k), \quad \forall k \in K, i, j \in S, i < j. \quad (3.11.5)$$

### Capítulo 3. Modificaciones al modelo

---

Como en esta aproximación no se contempla que la gente se quede esperando en el andén, el valor de  $w_{k,i,j}^r$  solamente dependerá de si el servicio  $k$  para en las estaciones  $i$  y  $j$  o no. Dicho de otro modo, si el servicio para en las estaciones origen y destino del pasajero,  $w_{k,i,j}^r = 0$ , ya que estos siempre podrán subirse al servicio, y en caso contrario  $w_{k,i,j}^r = w_{k,i,j}$ , ya que ninguno podrán subirse al servicio y se quedarán esperando al siguiente.

$$w_{k,i,j}^r = w_{k,i,j} - w_{k,i,j}^b, \quad \forall k \in K, i, j \in S, i < j. \quad (3.12)$$

Para el cálculo de las variables  $c_{k,i}$  y  $c_{k,i}^a$  se ha substituido el valor de  $c_{k,i}^b$  por el de  $w_{k,i}^b$ , ya que estas variables en la nueva modelización siempre serán iguales. También hay que destacar que se ha eliminado por completo la restricción 21 porque esta se encargaba de limitar la capacidad máxima del tren, cosa que no va a hacerse en la nueva modelización.

$$\begin{cases} c_{k,i} = w_{k,i}^b & \forall k \in K, i \in S, i = 0, \\ c_{k,i} = c_{k,i-1} + w_{k,i}^b - c_{k,i}^a & \forall k \in K, i \in S, i > 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} c_{k,i}^a = 0 & \forall k \in K, i \in S, i = 0, \\ c_{k,i}^a = \sum_{j=1}^{i-1} w_{k,j,i}^b & \forall k \in K, i \in S, i > 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Las últimas restricciones del modelo original se encargan de calcular el valor de  $c_{k,i,j}^b$ . Como en la modelización propuesta todas las personas que pueden suben al servicio, esta variable no es necesaria porque sirve principalmente para calcular la gente que está dentro del tren o para saber que personas se quedan en la estación si este está lleno.

#### **Función objetivo**

Debido a todos estos cambios en la modelización y la linealidad de la misma, la función objetivo también se ha visto modificada levemente.

Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  solamente han sido modificada eliminando la parte que se encargaba de calcular el sentido *downstream*.

$$f_1 = \sum_{k \in K} \sum_{i=0}^{N-1} w_{k,i}. \quad (3.15)$$

$$f_2 = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j>i}^{N-1} \sum_{\tau=0}^{\mathcal{T}} (z_{us,i}^{\tau} * OD_{i,j}[\tau]) + w_{usU,i,j}^r. \quad (3.16)$$

Por otro lado, la función  $f_3$  se ha eliminado por completo. Esto se debe a que ésta se encargaba de evitar que el modelo impidiera a algunos pasajeros subirse al

### 3.1. Modelización usada

tren en las primeras estaciones, para conseguir una solución matemáticamente perfecta. Ahora bien, como ahora todos los pasajeros que puedan subirán al tren, esta restricción sería redundante.

Finalmente, la función  $f_4$  tiene que modificarse debido a que las variables  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  no están inicializadas. Como el objetivo de esta función era minimizar el número de trenes utilizados durante el día, se ha optado por cambiar  $f_4$  de la siguiente manera:

$$f_4 = \sum_{k \in K} \tau_k. \quad (3.17)$$

De esta forma se intentará minimizar el número de trenes que van a usarse en un día.

Finalmente, debido a que ahora la capacidad de los servicios es ilimitada, se va a plantear la siguiente función objetivo:

$$f_5 = \sum_{k \in K} \sum_{i=0}^{N-1} c_{k,i}. \quad (3.18)$$

Esta nueva función objetivo busca reducir el número de pasajeros que se encuentran en los servicios en cada momento. Esta se va a utilizar para intentar controlar el número de pasajeros en los trenes haciendo que, en caso de que estos estén demasiado llenos, paren en menos estaciones para no sobrecargarse.

Por lo tanto, la nueva función objetivo del modelo será la siguiente:

$$F = p_1 * f_1 + p_2 * f_2 + p_3 * f_4 + p_4 * f_5, \quad (3.19)$$

donde las variables  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  y  $p_4$  representan los pesos que se le va a dar a cada función objetivo. La proporción entre estos pesos simboliza la prioridad que tendrá en el modelo la minimización de cada una de estas funciones objetivo. Por ejemplo, si  $p_1$  toma un peso de 1 y tanto  $p_2$  como  $p_3$  un peso de 0.5 el modelo le dará el doble de prioridad a la minimización de la función  $f_1$  que a la de  $f_2$  y  $f_4$ . Estos pesos van a utilizarse debido a que las funciones  $f_1$  y  $f_2$  son prioritarias sobre las demás en la resolución del problema original, que es la optimización de una red de transporte. Además, como se ha dicho anteriormente, la función  $f_5$  solo será necesaria si el número de pasajeros en los servicios es excesivamente alto. Por tanto, en la primera simulación que se haga, se le asignará a  $p_4$  un peso de 0 y, en caso de que varios de los valores de  $c_{k,i}$  sean excesivamente grandes, se irá incrementando poco a poco hasta conseguir resultados factibles.



## Capítulo 4

# Resultados obtenidos

Una vez decidida la modelización, van a realizarse una serie de simulaciones con datos reales para probar la eficacia del modelo en la línea 1 del metro de Madrid.

Para ello, se utilizará CPLEX, un software de optimización desarrollado por IBM que resuelve problemas de programación lineal, programación lineal entera y programación cuadrática el cual es conocido por su capacidad para manejar problemas de gran escala y su eficiencia en la resolución de modelos complejos. Además, para obtener los datos necesarios para la modelización, se ha utilizado la librería de Python Pandas, que facilita el manejo y tratamiento de los mismos.

### 4.1. Obtención de los datos

#### 4.1.1. Matriz de demanda temporal

Entre los datos que se necesitan, el más importante, y difícil de conseguir, es la matriz de demanda temporal  $OD_{i,j}[\tau]$ . Esta matriz es la encargada de indicar, para cada par de estaciones  $i$  y  $j$ , cuantos pasajeros entran en el andén  $i$  con destino el andén  $j$  en cada instante temporal del día, dicho de otra forma,  $OD_{i,j}[\tau]$  indica para cada minuto del día cuantas personas nuevas quieren viajar de  $i$  hasta  $j$ . Para conseguir esta información, se han utilizado los datos disponibles en la página web oficial del metro de Madrid. En éstos se indica para cada mes del año, la cantidad de usuarios que han validado el bono de transporte para entrar en cada una de las estaciones de la línea, véase la Tabla 4.1.

Como en el metro de Madrid se valida el bono al entrar en las estaciones pero no al salir de éstas la información que tenemos solamente refleja la cantidad de pasajeros que entran en cada estación. Además, todos estos datos están recaudados por mes y no por día. Por todo esto, es necesario modificar la información de la que disponemos para poder obtener una matriz de demanda que pueda aplicarse en la modelización.

Lo primero que se va a hacer es ordenar las estaciones para que sigan el mismo orden que en la línea 1 y luego seleccionar un mes sobre el cual realizar la simulación, en este caso se ha seleccionado el mes de marzo de 2024.

## Capítulo 4. Resultados obtenidos

Cuadro 4.1: Datos de estaciones y número de pasajeros por año. Fuente: <https://www.metromadrid.es/>

ID	Estación	enero 2024	febrero 2024	marzo 2024
101	Plaza de Castilla	1.307.378	1.375.250	1.299.031
102	Valdeacederas	244.734	252.450	246.934
103	Tetuán	312.374	323.458	320.807
104	Estrecho	433.787	451.066	441.052
105	Alvarado	186.233	191.604	192.943
106	Cuatro Caminos	590.460	641.273	620.393
107	Ríos Rosas	194.940	212.881	195.740
108	Iglesia	296.750	311.102	289.469
...	...	...	...	...
128	La Gavia	104.650	107.228	101.716
129	Las Suertes	189.208	184.627	184.599
130	Valdecarros	89.244	91.550	87.422
151	Chamartín	518.205	552.792	544.375
152	Bambú	89.012	94.741	85.033
153	Pinar de Chamartín	343.379	361.462	332.339

Una vez hecho esto, se va a suponer que la cantidad de pasajeros que usaron el metro cada día del mes fue la misma, y por tanto, vamos a dividir el número total de pasajeros entre 31.

Por otro lado, vamos a suponer que el número de pasajeros que viajan en cada sentido es directamente proporcional al número de estaciones restantes hasta el final de la línea, usando la siguiente fórmula:

$$numPasajeros_i = numPasajerosDia_i * \frac{N - 1 - i}{N - 1}, \quad \forall i \in S, \quad (4.1)$$

donde  $numPasajerosDia_i$  son los pasajeros que entran en la estación  $i$  cada día,  $N$  es el número total de estaciones e  $i$  es el índice de la estación, contenido entre 0 y  $N-1$ . Con esta fórmula obtenemos que todos los pasajeros que entraron en la primera estación recorrieron la línea en el sentido *upstream*, ya que no hay ninguna estación en el sentido contrario, y conforme vamos avanzando estaciones cada vez tenemos una proporción menor de usuarios recorriendo la línea en este sentido. Finalmente, de manera análoga a lo que pasa en la primera estación, ningún pasajero que se suba en la última estación utilizará el sentido *upstream* y, por tanto, el número de pasajeros que tendremos en ésta será 0. Aplicando todas las transformaciones mencionadas anteriormente obtenemos la Tabla 4.2.

Cuadro 4.2: Datos de estaciones y número de pasajeros por día.

Código de Estación	Nombre de la Estación	Pasajeros
0	Pinar de Chamartín	10721
1	Bambú	2657
2	Chamartín	16462
3	Plaza de Castilla	37976
4	Valdeacederas	6970
5	Tetuán	8732
6	Estrecho	11559
7	Alvarado	4862
...	...	...
26	Miguel Hernández	1251
27	Sierra de Guadalupe	1262
28	Villa de Vallecas	732
29	Congosto	388
30	La Gavia	205
31	Las Suertes	186
32	Valdecarros	0

Una vez obtenido el número de pasajeros que van a desplazarse por el metro, vamos a aproximar en que estaciones se bajará cada uno de ellos. Para ello, hemos utilizado el siguiente fragmento de código del artículo [10], el cual reparte de manera equitativa los usuarios entre todas las estaciones restantes de la línea:

```
import pandas as pd
import random as rd

num_stations = df['codigo_estacion'].values
name_stations = df['nombre_estacion'].values
passengers = df['pasajeros'].values
last_station = max(num_stations) + 1
df_entry_stations = []
df_exit_stations = []
df_passengers = []

for i in num_stations[:-1]:
    exit_stations = range(i+1, last_station)
    pas_exit = rd.choices(exit_stations, k=passengers[i])
    df_entry_stations += [i]*len(exit_stations)
```

## Capítulo 4. Resultados obtenidos

---

```
df_exit_stations += exit_stations
df_passengers += map(lambda x: pas_exit.count(x), exit_stations)

data = {'Entry_Station': df_entry_stations, 'Exit_Station': df_exit_stations,
        'Passengers': df_passengers}
df_stations = pd.DataFrame(data)
```

Obteniendo los datos de la Tabla 4.3.

Cuadro 4.3: Movimientos de pasajeros entre las distintas estaciones.

Entry_Station	Exit_Station	Passengers
0	1	312
0	2	358
0	3	352
0	4	336
0	5	339
0	6	329
0	7	305
...	...	...
28	31	185
28	32	177
29	30	115
29	31	123
29	32	134
30	31	100
30	32	105
31	32	186

Una vez obtenidos los pasajeros que viajan cada día desde la estación  $i$  hasta la estación  $j$ , se va a estimar cuantos de ellos se desplazan de una estación a otra en cada momento del día. Para ello, primero se va a estimar la cantidad de pasajeros que hay en la estación a cada hora del día y luego estos se van a distribuir entre los 60 minutos de ésta.

Para estimar la demanda de pasajeros en cada hora del día se va a aproximar la distribución de pasajeros que aparece en *Google Maps* cuando consultas la información de una estación. Como el metro cierra entre la 1:30 y las 6:00 de la mañana, se ha estimado la demanda entre las 6 de la mañana y las 2 del día siguiente, dejando a 0 la demanda en las horas en que el servicio está cerrado. Véase la Figura 4.1.

## 4.1. Obtención de los datos

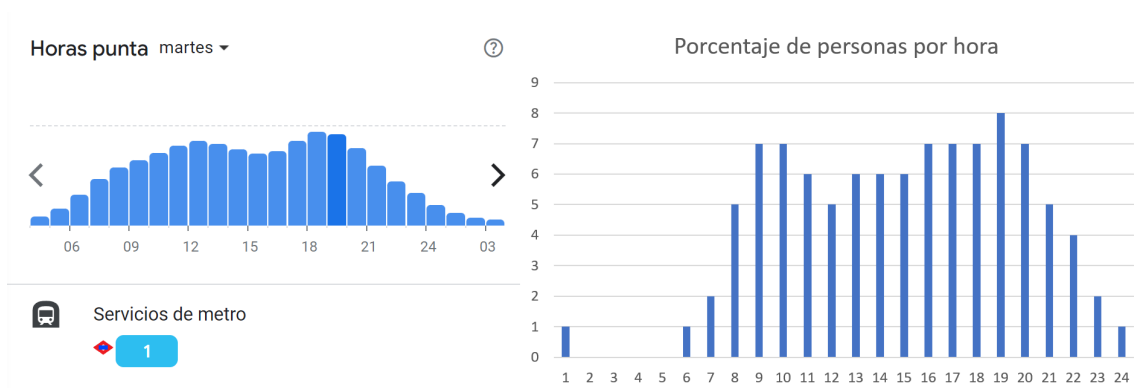


Figura 4.1: Demanda por horas de una estación de la Línea 1 (izda.) frente a la distribución utilizada para estimar la demanda (dcha). Fuente: <https://www.google.com/maps>.

Con todas estas modificaciones, finalmente obtenemos la matriz de demanda temporal que queríamos, véase la Tabla 4.4.

Cuadro 4.4: Matriz de demanda temporal entre las 19:00 y las 19:04.

Entry_Station	Exit_Station	19:00	19:01	19:02	19:03	19:04
3	4	0	3	0	1	2
3	5	2	4	2	0	2
3	6	3	0	1	1	1
3	7	4	2	4	3	2
3	8	3	3	3	1	2
3	9	3	2	2	2	2
3	10	2	3	0	0	2
...	...	...	...	...	...	...

### 4.1.2. Tiempo de viaje entre estaciones

Para calcular el tiempo que tarda un servicio en viajar entre dos estaciones consecutivas ( $s_{i,j}$ ) también se ha utilizado la información presente en *Google Maps*. Para ello, se ha simulado el recorrido que realiza un servicio al recorrer toda la línea y, basándose en éste, se ha ido estación por estación calculando la diferencia entre el tiempo de salida de una estación y el tiempo de llegada a la siguiente, véase la Figura 4.2.

## Capítulo 4. Resultados obtenidos

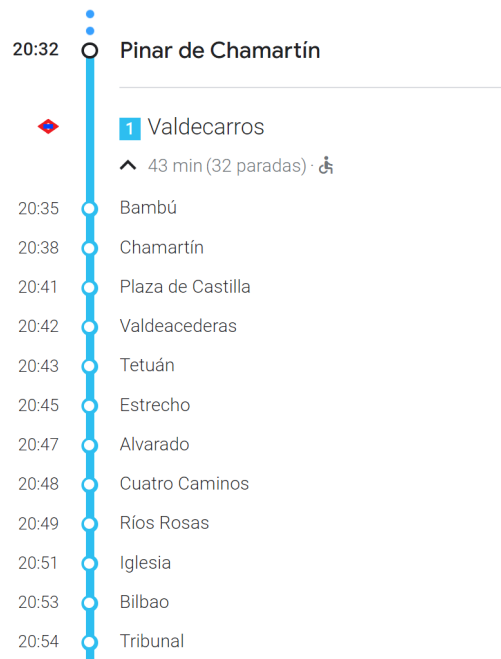


Figura 4.2: Tiempo que tarda un tren en viajar entre dos estaciones de la línea. Fuente: <https://www.google.com/maps>.

### 4.1.3. Resto de valores

El tiempo máximo y mínimo de *headway*,  $h_{max}$  y  $h_{min}$ , se han elegido como 15 y 2 minutos respectivamente. Estos valores se basan en los tiempos máximos y mínimos reales entre dos servicios de la línea 1 [15].

Tanto el tiempo máximo de parada como el tiempo mínimo ( $e_{max}$  y  $e_{min}$ ) se han fijado como 1 minuto. Este tiempo no solamente tiene en cuenta el tiempo que un servicio permanece parado en la estación, el cual no suele superar los 30 segundos, si no que también incluye el tiempo que pierde el servicio tanto frenando, al llegar a la estación, como acelerando, al salir de ésta.

## 4.2. Simulaciones y resultados

Debido a la gran complejidad y tamaño del problema y a limitaciones técnicas en cuanto a capacidad de cómputo, no se han podido realizar simulaciones en el espacio de tiempo completo ni con todas las estaciones de la línea. Ahora bien, para probar si realmente el modelo da resultados y mejora la situación de los pasajeros, se han realizado 3 simulaciones distintas para las 7 primeras estaciones. En la primera de éstas se va a probar la eficacia del método en hora punta, entre las 19:00 y las 20:00 del día, en la segunda se va a probar en una franja con poca demanda de pasajeros, entre las 7:00 y las 8:00, y en la última se van a distribuir los usuarios de 1 hora siguiendo una distribución desigual, es decir, va a haber menos demanda al principio y al final y más en la parte intermedia. Con esta última simulación se espera conseguir un resultado

## 4.2. Simulaciones y resultados

similar al de un día completo para ver si realmente se consiguen distribuir los servicios en base a la demanda.

Para verificar si los resultados obtenidos realmente mejoran la situación de los pasajeros o no, se va a comparar el tiempo medio que espera cada uno de éstos utilizando el método tradicional, pararse en todas las estaciones, y utilizando *skip-stop*. Para ello, se ha tenido en cuenta tanto el tiempo que los pasajeros esperan a un servicio, como el tiempo que esperan los pasajeros que no han podido subirse a un tren. De esta forma se busca penalizar las soluciones que junten mucho los servicios para reducir el tiempo de espera a cambio de dejar a muchas personas sin un servicio.

Por tanto, lo primero que se ha realizado ha sido el cálculo de las personas que nunca llegan a su destino utilizando la misma fórmula que la función objetivo  $f_2$ :

$$resto = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j>i}^{N-1} \sum_{\tau=0}^{\mathcal{T}} (z_{us,i}^{\tau} * OD_{i,j}[\tau]) + w_{us,i,j}^r \quad (4.2)$$

Luego, se ha calculado el número total de personas que utilizan el metro durante la simulación sumando todas las personas que esperan en cada una de las estaciones y restando las que no se llegan a subir al servicio, para no contarlas dos veces.

$$totalPersonas = \sum_{k \in K, k>0} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i}^{N-1} w_{k,i,j} - w_{k,i,j}^r \quad (4.3)$$

Finalmente se ha calculado el tiempo medio utilizando la siguiente formula:

$$t = \frac{\sum_{k \in K, k>0} \sum_{i=0}^{N-1} w_{k,i} * (d_{k,i} - d_{k-1,i}) + \sum_{i=0}^{N-1} w_{0,i} * (d_{0,i} - HORAINICIO) + resto}{totalPersonas * N} \quad (4.4)$$

En ella se calcula el producto del número de personas esperando por el tiempo que éstas esperan, obteniendo el tiempo total que todas las personas están en la estación. Luego, este tiempo se divide entre el número total de usuarios y el numero total de estaciones para conseguir el tiempo medio que ha esperado cada uno de ellos por andén. *HORAINICIO* es el primer instante temporal que se haya tenido en cuenta en cada simulación.

Cabe destacar que la media que salga de este cálculo va a ser mayor al tiempo medio real de espera de los pasajeros, ya que, al suponer demanda constante durante toda la hora, el número de pasajeros que esperan al primer servicio y el de pasajeros que no llegan a destino es mucho más grande de lo que sería en una situación real. Esto se debe a que, como el primer servicio tarda bastante tiempo en llegar a las últimas estaciones de la línea, las últimas paradas del primer servicio van a tener un gran número de personas durante mucho tiempo

## Capítulo 4. Resultados obtenidos

esperando. Por ejemplo, si suponemos que entran 3 personas cada minuto en la estación 4 de la línea y el primer servicio tarda 10 minutos en llegar hasta dicha estación, para ésta se contabilizarán un total de 30 personas esperando durante 10 minutos. Por otro lado, para el resto de servicios, teniendo en cuenta que el *headway* entre dos servicios sea de 4 minutos, en dicho andén habrá 12 personas aproximadamente esperando durante solamente 4 minutos. En este caso el tiempo medio de espera de los pasajeros será muy superior al real debido a que los primeros pasajeros han esperado durante mucho tiempo, algo similar pasa para los pasajeros que entren en las primeras estaciones de la línea y nunca lleguen a destino. Aún así, debido a que tanto la simulación con el método *skip-stop*, como la que utilice el método convencional van a tener el mismo error, este resultado podrá usarse para comparar ambas situaciones.

### 1. Simulación en hora punta

En esta primera simulación se va a comprobar la eficacia del modelo en la franja del día con más demanda, es decir, entre las 19:00 y las 20:00.

Para poder comparar mejor la eficacia del modelo planteado con el método actual, primero se va a simular el comportamiento del modelo tradicional y se va a calcular el tiempo medio que espera cada usuario en ese caso. Para ello se va a imponer la restricción  $\lambda_{k,i} = 1 \quad \forall k \in K, i \in S$  obligando al sistema a parar todos los trenes en todas las estaciones. Por limitaciones de tiempos de ejecución, solamente se van a tener en cuenta las 7 primeras estaciones de la línea y se va a imponer un número máximo de 21 servicios, con un *headway* mínimo de 2 minutos.

Con todas estas restricciones obtenemos que la distribución de horarios del modelo original es la siguiente es la mostrada en la Figura 4.3:

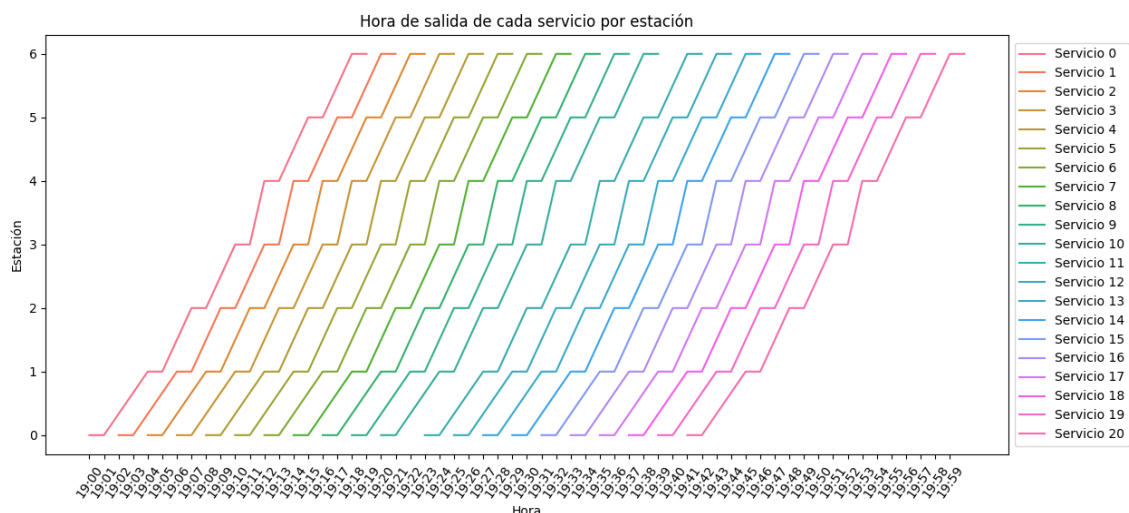


Figura 4.3: Horarios de los servicios a las 19:00 con el método tradicional.

Utilizando la fórmula mencionada anteriormente, obtenemos que, en este caso, cada pasajero espera una media de **3 minutos y 13 segundos**.

## 4.2. Simulaciones y resultados

A continuación, realizaremos la misma simulación pero permitiendo al programa saltarse alguna de las estaciones. Como se puede ver en la Figura 4.4, el modelo solamente se ha saltado 2 estaciones en todo el recorrido. Si miramos más detalladamente el flujo de pasajeros, podemos ver como ningún usuario que estuviera en los servicios 0 y 19 quería bajarse en la estación 1 y, además, a la hora de llegada de estos servicios no había ningún pasajero esperando en dicha estación. Aunque esto haya conseguido mejorar el tiempo de espera medio de los usuarios, que ahora ha pasado a ser de **3 minutos y 10 segundos**, no se puede considerar una buena optimización debido a que en un metro real, nunca se tendrá información tan detallada ni de los destinos de los pasajeros ni de los usuarios esperando.

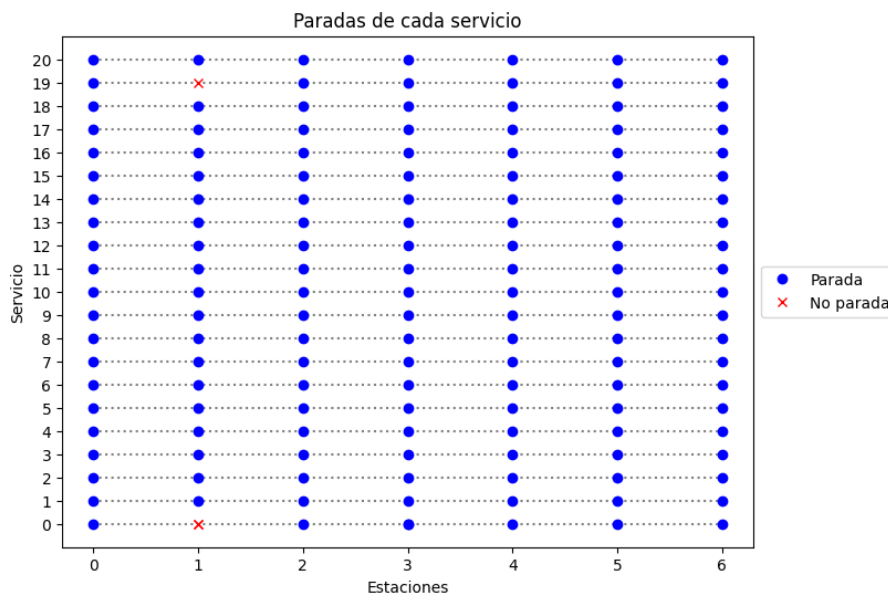


Figura 4.4: Paradas del modelo *skip-stop* en hora punta con 21 servicios.

La poca flexibilidad que presenta el modelo a saltarse estaciones se debe a que, al haber tan poco espacio entre dos servicios consecutivos, si cualquier tren se saltara una estación, éste se acercaría demasiado al servicio anterior, generando peligro de choque. Por tanto, para poder aprovechar al máximo el modelo y permitirle más libertad, vamos a reducir el número de servicios a 19.

Como podemos ver en la Figura 4.5, ahora el modelo se ha saltado un total de 7 estaciones, bastantes más que en la primera prueba. También, podemos ver como prácticamente solo se ha saltado la estación con id 1, la cual corresponde con Bambú. Esto se debe a que este andén tiene un flujo de pasajeros muy inferior al resto de las estaciones y, por tanto, la cantidad de personas que esperan en ella es muy reducida.

Al realizar estos cambios en la organización de la línea, se ha conseguido un tiempo medio de espera en cada estación de **3 minutos y 23 segundos**, es decir, reduciendo 2 servicios respecto del modelo tradicional solamente ha aumentado en tiempo medio de viaje en 10 segundos.

## Capítulo 4. Resultados obtenidos

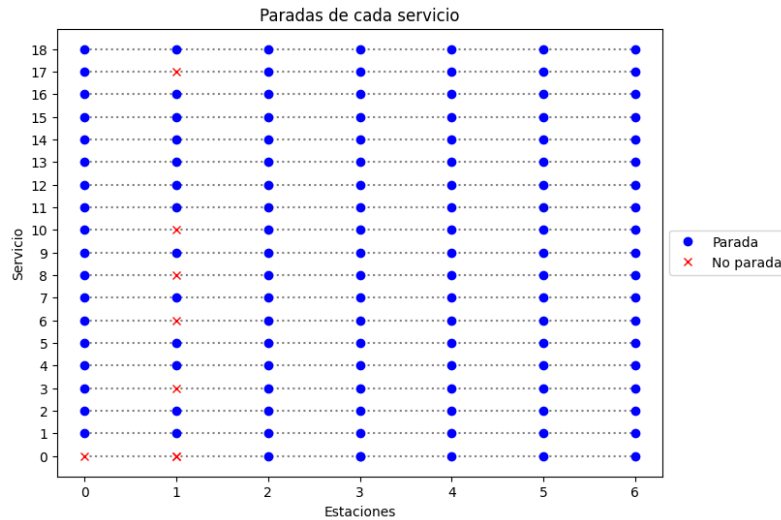


Figura 4.5: Paradas del modelo *skip-stop* en hora punta con 19 servicios.

Si analizamos el número de personas que se han quedado esperando en el andén, véase la Figura 4.6, podemos ver que, como máximo el modelo ha dejado esperando a 2 personas a cambio de saltarse una estación.

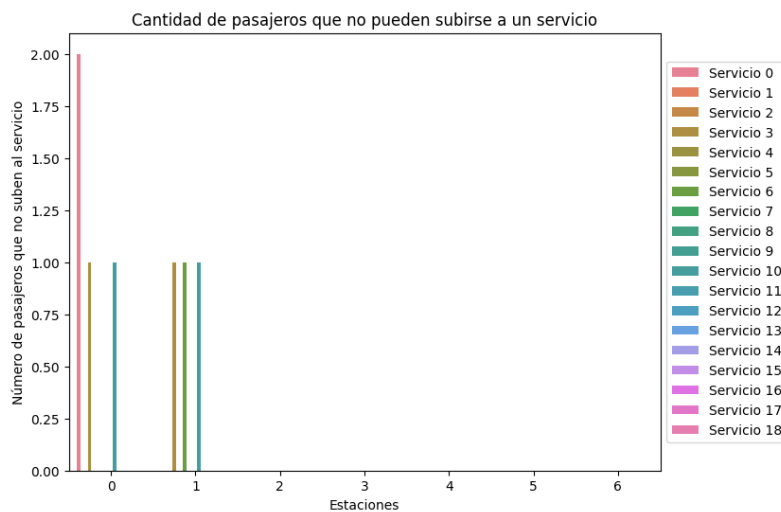


Figura 4.6: Número de pasajeros que se han quedado esperando en la estación  $i$  debido a que no podían subirse al servicio  $k$  entre las 19:00 y las 20:00.

Finalmente, se va a concluir el análisis de esta simulación comprobando si el número de pasajeros que viajaban en cada uno de los servicios es factible o, en cambio, excesivamente alto, véase la Figura 4.7.

Podemos ver que en ningún momento el número de pasajeros dentro de un servicio sobrepasa los 60 usuarios. Aunque hay que tener en cuenta que esta simulación solamente está contabilizando los pasajeros que se mueven entre las 7 primeras estaciones de las 33 que forman la línea 1, este número es bastante

## 4.2. Simulaciones y resultados

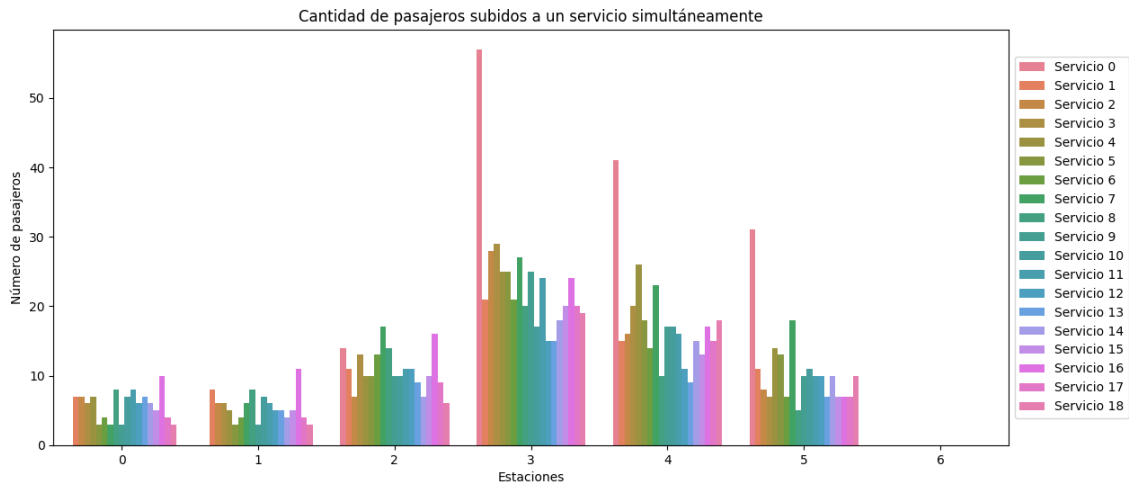


Figura 4.7: Número de pasajeros subidos a un servicio de manera simultánea entre las 19:00 y las 20:00.

menor a la capacidad máxima de un tren del metro de Madrid, que ronda los 1200 pasajeros [16]. Además, el servicio que tiene más usuarios subidos es, con mucha diferencia, el servicio 0. Como se ha mencionado al principio del capítulo, esto se debe a que este servicio tarda aproximadamente 10 minutos en llegar a la estación número 3, acumulando un número de pasajeros más grande de lo que debería. Por tanto, podemos concluir que la simulación no sobrepasa la capacidad máxima y no hace falta repetirla aumentando el peso de la función  $f_5$ .

Viendo estos resultados podemos concluir que al estar en un horario con una demanda tan alta siempre hay muchas personas esperando en cada andén y, por tanto, hay muy pocos casos en los que saltarse una parada mejore la media del tiempo de viaje de los pasajeros. Esto nos indica que aplicar una estrategia de *skip-stop* en franjas horarias con mucho movimiento de personas requeriría de un estudio muy cuidadoso de la demanda de cada una de las estaciones y podría no llegar a ser la estrategia más adecuada. Por ejemplo, en vista de los resultados de las simulaciones, se podría concluir que una buena optimización sería que 1 de cada 3 servicios se saltaran la estación de Bambú, ahora bien, esta propuesta tendría que estudiarse más profundamente antes de afirmar que realmente vaya a mejorar la situación de la línea.

### 2. Simulación con baja demanda

Para la segunda simulación va a compararse la eficacia del método en una franja horaria de poca demanda, en este caso se usará la franja entre las 7:00 y las 8:00.

Primero, vamos a simular el comportamiento del modelo tradicional con 14 servicios. Para realizar una simulación más realista se va a usar el *headway* oficial del metro en esa franja horaria [15], que es entre 3 y 4 minutos aproximada-

## Capítulo 4. Resultados obtenidos

mente.

En la Figura 4.8 podemos ver la distribución de los servicios en este caso.

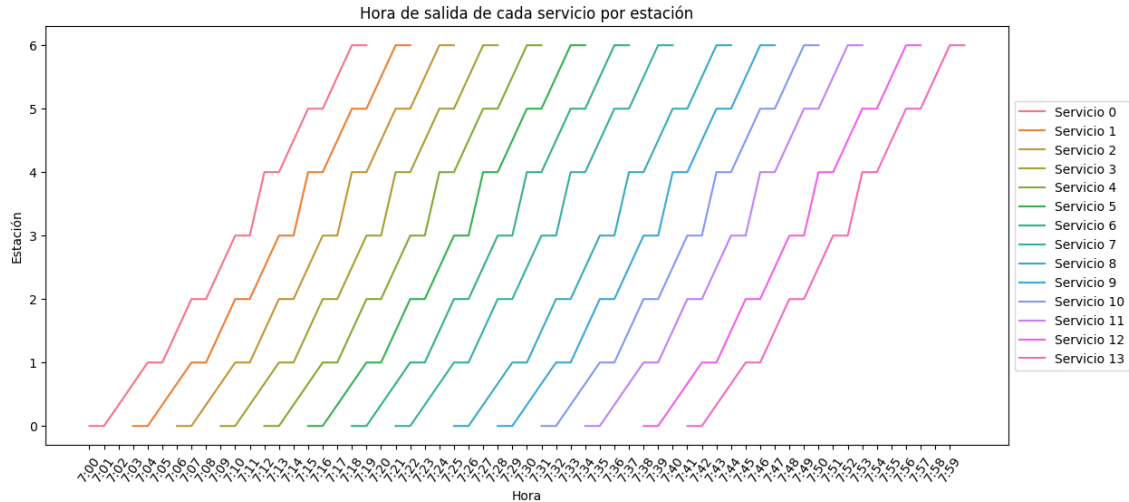


Figura 4.8: Horarios servicios 7 am con el método tradicional.

Calculando la media de tiempo que cada usuario está esperando un servicio obtenemos que, en el caso tradicional, cada pasajero espera una media de **4 minutos y 34 segundos**. Como pasó en el caso anterior, al aplicar *skip-stop* con el mismo número de servicios, este no tiene la flexibilidad suficiente para saltarse tantas estaciones como debería, reduciendo solamente el tiempo medio de espera a **4 minutos y 30 segundos**.

Por ello, para aprovechar al máximo el potencial del modelo, vamos a repetir la prueba reduciendo el número de servicios a 13. Al hacer ésto, véase la Figura 4.9, podemos ver como el modelo se ha saltado un total de 9 paradas.

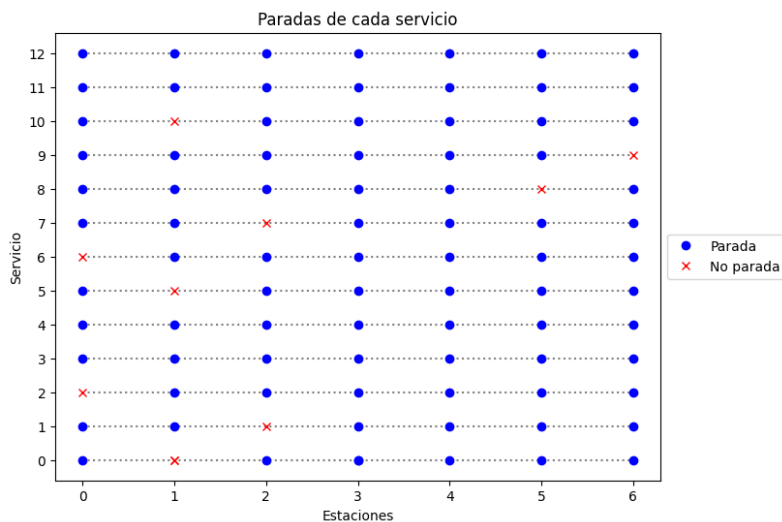


Figura 4.9: Paradas del modelo *skip-stop* con 13 servicios.

## 4.2. Simulaciones y resultados

Con estas modificaciones obtenemos que la media de espera de cada usuario pasa a ser de **4 minutos y 42 segundos**, es decir, hemos reducido el número de servicios en uno y solamente hemos aumentado el tiempo medio de espera en 8 segundos. Cabe destacar que, si se vuelve a realizar la simulación con el método convencional pero usando 13 servicios, el tiempo que espera cada usuario es de **4 minutos y 59 segundos**, 17 segundos más que con el método *skip-stop*.

Si miramos la capacidad de cada uno de los trenes, podemos ver como nunca se superan las 20 personas por servicio, véase Figura 4.10, confirmando que, aunque se tuvieran en cuenta las 33 estaciones de la línea, nunca se supera la capacidad máxima del tren.

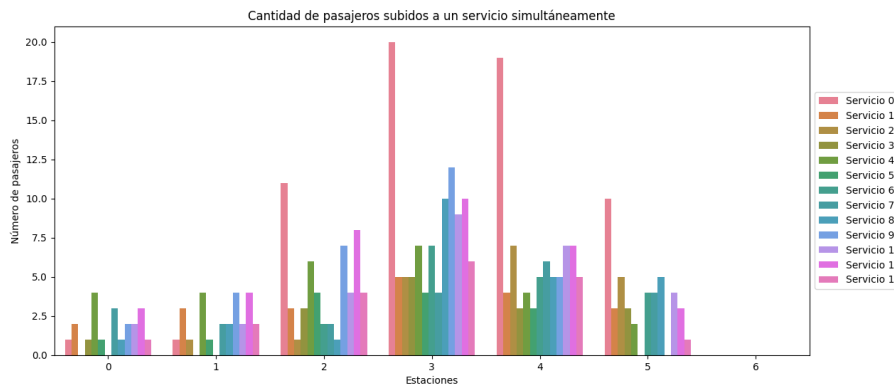


Figura 4.10: Número de pasajeros subidos a un servicio de manera simultánea entre las 7:00 y las 8:00.

Si miramos la cantidad de pasajeros que se han quedado esperando en cada estación podemos ver como el modelo solamente ha empeorado la situación de 1 persona en toda la hora, véase Figura 4.11.

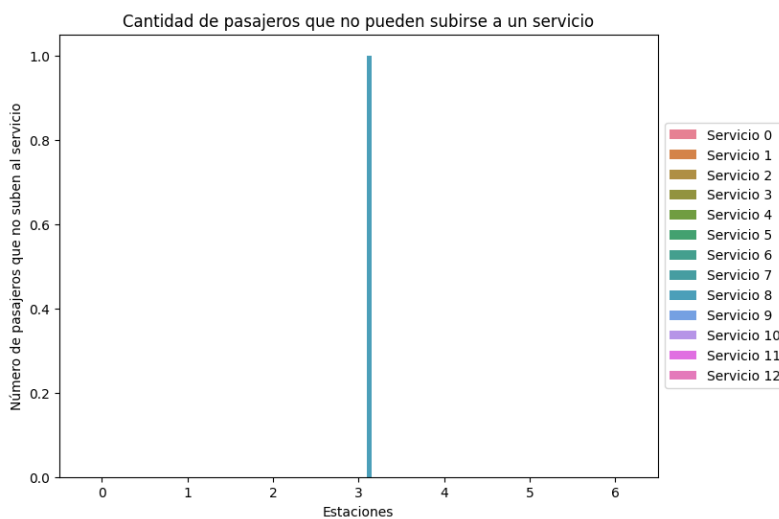


Figura 4.11: Número de pasajeros que se han quedado esperando en la estación  $i$  debido a que no podían subirse al servicio  $k$  entre las 7:00 y las 8:00.

## Capítulo 4. Resultados obtenidos

Finalmente, en la Figura 4.12, se muestran los horarios de los 13 servicios con el modelo *skip-stop*.

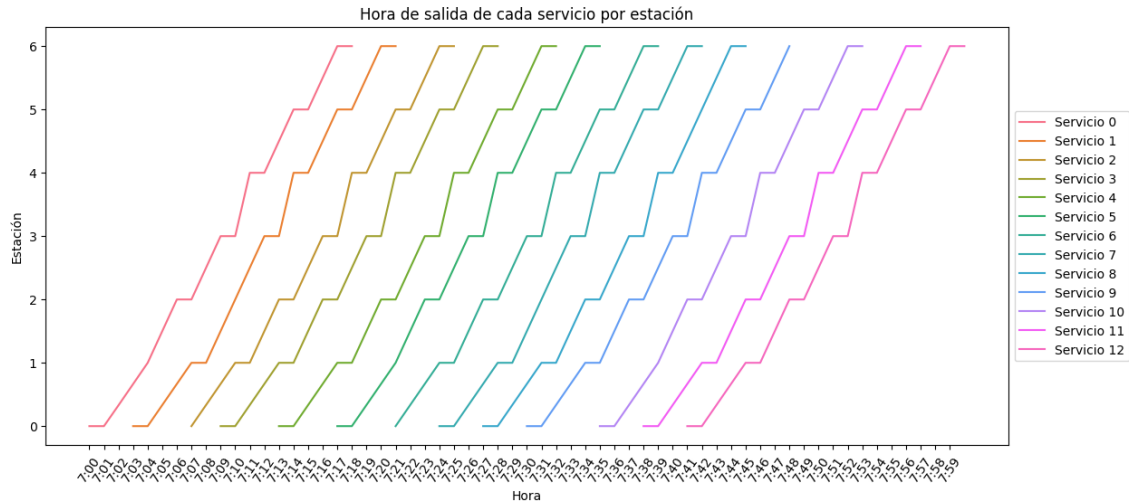


Figura 4.12: Horarios servicios 7 am con el método *skip-stop*.

En esta simulación hemos visto como el método *skip-stop* ha dado resultados mucho más satisfactorios que en las primeras pruebas. Esto se debe a que al haber pocas personas moviéndose por la línea, en muchos casos las estaciones se encuentran vacías o con un número de usuarios muy pequeño. Por tanto, en vista de los resultados obtenidos, una posible optimización en esta franja horaria sería saltarse 1 vez las estaciones 0, 1 y 2 cada 5 servicios. Además, podría estudiarse también la posibilidad de saltarse las estaciones 5 y 6 en algunos casos.

### 3. Simulación con demanda variable

En esta última simulación, vamos a probar el modelo en una franja horaria de demanda variable, intentando simular un día completo. Para ello, se ha utilizado la franja horaria de entre las 15:00 a las 16:00 y se han distribuido los pasajeros que viajaban por ella utilizando la distribución mostrada en la Figura 4.13.

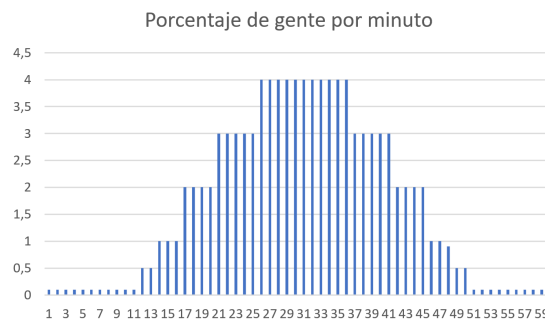


Figura 4.13: Distribución variable del número de usuarios en una hora.

## 4.2. Simulaciones y resultados

Como en los dos ejemplos anteriores, primero vamos a realizar una simulación con el método tradicional para comparar resultados. En este caso, debido a que ahora los primeros y últimos minutos del día tienen menos demanda, se van a utilizar 16 servicios. Como resultado obtenemos los horarios de la Figura 4.14

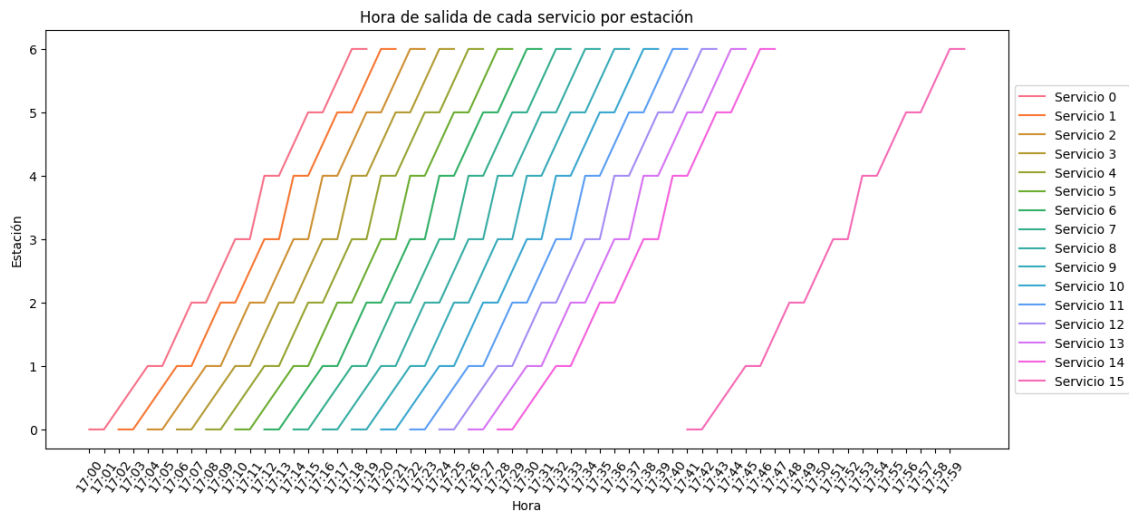


Figura 4.14: Horarios servicios 5 pm con el método tradicional.

En esta imagen podemos ver como todos los servicios se amontonan en las primeras horas del día para recoger a la mayor cantidad de usuarios posibles. Ahora bien, el último tren se retrasa lo máximo posible para que, aunque ya no haya mucha demanda de usuarios, se deje al menor número de personas posibles sin llegar a destino. Cabe destacar que los servicios empiezan muy temprano debido a que, como tardan casi 20 minutos en terminar el recorrido, en el momento que lleguen a las estaciones intermedias empieza la franja horaria con más demanda. Con este enfoque el tiempo medio de espera de cada usuario es de **5 minutos**.

Ahora, aplicaremos el modelo *skip-stop* a la simulación con el mismo número de servicios. Como se puede ver en la Figura 4.15, el modelo ha decidido saltarse un total de 16 paradas.

Podemos ver como en la simulación los primeros servicios se han saltado un gran número de estaciones, debido a la poca demanda de pasajeros, y conforme se acercaba la hora punta los servicios han empezado a pararse en casi todas las estaciones. Ahora bien, podemos ver que, aunque en el último servicio la demanda era mucho menor, el modelo ha decidido no saltarse ninguna estación para reducir el número de personas que no llegan a su destino. Con esta distribución de paradas, el modelo ha conseguido reducir el tiempo medio de espera a **3 minutos y 29 segundos**, 1 minuto y 31 segundos menos que con el método tradicional. Dando el mejor resultado hasta el momento.

Si miramos el número de pasajeros que se han quedado esperando en las estaciones, podemos ver como el modelo nunca ha dejado a más de 2 usuarios esperando, véase Figura 4.16.

## Capítulo 4. Resultados obtenidos

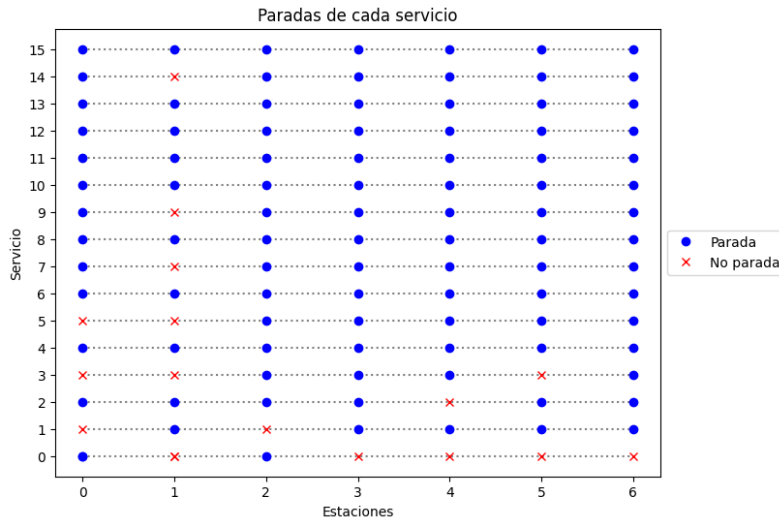


Figura 4.15: Paradas del modelo *skip-stop* con 16 servicios.

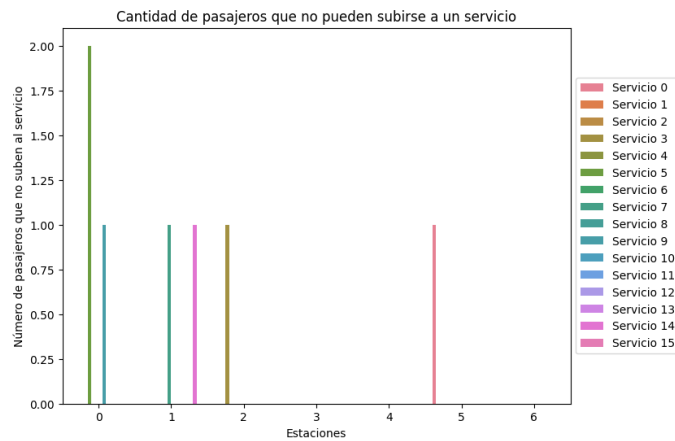


Figura 4.16: Número de pasajeros que se han quedado esperando en la estación  $i$  debido a que no podían subir al servicio  $k$  entre las 17:00 y las 18:00.

Finalmente, comprobaremos si la solución planteada es realista mirando la cantidad de usuarios que había en el servicio de manera simultánea, véase Figura 4.17.

Como podemos ver, el número máximo de usuarios utilizando un servicio ha sido de 70 personas. Aunque este número sea un poco más alto de lo deseado, no parece que al aumentar el número de estaciones vaya a sobrepasar los 1200 pasajeros que un servicio puede llevar. Por tanto, se considerará una simulación válida.

Finalmente veamos la distribución de horarios que ha generado el modelo, véase Figura 4.18.

En vista de los datos obtenidos en esta simulación, podemos confirmar que aplicar el modelo *skip-stop* en una red de transporte con demanda variable obtiene

## 4.2. Simulaciones y resultados

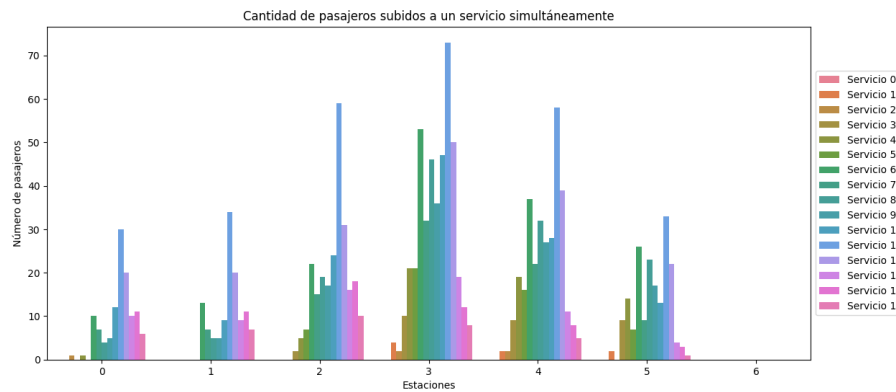


Figura 4.17: Número de pasajeros subidos a un servicio de manera simultánea entre las 17:00 y las 18:00.

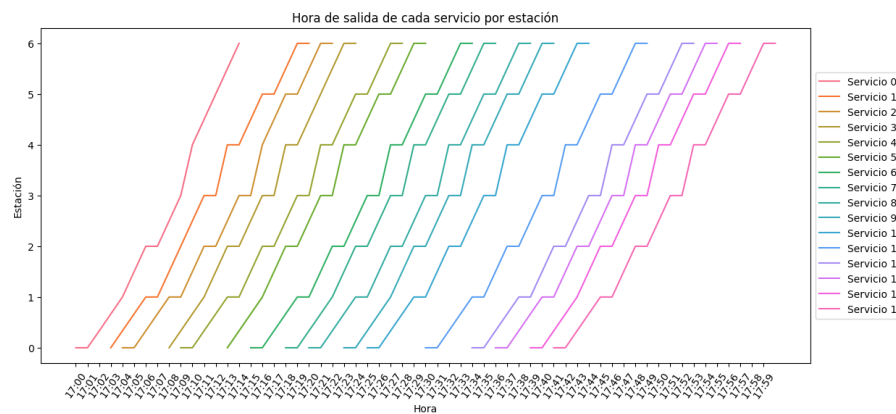


Figura 4.18: Horarios servicios 5 pm con el método *skip-stop*.

resultados significativamente mejores que el modelo tradicional. Esto se debe a que, en las franjas horarias con demanda muy baja, un modelo tradicional pierde mucho tiempo parando en estaciones que probablemente estén prácticamente vacías, en lugar de dirigirse rápidamente a las estaciones con mayor afluencia. Esta optimización no solo mejora la experiencia de los usuarios que están dentro de los trenes o esperando en las estaciones más concurridas, sino que también permite recorrer la línea completa más rápidamente. Como resultado, el servicio tiene la posibilidad de girar y abastecer el sentido contrario antes, reduciendo el *headway* entre servicios sin necesidad de aumentar el número de trenes en circulación.



## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro:

### 5.1. Conclusiones

Como hemos analizado en el capítulo anterior, la implementación de un modelo *skip-stop* mejora significativamente el funcionamiento de una red de transporte en comparación con el método convencional. Sin embargo, este tipo de optimización es altamente compleja y requiere un estudio muy riguroso de la demanda de pasajeros en todo momento del día.

Un aspecto clave que hemos observado en la implementación de este método es que resulta más eficaz en momentos de baja demanda o en periodos de tiempo muy largos con demanda variable. Esto se debe a que cuanto menor sea el volumen de pasajeros en cada estación mayor es la flexibilidad del modelo para poder omitirlas, beneficiando a los pasajeros que se encuentran a bordo. Además, hemos visto que saltarse esporádicamente estaciones con poco movimiento de pasajeros conlleva una mejora significativa en el tiempo medio de viaje de todos los pasajeros. Por otro lado, también se ha observado que el uso de este tipo de optimizaciones permite reducir significativamente el número de servicios utilizados en un día a cambio de una reducción mínima en el *headway* de dos servicios consecutivos.

Como se ha mencionado al principio del trabajo, este tipo de optimizaciones funcionan mejor en líneas con un gran número de estaciones y durante franjas de tiempo muy grandes. Por tanto, es importante destacar que, como solamente se ha podido realizar las simulaciones en pequeñas fracciones del día y sobre un pequeño conjunto de estaciones, las mejoras observadas en el rendimiento del modelo *skip-stop* representan solo una parte del potencial total que modelizaciones de este tipo pueden ofrecer a una red de transporte real.

### 5.2. Trabajo futuro

Aunque en este trabajo se han cumplido las metas propuestas y se han obtenido resultados satisfactorios, el campo de la optimización de redes de transporte requiere aún mucho trabajo y estudio. Concretamente, si nos centrándonos en

## Capítulo 5. Conclusiones y trabajo futuro:

---

el modelo *skip-stop* dinámico que se ha planteado y estudiado, aún pueden mejorarse los siguientes puntos:

1. *Linealización de las restricciones para el cálculo de  $c_{k,i,j}^b$* . La linealización de estas restricciones permitiría utilizar el modelo en todo su potencial, facilitando la simulación de escenarios muy realistas que se adapten mejor a condiciones reales.
2. *Optimización del modelado*. Aunque el modelo planteado es correcto, su complejidad aumenta exponencialmente al aumentar el número de estaciones servicios o minutos representados, demandando una gran carga computacional para simulaciones grandes. Esto puede resultar en tiempos de ejecución de varios días para simular casos con datos reales. Por lo tanto, optimizar el modelo para adaptarse mejor a un software de programación lineal, como podría ser CPLEX, permitiría su aplicación en una red de transporte completa.
3. *Realizar simulaciones sobre una línea completa en todo el conjunto temporal y en ambos sentidos*. Aunque las simulaciones realizadas han demostrado el funcionamiento del modelo, es necesario realizar simulaciones con un conjunto completo de estaciones, incluyendo ambos sentidos del trayecto y utilizando toda la franja temporal del metro para poder probar su eficacia en una situación real.
4. *Mejora de la precisión de los datos*. Aunque los datos obtenidos son reales y ofrecen una buena aproximación de la demanda del servicio, estos podrían mejorarse para ofrecer resultados más precisos. Por ejemplo, se podrían considerar ciertos aspectos únicos de cada estación que pueden influir en la demanda de ésta, como el número de líneas que pasan por ellas o eventos de ocio. Además, los datos suponen una distribución uniforme dentro de cada hora y sobre la distribución de los pasajeros entre las distintas estaciones, lo que podría no reflejar adecuadamente las variaciones reales de la demanda.

Una gran mejora para la recaudación de estos datos en Madrid, sería la instalación de tornos en las salidas de las estaciones, como se hace en otras partes del mundo. Esto permitiría contabilizar con mayor precisión la cantidad de usuarios que abandonan cada estación. Con esta información, podríamos obtener datos casi perfectos, requiriendo únicamente una estimación de la distribución de pasajeros dentro de cada hora del día.

5. *Uso de metaheurísticas en la resolución*. Al combinar la modelización matemática con el uso de metaheurísticas, se pueden conseguir soluciones más efectivas para abordar este tipo de problemas. Por un lado, estas técnicas pueden mejorar significativamente la eficiencia computacional al encontrar soluciones aceptables en tiempos razonables, por otro lado, las metaheurísticas tienen la capacidad de adaptarse a cambios dinámicos en el entorno, permitiendo una optimización continua en tiempo real.

# Bibliografía

- [1] M. Herrmann. «The Global Population Will Soon Reach 8 Billion—Then What?» (2022), dirección: <https://www.un.org/en/un-chronicle/global-population-will-soon-reach-8-billion-then-what> (visitado 14-04-2024).
- [2] M. Plazuelo. «El transporte urbano en autobús crece un 18% mientras que en avión baja un 11% en España». (2024), dirección: <https://www.newtral.es/uso-transporte-publico/20240214/> (visitado 26-04-2024).
- [3] V. R. Vuchic, *Urban transit: operations, planning, and economics*. John Wiley & Sons, 2005.
- [4] Y. Gao, L. Yang y Z. Gao, «Energy consumption and travel time analysis for metro lines with express/local mode», *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, vol. 60, págs. 7-27, 2018, Special Issue on Traffic Modeling for Low-Emission Transport.
- [5] X. Dong, D. Li, Y. Yin, S. Ding y Z. Cao, «Integrated optimization of train stop planning and timetabling for commuter railways with an extended adaptive large neighborhood search metaheuristic approach», *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 117, pág. 102681, 2020.
- [6] Z. Li, B. Mao, Y. Bai e Y. Chen, «Integrated Optimization of Train Stop Planning and Scheduling on Metro Lines With Express/Local Mode», *IEEE Access*, vol. 7, págs. 88534-88546, ene. de 2019.
- [7] X. Ding, S. Guan, D. J. Sun y L. Jia, «Short turning pattern for relieving metro congestion during peak hours: the substance coherence of Shanghai, China», *European Transport Research Review*, vol. 10, 2018.
- [8] J. Yuan, Y. Gao, S. Li, P. Liu y L. Yang, «Integrated optimization of train timetable, rolling stock assignment and short-turning strategy for a metro line», *European Journal of Operational Research*, vol. 301, n.º 3, págs. 855-874, 2022.
- [9] S. Peftitsi, E. Jenelius y O. Cats, «Evaluating skip-stop policy in urban rail transit systems based on passenger cost», *Journal of Public Transportation*, vol. 25, pág. 100064, 2023.
- [10] E. G. Ushakova, «Optimización del tiempo de espera y tiempo en el transporte: Metro de Madrid. Tesis (Máster Universitario en Inteligencia Artificial, UPM)», *Escuela Superior Técnica de Ingenieros Informáticos (UPM)*, 2023.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] W. Gu, Z. Amini y M. J. Cassidy, «Exploring alternative service schemes for busy transit corridors», *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 93, págs. 126-145, 2016.
- [12] e. a. Y. Zhang, «Approximate dynamic programming approach to efficient metro train timetabling and passenger flow control strategy with stop-skipping», *Engineering Applications of Artificial Intelligence, Volume 127*, pág. 107393, 2024.
- [13] Y. Zhang, S. Li, Y. Yuan, J. Zhang y L. Yang, «Approximate dynamic programming approach to efficient metro train timetabling and passenger flow control strategy with stop-skipping», *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 127, pág. 107393, 2024.
- [14] F. G. Heredia, «Determinación del horario óptimo de una línea de metro con salto de paradas y demanda variable.», *Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla. Tesis (Grado)*, 2021.
- [15] M. Madrid. «Información Línea 1 Metro Madrid». (2024), dirección: <https://www.metromadrid.es/es/linea/linea-1#line-timetable> (visitado 14-02-2024).
- [16] Treneando, *Metro de Madrid recibe los primeros trenes de la nueva serie 8400*, 2010. dirección: <https://treneando.com/2010/06/14/metro-de-madrid-recibe-los-primeros-trenes-de-la-nueva-serie-8400/#:~:text=La%20capacidad%20de%20cada%20tren,10%20y%2011%20de%20Metro.> (visitado 16-05-2024).

# **Anexos**



## Apéndice A

### Anexo: Datos usados

#### A.1. Matriz de demanda $OD[\tau]$ para la primera simulación.

Entry_Station	Exit_Station	19:00	19:01	19:02	19:03	19:04
0	1	0	0	0	0	1
0	2	2	0	1	1	3
0	3	0	0	1	0	1
0	4	0	0	0	0	0
0	5	2	0	0	1	0
0	6	0	0	3	0	0

19:05	19:06	19:07	19:08	19:09	19:10	19:11	19:12	19:13
0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	2	0	0	0	2	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	2	1	0	0	3	0	0

19:14	19:15	19:16	19:17	19:18	19:19	19:20	19:21	19:22
1	1	0	0	0	1	0	0	0

**Capítulo A. Anexo: Datos usados**

---

19:14	19:15	19:16	19:17	19:18	19:19	19:20	19:21	19:22
0	0	0	0	0	0	2	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	2	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	3	0	1	1	2	1	0	2

19:23	19:24	19:25	19:26	19:27	19:28	19:29	19:30	19:31
0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	2	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	0	0	1	0	0
0	2	1	0	1	1	0	0	0

19:32	19:33	19:34	19:35	19:36	19:37	19:38	19:39	19:40
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	2	0	1	0	1	0	0
0	1	0	2	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0

19:41	19:42	19:43	19:44	19:45	19:46	19:47	19:48	19:49
0	0	1	0	0	3	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1

**A.2. Matriz de demanda  $OD[\tau]$  para la segunda simulación.**

<b>19:50</b>	<b>19:51</b>	<b>19:52</b>	<b>19:53</b>	<b>19:54</b>	<b>19:55</b>	<b>19:56</b>	<b>19:57</b>	<b>19:58</b>
0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	2	0	1	1
0	0	1	2	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	2
0	1	0	0	0	1	2	0	0

<b>19:59</b>
0
0
1
0
0
0

**A.2. Matriz de demanda  $OD[\tau]$  para la segunda simulación.**

<b>Entry_Station</b>	<b>Exit_Station</b>	<b>7:00</b>	<b>7:01</b>	<b>7:02</b>	<b>7:03</b>	<b>7:04</b>
0	1	0	0	0	1	1
0	2	1	0	0	0	0
0	3	0	0	0	0	0
0	4	0	0	0	0	1
0	5	0	0	0	0	0
0	6	0	0	0	0	0

<b>7:05</b>	<b>7:06</b>	<b>7:07</b>	<b>7:08</b>	<b>7:09</b>	<b>7:10</b>	<b>7:11</b>	<b>7:12</b>	<b>7:13</b>	<b>7:14</b>
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

**Capítulo A. Anexo: Datos usados**

---

<b>7:05</b>	<b>7:06</b>	<b>7:07</b>	<b>7:08</b>	<b>7:09</b>	<b>7:10</b>	<b>7:11</b>	<b>7:12</b>	<b>7:13</b>	<b>7:14</b>
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

<b>7:15</b>	<b>7:16</b>	<b>7:17</b>	<b>7:18</b>	<b>7:19</b>	<b>7:20</b>	<b>7:21</b>	<b>7:22</b>	<b>7:23</b>	<b>7:24</b>
0	0	0	0	0	0	2	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

<b>7:25</b>	<b>7:26</b>	<b>7:27</b>	<b>7:28</b>	<b>7:29</b>	<b>7:30</b>	<b>7:31</b>	<b>7:32</b>	<b>7:33</b>	<b>7:34</b>
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

<b>7:35</b>	<b>7:36</b>	<b>7:37</b>	<b>7:38</b>	<b>7:39</b>	<b>7:40</b>	<b>7:41</b>	<b>7:42</b>	<b>7:43</b>	<b>7:44</b>
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	5	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**A.3. Matriz de demanda  $OD[\tau]$  para la tercera simulación.**

7:45	7:46	7:47	7:48	7:49	7:50	7:51	7:52	7:53	7:54
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

7:55	7:56	7:57	7:58	7:59
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

**A.3. Matriz de demanda  $OD[\tau]$  para la tercera simulación.**

Entry_Station	Exit_Station	17:00	17:01	17:02	17:03	17:04
0	1	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0
0	3	0	0	0	0	0
0	4	0	0	0	0	0
0	5	0	0	0	0	0
0	6	0	0	0	0	0

17:05	17:06	17:07	17:08	17:09	17:10	17:11	17:12	17:13
0	0	0	0	0	0	0	0	0

**Capítulo A. Anexo: Datos usados**

---

17:05	17:06	17:07	17:08	17:09	17:10	17:11	17:12	17:13
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1

17:14	17:15	17:16	17:17	17:18	17:19	17:20	17:21	17:22
1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	2	1
1	0	0	0	0	1	1	0	3
0	0	0	1	0	1	1	0	0

17:23	17:24	17:25	17:26	17:27	17:28	17:29	17:30	17:31
2	1	3	2	0	1	1	0	1
1	0	0	3	0	0	3	2	1
1	1	0	0	1	1	1	0	2
0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	3	1	2	2	0	1	1	1
3	1	0	0	2	1	1	1	0

17:32	17:33	17:34	17:35	17:36	17:37	17:38	17:39	17:40
1	1	0	0	2	0	1	0	0
1	0	1	2	0	0	1	0	1
1	2	1	0	3	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	2	1	0
1	1	1	0	1	1	0	2	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0


**A.3. Matriz de demanda  $OD[\tau]$  para la tercera simulación.**

<b>17:41</b>	<b>17:42</b>	<b>17:43</b>	<b>17:44</b>	<b>17:45</b>	<b>17:46</b>	<b>17:47</b>	<b>17:48</b>	<b>17:49</b>
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	2	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1

<b>17:50</b>	<b>17:51</b>	<b>17:52</b>	<b>17:53</b>	<b>17:54</b>	<b>17:55</b>	<b>17:56</b>	<b>17:57</b>	<b>17:58</b>
0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

<b>17:59</b>
0
0
0
0
1
0

Este documento esta firmado por

	<b>Firmante</b>	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
	<b>Fecha/Hora</b>	Fri May 31 19:29:34 CEST 2024
	<b>Emisor del Certificado</b>	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
	<b>Numero de Serie</b>	561
	<b>Metodo</b>	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)