Universidad Politécnica
de Madrid

Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Trabajo Fin de Grado

Optimización de la Estructura de Capital de la Empresa

Autor: Sara Rodríguez Rojo
Tutor: Álvaro Pérez Raposo

Madrid, junio 2024

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Título: Optimización de la estructura de capital de la empresa

Junio 2024

Autor: Sara Rodríguez Rojo

Tutor:

Álvaro Pérez Raposo

Matemática Aplicada

Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

Toda actividad empresarial necesita de financiación, y esta, en términos muy generales, se puede obtener de dos formas: mediante capital propio o mediante endeudamiento. La práctica financiera muestra que el endeudamiento tiene un coste inferior para la empresa que recurrir al capital propio. Se podría deducir, entonces, que la mejor financiación es la compuesta exclusivamente por deuda. Sin embargo, esto no es posible; la deuda necesita de la confianza de los acreedores, y esta se fundamenta precisamente en el capital propio de la empresa. Por ello, la práctica habitual es un reparto del capital total de la empresa entre capital propio y deuda, lo que se conoce como estructura de capital. El estudio de la estructura de capital se convierte así en un problema de optimización, ya que ni una financiación formada exclusivamente por capital propio ni el otro extremo, una financiación formada totalmente por deuda, son la mejor solución para la actividad empresarial. Debe existir un punto de la estructura de capital, un reparto concreto entre capital propio y deuda, que optimice la financiación de la actividad.

Desde finales de los años 50 varias teorías han abordado este problema. El primer resultado significativo fue la teoría de irrelevancia de Modigliani y Miller, que concluye que, bajo las hipótesis de mercado perfecto, la estructura de capital, al contrario de lo esperado, es irrelevante para el valor de la empresa. Este resultado es sorprendente pero lógico, dadas las suposiciones tan fuertes del mercado perfecto. A partir de esta teoría se elaboraron otras en las que se relajan algunas de estas restricciones y, en consecuencia, la conclusión ya no es de irrelevancia. Las más importantes y que se estudian en este trabajo son la propia teoría de Modigliani y Miller, corregida con el efecto de los impuestos, y la teoría de equilibrio estático.

Curiosamente, las teorías sobre estructura de capital, aun reconociendo el problema como un problema de optimización, no se plantean en los términos matemáticos ni utilizando las herramientas que ofrece la rama de las matemáticas conocida como investigación de operaciones. Estas teorías, tanto en las publicaciones originales como en los libros de texto actuales sobre finanzas corporativas, se plantean de forma mixta, con una formulación matemática de algunos conceptos, pero no completa. Y las soluciones no se describen como fruto de las herramientas matemáticas de la investigación de operaciones, sino a partir de razonamientos heurísticos financieros.

El objetivo de este trabajo es plasmar estas teorías en forma de un problema matemático de optimización al que aplicar las técnicas de optimización desarrolladas con toda generalidad por esta rama. Para ello se requiere una modelización completa del problema, es decir, identificar variables de decisión, establecer una función objetivo a maximizar o minimizar, y considerar unas restricciones. Una vez modelizado, las técnicas de resolución permiten obtener la solución óptima que cumpla con las restricciones. Cuando se modelizan de este modo las teorías, se obtienen los mismos resultados que ya enunciaron sus proponentes, pero de una manera sistemática a partir de una deducción matemática. Como ya indicó Descartes en su Discurso del Método, esta es la forma más segura de proceder en las ciencias. Y queda como labor del experto el interpretar la solución matemática en el contexto del problema.

Finalmente, se han aplicado los modelos matemáticos desarrollados a ejemplos concretos de empresas con diferentes situaciones financieras y se han comentado en sus respectivos contextos los resultados obtenidos.

Abstract

Every business activity requires financing, which can generally be obtained in two ways: through equity or through debt. Financial practice demonstrates that debt financing costs less for a company than resorting to equity. It might then be deduced that the best financing structure is comprised entirely of debt. However, this is not feasible; debt requires the confidence of creditors, which is fundamentally based on the company's own equity. Therefore, the usual practice involves distributing the company's total capital between equity and debt, known as the capital structure. The study of capital structure thus becomes an optimization problem, since neither financing exclusively through equity nor the opposite extreme, financing entirely through debt, provides the best solution for business activities. There must be a point in the capital structure, a specific distribution between equity and debt, that optimizes the financing of the activity.

Since the late 1950s, various theories have addressed this problem. The first significant result was the Modigliani and Miller theory of irrelevance, which concludes that under the assumptions of a perfect market, the capital structure, contrary to expectations, is irrelevant to the company's value. This result is surprising but logical, given the strong assumptions of a perfect market. From this theory, others were developed that relax some of these restrictions, and consequently, the conclusion is no longer one of irrelevance. The most important theories studied in this work are the Modigliani and Miller theory itself, amended by the tax effect, and the static equilibrium theory.

Interestingly, while capital structure theories recognize the problem as one of optimization, they are not approached in mathematical terms nor using the tools provided by the branch of mathematics known as operations research. These theories, both in their original publications and in current textbooks on corporate finance, are presented in a mixed format, with a mathematical formulation of some concepts, but not completely. And the solutions are not described as the product of the mathematical tools of operations research, but rather from heuristic financial reasoning.

The aim of this work is to express these theories in the form of a mathematical optimization problem to which general optimization techniques developed by this branch can be applied. This requires a complete modeling of the problem, that is, identifying decision variables, establishing an objective function to maximize or minimize, and considering constraints. Once modeled, resolution techniques allow obtaining the optimal solution that meets the constraints. When modeled in this way, the theories yield the same results as already articulated by their proponents, but in a systematic manner from a mathematical deduction. As Descartes pointed out in his Discourse on the Method, this is the most reliable way to proceed in science. And it remains the task of the expert to interpret the mathematical solution in the context of the problem.

Finally, the developed mathematical models have been applied to specific examples of companies with different financial situations, and the results have been discussed in their respective contexts.

Tabla de contenidos

Glosario

I_0: Inversión inicial.

T_C: Tasa impositiva corporativa.

$T_C D$: Valor del escudo fiscal.

V_L: Valor de una empresa apalancada.

V_U: Valor de una empresa sin apalancamiento.

r_D: Rendimiento o coste de la deuda.

r_E: Rendimiento o coste de capital propio.

r_f: Tasa de rendimiento libre de riesgo.

r_0: Rendimiento de capital de una empresa no apalancada.

β_D: Beta de la deuda.

β_A: Beta total de la empresa.

β_E: Beta del capital propio.

$CAPM$: Modelo de valoración de activos financieros (Capital Asset Pricing Model).

ICR, RCI: Ratio de cobertura de interés.

$CMPC,\ WACC$: Coste medio ponderado de capital.

D: Valor de mercado de la deuda.

$DSCR, RCSD$: Ratio de cobertura de servicio de la deuda.

E: Valor de mercado del capital propio.

$EBIT$: Beneficios antes de intereses e impuestos.

$EBITDA$: Beneficios antes de intereses, impuestos, depreciación y amortización.

FC: Flujo de caja.

N: Vida de un proyecto de inversión.

$Teorema\ MM$: Teorema de Modigliani-Miller.

VAN, NPV: Valor presente neto.

r: Rendimiento o coste de capital total de una empresa.

t: Periodo.

1 Introducción

En el contexto de la gestión financiera empresarial, la estructura de capital juega un importante papel en la determinación del valor de una empresa y su rendimiento financiero. Dicha estructura implica una combinación específica de deuda y capital propio que las empresas utilizan para financiarse. Elegir la proporción adecuada de estos componentes es crucial, ya que puede influir directamente en la estabilidad financiera de la empresa y su capacidad para capturar oportunidades de crecimiento.

La financiación mediante deuda presenta, inicialmente, una ventaja frente al capital propio. Esta ventaja nace de que los rendimientos generados por las operaciones empresariales suelen superar el coste de la deuda, resultando en un beneficio neto al financiar actividades con capital ajeno. No obstante, un nivel de endeudamiento excesivo puede incrementar significativamente el riesgo empresarial y elevar los costes financieros, haciendo que la deuda sea contraproducente. Por lo tanto, debe existir un nivel de endeudamiento entre cero y el capital total que resulte óptimo para la empresa.

El desafío consiste en determinar este nivel de endeudamiento óptimo, que maximice el valor de la empresa minimizando simultáneamente el coste medio ponderado de capital. Esto constituye el problema de optimización de la estructura de capital. El análisis requiere comprender los factores que influyen en las decisiones de financiación, como el coste y los beneficios fiscales de la deuda, y el riesgo asociado al apalancamiento financiero.

Este Trabajo Fin de Grado se centra en la optimización de la estructura de capital de la empresa, explorando diversas teorías y planteando modelos matemáticos sobre estos conceptos. En particular, en los modelos matemáticos se estudia el teorema de Modigliani y Miller y la teoría del equilibrio estático.

A lo largo de este trabajo, se desarrollan varios modelos de optimización para ilustrar cómo las empresas pueden aplicar estos conceptos teóricos en la práctica. Se analizan casos específicos y se proporciona un ejemplo numérico para demostrar la aplicación de estos modelos en escenarios reales. El objetivo final es estudiar la estructura de capital y sus factores, ofreciendo una guía comprensiva y práctica para la toma de decisiones financieras estratégicas en la gestión de la estructura de capital empresarial.

1.1 Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es el desarrollo de modelos matemáticos de optimización para estudiar la estructura de capital, su optimización, y los factores que pueden influir en la decisión de este punto óptimo.

Para alcanzar este objetivo general, se han definido los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar y describir las principales teorías sobre la estructura de capital y la formulación matemática de las distintas condiciones de financiación.
- Modelizar matemáticamente las teorías descritas según el objetivo anterior, aplicar los modelos propuesto y analizar los resultados obtenidos.

- Establecer escenarios que reflejen situaciones reales en el ámbito empresarial a los que aplicar los modelos creados para obtener respuestas sobre su estructura óptima de capital.

1.2 Estructura del documento

Este trabajo está estructurado de forma que comienza desde la parte más teórica de la estructura de capital, a la parte más práctica de formulación de modelos y aplicación en un ejemplo ilustrativo.

El Capítulo 2 profundiza en los conceptos básicos y las teorías fundamentales que rigen la estructura de capital, destacando el teorema de Modigliani y Miller y la teoría del equilibrio estático, entre otros. Se abordan tanto las ventajas como las implicaciones de diferentes configuraciones de deuda y capital propio, así como los principales factores a tener en cuenta.

En el Capítulo 3 se desarrollan y analizan varios modelos matemáticos de optimización. Estos modelos buscan ilustrar cómo aplicar teóricamente los conceptos discutidos y cómo pueden ser implementados en escenarios prácticos y reales.

Finalmente, en el Capítulo 4, el documento concluye con los resultados y las conclusiones, donde se evalúan los modelos propuestos y se discuten sus aplicaciones prácticas y limitaciones, seguido de recomendaciones para investigaciones futuras.

2 Estructura de capital

En este capítulo se expone el concepto de la estructura de capital de una empresa, que determina cómo se financian las operaciones y proyectos. La estructura de capital se compone de la proporción de deuda y capital propio que utiliza una empresa, y su adecuada gestión puede impactar significativamente en el rendimiento y la estabilidad financiera.

Inicialmente, se revisan los conceptos generales y las principales teorías que subyacen a la estructura de capital, incluyendo los teoremas de Modigliani y Miller y otras teorías contemporáneas. Estos fundamentos teóricos proporcionan una base para entender las decisiones estratégicas de financiamiento que una empresa puede adoptar.

Posteriormente, se expone la base teórica concreta sobre la que se construye el modelo de optimización, que se explica en detalle en capítulos posteriores.

2.1 Conceptos generales

Este apartado aborda los conceptos fundamentales relacionados con la estructura de capital. Se define la estructura de capital de forma general y se introducen los principales teoremas y factores que influyen en esta combinación, como el Teorema de Modigliani-Miller y las teorías del equilibrio estático y del orden jerárquico. Estos teoremas proporcionan un marco teórico para entender cómo las decisiones de financiamiento afectan el valor de la empresa y el coste del capital. Se exponen las ventajas y desventajas del uso de deuda y capital propio, así como los riesgos asociados, proporcionando una visión general de cómo las empresas pueden optimizar su estructura de capital y qué factores se tienen en cuenta en este contexto.

2.1.1 Definiciones

A la hora de financiar un proyecto, las empresas pueden recurrir a diversas fuentes de capital. Una de las principales formas de financiación es la deuda, que implica tomar prestados fondos de una o varias fuentes, tales como bancos, inversores de capital o mediante la emisión de bonos. Al optar por financiarse mediante deuda, la empresa asume la obligación de reembolsar el principal de la deuda y, generalmente, los intereses derivados en fechas específicas. Dependiendo del periodo de devolución, la deuda puede clasificarse como a corto plazo (menos de un año) o a largo plazo (más de un año), lo cual implica compromisos financieros fijos para la empresa.

Otra forma de financiación es el capital propio, que consiste en los fondos aportados por los propietarios de la empresa, ya sean accionistas en una empresa cotizada o dueños en una empresa privada. A diferencia de la deuda, el capital propio no requiere reembolso ni pagos de intereses en un plazo determinado. En su lugar, los retornos a los accionistas se realizan a través de dividendos y el aumento en el valor de las acciones. Los dividendos no son una obligación y pueden variar según las ganancias de la empresa, proporcionando así una mayor flexibilidad en la distribución de beneficios.

La estructura de capital de una empresa se define como la proporción específica de capital propio (*equity* E) y deuda (D) utilizada para financiar sus activos, tanto operaciones como proyectos. La combinación de estos instrumentos financieros puede determinar el rendimiento, la estabilidad y la salud financiera de la empresa.

La empresa está legalmente obligada a cumplir con el pago de la deuda y los intereses antes de considerar la distribución de beneficios a los propietarios. Además, en caso de liquidación de la empresa, los acreedores tienen prioridad sobre los accionistas en la recuperación de sus inversiones. Por otro lado, aunque el uso de deuda puede aumentar el rendimiento sobre el capital propio si la empresa genera retornos superiores al coste de la deuda, también se incrementa el riesgo de insolvencia en situaciones de bajos ingresos o pérdidas. Esto implica que el riesgo que asume el accionista es mayor que el riesgo que asumen los prestamistas, y, por tanto, espera una tasa de rendimiento mayor que la tasa de interés de la deuda. En general, y especialmente cuando los tipos son bajos, la deuda es una fuente de financiación más barata que el capital propio. Sin embargo, la deuda supone un riesgo para la empresa y para los propietarios mayor que el financiamiento mediante la emisión de acciones.

Existen diversas teorías sobre cómo se estructura (o se debe estructurar) el capital de la empresa. Modigliani y Miller [1] [2] revolucionaron la teoría financiera con su teoría de irrelevancia, en la que demuestran que, en un mercado perfecto, el valor de la empresa y el coste de financiación no se ven afectados por la proporción de deuda y capital.

Un mercado perfecto se caracteriza por ser grande y competitivo, donde ningún participante, ya sea comprador, vendedor o emisor de valores, tiene suficiente influencia para afectar los precios. El acceso a la información es igual y gratuito para todos los participantes, eliminando así ventajas informativas y asimetrías. No existen costes de transacción, como comisiones o impuestos de transferencia, y tampoco hay costes de agencia, lo que garantiza que la empresa actúe siempre en beneficio de los propietarios. Además, no hay diferencias impositivas entre los beneficios distribuidos, como dividendos, y los no distribuidos. Los inversores en un mercado perfecto se comportan de manera racional, prefiriendo una mayor riqueza y siendo indiferentes al medio por el cual aumentan dicha riqueza, ya sea mediante dividendos o incrementos en el valor de las acciones. Asimismo, los inversores tienen certeza perfecta sobre el programa de inversión futuro y las ganancias futuras de cada firma, lo que significa que poseen información completa y segura sobre todas las inversiones y rendimientos futuros.

Actualmente, las dos teorías con mayor fuerza [3] son la teoría del equilibrio estático o teoría del intercambio estático (*Static Trade-Off Theory*) y la teoría del orden jerárquico (*Pecking-Order Theory*).

2.1.2 Teorema de Modigliani y Miller

Franco Modigliani y Merton Miller, en su artículo "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment" [1], propusieron el teorema de Modigliani-Miller (Teorema MM). De forma simplificada, este teorema establece que, en un mercado perfecto, el valor de la empresa no depende de la proporción de deuda y capital propio que use para financiar sus operaciones.

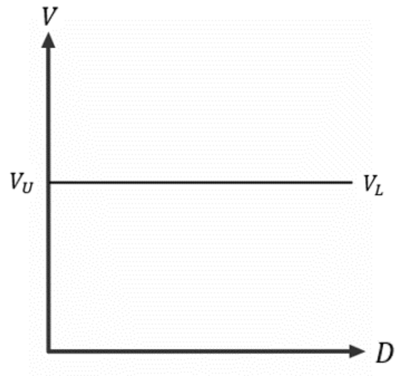
El teorema MM de irrelevancia establece dos proposiciones fundamentales:

- **Proposición I:** el valor de mercado de una empresa no depende de su estructura de capital, es decir, que para dos empresas completamente idénticas excepto en su estructura de capital se cumple:

$$V_U = V_L, \quad (2.1)$$

donde:

- V_U es el valor de la empresa sin apalancamiento (*unlevered*).
- V_L es el valor de la empresa apalancada (*levered*), cuya estructura de capital puede ser cualquier combinación de deuda y capital propio.



Gráfica 1. Proposición I del teorema MM.

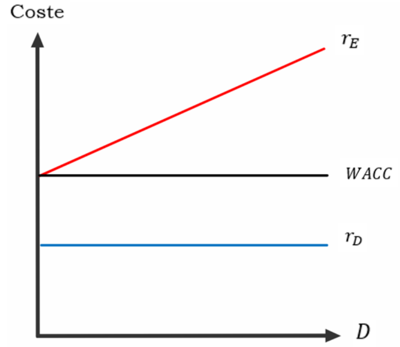
Por lo tanto, es irrelevante si la empresa se financia mediante deuda o mediante capital propio, el valor total de la empresa permanece constante. Esta idea se basa en que los inversores pueden replicar la estructura de capital de la empresa en sus propias carteras personales, neutralizando cualquier efecto de las decisiones de financiación de la empresa.

- **Proposición II:** el coste del capital de la empresa no varía con su estructura de capital:

$$r_E = r_0 + \frac{D}{E}(r_0 - r_D), \quad (2.2)$$

donde:

- r_E es la tasa de retorno esperada sobre el capital propio, o, de forma equivalente, el coste de capital propio de la empresa apalancada.
- r_0 es el coste de capital de la empresa no apalancada.
- r_D es la tasa de retorno esperada sobre la deuda, o, de forma equivalente, el coste de la deuda.
- $\frac{D}{E}$ es el ratio deuda-capital.



Gráfica 2. Proposición II del teorema de MM.

En un mercado perfecto, cualquier incremento en el uso de deuda (más barata que el capital propio) se “compensa” con un aumento en el coste del capital propio debido al mayor riesgo percibido por los accionistas. Como resultado, el coste medio ponderado de capital $CMPC$ (*weighted average cost of capital* $WACC$) de la empresa permanece constante sin importar la proporción de deuda y capital propio.

El teorema MM revolucionó la teoría financiera al introducir la idea de que, en un mercado perfecto, la estructura de capital es irrelevante para el valor de la empresa. Esto desafió la creencia tradicional de que las empresas podían aumentar su valor simplemente alterando su mezcla de deuda y capital propio.

Sin embargo, en el mundo real, los supuestos del mercado perfecto no siempre se cumplen. Los costes de transacción y las asimetrías de información sí existen, lo que ha llevado al desarrollo de teorías alternativas, como la teoría del equilibrio estático o la teoría del orden jerárquico, que sí consideran estos factores.

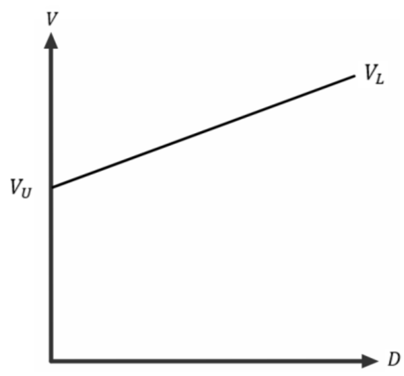
En un trabajo posterior, Modigliani y Miller [4] presentaron una versión del teorema que considera los impuestos y su impacto fiscal sobre la deuda y el valor de la empresa. En un escenario con impuestos corporativos, la deuda supone una ventaja fiscal, ya que los intereses pagados sobre la deuda son deducibles de impuestos. Esto reduce la carga tributaria de la empresa, y, por lo tanto, aumenta el valor de la misma. Las dos proposiciones ajustadas a los impuestos son:

- **Proposición I con Impuestos:** el valor de una empresa apalancada es mayor que el valor de una empresa sin apalancamiento debido a los beneficios fiscales de la deuda. La fórmula que representa esto es:

$$V_L = V_U + T_C D, \tag{2.3}$$

donde:

- T_C es la tasa impositiva corporativa.
- $T_C D$ es el valor del beneficio fiscal, o escudo fiscal.

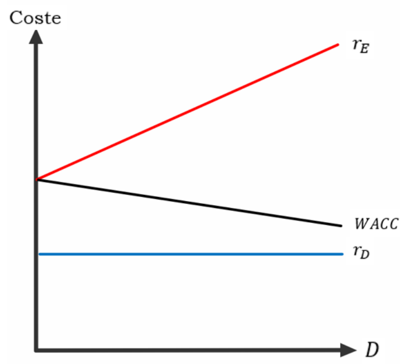


Gráfica 3. Proposición I de MM ajustada a los impuestos.

Esto significa que el valor de la empresa apalancada se incrementa por el valor presente de los ahorros fiscales derivados de los intereses de la deuda.

- **Proposición II con Impuestos:** el coste del capital propio de una empresa apalancada aumenta con la proporción de deuda en su estructura de capital. Esto se debe al mayor riesgo financiero que asumen los accionistas al incrementarse la deuda. La fórmula que describe este aumento es:

$$r_E = r_0 + \frac{D}{E}(r_0 - r_D)(1 - T_C), \tag{2.4}$$



Gráfica 4. Proposición II de MM ajustada a los impuestos.

2.1.3 Teoría del equilibrio estático

A raíz de las proposiciones de Modigliani y Miller [1] y los comentarios de Durand [5], se comenzó un debate que, tras varias aportaciones, como [6], dio lugar a la teoría del equilibrio estático [3].

La teoría del equilibrio estático, también conocida como *static trade-off theory*, sugiere que las empresas buscan un equilibrio óptimo en su estructura de capital al considerar los beneficios y los costes asociados con el uso de la deuda y el capital propio. Esta teoría propone que existe un punto en el cual el valor de la empresa se maximiza debido a la combinación óptima de deuda y capital propio.

La teoría del equilibrio parte de la premisa de que el endeudamiento tiene tanto ventajas como desventajas, y que las empresas deben equilibrar estas dos fuerzas para determinar su estructura de capital ideal.

Una de las principales ventajas del uso de deuda es el escudo fiscal que proporciona. Los intereses pagados por la deuda son deducibles de impuestos, lo que reduce la carga fiscal de la empresa y aumenta el valor después de impuestos. Este beneficio fiscal hace que la deuda sea una opción atractiva para financiar las operaciones de la empresa.

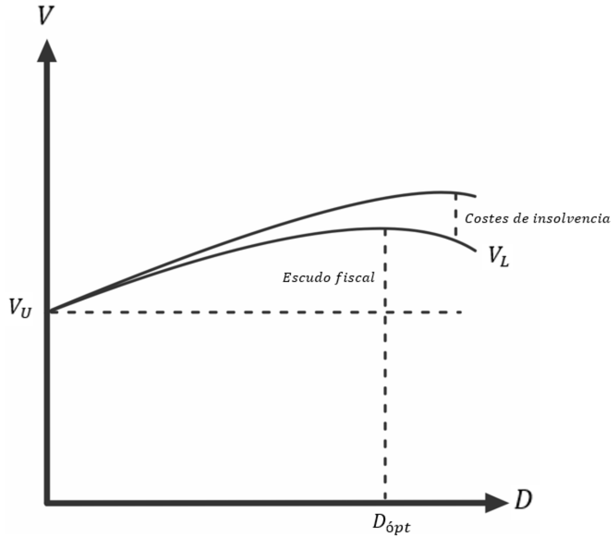
Sin embargo, un alto nivel de endeudamiento también aumenta el riesgo de dificultades financieras. Los costes de quiebra y de insolvencia incluyen no solo los costes directos, como los honorarios legales, sino también los costes indirectos, como la pérdida de clientes y proveedores, y la disminución del valor de mercado de la empresa. Estos costes aumentan a medida que la empresa aumenta su deuda, lo que puede contrarrestar los beneficios fiscales.

La teoría del equilibrio estático postula que las empresas deben buscar un punto de equilibrio donde los beneficios fiscales de la deuda igualen los costes adicionales de las dificultades financieras o costes de insolvencia. Este punto óptimo es donde el valor de la empresa es maximizado, o donde el coste medio ponderado de capital se minimiza. Extendiendo la Proposición I del Teorema MM, el valor de la empresa está definido como:

$$V_L = V_U + T_C D - ci, \tag{2.5}$$

donde:

- ci es el coste de insolvencia.



Gráfica 5. Valor de la empresa en función de su apalancamiento.

2.1.4 Teoría del orden jerárquico

La teoría del orden jerárquico, propuesta inicialmente por Donaldson [7], y desarrollada posteriormente por Mayers y Majluf [8], sugiere que las empresas siguen una jerarquía para financiarse, basada en la minimización de los costes y asimetrías de información entre los gestores de la empresa y los inversores externos. Esta jerarquía indica que las empresas prefieren financiarse primero de fondos propios, después mediante deuda y finalmente mediante la emisión de acciones.

La teoría del orden jerárquico se basa en la premisa de que la información sobre el valor de las empresas no es perfectamente simétrica. Es decir, los directivos de la empresa suelen tener más información sobre las perspectivas futuras y el valor real de la empresa que los inversores externos. Debido a esta asimetría informativa, los inversores interpretan las decisiones de financiación de la empresa como señales del estado financiero de la misma.

Las empresas prefieren utilizar, en primer lugar, sus fondos propios (retenciones de ganancias) para financiar sus proyectos de inversión. Esto se debe a que el uso de fondos propios no conlleva ningún coste de emisión y no revela potencialmente información adicional al mercado.

Cuando los fondos propios son insuficientes, las empresas optan entonces por financiarse a través de deuda. La emisión de deuda conlleva menores costes de información comparado con la emisión de acciones y, además, los intereses de la deuda son deducibles de impuestos.

La emisión de nuevas acciones se considera la última opción debido a los altos costes de emisión y a la señal negativa que envía al mercado. La emisión de acciones puede interpretarse como una señal de que los directivos creen que las acciones están sobrevaloradas, lo que puede causar una caída en el precio de las mismas.

Más allá de la jerarquía, Myers y Majluf [8] demostraron que, debido a la asimetría de información, las empresas pueden rechazar proyectos de inversión con valor actual neto (VAN) positivo si deben financiar estos proyectos mediante la emisión de nuevas acciones. Esto se debe a que los accionistas, ante una emisión de acciones, pueden asumir que las acciones están sobrevaloradas, lo que disminuye el precio de mercado de las acciones y aumenta el coste de capital para la empresa.

2.1.5 Otras teorías y factores

Existen otras teorías que proporcionan diferentes perspectivas sobre la estructura de capital y las decisiones de endeudamiento de las empresas. A continuación, se presentan resumidamente estas teorías relevantes sobre la estructura de capital:

- **Teoría de los costes de agencia** (*Agency Cost Theory*): desarrollada por Jensen y Meckilng [9], postula que cuando una entidad (en este caso, la empresa) delega decisiones a otra parte (el agente), pueden surgir conflictos de interés debido a la asimetría de información y a la diferencia en los objetivos de ambas partes. Esto puede resultar en costes adicionales, conocidos como costes de agencia, que incluyen el monitoreo y la mitigación de comportamientos oportunistas.
- **Teoría de la señalización** (*Signaling Theory*): basada en el trabajo de Spence [10], y desarrollada posteriormente por autores como Ross [11], examina cómo los participantes del mercado transmiten información sobre la calidad de un activo o una empresa a través de señales observables, como dividendos o emisión de deuda, para reducir la incertidumbre y mejorar la eficiencia del mercado.
- **Teoría de la oportunidad de mercado** (*Market Timing Theory*): basado en el trabajo de Graham [12] y con aportaciones en el contexto de estructura de capital de Stein [13] y especialmente de Baker y Wurgler [14], sugiere que las empresas pueden tratar de aprovechar las condiciones favorables del mercado para emitir deuda o acciones, debido a que los precios no siempre reflejan toda la información disponible de manera instantánea. Por ejemplo, una empresa podría emitir deuda a bajo interés cuando las tasas de interés están bajas o emitir acciones cuando el mercado está al alza o sus acciones sobrevaloradas.

En la literatura financiera, y en los teoremas vistos anteriormente, se identifican diversos factores que pueden influir en la estructura de capital de una empresa. Uno de los más mencionados en relación con la deuda es la tasa impositiva, que determina el beneficio que puede obtener una empresa del escudo fiscal. Por lo tanto, en países con altas tasas impositivas, las empresas pueden beneficiarse más del financiamiento mediante la emisión de deuda.

Empresas con flujos de caja estables pueden soportar niveles más altos de deuda, ya que tienen una mayor capacidad para cumplir con los pagos de intereses y el principal de la deuda, reduciendo el riesgo de dificultades financieras. Las empresas más grandes y diversificadas suelen tener un menor riesgo de quiebra y, por consiguiente, pueden asumir más deuda. Además, tienen un mejor acceso a los mercados de capitales y pueden obtener financiamiento en condiciones más favorables.

Las empresas con una mayor proporción de activos tangibles pueden utilizar estos activos como garantía para obtener deuda. Esto reduce el riesgo percibido por los prestamistas y facilita el acceso a financiamiento.

Las empresas más rentables tienden a generar suficientes ingresos internos para financiar sus proyectos, lo que puede reducir la necesidad de endeudarse. Sin embargo, en algunos casos, la rentabilidad también puede permitir asumir más deuda para aprovechar beneficios fiscales.

Las empresas con numerosas oportunidades de crecimiento pueden preferir el financiamiento mediante capital propio para evitar los riesgos asociados con altos niveles de endeudamiento.

2.2 Optimización de la estructura de capital

Hasta este punto, se ha ofrecido una visión general de la estructura de capital y se han revisado las principales teorías relacionadas, como la teoría de Modigliani y Miller, la teoría del equilibrio y la teoría del orden jerárquico. En esta sección, se detallará el razonamiento seguido para el posterior diseño del problema de optimización.

En este trabajo se considera que existe este punto óptimo en la estructura de capital siguiendo la teoría del equilibrio, en la que el menor coste de la deuda se ve balanceado por los riesgos que conlleva. Además, también se consideran ciertas restricciones que se deben cumplir para la operatividad de la empresa, y para cumplir con las condiciones legales y los convenios de deuda.

2.2.1 Objetivo a optimizar

El objetivo principal de una empresa en cuanto a la estructura de capital es encontrar la proporción óptima de deuda D y capital propio E que minimice el coste medio ponderado de capital $WACC$, o maximice el valor de la empresa V. Aunque en esta sección se explican ambos conceptos, se profundiza más en la minimización del $WACC$, pues será el enfoque que posteriormente será tomado como base en los modelos matemáticos.

Según la teoría del equilibrio, el valor de una empresa apalancada es, en principio, mayor que el de una empresa no apalancada debido al escudo fiscal que ofrece la deuda. Sin embargo, también expone que el aumento de deuda incremento el riesgo y el coste de insolvencia. Los accionistas conocen esta información, y por tanto estas expectativas se ven reflejadas en el valor de mercado de la empresa:

$$V_L = V_U + T_C D - ci, \qquad (2.5)$$

donde:

- V_L es el valor de la empresa apalancada.
- V_U es el valor de la empresa no apalancada.
- T_C es la tasa impositiva.
- D es la deuda.
- ci es una estimación del riesgo y coste de insolvencia.

Los costes de insolvencia representan la probabilidad de que la empresa llegue a tener problemas financieros y quiebre y la magnitud de los costes que conllevaría esta quiebra. Cuando el nivel de apalancamiento es moderado, la probabilidad de quiebra es baja, y los beneficios del escudo fiscal dominan sobre el coste de insolvencia. Sin embargo, en algún punto, la ventaja impositiva de la deuda se verá anulada por el coste de insolvencia.

Para calcular la magnitud coste de insolvencia, se deben tener en cuenta costes directos, como costes legales, administrativos u otros gastos directamente relacionados con el proceso de insolvencia, y costes indirectos, como la pérdida de clientes, deterioro de la reputación o el aumento en los costes de financiación futura. Además, se debería ajustar a la probabilidad de que esta ocurra, que se puede analizar mediante distintos modelos y herramientas, como ratios, análisis histórico y del sector, o la calidad crediticia.

El $WACC$ mide el coste medio de los distintos componentes del capital que utiliza una empresa, ponderado según su participación en la estructura de capital de la empresa. Por un lado, está compuesto por el coste de deuda, r_D, que es el coste que la empresa incurre por utilizar financiamiento a través de préstamos o emisión de bonos. Este coste suele ser deducible de impuestos, por lo que se ajusta considerando el beneficio fiscal. Por otro lado, tiene en cuenta el coste de capital propio, r_E , y es definido como el rendimiento requerido por los accionistas por invertir en la empresa. El coste de capital propio es generalmente más alto que el coste de la deuda debido al mayor riesgo que asumen los accionistas.

El $WACC$ es definido como [15]:

$$WACC = \frac{D}{D+E} r_D (1 - T_C) + \frac{E}{D+E} r_E \tag{2.6}$$

donde:

- T_c es la tasa impositiva.

El coste de capital propio r_E no tiene un valor explícito conocido. A diferencia de los bonos, cuyos pagos están determinados por una tasa de interés fijada con antelación, el capital accionario no tiene un precio fijo que la empresa deba pagar. Esto significa que las empresas deben estimar el coste del capital propio, es decir, la tasa de retorno que los inversores esperan en función de la volatilidad anticipada de las acciones.

Desde la perspectiva de la empresa, el retorno esperado por los accionistas representa un coste. Si la empresa no puede proporcionar este retorno, los accionistas pueden vender sus acciones, lo que puede llevar a una disminución del precio de las acciones y, por ende, del valor de la empresa. Por lo tanto, el coste del capital propio es el retorno total que una empresa necesita generar para mantener un precio de las acciones atractivo para los inversores.

Para estimar el coste de capital propio y de la deuda, se suele utilizar [16] el modelo de valoración de activos financieros *CAPM* (*capital asset pricing model*) , en el que el coste de capital propio se define como:

$$r_E = r_f + \beta_E (r_m - r_f) \tag{2.7}$$

$$r_D = r_f + \beta_D (r_m - r_f) \tag{2.8}$$

donde:

- r_f es el retorno esperado sobre un activo libre de riesgo.

- β_E es la beta del capital propio.
- β_D es la beta de la deuda.
- r_m es el rendimiento del mercado.

En la práctica, la tasa libre de riesgo se suele medir por el rendimiento de los bonos del Estado, particularmente aquellos emitidos por gobiernos con alta estabilidad financiera y económica.

La beta es una medida estadística de la sensibilidad al rendimiento del mercado en su conjunto que se obtienen mediante un análisis del historial, en este caso, de la empresa. La beta del capital propio mide esta sensibilidad de las acciones de la empresa, mientras que la beta de la deuda mide la sensibilidad de los rendimientos de la deuda. La beta total de la empresa, β_A (*assets*), es la media ponderada de β_E y β_D:

$$\beta_A = \frac{E}{E+D}\beta_E + \frac{D}{E+D}\beta_D \qquad (2.9)$$

De esta fórmula, se puede despejar β_E como:

$$\beta_E = \beta_A\left(1+\left(1-\frac{\beta_D}{\beta_A}\right)\frac{D}{E}\right) \qquad (2.10)$$

Una modificación sobre este modelo para analizar ajustar mejor la beta de la empresa al apalancamiento financiero es cambiando la beta del coste de capital propio:

$$r_E = r_f + \beta_E(r_m - r_f) \qquad (2.11)$$

donde B_L es la beta apalancada de la empresa y se puede calcular según la ecuación de Hamada [17]:

$$\beta_E = \beta_A\left[1+(1-T_C)\left(\frac{D}{E}\right)\right] \qquad (2.12)$$

donde:

- B_A es la beta no apalancada o la beta de los activos.

La beta no apalancada elimina los efectos de la estructura de capital y refleja solo el riesgo inherente de la propia actividad de la empresa, sin considerar el financiamiento con deuda. La beta no apalancada sería la beta de la empresa si su estructura de capital estuviese compuesta únicamente por capital propio.

Un aumento en la proporción de deuda implica un aumento en la volatilidad o el riesgo sistemático de la empresa, y por tanto un aumento también en el coste de capital propio. Esto se puede explicar también por parte de los accionistas, que esperarán un retorno r_e (que para la empresa se traduce como coste k_e) mayor al percibir un mayor riesgo en la deuda.

Por otro lado, las condiciones del coste de la deuda son determinadas de antemano por los acreedores, quienes establecen este coste basándose en una evaluación del riesgo asociado a la empresa. La evaluación de riesgo, a su vez, se apoya sobre la calificación crediticia de la empresa, que refleja su salud financiera y su capacidad para cumplir con sus obligaciones financieras.

Una forma de calcular el coste de deuda consiste en tomar la tasa libre de riesgo y sumar el diferencial de deuda (*credit spread*):

$$r_D = r_f + diferencial\ deuda \tag{2.13}$$

donde:

- r_f es la tasa libre de riesgo.

El diferencial de deuda representa el sobreprecio que los prestamistas exigen como compensación adicional por el riesgo de crédito del prestatario en comparación con un instrumento de deuda sin riesgo. No tendría sentido que $r_D \leq r_f$, ya que para ese caso todos los acreedores preferirían comprar el bono libre de riesgo y con mayor rendimiento.

El coste de la deuda r_D también se puede calcular mediante la tasa de interés efectiva que la empresa paga por sus pasivos financieros, como bonos, préstamos y otras formas de deuda. Este método sirve para un nivel de deuda e intereses dados, pero no permite aproximar cómo cambia este coste de la deuda con un cambio en la estructura de capital de la empresa.

2.2.2 Restricciones

En la optimización de la estructura de capital, es necesario considerar diversas restricciones que aseguren la viabilidad y sostenibilidad financiera de la empresa.

La relación entre la deuda D y el capital propio E se define mediante la ecuación de balance:

$$D + E \geq V_{mín} \tag{2.14}$$

donde $V_{mín}$ es el valor del capital mínimo requerido de la empresa. En este caso, el valor total de la empresa, que consiste en el valor total de los activos o proyectos, se considera una cantidad conocida que se financia mediante capital propio y deuda.

Además, para mantener un nivel de endeudamiento viable y según el perfil de riesgo de la empresa, se puede definir que el ratio deuda-capital no supere un valor constante K_1, predefinido para minimizar el riesgo de insolvencia:

$$\frac{D}{V} \leq K_1 \tag{2.15}$$

La capacidad de la empresa para cubrir el servicio de la deuda (*debt service*) con su *EBITDA* debe ser suficiente. El servicio de la deuda incluye tanto los pagos de intereses como el reembolso del valor principal de la deuda, las comisiones y otros gastos. Por lo tanto, se debe cumplir:

$$EBITDA \geq Servicio\ de\ la\ Deuda \tag{2.16}$$

donde $EBITDA$ son los beneficios antes de intereses, impuestos, depreciación y amortización. La relación entre el $EBITDA$ y el servicio de la deuda se recoge en el ratio de cobertura de servicio de la deuda $RCSD$ (*debt service coverage ratio* $DSCR$).

Los flujos de caja de la empresa deben ser suficientes para el pago del interés derivado de la deuda. Se define el mantenimiento de flujos de caja como:

$$EBIT \geq r_D \cdot D \tag{2.17}$$

donde $EBIT$ son los beneficios antes de intereses e impuestos. La relación entre el $EBIT$ y los intereses se recoge en el ratio de cobertura de interés RCI (*interest coverage ratio ICR*).

Más allá de estos requerimientos básicos, los prestamistas pueden establecer distintos criterios, conocidos como convenios de deuda (*debt covenants*), que la empresa debe cumplir. Si el prestatario, en este caso la empresa, viola los términos de un contrato de deuda, pero aún no ha dejado de realizar los pagos de principal o intereses, está ante una situación de incumplimiento técnico (*technical default*). Dependiendo del contrato, un incumplimiento técnico puede dar lugar a diversas acciones por parte del prestamista, desde renegociaciones del contrato hasta la aceleración de la deuda, es decir, exigir el pago inmediato de la totalidad de la cantidad adeudada.

Los convenios de deuda suelen incluir: el establecimiento de ciertos niveles para distintos ratios financieros para asegurar, por ejemplo, la liquidez o solvencia de la empresa; condiciones sobre la información que debe reportar la empresa de los estados financieros; el mantenimiento de los seguros determinados; o condiciones sobre la estructura de capital de la empresa.

Por ejemplo, se puede establecer en los convenios que las ganancias superen los umbrales acordados de los dos ratios de cobertura nombrados anteriormente, importantes para proporcionar suficiente cobertura para el servicio de la deuda y para el pago de intereses:

$$RCSD = \frac{EBITDA}{Servicio\ de\ la\ Deuda} \tag{2.18}$$

$$RCI = \frac{EBIT}{Intereses} \tag{2.19}$$

La perspectiva de los prestamistas sobre el riesgo proporciona evidencia adicional de que existe un límite en la cantidad de fondos que la empresa puede pedir prestados. Las ecuaciones (2.18) y (2.19) muestran que, para un nivel dado de ganancias, el aumento de la deuda incrementa el servicio de la deuda y el gasto por intereses, reduce el $RCSD$ y el RCI, y, por lo tanto, reduce la capacidad de la empresa para cumplir con sus convenios de deuda. La empresa entra en incumplimiento técnico cuando estos ratios caen por debajo de sus respectivos umbrales mínimos. Por lo tanto, en la empresa apalancada es importante equilibrar el posible aumento de los rendimientos debido al aumento de la deuda, con la correspondiente posibilidad de incumplimiento técnico.

2.2.3 Análisis de la deuda

El análisis del nivel de deuda de una empresa permite evaluar su salud financiera y su capacidad para cumplir con sus obligaciones. Existen varias métricas que permiten obtener una visión clara de la situación financiera de una empresa y su riesgo de insolvencia. A continuación, se detallan estas métricas y se explica cómo interpretarlas para evaluar el nivel de deuda de una empresa.

El ratio de cobertura del servicio de deuda $RCSD$ mide la capacidad de una empresa para cubrir todos sus pagos de deuda, incluyendo tanto los intereses como el principal, con sus ingresos operativos netos.

$$RCSD = \frac{EBITDA}{Servicio\ de\ la\ Deuda} \quad (2.18)$$

Un valor alto de este ratio indica que la empresa puede cubrir cómodamente sus pagos de deuda, lo que sugiere un menor riesgo de incumplimiento. En general, un $RCSD$ mayor a 1.5 es considerado saludable, mientras que un valor menor a 1 indica que la empresa no genera suficientes ingresos operativos para cubrir sus obligaciones de deuda, lo que es una señal de problemas financieros potenciales.

El ratio de cobertura de interés RCI mide la capacidad de la empresa para pagar sus intereses con sus beneficios antes de intereses e impuestos ($EBIT$). Un ratio alto indica que la empresa puede cubrir cómodamente sus pagos de intereses, permitiendo por tanto evaluar el riesgo de incumplimiento de pagos. Se trata de una métrica comúnmente utilizada para evaluar la salud financiera de una empresa, ya que proporciona una visión simple y directa de la capacidad de la empresa para cumplir con sus obligaciones de deuda en el corto plazo.

$$RCI = \frac{EBIT}{Intereses} = \frac{EBIT}{r_D D} \quad (2.20)$$

Un valor menor a 1 del ratio de cobertura de interés significa que la empresa no puede hacer frente a sus obligaciones de pago del interés, al menos no de forma continuada, y por tanto no está en una buena situación financiera. En general, se considera que este ratio indica una mala situación para la empresa cuando su valor es menor a 1.5. Se suele establecer como mínimo aceptable un valor de 2, siendo preferible un valor igual o mayor que 3.

El ratio deuda-$EBITDA$ (*debt-to-EBITDA ratio*) mide la cantidad de deuda en relación con los ingresos antes de intereses, impuestos, depreciación y amortización ($EBITDA$). Un ratio alto sugiere que la empresa tiene una gran carga de deuda en comparación con sus ingresos operativos, lo que aumenta el riesgo de insolvencia. Mediante esta métrica se puede evaluar el nivel de apalancamiento financiero y el estrés financiero de una empresa, determinando si la empresa está tomando más deuda de la que puede soportar razonablemente con sus ingresos operativos.

$$Ratio\ Deuda - EBITDA = \frac{D}{EBITDA} \quad (2.21)$$

En general, se considera alarmante un ratio deuda-EBITDA mayor a 4 o 5, aunque es interesante compararlo con el de las empresas en el mismo sector. Un ratio elevado indica posibles problemas en el futuro para la empresa a la hora de manejar su deuda, además de reducir su capacidad de endeudamiento adicional.

Es mucho más común el uso del ratio de deuda neta-$EBITDA$ (*net-debt-to-EBITDA ratio*), que, en vez de considerar la deuda total, resta a este valor el efectivo del que dispone la empresa.

El Altman Z-score se trata de un modelo estadístico que combina varios ratios financieros para predecir la probabilidad de quiebra. Desarrollado por Altman [18] en 1968, es utilizado para predecir la probabilidad de quiebra de una empresa en el corto-medio plazo. Este modelo se basa en una combinación de cinco ratios financieros que evalúan diferentes aspectos de la salud financiera de una empresa. Dependiendo de las condiciones de la empresa, se establecen distintas ponderaciones para los ratios. La fórmula original para empresas manufactureras es:

$$Z = 1.2X_1 + 1.4X_2 + 3.3X_3 + 0.6X_4 + 1X_5 \qquad (2.22)$$

donde:

- X_1 es *Capital Circulante / Activos Totales*.
- X_2 es *Ganancias Retenidas / Activos Totales*.
- X_3 es *EBIT / Activos Totales.*
- X_4 es *Capitalización Bursátil / Pasivo Total.*
- X_5 es *Ventas / Activos Totales.*

Se definen distintos rangos según el valor de Z denominadas zonas de discriminación:

- $Z > 2.99$: la empresa se considera estable, en una zona "segura" y con baja probabilidad de quiebra en el corto plazo.
- $1.81 < Z \leq 2.99$: la empresa se encuentra en una zona "gris" (*grey zone*) y existe un riesgo moderado de quiebra.
- $Z \leq 1.81$: la empresa se encuentra en una zona de "alto riesgo" (*distress zone*) y existe un riesgo significativo de quiebra.

Una modificación del Altman Z-score es la versión de MacKie-Mason [19], en la que se mantienen los rangos de puntuación. Esta versión ajustada se define como:

$$Z = \frac{3.3 \cdot EBIT + 1 \cdot Ventas + 1.4 \cdot Ganancias\ retenidas + 1.2 \cdot Capital\ Trabajo}{total\ activos} \qquad (2.23)$$

El ratio deuda-activos mide el porcentaje de los activos de una empresa que está financiado con deuda:

$$Ratio\ Deuda - Activos = \frac{D}{Activos\ Totales} \qquad (2.24)$$

Un valor alto de este ratio indica que una gran parte de los activos de la empresa está financiada con deuda, lo que puede ser un indicativo de un alto riesgo financiero. En general, un ratio menor a 0.5 es considerado saludable, ya que indica que menos de la mitad de los activos de la empresa están financiados con deuda.

3 Desarrollo de modelos de optimización

En este capítulo se desarrollan modelos de optimización para abordar uno de los problemas centrales en la gestión financiera: determinar la proporción óptima de deuda y capital propio que minimiza el coste medio ponderado de capital y maximiza el valor de la empresa. Se estudiarán desde el punto de vista matemático de optimización teorías clásicas de la estructura de capital, concretamente la Proposición I del teorema de Modigliani y Miller y la teoría del equilibrio. Se incorporan consideraciones prácticas del mundo empresarial actual, como impuestos, riesgo asociado al apalancamiento financiero y distintas restricciones. Además, se realiza un ejemplo numérico que ilustra la aplicación práctica de estos modelos.

3.1 Conceptos de la optimización matemática

En el campo de la investigación operativa y la teoría económica, la optimización matemática es una herramienta ampliamente utilizada para la toma de decisiones. Se trata de un proceso mediante el cual se busca encontrar la mejor solución posible a un problema, dadas una serie de restricciones y un objetivo definido. En esta sección, se presentan los conceptos fundamentales de la optimización matemática y, más específicamente, de la optimización lineal, que son necesarios para comprender los modelos desarrollados posteriormente en este trabajo.

Un problema de optimización se compone de tres elementos principales: la función objetivo, las variables de decisión y las restricciones.

La función objetivo es la función matemática que se desea maximizar o minimizar. Representa el criterio de desempeño o el objetivo del problema. En el contexto de este trabajo de optimización de estructura de capital, se puede plantear la maximización del valor de la empresa:

$$maximizar\ V_L = V_U + T_C D - c_i \tag{3.1}$$

o la minimización del coste medio ponderado de capital (WACC):

$$minimizar\, WACC = \frac{D}{D+E} r_D (1 - T_C) + \frac{E}{D+E} r_E \tag{3.2}$$

Las variables de decisión son las variables que pueden ser ajustadas dentro del problema para optimizar la función objetivo. Estas variables representan las decisiones que deben ser tomadas. Por ejemplo, en la estructura de capital de una empresa, las variables de decisión podrían ser la cantidad de deuda D y de capital propio E a utilizar.

Las restricciones son las condiciones o limitaciones que deben cumplirse para que las soluciones sean viables. Estas restricciones pueden ser de diferentes tipos, como restricciones de recursos, restricciones legales, o condiciones de mercado.

Matemáticamente, un problema de optimización se puede formular como sigue:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.a. \quad & g_i(x) \leq b_i, \qquad i = 1, \dots, m \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde:

- $f(x)$ es la función objetivo.
- $g_i(x)$ son las funciones de restricción.
- x es el vector de variables de decisión.

La optimización o programación lineal es un caso particular de la optimización matemática donde tanto la función objetivo como las restricciones son lineales. Este será el caso para los modelos de las secciones 3.2 y 3.3. Es decir, las relaciones entre las variables de decisión son proporcionales. Un problema de optimización lineal tiene la forma general:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.a. \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

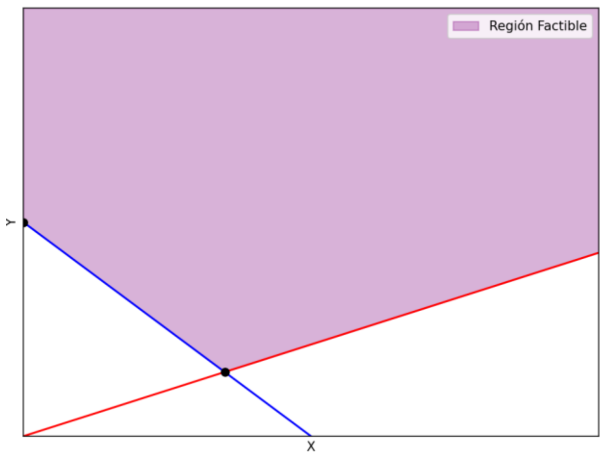
donde:

- c es el vector de coeficientes de la función objetivo.
- A es la matriz de coeficientes de las restricciones.
- b es el vector de términos independientes.

La resolución de problemas de optimización lineal se puede llevar a cabo mediante métodos como el método símplex.

Ciertos problemas, generalmente simples y con dos variables de decisión, se pueden representar gráficamente.

La región factible de un problema de optimización lineal es el conjunto de todas las posibles soluciones que satisfacen las restricciones del problema. En términos gráficos, esta región se representa como un polígono convexo (para dos variables de decisión) delimitado por las líneas de las restricciones.



Gráfica 6. Ejemplo de región factible.

Las soluciones óptimas se encuentran en los vértices o puntos extremos de la región factible. Esto se debe a que la función objetivo es lineal y, por lo tanto, alcanzará su valor máximo o mínimo en uno de estos vértices. También puede darse el caso en el que la solución óptima no sea única.

Un problema de optimización lineal puede tener infinitas soluciones óptimas si la función objetivo es paralela a una de las restricciones que definen la región factible. En este caso, todos los puntos en el segmento de la región factible, donde la función objetivo alcanza el mismo valor, son soluciones óptimas.

El modelo planteado en la sección 3.4 se trata de un problema no lineal, puesto que la función objetivo es no lineal. Existen diversos métodos de resolución dependiendo de la naturaleza del problema, como la programación cuadrática para una función objetivo cuadrática y restricciones lineales.

3.2 Modelo I: teoría de irrelevancia de Modigliani y Miller

En este modelo se da un planteamiento matemático al problema propuesto por Modigliani y Miller en forma de problema de optimización. Al resolverlo se obtiene como resultado el mismo teorema al que dichos autores llegan con razonamientos financieros. El teorema MM sugiere que en un mercado perfecto y sin impuestos la estructura de capital de una empresa no afecta a su valor. En este problema de optimización las variables son la deuda D y el capital propio E, y se estudia la estructura de capital. El objetivo es encontrar la combinación óptima de deuda y capital propio que minimice el coste medio ponderado de capital:

$$WACC(E,D) = \frac{D}{D+E} r_D + \frac{E}{D+E} r_E \tag{3.5}$$

donde r_D y r_E son la tasa de retorno de la deuda y del capital respectivamente, y que suponen costes para la empresa. Esta función se puede simplificar en una función z donde:

$$z = (D+E)WACC \tag{3.6}$$

Como $(D+E) > 0$, el mínimo de $WACC$ ocurre en el mismo punto que el mínimo de z.

La tasa de retorno del capital propio y de la deuda se definen según el modelo $CAPM$:

$$r_E = r_f + \beta_E (r_m - r_f) \tag{3.7}$$

$$r_D = r_f + \beta_D (r_m - r_f) \tag{3.8}$$

La sensibilidad esperada del conjunto del valor de la empresa B_A es el promedio ponderado de las sensibilidades del capital propio y de la deuda, es decir:

$$\beta_A = \frac{E}{E+D} \beta_E + \frac{D}{E+D} \beta_D. \tag{3.9}$$

De esta relación se puede despejar B_E obteniendo lo siguiente:

$$\beta_E = \beta_A \left(1 + \left(1 - \frac{\beta_D}{\beta_A}\right)\frac{D}{E}\right) \tag{3.10}$$

Sustituyendo en la función z:

$$z(D, E) = \left(r_f + \beta_A(r_m - r_f)\right)D + \left(r_f + \beta_A(r_m - r_f)\right)E \tag{3.11}$$

Cabe señalar que los coeficientes de D y E son iguales.

Las restricciones para D y E son:

$$D + E \geq Vmín \tag{3.12}$$

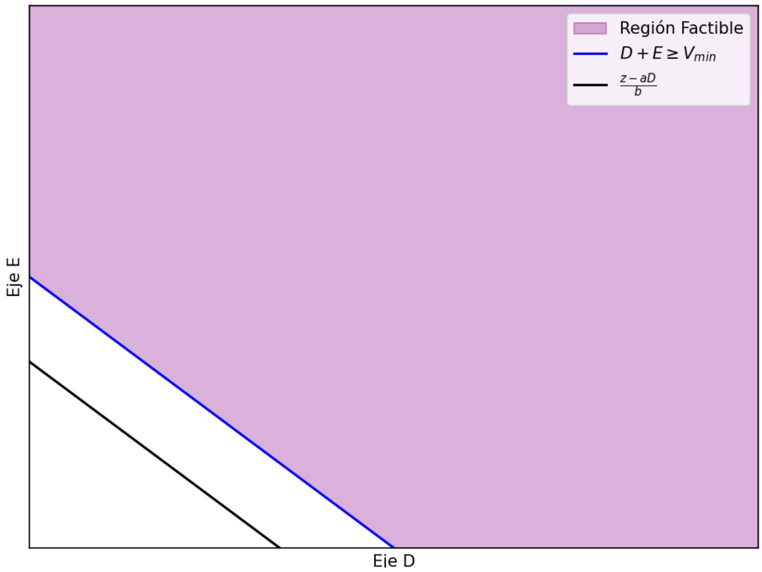
$$D, E \geq 0$$

Como mínimo, debe estar cubierto el capital mínimo requerido por la empresa, y ninguna de las variables puede tomar un valor negativo.

El problema de optimización está por tanto definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = (r_f + \beta_A(r_m - r_f))D + (r_f + \beta_A(r_m - r_f))E \\ s.a. \quad & D + E \geq Vmín \\ & D, E \geq 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde la región factible está representada por la Gráfica 7.



Gráfica 7. Región factible del problema de optimización basado en la teoría de irrelevancia.

La pendiente de z es la misma que la pendiente de $D + E = Vmín$, y por lo tanto todos los puntos de esta recta son soluciones óptimas del problema. Dicho de otra manera, dado un capital mínimo $V_{mín}$, la solución óptima es cualquier combinación de D y E que cumpla $D + E = V_{mín}$, donde $D, E \geq 0$. El coste medio ponderado de capital es el mismo independientemente de cuál sea la estructura de capital, y la única restricción es que cubran el capital mínimo necesario para el financiamiento.

En la ecuación (3.5) los coeficientes de D y E son aparentemente distintos, puesto que se parte de la premisa de que el coste de la deuda es menor que el coste de capital. Sin embargo, al utilizar el modelo $CAPM$ para calcular r_D, r_E y β_L y sustituirlo en la función, se obtienen coeficientes iguales. Por tanto, es la relación entre β_E, β_D y β_A definida por el $CAPM$ la que provoca que se cumpla el teorema MM.

Este resultado surge de que los coeficientes de la deuda D y el capital propio E en la función objetivo z son idénticos, como se señaló anteriormente.

Los beneficios derivados del uso de deuda (como el potencial aumento en el retorno sobre el capital propio) son exactamente contrarrestados por sus desventajas (como el riesgo financiero y el coste del servicio de la deuda) en la misma medida, independientemente de la proporción de deuda en la estructura de capital.

Por lo tanto, en un entorno de mercado perfecto como el postulado, la elección entre financiamiento mediante deuda o capital propio se convierte en una decisión neutra desde el punto de vista del coste de capital, cumpliéndose el teorema de irrelevancia de Modigliani y Miller.

3.3 Modelo II: impuestos y riesgo del apalancamiento financiero

Se plantea un nuevo modelo, similar al modelo anterior en el cual se utiliza el modelo $CAPM$ y el coste de la deuda r_D es constante. Sin embargo, el coste del capital propio se ajusta según la ecuación de Hamada [17] , para reflejar de manera más exacta el riesgo del apalancamiento financiero. Además, también se tiene en cuenta el impacto del escudo fiscal. El objetivo en este modelo es minimizar el coste medio ponderado del capital, definido para tener en cuenta la tasa impositiva:

$$WACC(D,E) = \frac{D}{D+E} r_D (1-T_C) + \frac{E}{D+E} r_E \qquad (3.14)$$

donde:

$$r_E = r_f + \beta_E (r_m - r_f) \qquad (3.15)$$

y

$$\beta_E = \beta_A \left(1 + (1-T_c)\frac{D}{E}\right) \qquad (3.16)$$

Además, se simplifica la función objetivo en forma de nueva función z:

$$z = (D+E)WACC \qquad (3.17)$$

Como $(D+E) > 0$, el mínimo de $WACC$ ocurre en el mismo punto que el mínimo de z. Sustituyendo r_E y β_L por su expresiones, la función a minimizar es:

$$z(D,E) = r_D(1-T_C)D + \left(r_f + \beta_A\left(1 + (1-T_c)\frac{D}{E}\right)\left(r_m - r_f\right)\right)E \qquad (3.18)$$

y que, después de simplificar, se obtiene:

$$z(D,E) = \left(r_D + \beta_A\left(r_m - r_f\right)\right)(1 - T_C)D + \left(r_f + \beta_A\left(r_m - r_f\right)\right)E \qquad (3.19)$$

La función z es una función lineal de D y E, con la forma $z = aD + bE$.

La restricción más básica sobre la estructura de capital es que se financien, como mínimo, los proyectos de la empresa. Por lo tanto, D y E deberán cubrir el capital mínimo requerido por la empresa $V_{mín}$:

$$D + E \geq V_{mín} \qquad (3.20)$$

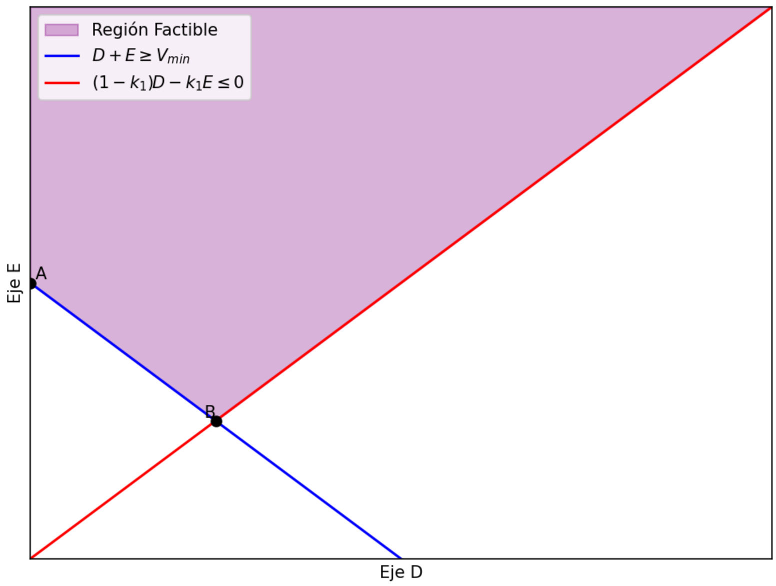
Se incorpora, además, la restricción (2.15), que se puede reescribir en forma lineal como:

$$(1 - k_1)D - k_1E \leq 0 \qquad (3.21)$$

El problema de optimización lineal inicial resultante se define como:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = aD + bE \\ s.a. \quad & D + E \geq Vmín \\ & (1 - k_1)D - k_1E \leq 0 \\ & D, E \geq 0 \end{aligned} \qquad (3.22)$$

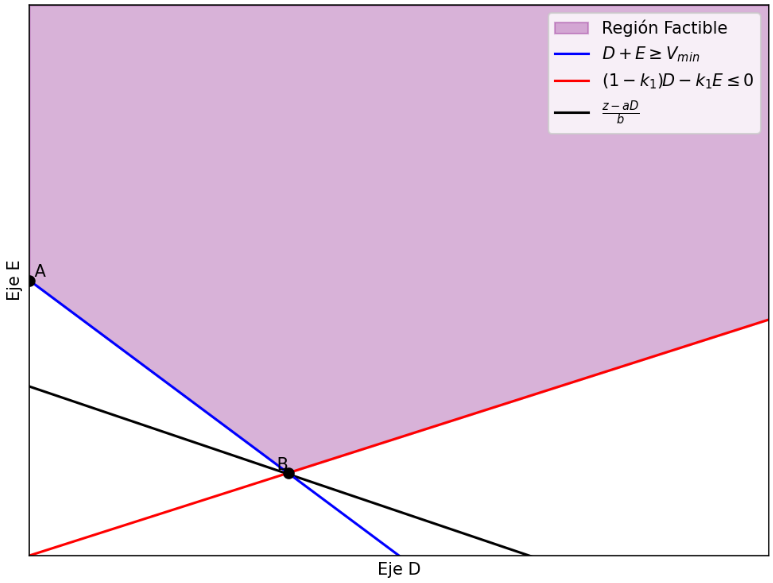
Las constantes $V_{mín}$ y k_1 son cantidades positivas, y k_1 además es menor a 1. Por lo tanto, la región factible de este problema es la representada en la Gráfica 8.



Gráfica 8. Región factible del problema de optimización ajustado al riesgo y los impuestos.

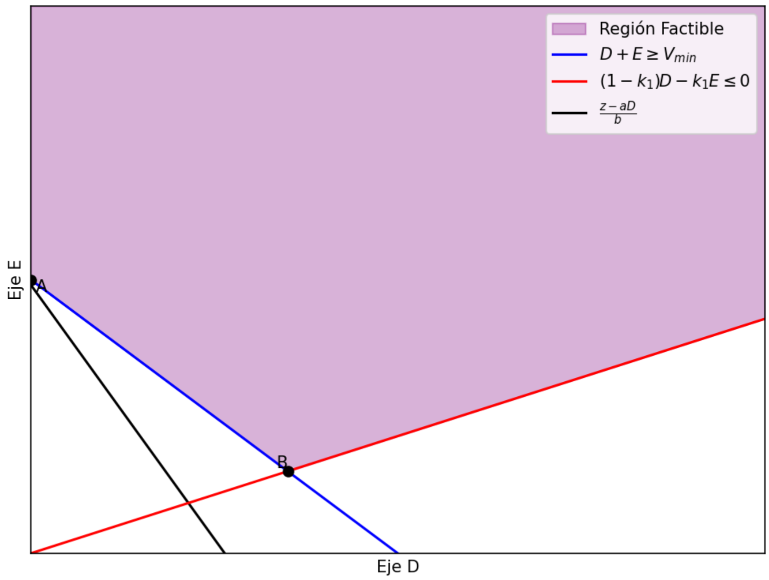
Pero ahora, a y b no son necesariamente iguales, y por tanto el mínimo se puede alcanzar bien en el punto A o bien en el punto B. El óptimo depende de la pendiente de z, que es un igual a $-\frac{a}{b}$, y su comparación con la pendiente $D + E = V_{mín}$, que es -1. De este modo:

- Si $a < b$, entonces z, y por tanto el $WACC$, decrece a medida que D aumenta y E disminuye. Para este caso, el mínimo sería en el punto B, donde la estructura de capital es una mezcla de deuda y capital propio. Aquí se puede entender que la combinación más beneficiosa para el $WACC$ es cuando la estructura de capital está completamente formada por deuda, pero que es la restricción $\frac{D}{V} \leq k_1$ la que establece el límite justo cuando $\frac{D}{V} = k_1$.



Gráfica 9. Solución gráfica del problema de optimización para el caso en el que a<b.

- En el caso contrario, en el que $b < a$, el $WACC$ crece junto a D. Para este caso, el mínimo se alcanza en el punto A, donde la proporción de deuda es igual a 0.



Gráfica 10. Solución gráfica del problema de optimización para el caso en el que b<a.

- Cuando $a = b$, el valor del $WACC$ es constante, y se estaría en el caso del problema de irrelevancia visto en el apartado anterior. Las proporciones óptimas serían todas aquellas definidas en la recta $D + E = V_{mín}$ que estén entre A y B.

Es pertinente estudiar ambos coeficientes y sus términos. El coste de la deuda r_D, equivalente al rendimiento que esperan recibir los acreedores por el bono de la empresa con riesgo, no puede ser igual o menor que r_f , que sería el rendimiento de un bono sin riesgo. Es decir, $r_D > r_f$ para una empresa con riesgo, y, por lo tanto:

$$\left(r_D + \beta_A\left(r_m - r_f\right)\right) > \left(r_f + \beta_A\left(r_m - r_f\right)\right) \quad (3.23)$$

Entonces, según este modelo y cuando no existe escudo fiscal, el uso de deuda en cualquier proporción siempre incrementará el coste medio ponderado de capital. En otras palabras, la desventaja del riesgo de la deuda y el consecuente incremento del coste de capital supera la ventaja de un coste de la deuda más barato. Es, por tanto, el escudo fiscal el que supone un punto de inflexión en el beneficio de la deuda. El punto de inflexión es:

$$T_c = 1 - \frac{r_f + \beta_A\left(r_m - r_f\right)}{r_D + \beta_A\left(r_m - r_f\right)} \quad (3.24)$$

Una conclusión es que cuanto menor sea la diferencia entre r_D y r_f, la tasa impositiva necesaria para hacer la deuda más atractiva que el capital propio va a ser menor. Generalmente, las empresas percibidas de menor riesgo y de alta calidad crediticia son las que presentarán un coste de deuda más cercano a la tasa libre de riesgo. La pendiente de z, bajo un $D + E$ constante, decrece a medida que aumenta la tasa impositiva o que el coste de la deuda se acerca a la tasa libre de riesgo, y aumenta en el caso contrario. Este modelo confirma que el uso de la deuda es más beneficioso para tasas impositivas más altas, pero que puede existir un intervalo en el que aun existiendo esta tasa impositiva la deuda no suponga una ventaja. Este intervalo será mayor para costes de deuda más altos.

A este problema inicial, que parte de dos restricciones, se le pueden añadir las siguientes:

1. Los beneficios antes de intereses, impuestos, depreciación y amortización deben poder cubrir el servicio de la deuda, que incluye el pago del principal y los intereses:

   $$EBITDA \geq Servicio\ de\ la\ Deuda \quad (3.25)$$

   Descomponiendo el servicio de la deuda:

   $$EBITDA \geq (k_2 + r_D)D \quad (3.26)$$

   donde k_2 indica la proporción del principal a pagar.

2. Los flujos de caja de la empresa deben ser suficientes para el pago del interés derivado de la deuda:

   $$EBIT \geq r_D D \quad (3.27)$$

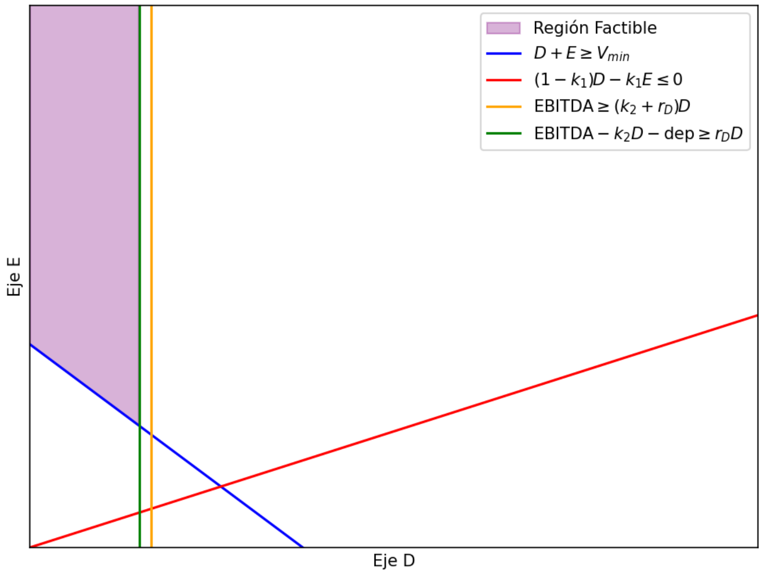
Además, podemos calcular el $EBIT$ a partir del $EBITDA$ y conociendo el valor de la $depreciación$:

$$EBITDA - r_D D - depreciación \geq r_D D \tag{3.28}$$

El nuevo modelo queda:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = aD + bE \\ s.a. \quad & D + E \geq Vmín \\ & (1 - k_1)D - k_1 E \leq 0 \\ & EBITDA \geq (k_2 + r_D)D \\ & EBITDA - depreciación \geq (r_D + k_2)D \\ & D, E \geq 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

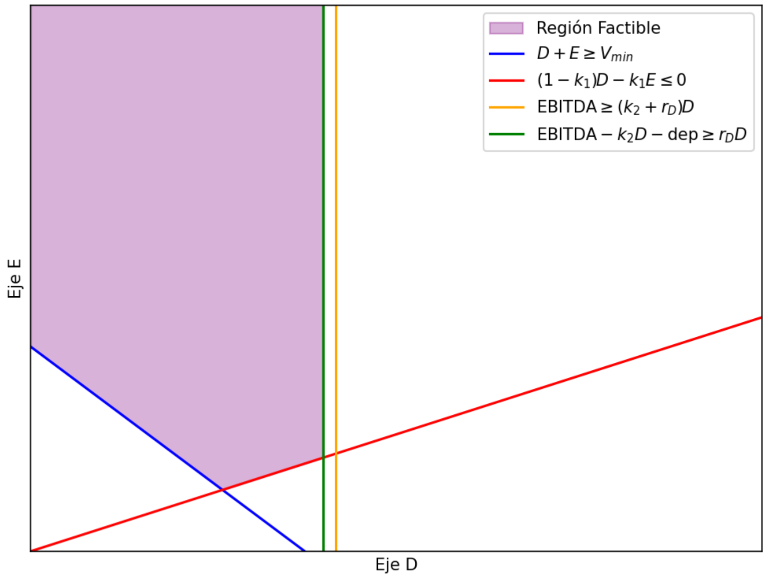
En la Gráfica 11 se puede ver la región factible resultante de este modelo, de la que se pueden sacar distintas conclusiones.



Gráfica 11. Región factible para el problema con las nuevas restricciones.

La restricción $EBITDA - depreciación \geq (r_D + k_2)D$, como ya se podía intuir en la definición del modelo, es más restrictiva que $EBITDA \geq (r_D + k_2)D$, y por lo tanto esta última se puede omitir del problema.

En esta representación concreta de las restricciones, la restricción definida por (3.28) es la que marca el nivel óptimo de deuda cuando $a < b$. Sin embargo, este no tiene por qué ser siempre el caso, puesto que depende del margen entre el $EBITDA$ y $(r_D + k_2)D$. En la Gráfica 12 se puede ver otra situación, en la que, manteniendo que $a < b$, el punto óptimo es determinado por la restricción $(1 - k_1)D - k_1E \leq 0$.



Gráfica 12. Variación de la restricción de cobertura de intereses.

Por lo tanto, en un caso como el de la Gráfica 11, el punto óptimo de la deuda será cuando:

$$D = \frac{EBTIDA - depreciación}{r_D + k_2} \tag{3.30}$$

y en un caso como el de la Gráfica 12 el óptimo es:

$$D = k_1 V_{mín} \tag{3.31}$$

El primer caso se da cuando la condición nueva es la más restrictiva, es decir, cuando:

$$\frac{EBTIDA - depreciación}{r_D + k_2} < k_1 V_{mín} \tag{3.32}$$

y el segundo caso se da de no ser así. Se puede dar la situación en el que ambas expresiones son iguales, es decir, la situación en la que las funciones de las tres restricciones del problema pasan por el mismo punto. Este punto definirá también la proporción óptima en la estructura de capital (siempre bajo la condición de que $a < b$).

Si $b < a$, la solución es independiente de estas dos restricciones, estando el óptimo en $D = 0$.

Los acreedores pueden establecer condiciones aún más restrictivas en los convenios de la deuda, como mantenerse por encima de ratios de cobertura de la deuda y del interés. Estos ratios, generalmente, serán más restrictivos que las condiciones de poder costear el pago principal de la deuda y sus intereses. Su representación también será en forma de recta vertical, y, por lo tanto, la solución óptima cuando $a < b$ también estará determinada por la condición más restrictiva.

3.4 Modelo III: coste de la deuda variable

Una empresa demasiado apalancada supone un mayor riesgo y una peor calificación crediticia. Tiene sentido pensar que los acreedores no van a pedir el mismo retorno para una empresa con apenas deuda que para una empresa idéntica pero fuertemente apalancada.

Por ello, y para el análisis posterior, se propone calcular el coste de la deuda r_D siguiendo la idea del modelo $CAPM$, y añadir al cálculo del coste una "penalización" por riesgo β_D, que aumente junto al nivel de deuda:

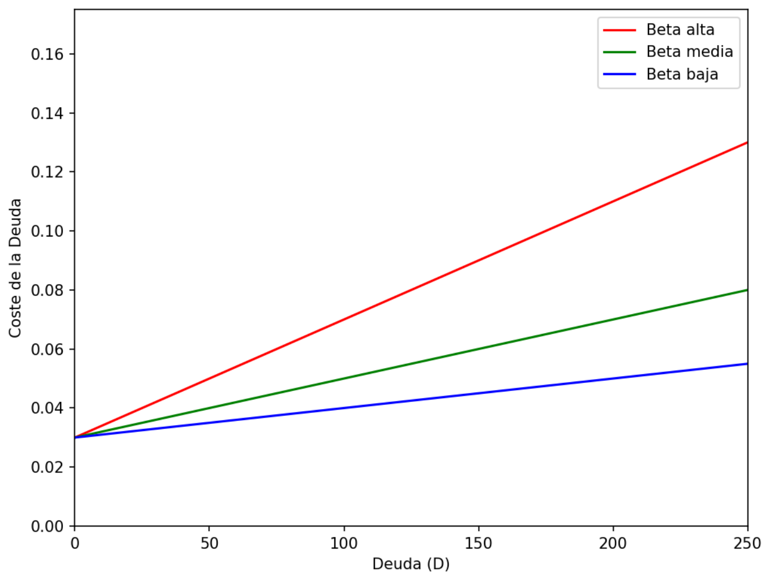
$$r_D = r_f + \beta_D(r_m - r_f) \tag{3.33}$$

donde:

$$\beta_D = \beta_A \left(\frac{D}{D+E}\right) \tag{3.34}$$

Los accionistas asumen el riesgo de los proyectos de la empresa representado por β_A. Además, cuando existe deuda, también asumen un riesgo adicional $\beta_A(1-T_C)\left(\frac{D}{E}\right)$ debido a que el pago de la deuda tiene preferencia (aunque se obtienen beneficios por el escudo fiscal). Por otro lado, la idea de esta función es que los acreedores inicialmente asumen el riesgo de la empresa β_A de forma proporcional a su participación en la deuda $\beta_A\left(\frac{D}{D+E}\right)$. Se trata de una simplificación de la realidad, cuyo objetivo analizar la evolución del coste medio ponderado de capital a medida que se incrementa el nivel de deuda.

La Gráfica 13 muestra cómo evoluciona el coste de la deuda para tres empresas con mismo V pero distinto β_A según la función desarrollada.



Gráfica 13. Comparación de la evolución del coste de la deuda para distintas betas no apalancadas.

Según esta definición de β_D, en la situación extrema y carente de sentido en la práctica de una estructura de capital compuesta únicamente por deuda, el coste de esta deuda es igual al rendimiento esperado de la empresa. En otras palabras, este caso es equivalente a que la propiedad de la empresa sea de los acreedores, ya que financian los proyectos en su totalidad, y asumen plenamente el riesgo. En este punto, los acreedores serían análogos a los accionistas.

En la realidad, es más probable que β_D acabase superando β_A. Se entiende, además, que los acreedores no desean asumir tanto riesgo y prefieren a cambio tener una rentabilidad menor. A medida que los inversionistas disminuyen, los prestamistas tienen menos garantías de recibir sus pagos fijos. La probabilidad de quiebra y su coste aumentan, riesgo que no se ve reflejado en β_A pues solo recoge el riesgo inherente de la actividad de la empresa.

A diferencia de los modelos anteriores, en este modelo se trabaja con un coste de la deuda variable en función del nivel de apalancamiento. Se añade, sobre el modelo de la sección anterior, esta consideración, y se estudiará esta función sin restricciones excepto las de no negatividad para D y E. De nuevo, el objetivo es minimizar el coste medio ponderado de capital:

$$WACC(D,E) = r_D(1-T_C)\frac{D}{D+E} + r_E\frac{E}{D+E} \tag{3.35}$$

Simplificando:

$$z = (D+E)WACC \tag{3.36}$$

El coste de capital propio se calcula de la misma manera que en la sección 3.3. Para el coste de la deuda, por otro lado, se utiliza el modelo $CAPM$ junto a la función propuesta (3.34):

$$r_D = r_f + \beta_D(r_m - r_f) \tag{3.37}$$

$$\beta_D = \beta_A\frac{D}{D+E} \tag{3.38}$$

Sustituyendo en z:

$$z(D,E) = \left(r_f + \beta_A(r_m - r_f)\left(1 + \frac{D}{D+E}\right)\right)(1-T_C)D + \left(r_f + \beta_A\left(r_m - r_f\right)\right)E \tag{3.39}$$

Como se puede ver, para este modelo z ya no es una función lineal.

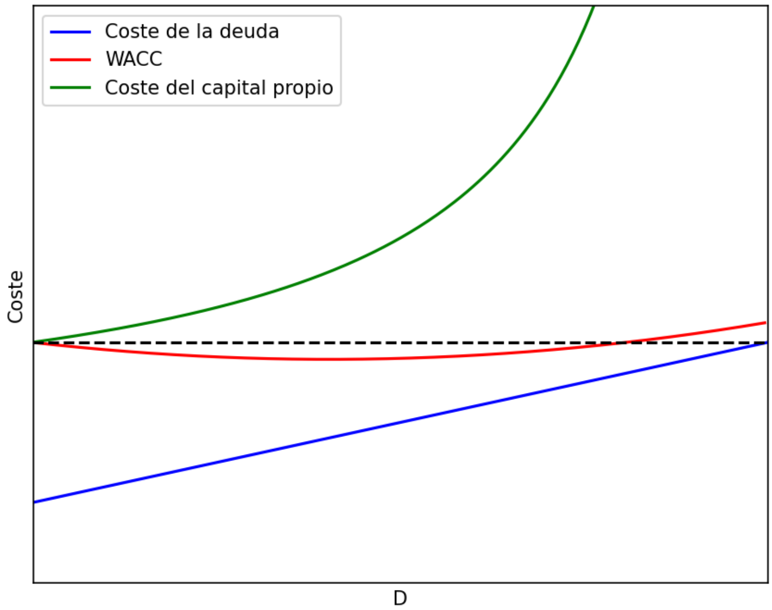
En cuanto las restricciones, se mantendrán únicamente las de no negatividad $E, D \geq 0$. Además, para este modelo se simplificará la restricción $D + E \geq V_{mín}$, que definirá como una igualdad $E = V_{mín} - D$. Sustituyendo en z:

$$z(D) = \left(r_f + \beta_A(r_m - r_f)\left(1 + \frac{D}{V_{mín}}\right)\right)(1-T_C)D + \left(r_f + \beta_A\left(r_m - r_f\right)\right)(V_{mín} - D) \tag{3.40}$$

De esta forma, se propone estudiar el mínimo de la función z, y cómo cambia este punto frente a distintos parámetros:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \left(r_f + \beta_A(r_m - r_f)\left(1 + \frac{D}{D+E}\right)\right)(1-T_C)\,D + \left(r_f + \beta_A\left(r_m - r_f\right)\right)E \\ s.a. \quad & D, E \geq 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

En la Gráfica 14 se puede ver la evolución del coste medio ponderado de capital, junto al coste del capital propio y al coste de la deuda, en función de la proporción de deuda.



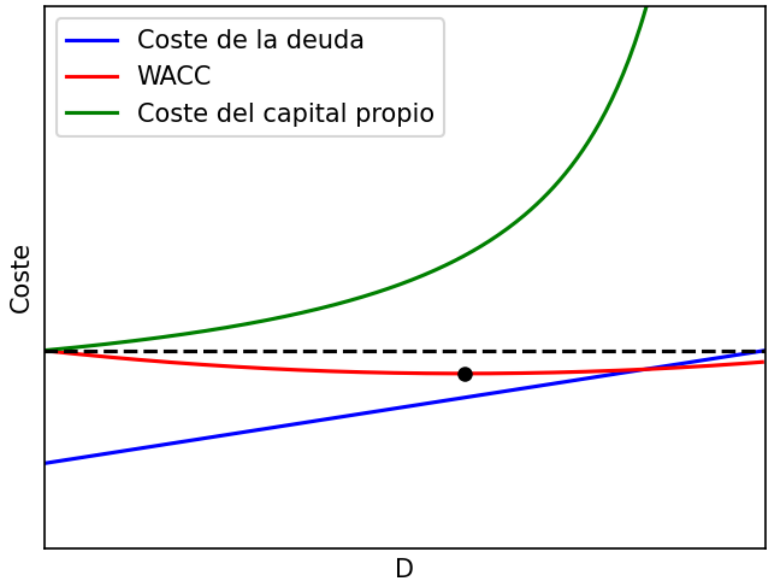
Gráfica 14. Evolución del WACC en comparación con la tasa de retorno de la deuda y del capital propio.

Como expone la teoría del equilibrio, inicialmente el uso de deuda supone una ventaja por su menor coste y por el escudo fiscal. Sin embargo, hay un punto de inflexión en el que esta ventaja comienza a verse superada por el riesgo de insolvencia. Este punto de inflexión es el punto del equilibrio, o del intercambio, donde se determina la proporción de deuda óptima.

La línea discontinua en la Gráfica 14 es una recta horizontal para $Coste = r_f + \beta_A(r_m - r_f)$. Esto es, el coste del capital propio (y del $WACC$) cuando la empresa no está apalancada, y el coste de la deuda cuando la empresa está financiada únicamente mediante deuda (aunque esto se debe a la función propuesta). En el teorema de irrelevancia, la función del $WACC$ sería una recta perfectamente horizontal, coincidente con la recta discontinua mostrada.

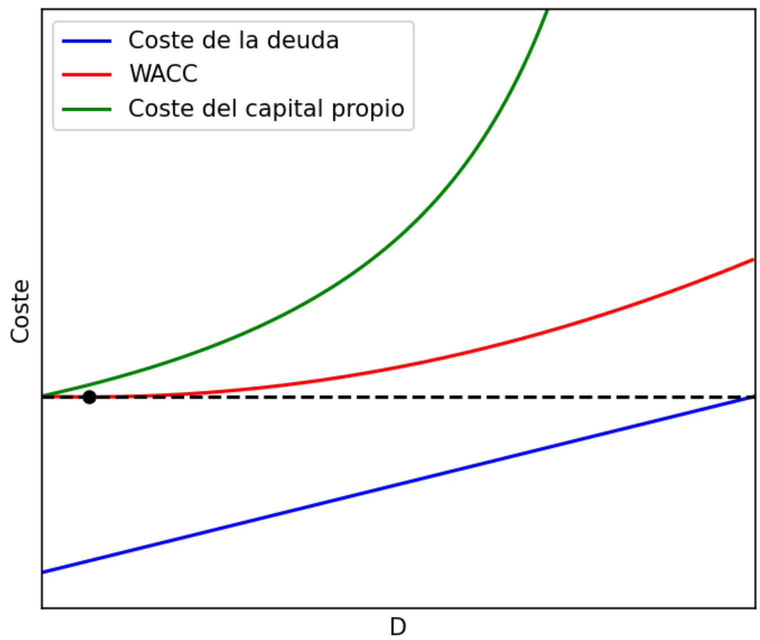
La curva determinada por la función del $WACC$ (en rojo) es poco pronunciada en este escenario. El grado de esta curva depende de los factores que determinan el beneficio de la deuda (la tasa impositiva T_C) y su perjuicio (para este modelo, el riesgo inherente de la actividad de la empresa, β_A).

A medida que T_C aumenta, o que β_A disminuye, esta curva alcanza su mínimo para una D más alta, como se puede ver en la Gráfica 15.



Gráfica 15. Curva del WACC para una tasa impositiva alta.

Sin embargo, si el escudo fiscal es pequeño, o el riesgo de la actividad de la empresa es alto, este mínimo se alcanza para una proporción de la deuda menor (Gráfica 16).



Gráfica 16. Curva del WACC para un riesgo alto.

3.5 Ejemplo ilustrativo

Para ilustrar la aplicación de los modelos II y III de optimización desarrollados, se considera una empresa ficticia, "Tecnologías Avanzadas S.A.", que se dedica a la fabricación de dispositivos electrónicos innovadores. La empresa está evaluando la mejor estructura de capital. A continuación, se presentan los datos y su aplicación en los modelos de las secciones 3.3 y 3.4.

Los datos de la empresa son:

- Capital mínimo necesario $V_{mín}$: 50 millones de euros.
- Tasa impositiva corporativa T_C: 30%.
- Rendimiento de la deuda r_D: 5%.
- Beta de los activos de la empresa β_A: 1.2.
- Tasa libre de riesgo r_f: 3%.
- Rendimiento esperado del mercado r_m: 8%.
- $EBITDA$ esperado: 5 millones de euros.
- Gastos de depreciación: 0.25 millones de euros.

Además, la empresa ha decidido que la deuda no supere el 70% del capital total ($k_1 = 0.7$), y que en caso de endeudarse sea a 10 años manteniendo la deuda constante, pagando cada año un 10% del principal ($k_2 = 0.1$).

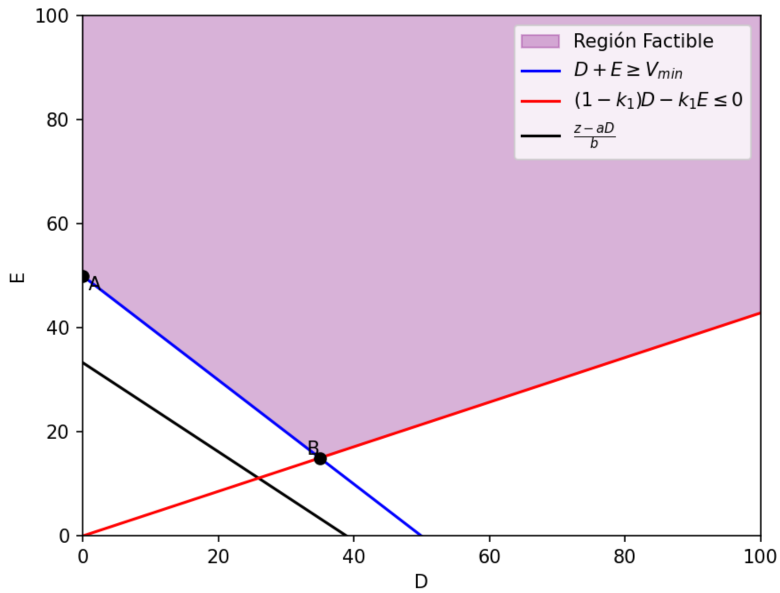
3.5.1 Modelo II

Sustituyendo los datos en la función z del modelo II:

$$z(D,E) = \big(0.05 + 1.2(0.08 - 0.03)\big)(1 - 0.3)D + \big(0.03 + 1.2\,(0.08 - 0.03)\big)E \qquad (3.42)$$

Operando, el problema de optimización queda definido como:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 0.077D + 0.09E \\ s.a. \quad & D + E \geq 50 \\ & 0.3D - 0.7E \leq 0 \\ & D, E \geq 0 \end{aligned} \qquad (3.43)$$



Gráfica 17. Resolución gráfica del ejemplo ilustrativo según el modelo II (valores en millones de euros).

Visualmente, y tras el análisis hecho en 3.3, se puede saber de antemano que, como $a > b$, el valor óptimo de deuda es de $D = 0.7 \cdot 50 = 35$ millones de euros y de capital propio de $E = 50 - 35 = 15$ millones.

Se puede apreciar que la pendiente de z no difiere mucho de la pendiente de $D + E = 50$. El valor de T_C para el que las pendientes se igualan es:

$$T_c = 1 - \frac{0.03 + 1.2\,(0.08 - 0.03)}{0.05 + 1.2\,(0.08 - 0.03)} = 0.18 \tag{3.44}$$

Para este valor de la tasa impositiva, la solución óptima sería cualquier combinación de deuda y capital de la arista de la región factible entre A y B.

Se plantea ahora el caso de una empresa completamente idéntica, pero perteneciente a la industria alimentaria, y en el que el riesgo de su actividad es $\beta_A = 0.8$. La tasa impositiva que marca la diferencia entre una solución óptima en A o en B es de 0.22, mayor que la necesaria para la empresa original. ¿Por qué ocurre esto?

En la empresa alimentaria, el coste del capital propio es menor al presentar una beta menor. Por tanto, la diferencia con el coste de la deuda es también menor y no presenta tanta ventaja. Esto se compensaría con la tasa impositiva mayor.

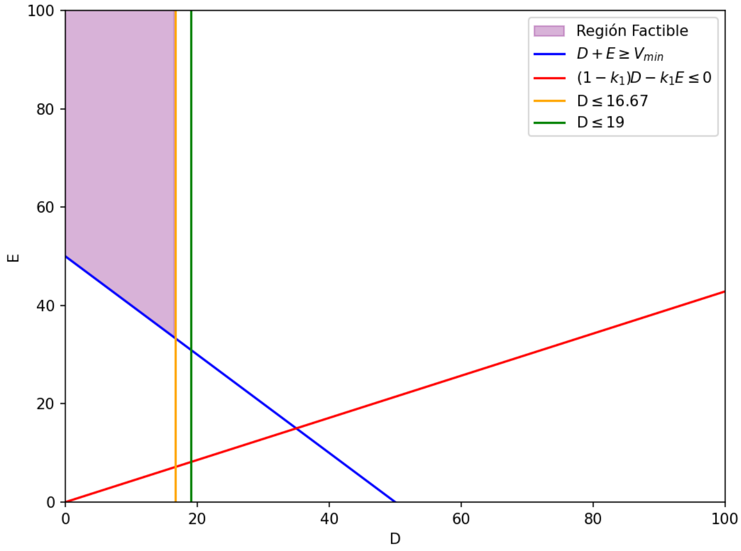
Los acreedores han definido dos restricciones determinadas en el convenio de la deuda:

$$RCSD = \frac{EBITDA}{Servicio\ de\ la\ Deuda} \geq 2 \tag{3.45}$$

$$RCI = \frac{EBIT}{Intereses} \geq 3 \tag{3.46}$$

El nuevo problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 0.077D + 0.09E \\ s.a. \quad & D + E \geq 50 \\ & 0.3D - 0.7E \leq 0 \\ & D \leq 16.67 \\ & D \leq 19 \\ & D, E \geq 0 \end{aligned} \tag{3.47}$$



Gráfica 18. Solución gráfica del problema con restricciones de los acreedores.

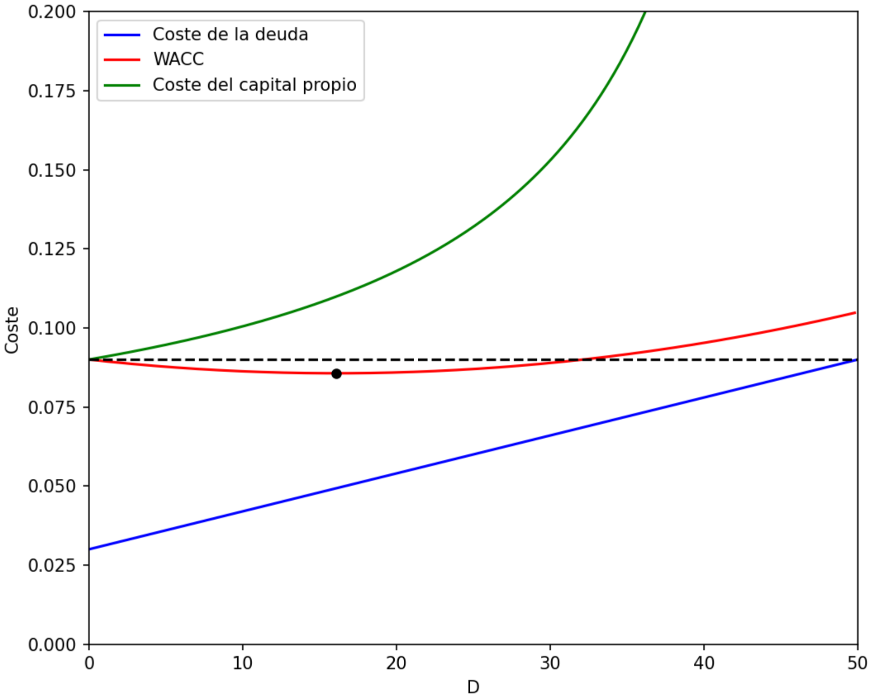
En este caso, el punto óptimo se encuentra en $D = 16.67$, ya que se trata de la condición más restrictiva sobre la deuda.

3.5.2 Modelo III

En este modelo se recuerda que el valor del coste de la deuda es variable y dependiente del nivel de apalancamiento, y que por tanto la función objetivo era una función no lineal. Además, se iguala $E + D$ a $V_{mín}$.

El problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 0.00084D^2 - 0.027D + 4.5 \\ s.a. \quad & D, E \geq 0 \end{aligned} \tag{3.48}$$



Gráfica 19. Solución del problema planteado con el coste de la deuda variable.

La deuda y el capital óptimos son de 16.07 y 33.93 millones de euros respectivamente. Este valor de la deuda es ligeramente menor al obtenido en el modelo II, y cumpliría las restricciones propuestas anteriormente y el convenio de la deuda fijado por los acreedores. Sin embargo, en otro caso no tiene por qué ser así. La solución dependerá el valor más restrictivo para D de entre las restricciones y el mínimo de la función z.

Se vuelve a comparar el caso con la empresa alimentaria. Cabe esperar que los prestamistas, al percibir un menor riesgo en las actividades de la empresa, acepten un menor rendimiento de la deuda. El óptimo para la empresa alimentaria es de 18.75 millones de deuda y 31.25 millones de capital propio. Para un 33.33% menos de la volatilidad representada por beta, la diferencia entre las proporciones es de 16.67%, justo la mitad.

Se pone el escenario en el que Tecnologías Avanzadas S.A tiene su sede en otro país en el que la tasa impositiva es de 40%, es decir, un 33% más que en el país original. El óptimo de deuda y capital es de 25 millones cada uno. La diferencia es mucho más notable, ya que la cantidad óptima de deuda ha aumentado en un 55.56%. Es decir, para el modelo planteado en este trabajo, la solución es mucho más sensible a la tasa impositiva que al riesgo inherente de los activos de la empresa.

Se analizan ahora los resultados obtenidos mediante los distintos ratios expuestos en la sección 2.2.3. Para un valor de la deuda de 16.07 millones, el ratio de cobertura del servicio de la deuda es:

$$RCSD = \frac{EBITDA}{(k_2 + T_C)D} = \frac{5}{(0.1 + 0.05) \cdot 16.07} = 2.07 \tag{3.49}$$

Este resultado indica que la empresa estaría, en principio, en una situación saludable, pues se tiene el suficiente margen en los beneficios para pagar la deuda. El ratio de cobertura del interés, por tanto, es probable que también muestre valores aceptables:

$$RCI = \frac{EBIT}{T_C D} = \frac{5 - 0.25 - 0.1 \cdot 16.07}{0.06 \cdot 16.07} = 3.26 \qquad (3.50)$$

Como cabía esperar, se trata de un buen resultado. Sin embargo, no es asegurado, puesto que depende también del valor de la depreciación en la empresa.

El ratio deuda-$EBITDA$ de la empresa sería:

$$Ratio\ deuda - EBITDA = \frac{D}{EBITDA} = \frac{16.07}{2} = 8.04 \qquad (3.51)$$

Este valor es considerablemente alto y sugiere que la empresa tiene una carga de deuda significativa en relación con sus beneficios. Según el resultado de este ratio, la empresa necesitaría más de 8 años de sus beneficios actuales antes de intereses, impuestos, depreciación y amortización para pagar toda su deuda, sin considerar ningún otro gasto. Esto plantea dudas sobre la capacidad de la empresa para cumplir con sus obligaciones de deuda a corto y largo plazo.

Es cierto que la empresa se puede encontrar aún en una etapa temprana de su vida. Hay indicios para considerar que este puede ser el caso, ya que, para ser una empresa tecnológica, el $EBITDA$ comparado con el valor total de la empresa es relativamente bajo. Si se esperase un gran crecimiento de la empresa, este ratio se reduciría considerablemente en el medio plazo. Aun así, se debería reconsiderar la decisión de que la deuda fuese de 16.07 millones, pudiendo tomar una posición menos arriesgada de momento, y reevaluar la situación de la estructura de capital cuando el $EBITDA$ sea mayor y más estable.

4 Resultados y conclusiones

Los resultados obtenidos demuestran que la estructura de capital óptima de una empresa puede ser modelada y optimizada bajo diferentes escenarios, integrando elementos como el coste de la deuda, el riesgo del apalancamiento y los beneficios fiscales de la deuda. Este análisis matemático profundiza en las variaciones en estos factores y en cómo afectan al valor total de la empresa y su estructura de capital. Se destacan varios puntos clave:

- Se introducen distintos modelos donde se calculan la estructura óptima de capital. Se considera tanto la deuda como el capital propio para minimizar el coste medio ponderado de capital ($WACC$). El análisis resalta que las proporciones óptimas de deuda y capital varían en función de las condiciones del mercado y los beneficios fiscales asociados a la deuda.
- A través del desarrollo del Modelo I, se observa que el beneficio potencial de aumentar la deuda (como la reducción de costes de capital debido a beneficios fiscales) se equilibra con el mayor riesgo percibido por los accionistas. Esto demuestra que en un entorno de mercado perfecto, la decisión entre financiar a través de deuda o capital propio se convierte en una elección neutra en términos de coste de capital, apoyando el teorema de irrelevancia de Modigliani y Miller.
- Un resultado importante del trabajo es la notable influencia de la tasa impositiva en los Modelos II y III. Un cambio en la tasa impositiva puede alterar significativamente la proporción óptima de deuda y capital, cuestión importante para entender la dinámica de la estructura de capital en diferentes jurisdicciones o escenarios fiscales.
- El trabajo también examina cómo, según la teoría del equilibrio, el escudo fiscal proporcionado por la deuda puede mejorar el valor de la empresa, pero, simultáneamente, un alto nivel de endeudamiento aumenta el riesgo de dificultades financieras y costes de insolvencia, reiterando la necesidad de un balance cuidadoso en la estructura de capital.
- Las diferencias entre el Modelo I y II son interesantes. El Modelo II se centra en la elección entre dos puntos óptimos de la estructura de capital, donde el punto seleccionado puede ser influenciado significativamente por las restricciones impuestas, como las condiciones legales y convenios de deuda. Esto refleja una aproximación más simplificada, donde las restricciones externas pueden determinar la elección final entre dos estructuras financieras viables.

  En contraste, el Modelo III tiene como objetivo reflejar una situación más matizada, buscando capturar la esencia de la Teoría del Equilibrio Estático. Este modelo no solo considera el coste de la deuda y los beneficios fiscales, sino que también integra, de forma simplificada, el impacto del riesgo de insolvencia y otros factores dinámicos que afectan el $WACC$ a lo largo de diferentes niveles de endeudamiento. Este modelo demuestra que el $WACC$ presenta un mínimo entre $D = 0$ y $D = V$, haciendo ver que el valor de la empresa se maximiza o el coste del capital se minimiza en un punto óptimo de apalancamiento. Este mínimo ilustra cómo, bajo condiciones ideales, la estructura de capital puede ser ajustada para alcanzar un equilibrio entre costes y beneficios, demostrando la interacción compleja entre el riesgo y el retorno en decisiones financieras.

En este Trabajo de Fin de Grado, los modelos de optimización desarrollados han demostrado ser herramientas útiles y efectivas para comprender y explorar la estructura de capital, así como las teorías que fundamentan su optimización. A lo largo del estudio, se han analizado distintas perspectivas sobre la estructura de capital, abarcando desde el escenario de mercado perfecto, donde la estructura de capital resulta irrelevante según el teorema de Modigliani y Miller, hasta contextos más realistas donde los impuestos y los costes de insolvencia entran en juego.

Los modelos han permitido evaluar cómo, bajo ciertas condiciones, el financiamiento mediante deuda puede ser preferible debido a los beneficios fiscales que ofrece. Sin embargo, se ha destacado también que el aumento del endeudamiento conlleva un incremento en el riesgo para los prestamistas, especialmente por el riesgo de insolvencia y la reducción de la seguridad a medida que el capital propio disminuye. Esta dualidad destaca la importancia de encontrar un equilibrio entre el uso de deuda y capital propio, equilibrio que depende de las condiciones específicas del mercado y de la situación financiera de la empresa.

Se ha logrado el objetivo principal de este trabajo: comprender la estructura de capital, conocer qué factores influyen en la decisión de financiarse mediante deuda o mediante capital propio y estudiar en qué medida impactan estos factores sobre esa decisión. Los modelos matemáticos implementados proporcionan un marco para la definición de estrategias de financiación empresarial, permitiendo valorar el impacto de distintas variables del entorno en la estructura de capital.

4.1 Limitaciones

El estudio realizado en este trabajo proporciona diversos enfoques sobre la optimización de la estructura de capital bajo ciertos supuestos y modelos matemáticos. Sin embargo, se reconocen varias limitaciones que surgen de la simplificación inherente de estos modelos y la omisión de varios factores en el entorno empresarial real.

Los modelos utilizados no incorporan los costes de agencia que pueden surgir cuando los intereses de los gestores no están perfectamente alineados con los de los accionistas o los acreedores. Estos costes pueden incluir gastos excesivos, inversiones subóptimas, o riesgos inadecuados tomados por los gestores para beneficiar sus propios intereses en lugar de los de la empresa.

No se ha tenido en cuenta la asimetría de la información entre los gestores de la empresa y los inversores o acreedores. Esta asimetría puede afectar las decisiones de financiación, ya que los inversores pueden interpretar las decisiones de estructura de capital como señales sobre la salud y perspectivas futuras de la empresa, influyendo en el coste del capital.

Los modelos se centran en los impuestos corporativos y los beneficios fiscales de la deuda a nivel empresarial, pero omiten los impuestos personales que los accionistas deben pagar sobre los dividendos y las ganancias de capital. Esta omisión puede llevar a una representación inexacta del beneficio neto para los inversores, distorsionando así la evaluación óptima de la estructura de capital.

Los modelos aplicados son inherentemente simplificados y no capturan completamente dinámica del mundo empresarial real. Aunque resultan útiles para la comprensión teórica, estos modelos pueden no ser totalmente aplicables en situaciones prácticas donde las condiciones del mercado, regulaciones, y comportamientos económicos son mucho más volátiles y menos predecibles.

Elementos como las condiciones macroeconómicas, cambios regulatorios y crisis financieras no se contemplan en los modelos. Estos factores pueden tener un impacto significativo en la capacidad de la empresa para sostener ciertos niveles de deuda y en la percepción del mercado sobre el riesgo crediticio de la empresa.

Finalmente, los modelos asumen que cambiar la estructura de capital no incurre en costes adicionales. En la realidad, ajustar la proporción de deuda y capital propio puede involucrar costes de transacción, como honorarios legales, comisiones bancarias y otros gastos administrativos asociados con la reestructuración financiera. Además, cambiar la estructura de capital puede requerir renegociaciones con acreedores o la emisión de nuevas acciones o bonos. Esto puede llevar a que la estructura óptima teórica no sea práctica bajo ciertas circunstancias del mercado o condiciones internas de la empresa.

4.2 Líneas futuras

A partir del desarrollo de este trabajo, y analizando las limitaciones que presenta, se exponen distintas áreas que sería interesante explorar:

- Incorporación de impuestos personales: incluir los impuestos personales en los modelos de estructura de capital, no solo para ofrecer una imagen más precisa del retorno neto para los inversores, sino también para analizar su impacto en la decisión de financiación.
- Modelado del coste de insolvencia: explorar más a fondo cómo varía el coste de insolvencia en función del nivel de deuda puede ayudar a evaluar mejor los riesgos asociados a altos niveles de apalancamiento.
- Modelado del coste de la deuda en función del apalancamiento: desarrollar modelos que reflejen más fielmente cómo el coste de la deuda puede aumentar con el nivel de apalancamiento de la empresa. Tal investigación podría abordar las dinámicas de cómo los acreedores ajustan las tasas de interés en respuesta al perfil de riesgo cambiante de una empresa a medida que aumenta su apalancamiento.

5 Análisis de impacto

El estudio sobre la optimización de la estructura de capital no solo tiene implicaciones directas para las corporaciones y sus decisiones financieras, sino que también juega un importante rol en la educación empresarial y el desarrollo de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS):

1. Educación de calidad (ODS 4): al mostrar cómo los diferentes niveles de apalancamiento afectan el riesgo y la viabilidad de la empresa, se exponen distintos factores para tener en cuenta en la toma de decisiones financieras.
2. Trabajo decente y crecimiento económico (ODS 8): el estudio de la estructura de capital óptima ayuda a las empresas a implementar estrategias de financiamiento que promuevan un crecimiento económico sostenido, minimizando el riesgo financiero y maximizando el retorno sobre el capital invertido. Por otro lado, al optimizar la estructura de capital, las empresas pueden reducir significativamente el riesgo de insolvencia, lo que a su vez promueve la estabilidad del empleo y mejora las condiciones de trabajo dentro de la empresa.
3. Industria, innovación e infraestructura (ODS 9): explorar estructuras de capital optimizadas puede apoyar a las industrias. Además, la integración de tecnologías avanzadas en la gestión de la estructura de capital puede mejorar la precisión en la predicción de riesgos y la personalización de estrategias de financiación.

6 Bibliografía

[1] F. Modigliani y M. H. Miller, «The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment,» *The American Economic Review,* vol. 48, nº 3, p. 261–297, 1958.

[2] M. H. Miller y F. Modigliani, «Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Shares,» *The Journal of Business,* vol. 34, nº 4, pp. 411-433, 1961.

[3] A. Jahanzeb, S. Rehman, N. Bajuri, M. Karami y A. Ahmadimousaabad, «Trade-Off Theory, Pecking Order Theory and Market Timing Theory: A Comprehensive Review of Capital Structure Theories,» *International Journal of Management and Commerce Innovations,* vol. 1, pp. 11-18, 2013.

[4] F. &. M. M. H. Modigliani, «Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction,» *The American Economic Review,* vol. 53, nº 3, pp. 433-443, 1963.

[5] D. Durand, «The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment: Comment,» *The American Economic Review,* vol. 49, nº 4, pp. 639-655, 1959.

[6] A. Kraus y R. H. Litzenberger, «A State-Preference Model of Optimal Financial Leverage,» *The Journal of Finance,* vol. 28, nº 4, pp. 911-922, 1973.

[7] G. Donaldson, Corporate Debt Capacity: A Study of Corporate Debt Policy and the Determination of Corporate Debt Capacity, Boston: Graduate School of Business Administration, Harvard University, 1961.

[8] S. C. Myers y N. S. Majluf, «Corporate financing and investment decisions when firms have information that investors do not have,» *Journal of Financial Economics,* vol. 13, nº 2, pp. 187-221, 1984.

[9] M. C. Jensen y W. H. Meckling, «Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs and ownership structure,» *Journal of Financial Economics,* vol. 3, nº 4, pp. 305-360, 1976.

[10] M. Spence, «Job Market Signaling,» *The Quarterly Journal of Economics,* vol. 87, nº 3, pp. 355-374, 1973.

[11] S. A. Ross, «The Determination of Financial Structure: The Incentive-Signalling Approach,» *The Bell Journal of Economics,* vol. 8, nº 1, pp. 23-40, 1977.

[12] B. Graham, The Intelligent Investor, Nueva York: HarperBusiness, 1959.

[13] J. C. Stein, «Rational Capital Budgeting In An Irrational World,» *The Journal of Business,* vol. 69, nº 4, pp. 429-455, 1996.

[14] M. Baker y J. Wurgler, «Market Timing and Capital Structure,» *The Journal of Finance,* vol. 57, nº 1, pp. 1-32, 2002.

[15] J. Berk y P. De Marzo, Corporate Finance, Boston: Pearson, 2013.

[16] E. F. Fama y K. R. French, «The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence,» *Journal of Economic Perspectives,* vol. 18, nº 3, pp. 25-46, 2004.

[17] R. S. Hamada, «The Effect of the Firm's Capital Structure on the Systemic Risk of Common Stocks,» *The Journal of Finance,* vol. 27, nº 2, pp. 435-452, 1972.

[18] E. I. Altman, «Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy,» *The Journal of Finance,* vol. 23, nº 4, pp. 589-609, 1968.

[19] J. MacKie-Mason, «Do Taxes Affect Corporate Financing Decisions?,» *The Journal of Finance,* vol. 45, pp. 1471-1493, 1990.

[20] H. K. Baker y G. S. Martin, Capital Structure and Corporate Financing Decisions, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

[21] P. Y. Boateng, B. I. Ahamed, M. G. Soku, S. O. Addo y L. A. Tetteh, «Influencing factors that determine capital structure decisions: A review from the past to present,» *Cogent Business & Management,* vol. 9, nº 1, 2022.

[22] M. Bradley, G. A. Jarrell y E. H. Kim, «On the Existence of an Optimal Capital Structure: Theory and Evidence,» *The Journal of Finance,* vol. 39, nº 3, pp. 857-878, 1984.

[23] E. A. Donkor, «Optimal Capital Structure and Financial Risk of Project Finance Investments,» The Faculty of School of Engineering and Applied Science of The George Washington University, 2014.

[24] M. C. Jensen, «Value Maximization, Stakeholder Theory, and the Corporate Objective Function,» *European Financial Management,* vol. 7, nº 3, pp. 297-317, 2001.

[25] E. Kontus, K. Soric y N. Sarlija, «Capital structure optimization: a model of optimalcapital structure from the aspect of capital costand corporate value,» *Economic Research,* vol. 36, nº 2, 2023.

[26] V. Kuc y D. Kalicanin, «Determinants of the capital structure of large companies: Evidence from Serbia,» *Economic Research,* vol. 34, nº 1, pp. 590-607, 2021.

[27] J. Mascareñas, «La Beta Apalancada,» Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2002.

[28] J. A. Rivera Godoy, «Teoría sobre la Estructura de Capital,» *Estudios gerenciales,* vol. 84, pp. 31-60, 2002.

[29] E. Solomon, «Leverage and the Cost of Capital,» *The Journal of Finance,* vol. 18, nº 2, pp. 273-279, 1963.

[30] N. Thi Viet Nguyen, C. T. K. Nguyen, P. T. M. Ho, H. Thi Nguyen, D. Van Nguyen y D. McMillan, «How does capital structure affect firm's market competitiveness?,» *Cogent Economics & Finance,* vol. 9, nº 1, 2021.

[31] A. Vargas Sánchez, «Estructura de Capital Óptima en Presencia de Costos de Dificultades Financieras,» *Investigación & Desarrollo,* vol. 1, nº 14, pp. 44-65, 2014.

[32] R. A. Brealey, S. C. Myers y F. Allen, Principios de Finanzas Corporativas, México: Mc Graw Hill, 2010.

[33] T. Ghazouani, «The Capital Structure through the Trade-Off Theory: Evidence from Tunisian Firms,» *International Journal of Economics and Financial Issues,* vol. 3, nº 3, pp. 625-636, 2013.

[34] E. Suranta, M. A. B. Satrio y P. P. Midiastuty, «Effect of Investment, Free Cash Flow, Earnings Management, Interest Coverage Ratio, Liquidity, and Leverage on Financial Distress,» *Ilomata International Journal of Tax & Accounting,* vol. 4, nº 2, pp. 283-295, 2023.

[35] T. C. o. Debt, «Van Binsbergen, J.H.; Graham, J.R.; Yang, J,» *The Journal of Finance,* vol. 65, pp. 2089-2136, 2010.

[36] J. Graham, «How Big Are the Tax Benefits of Debt?,» *The Journal of Finance,* vol. 55, pp. 1901-1941, 2000.

Este documento esta firmado por

Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Fecha/Hora	Sun Jun 30 22:24:44 CEST 2024
Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Numero de Serie	561
Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)