

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica, Alimentaria y  
de Biosistemas



# Competencia y colusión en el juego de Hotelling

## TESIS DOCTORAL

Presentada para optar al título de Doctor por:

**Luis García Pérez**  
Ingeniero de Telecomunicación

Madrid, 2024



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica,  
Alimentaria y de Biosistemas

**Doctorado en Sistemas Complejos**

# **Competencia y colusión en el juego de Hotelling**

## **TESIS DOCTORAL**

Presentada para optar al título de Doctor por:

**Luis García Pérez**  
Ingeniero de Telecomunicación

Bajo la dirección de:  
Dr. Ramón Alonso Sanz

Madrid, 2024

Título: Competencia y colusión en el juego de Hotelling

Autor: Luis García Pérez

Programa de Doctorado: Sistemas Complejos

Dirección de Tesis:

Dr. Ramón Alonso Sanz, Catedrático, Universidad Politécnica de Madrid (Director)

Revisores Externos:

Tribunal de Tesis:

Fecha de Defensa de Tesis:



*A mi madre y a Carmen, dos heroínas que me han acompañado en esta aventura.*



## Agradecimientos

A mi madre, por su cariño y su lucha incansable para que pudiera estudiar y llegar hasta aquí. Como ya se sabe que no se puede elegir la madre de uno, es una gran suerte cuando te toca exactamente la que hubieras querido tener. Deseo que mantengas esas ganas de vivir para seguir disfrutando de ti y poder compartir contigo más momentos como éste.

A Carmen, por animarme, escucharme y tirar de mí en los momentos bajos, con las palabras justas siempre acompañadas de una sonrisa. Tú me haces ser un poco mejor y espero que te quede algo de paciencia para seguir devolviéndote todo lo que me das y lo bien que me haces sentir. Este trabajo “es un poquito tuyo” porque sin ti no habría sido posible.

A Juan, por su capacidad de trabajo, su actitud y por ser un compañero de viaje excepcional siempre que hacemos algo juntos. Esta etapa habría sido mucho más difícil de abordar e infinitamente más aburrida, en caso de no contar contigo.

A Ramón y Juan Carlos, por su paciencia en los inicios, por su indispensable ayuda y guía y por todo lo que aprendo a su lado. Sin vosotros no lo habría conseguido y espero que esto no quede aquí, sino que sea el inicio de muchos años de colaboración y amistad.

A Tere y a Eduardo, por estar siempre pendientes de mí, por su predisposición a escucharme y opinar sobre los temas de esta tesis y por su confianza en el éxito de mis estudios de doctorado.

A Mariano y a María, por su apoyo, por darme una visión diferente de las cosas y por transmitirme su buen karma en todos los momentos que pasamos juntos.

A Paloma, por no desentonar demasiado y cuidar un poco más de nuestra madre.

A Alejandro, a Álvaro, a Gonzalo y a Felipe, por acompañarme siempre que pueden, haciéndome disfrutar y contagiándome su optimismo y su positividad.

A Trini, a Nichy y a Laura, por hacerme sentir parte de la familia y por interesarse en mis estudios, alegrándose siempre de mis progresos.

A Mónica, Iván, José Luis, David García, Alfonso, Gerardo, David Gaviña, Pedro, Paola, Jon, Enrique, Jose, Luisa, Stela, Rosalía, Rocío, David Lagóstena... y al “amigo desconocido” (alguien que se me olvidará y que espero que me perdone), por todos vuestros ánimos en esta etapa y por estar a mi lado cuando lo necesito.

A Luis y a Pepe, por su interés en mi doctorado y por compartir conmigo sus opiniones en cualquier ámbito, siempre inspiradoras y divertidas.

A todo el equipo de Fusión Digital, por aceptarme desde el primer momento, hacerme más llevadero el día a día y por interesarse y ofrecerme su ayuda en esta tesis.

Por último, a dos profesores universitarios muy queridos por mí, Julián y Juan (padre), por su labor de impulsores y motivadores, ofreciéndome su experiencia para orientarme en todo momento. Confío en haber respondido a vuestras expectativas, que eran muy altas.

# Abstract

This doctoral thesis belongs to the field of science called Game Theory and, specifically, addresses the analysis of Hotelling's game. In the model defined by Harold Hotelling (1895-1973), two players sell the same product and compete in location and price along a linear market segment where potential consumers are homogeneously distributed. A customer decides to buy the product from one of them on the basis of the price and the transportation cost from his position to the point of sale. In addition to the original model, this thesis addresses the reservation cost game and the game with elastic (variable) demand, called Hotelling-Smithies game. The game is analyzed from several points of view, depending on the market structure (monopoly vs. duopoly) and on the type of the transportation cost function (linear vs. quadratic). Different tools are used in this work to study Hotelling's game, such as numerical simulation techniques based on cellular automata and the entanglement of players strategies based on Quantum Game Theory.

To characterize the game, two specific game situations are analyzed: the Nash equilibrium and the Pareto optimal solution. The Nash equilibrium is the game situation in which the strategy of each player is the best response to the strategy of the rest, while the Pareto optimal is given by a combination of strategies where the players agree to achieve the maximum possible payoffs, against the consumer interest (collusion).

Under these premises, the research aim is to apply a new and reliable methodology which allows analyzing the game in a highly operational way, particularly locating its critical solutions (Nash equilibrium, Pareto optimal solution...). In the context of this general purpose, other more specific objectives are covered, such as the evaluation of the effectiveness and accuracy of the simulation technique used, the analysis of the effect of quantization on the results compared to the classic game (in absence of entanglement), the study of the model with close players or how particular values of the parameters involved in the game can increase the payoffs.

After this research, as a first conclusion, it is verified that the numerical simulation technique used constitutes a powerful tool in the analysis of the game, its monitoring and the knowledge of its real behaviour, especially when an analytical solution cannot be obtained. Regarding quantization, at a general level, it is concluded that, for high entanglement values, the Pareto optimal solution emerges in the Nash equilibrium as a form of collusion, maximizing the payoffs of the players and improving the result of the classic game in this sense. The study of the game with close players has made it possible to calculate the strategy to which the players tend when there is no equilibrium (collective consensus solution), theoretically predicted in the specialized scientific literature, and to observe that the equilibrium region increases progressively in the three versions of the game analyzed: original model, the game with reservation cost and the Hotelling-Smithies game.

# Resumen

Esta tesis doctoral se enmarca en la rama de la ciencia denominada Teoría de Juegos y, en concreto, aborda el análisis del juego de Hotelling. En el modelo definido por Harold Hotelling (1895-1973), dos jugadores venden un mismo producto y compiten en localización y precio a lo largo de un segmento de mercado lineal donde se distribuyen homogéneamente los potenciales consumidores. Un consumidor decide comprar el producto a uno de ellos en función del precio y el coste de desplazamiento desde su posición al punto de venta. Además del modelo original, en esta tesis se abordan el juego con límite de coste y el juego con demanda elástica (variable), denominado juego de Hotelling-Smithies. Se analiza el juego desde diversos puntos de vista, dependiendo de la estructura del mercado (monopolio vs. duopolio) y del tipo de función de coste de desplazamiento (lineal vs. cuadrática). En este trabajo se utilizan diferentes herramientas para el estudio del juego de Hotelling, tales como técnicas de simulación numérica basadas en autómatas celulares o el entrelazamiento de las estrategias de los jugadores basado en la Teoría de Juegos Cuántica.

Para caracterizar el juego, se analizan principalmente dos situaciones específicas del mismo: el equilibrio de Nash y la solución óptima de Pareto. El equilibrio de Nash es la situación del juego en la cual la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a la estrategia del resto, mientras que el óptimo de Pareto viene dado por una combinación de estrategias donde los jugadores se ponen de acuerdo para obtener los máximos beneficios posibles, en contra de los intereses del consumidor (colusión).

Bajo estas premisas, el objetivo de esta investigación es aplicar una metodología novedosa y fiable que permita analizar el juego de forma altamente operativa, en particular localizando sus soluciones críticas (equilibrio de Nash, óptimo de Pareto...). En el contexto de este propósito general, se cubren otros objetivos más específicos como la evaluación de la eficacia y exactitud de la técnica de simulación utilizada, el análisis del efecto de la cuantización en los resultados en comparación con el juego clásico (sin entrelazamiento), el estudio del modelo con jugadores próximos o cómo valores concretos de los parámetros que intervienen en el juego pueden aumentar los beneficios.

Tras este trabajo de investigación, como una primera conclusión, se comprueba que la técnica de simulación numérica utilizada constituye una poderosa herramienta en el análisis del juego, su monitorización y el conocimiento del comportamiento real del mismo, especialmente cuando no se puede obtener una solución analítica. En cuanto a la cuantización, a nivel general, se concluye que, para valores de entrelazamiento elevados, la solución óptima de Pareto emerge en el equilibrio de Nash como una forma de colusión, maximizando los beneficios de los jugadores y mejorando el resultado del juego clásico en este sentido. El estudio del juego con jugadores próximos ha permitido calcular la estrategia a la que tienden los jugadores cuando no existe equilibrio (solución de consenso colectiva), anticipada de forma teórica en la literatura científica especializada, y observar que la región de equilibrio aumenta progresivamente en las tres versiones del juego analizadas: modelo original, el juego con límite de coste y el juego de Hotelling-Smithies.



# Tabla de Contenido

Agradecimientos . . . . .	V
Abstract . . . . .	VI
Resumen . . . . .	VII
Lista de Figuras . . . . .	X
Lista de Tablas . . . . .	XVII
Abreviaturas y acrónimos . . . . .	XX
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Contexto y estado del arte . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	5
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2. Recorrido por la historia de la Teoría de Juegos</b>	<b>7</b>
<b>3. El juego de Hotelling</b>	<b>13</b>
3.1. Conceptos previos de Teoría de Juegos . . . . .	13
3.1.1. Representación de un juego en forma normal . . . . .	13
3.1.2. El equilibrio de Nash y el óptimo de Pareto . . . . .	14
3.2. El juego de Hotelling original y sus variantes . . . . .	15
3.2.1. El juego de Hotelling original . . . . .	15
3.2.2. El juego de Hotelling con límite de coste . . . . .	17
3.2.3. El juego de Hotelling-Smithies . . . . .	19
<b>4. Herramientas para el estudio del juego de Hotelling</b>	<b>25</b>
4.1. Técnicas de simulación basadas en autómatas celulares . . . . .	25
4.2. Teoría de Juegos Cuántica . . . . .	28
<b>5. El juego de Hotelling con límite de coste</b>	<b>33</b>
5.1. Simulación del juego clásico con límite de coste . . . . .	33
5.1.1. Monopolio . . . . .	37
5.2. El enfoque cuántico del juego con límite de coste . . . . .	39
5.3. Simulación del juego cuántico con límite de coste . . . . .	40
5.4. Coste de desplazamiento cuadrático . . . . .	50
5.4.1. Monopolio . . . . .	52
5.4.2. Enfoque cuántico . . . . .	53

5.5. Entrelazamiento trigonométrico . . . . .	58
5.6. Conclusiones . . . . .	62
<b>6. El juego clásico de Hotelling-Smithies</b>	<b>65</b>
6.1. Simulación del juego clásico de Hotelling-Smithies . . . . .	65
6.1.1. Representación del juego en función del límite de coste . . . . .	72
6.1.2. Monopolio . . . . .	78
6.2. Coste de desplazamiento cuadrático . . . . .	81
6.2.1. Representación del juego en función del límite de coste . . . . .	83
6.3. Conclusiones . . . . .	89
<b>7. El juego cuántico de Hotelling-Smithies</b>	<b>95</b>
7.1. El enfoque cuántico del juego de Hotelling-Smithies . . . . .	95
7.2. Simulación del juego cuántico de Hotelling-Smithies . . . . .	96
7.3. Coste de desplazamiento cuadrático . . . . .	103
7.4. Entrelazamiento trigonométrico . . . . .	108
7.5. Conclusiones . . . . .	110
<b>8. El juego clásico de Hotelling con jugadores próximos</b>	<b>113</b>
8.1. El juego de Hotelling original . . . . .	113
8.2. El juego de Hotelling con límite de coste . . . . .	116
8.3. El juego de Hotelling-Smithies . . . . .	118
8.4. Conclusiones . . . . .	120
<b>9. Conclusiones finales y líneas futuras</b>	<b>125</b>
<b>Referencias</b>	<b>127</b>
<b>Anexo A. El esquema de cuantización de Li-Du-Massar</b>	<b>135</b>
<b>Anexo B. El esquema de cuantización de Frackiewicz</b>	<b>137</b>

# Lista de Figuras

3.1.	Modelo del juego de Hotelling (Hotelling, 1929). . . . .	15
3.2.	El juego de Hotelling con $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $p_1=0.5$ , $p_2=3.0$ . (b) $p_1=3.0\hat{6}$ , $p_2=2.9\hat{3}$ . . . . .	16
3.3.	El juego de Hotelling con límite de coste $\alpha$ para $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ , $p_1=3.066$ , $p_2=2.933$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=1.5$ . (b) $\alpha=3.5$ . (c) $\alpha=4.5$ . . . . .	18
3.4.	El juego de Hotelling con límite de coste $\alpha$ para $a=0.6$ , $b=0.4$ , $p_1=0.5$ , $p_2=3.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=1.5$ . (b) $\alpha=2.5$ . (c) $\alpha=4.5$ . . . . .	19
3.5.	El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ para $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ , $p_1=3.066$ , $p_2=2.933$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=3.5$ . (b) $\alpha=4.5$ . . . . .	20
3.6.	El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ para $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1$ . (a) $p_1=1.0$ , $p_2=4.0$ , $\alpha=2.5$ . (b) $p_1=1.0$ , $p_2=4.0$ , $\alpha=3.5$ . (c) $p_1=0.6$ , $p_2=2.6$ , $\alpha = 4.5$ . . . . .	21
4.1.	Disposición de las interacciones en las simulaciones numéricas. (a) Juego. (b) Actualización de posición y precio. . . . .	27
4.2.	El esquema de cuantización de Li-Du-Massar (Li <i>et al.</i> , 2002). . . . .	30
4.3.	El esquema de cuantización de Frackiewicz (Frackiewicz, 2016). . . . .	31
5.1.	Precios y beneficios de las iteraciones iniciales en un subconjunto de $5 \times 5$ de toda la retícula en una simulación del juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ y localizaciones fijas $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	34
5.2.	Dinámica hasta $T=40$ en la simulación del juego de juego de Hotelling con límite de coste $\alpha$ para cinco configuraciones de precios iniciales fijadas las localizaciones $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=2.0$ . (b) $\alpha=4.5$ . . . . .	34
5.3.	El juego de Hotelling con límite de coste $\alpha$ fijadas las localizaciones $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=2.0$ . (b) $\alpha=4.5$ . . . . .	35
5.4.	Patrones en $T=200$ del juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ para $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Precios. (b) Beneficios. . . . .	35
5.5.	Dinámica hasta $T=200$ en la simulación del juego de Hotelling con límite de coste en localización-precio. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=2.0$ . (b) $\alpha=4.5$ . . . . .	36
5.6.	El juego de Hotelling con límite de coste $\alpha$ en la simulación con localización y precio variables. (a) $\alpha=2.0$ . (b) $\alpha=4.5$ . . . . .	37
5.7.	Patrones en $T=200$ de la simulación del juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ en localización-precio. (a) Precios. (b) Localizaciones. (c) Beneficios. .	37

5.8. El juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ y el precio del jugador-2 fijado a $p_2=22.0$ en una simulación con la localización y precio estacionarios del jugador-1. $L=3.0, t=1.0$ . (a) Localización fija del jugador-1 $x_1=0.6$ . (b) $x_1$ sin restricciones. . . . .	38
5.9. El juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ y el precio del jugador-2 fijado a $p_2=22.0$ en una simulación con la localización y precio estacionarios del jugador-1. $t=1.0$ . (a) $L=2.0$ . b) $L=6.0$ . . . . .	38
5.10. Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite coste $\alpha=4.5$ y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=200$ para cinco configuraciones de precios iniciales. $x_1=0.6, x_2=2.6, L=3.0, t=1.0$ . (a) Precios medios independientes ( $\bar{p}$ ) y entrelazados ( $\bar{p}^c$ ). (b) Beneficios promedio simulados ( $\bar{u}$ ) y beneficios de campo medios ( $u^\#$ ). . . . .	41
5.11. El juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ para $\gamma=2.0, x_1=0.6, x_2=2.6, L=3.0, t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=40$ en cinco simulaciones. (b) El juego con los precios medios entrelazados de una de las simulaciones. . . . .	43
5.12. Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=200$ para cinco configuraciones de precios iniciales. $x_1 = 0.6, x_2 = 2.6, L=3.0, t=1.0$ . (a) $\alpha=5.0$ . (b) $\alpha=6.0$ . . . . .	43
5.13. El juego cuántico de Hotelling con límite de coste para $\gamma = 2.0, x_1=0.6, x_2=2.6, L=3.0, t=1.0$ . (a) $\alpha=5.0$ . (b) $\alpha=6.0$ . . . . .	44
5.14. Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=9.0$ y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=200, x_1=0.6, x_2=2.6, L=3.0, t=1.0$ . (a) Precios independientes y entrelazados ( $\bar{p}, \bar{p}^c$ ). (b) Beneficios obtenidos en la simulación ( $\bar{u}$ ) y de campo medios ( $u^\#$ ). . . . .	45
5.15. El juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=3.0, \gamma=2.0$ y $a=b$ variable. $L=3.0, t=1.0$ . . . . .	46
5.16. El juego de cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha$ variable, $a=b=0.6, \gamma=2.0, L=3.0, t=1.0$ . . . . .	46
5.17. Simulación en localización-precio del juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=300$ para cinco configuraciones de precios iniciales. $L=3.0, t=1.0$ . (a) Localización media de los jugadores ( $\bar{x}$ ) y precios independientes y entrelazados ( $\bar{p}, \bar{p}^c$ ). (b) Beneficios medios reales ( $\bar{u}$ ) y beneficios de campo medios ( $u^\#$ ). . . . .	47
5.18. El juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ para $\gamma=2.0, L=3.0, t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=40$ en las cinco simulaciones superpuestas. (b) El juego con los precios entrelazados y las localizaciones medios de una de las simulaciones. . . . .	48
5.19. Patrones en $T=300$ de la simulación en localización-precio del juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ para $\gamma=2.0, L=3.0, t=1.0$ . (a) Precios entrelazados. (b) Localizaciones. (c) Beneficios. . . . .	49
5.20. El juego de Hotelling con límite de coste y coste de desplazamiento cuadrático. $x_1=0.6, x_2=2.6, L=3, t=1.0$ . (a) $p_1=0.5, p_2=3.0$ . (b) $p_1=3.0\hat{6}, p_2=2.9\hat{3}$ . . . . .	51
5.21. El juego de Hotelling con límite de coste y coste de desplazamiento cuadrático. $x_1=0.6, x_2=2.6, p_1=3.629, p_2=3.362, L=3.0, t=1.0$ . (a) $\alpha=1.5$ . (b) $\alpha=4.0$ . (c) $\alpha=4.5$ . . . . .	51

5.22. El juego de Hotelling con límite de coste y coste de desplazamiento cuadrático. $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ , $p_1=0.05$ , $p_2=6.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=1.5$ . (b) $\alpha=3.5$ . (c) $\alpha=4.5$ . . . . .	52
5.23. El juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ , coste de desplazamiento cuadrático y el precio del jugador-2 fijado a $p_2=22.0$ en una simulación con la localización y precio estacionarios del jugador-1. $t=1.0$ . (a) $x_1=0.6$ , $L=3.0$ . (b) $x_1$ sin restricciones, $L=3.0$ . (c) $x_1$ sin restricciones, $L=2.0$ . . . . .	53
5.24. Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=7.5$ , coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=300$ para cinco configuraciones de precios iniciales. $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	54
5.25. El juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=7.5$ y coste de desplazamiento cuadrático en $T=300$ . $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\gamma=0.0$ . (b) $\gamma=2.0$ . . . . .	54
5.26. Simulación del juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=12.0$ con coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=200$ . $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Precios independientes y entrelazados $(\bar{p}, \bar{p}^c)$ . (b) Beneficios obtenidos en la simulación $(\bar{u})$ y de campo medios $(u^\#)$ . . . . .	56
5.27. Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=300$ para cinco configuraciones de localización-precio iniciales. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Localización media de los jugadores $(\bar{x})$ y precios independientes y entrelazados $(\bar{p}, \bar{p}^c)$ . (b) Beneficios medios de la simulación $(\bar{u})$ y de campo medios $(u^\#)$ . . . . .	57
5.28. El juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ y coste cuadrático. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\gamma=0.0$ . (b) $\gamma=1.6$ . . . . .	58
5.29. Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=12.0$ y entrelazamiento trigonométrico $\gamma$ variable en $T=200$ con cinco configuraciones de precios iniciales. $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=5.0$ , (b) $\alpha=6.0$ . . . . .	59
5.30. Simulación en localización-precio del juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ y entrelazamiento trigonométrico $\gamma$ variable en $T=300$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Localización promedio de los jugadores $(\bar{x})$ y precios independientes y entrelazados medios $(\bar{p}, \bar{p}^c)$ . (b) Beneficios medios simulados $(\bar{u})$ y de campo medios $(u^\#)$ . . . . .	61
5.31. Simulación en localización-precio del juego cuántico de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ , coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento trigonométrico $\gamma$ variable en $T=300$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Localización promedio de los jugadores $(\bar{x})$ y precios independientes y entrelazados medios $(\bar{p}, \bar{p}^c)$ ; beneficios medios simulados $(\bar{u})$ y beneficios de campo medios $(u^\#)$ . (b) El juego en $\gamma=0.0$ . (c) El juego en $\gamma=\pi/4$ . . . . .	62
6.1. Precios, demandas y beneficios de las iteraciones iniciales e iteración $T=100$ en un subconjunto de $5 \times 5$ de toda la retícula en una simulación del juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=4.5$ y localizaciones fijas $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	66

6.2. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y localizaciones fijas de los jugadores $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=15$ en cinco simulaciones. (b) El juego con los precios medios estacionarios de una de las simulaciones en $T=100$ . . . . .	66
6.3. Funciones de respuesta del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y localizaciones fijas de los jugadores $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Precio del jugador-1 ( $p_1$ ) variable, dado $p_2=1.532$ . (b) Precio del jugador-2 ( $p_2$ ) variable, dado $p_1=1.573$ . . . . .	67
6.4. Patrones en $T=100$ en la simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y localizaciones fijas de los jugadores $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Precios. (b) Demandas. (c) Beneficios. . . . .	67
6.5. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y precios fijos de los jugadores $p_1=2.0$ , $p_2=2.1$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=20$ en cinco simulaciones. (b) El juego con las localizaciones medias estacionarios de una de las simulaciones en $T=100$ . . . . .	68
6.6. Funciones de respuesta en el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y precios fijos de los jugadores $p_1=2.0$ , $p_2=2.1$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Localización del jugador-1 $a$ variable, dado $b=1.249$ . (b) Localización del jugador-2 $b$ variable, dado $a=1.353$ . . . . .	69
6.7. Patrones en $T=100$ en la simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y precios fijos de los jugadores $p_1=2.0$ , $p_2=2.1$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Localizaciones. (b) Demandas. (c) Beneficios. . . . .	69
6.8. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y localizaciones y precios variables. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=15$ en cinco simulaciones. (b) El juego con las localizaciones y los precios medios estacionarios alcanzados en una simulación en $T=100$ . . . . .	70
6.9. Funciones de respuesta en precio para el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y localizaciones fijas $x_1=1.130$ , $x_2=1.836$ . (a) Precio del jugador-1 $p_1$ variable, dado $p_2=1.151$ . (b) Precio del jugador-2 $p_2$ variable, dado $p_1=1.124$ . . . . .	70
6.10. Funciones de respuesta en localización para para el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y precios fijos: $p_1=1.124$ , $p_2=1.151$ . (a) Localización del jugador-1 $a$ variable, dado $b=1.164$ . (b) Localización del jugador-2 $b$ variable, dado $a=1.130$ . . . . .	71
6.11. Patrones en $T=200$ en la simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y localizaciones y precios variables. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Precios. (b) Localizaciones.(c) Demandas. (d) Beneficios. . . . .	71
6.12. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable y localizaciones fijas en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=0.6$ , $b=0.4$ . . . . .	73
6.13. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y $a=b$ variable en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	75
6.14. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y $a=b=1.2$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=40$ . (b) $p_1$ -respuesta a $p_2=1.173$ . (c) $p_1$ -respuesta a $p_2=1.353$ . (d) $p_1$ -respuesta a $p_2=1.089$ . . . . .	76

6.15. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable y precios fijos en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $p_1=p_2=2.0$ . (b) $p_1=2.0, p_2=2.1$ . . .	77
6.16. Simulación en localización-precio del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	78
6.17. Simulación monopolística del juego Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable y localización fija del jugador-1 $x_1=0.6$ en $T=200$ . $p_2=22.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	79
6.18. Simulación monopolística del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable para $p_1=2.0$ en $T=200$ . $p_2=22.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	80
6.19. Simulación monopolística del juego Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable para localizaciones y precios variables en $T=200$ . $p_2=22.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	80
6.20. El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ y coste de desplazamiento cuadrático para $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ , $p_1=3.066$ , $p_2=2.933$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $\alpha=3.5$ . (b) $\alpha=4.5$ . . . . .	82
6.21. El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y coste de desplazamiento cuadrático para $Q_2=0.0$ . $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $p_1=0.05$ , $p_2=6.0$ . (b) $p_1=1.90$ , $p_2=5.0$ . . . . .	83
6.22. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable y coste de desplazamiento cuadrático en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=0.6, b=0.4$ . . . . .	84
6.23. Funciones de respuesta en el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y coste de desplazamiento cuadrático para $a=0.6$ , $b=0.4$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Precio del jugador-1 ( $p_1$ ) variable, dado $p_2=1.875$ . (b) Precio del jugador-2 ( $p_2$ ) variable, dado $p_1=1.900$ . . . . .	85
6.24. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ , coste de desplazamiento cuadrático y $a=b$ variable en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	85
6.25. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable y coste de desplazamiento cuadrático en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $p_1=p_2=2.0$ , (b) $p_1=2.0, p_2=2.1$ . . . . .	86
6.26. Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable y coste de desplazamiento cuadrático en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	87
6.27. Patrones en $T=200$ de la simulación del juego de Hotelling-Smithies con $\alpha=4.5$ y coste cuadrático. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Precios. (b) Localizaciones. (c) Demandas. (d) Beneficios. . . . .	88
6.28. Simulación monopolística del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable y coste de desplazamiento cuadrático con $x_1=0.6$ en $T=200$ . $p_2=22.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	89
7.1. El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ , $\gamma=2.0$ y localizaciones fijas $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ para cinco configuraciones de precios iniciales. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=40$ en las cinco simulaciones. (b) El juego con los precios medios entrelazados de una de las simulaciones. . . . .	97

7.2. Patrones en $T=100$ en la simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ , $\gamma=2.0$ y localizaciones fijas $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Precios. (b) Demandas. (c) Beneficios. . . . .	97
7.3. Simulación en precios del juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=100$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=0.6$ , $b=0.4$ . . . . .	98
7.4. Simulación en precios del juego cuántico de Hotelling-Smithies con $\alpha=6.0$ y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=100$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=1.2$ . (b) $a=1.2$ , $b=1.0$ . . . . .	99
7.5. El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ , $\gamma=2.0$ y $a=b$ variable. $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	100
7.6. El juego cuántico de HS con $\gamma=2.0$ y $\alpha$ variable. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=0.6$ , $b=0.4$ . . . . .	101
7.7. El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ y $\gamma=2.0$ en una simulación de localización-precio. $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=40$ en cinco simulaciones. (b) El juego con los precios y localizaciones promedio estacionarios de una de las simulaciones en $T=40$ . . . . .	102
7.8. El juego cuántico de Hotelling-Smithies con $\alpha=6.0$ y entrelazamiento $\gamma$ variable en una simulación en localización-precio en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	103
7.9. El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ , coste de desplazamiento cuadrático y $\gamma=2.0$ en localizaciones fijas $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta $T=40$ en cinco simulaciones de precios. (b) El juego de con los precios promedio estacionarios de una de las simulaciones en $T=40$ . . . . .	105
7.10. El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ , coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento $\gamma$ variable en una simulación en precios para $T=100$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=0.6$ , $b=0.4$ . . . . .	105
7.11. El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ , coste de desplazamiento cuadrático, $\gamma=2.0$ y localización $a=b$ variable. $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	106
7.12. El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha$ variable, coste de desplazamiento cuadrático y $\gamma=2.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=0.6$ , $b=0.4$ . . . . .	107
7.13. El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=6.0$ , coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento $\gamma$ variable en $T=200$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	108
7.14. Simulación en precios del juego cuántico de Hotelling-Smithies con $\alpha=6.0$ y entrelazamiento $\gamma$ trigonométrico variable en $T=100$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=0.6$ , $b=0.4$ . . . . .	109
7.15. Simulación en precios del juego cuántico de Hotelling-Smithies con $\alpha=6.0$ y entrelazamiento trigonométrico $\gamma$ variable, según el modelo de Frackiewicz, en $T=100$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=0.6$ , $b=0.4$ . . . . .	110
8.1. El modelo original del juego de Hotelling con localización $a=b$ variable. $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	115

8.2.	Funciones de respuesta en el modelo original del juego de Hotelling con $a=b=1.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $p_1$ -respuesta para $p_2=2.168$ . (b) $p_1$ -respuesta para $p_2=3.000$ . (c) $p_1$ -respuesta para $p_2=2.000$ . . . . .	115
8.3.	El juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=3.0$ y localización $a=b$ variable. $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	117
8.4.	Funciones de respuesta en el juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=3.0$ y $a=b=1.2$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $p_1$ -respuesta para $p_2=1.48$ . (b) $p_1$ -respuesta para $p_2=1.8$ . (c) $p_1$ -respuesta para $p_2=1.2$ . . . . .	117
8.5.	Región de beneficios positivos en el juego de Hotelling-Smithies con $\alpha=5.0$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $a=b=0.6$ . (b) $a=b=1.2$ . . . . .	118
8.6.	El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=5.0$ y $a=b$ variable. $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	119
8.7.	Funciones de respuesta en el juego de Hotelling-Smithies con límite de cos- te $\alpha=5.0$ y $a=b=1.2$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . (a) $p_1$ -respuesta para $p_2=1.263$ . (b) $p_1$ - respuesta para $p_2=1.146$ . (c) $p_1$ -respuesta para $p_2=1.102$ . . . . .	120



# Lista de Tablas

5.1. Precios independientes y entrelazados medios, beneficios de campo y beneficios medios en cinco simulaciones del juego cuántico de Hotelling con límite coste $\alpha=4.5$ para $\gamma=2.0$ . $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	42
5.2. Precios independientes y entrelazados medios, beneficios de campo y beneficios medios en cinco simulaciones del juego cuántico de Hotelling con límite coste $\alpha=4.5$ para $\gamma=2.0$ . $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ , $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	48
5.3. Cálculo de $\gamma^\bullet$ por el método de Newton-Raphson para el juego de Hotelling con límite de coste $\alpha=7.5$ . $x_1=0.6$ , $x_2=2.6$ . $L=3.0$ , $t=1.0$ . . . . .	56
6.1. Desviación estándar de los precios, localizaciones, demandas y beneficios de cinco simulaciones en localización-precio del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ en $T=200$ . . . . .	72
6.2. Desviación estándar de los precios, localizaciones, demandas y beneficios de cinco simulaciones en localización-precio del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste $\alpha=4.5$ y coste de desplazamiento cuadrático en $T=200$ . . . . .	88

## Abreviaturas y acrónimos

$\alpha$ -HOT Hotelling con límite de coste  $\alpha$

$\alpha$ -HOT2  $\alpha$ -HOT con coste de desplazamiento cuadrático

$\alpha$ -HS Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$

$\alpha$ -HS2  $\alpha$ -HS con coste de desplazamiento cuadrático

AC Autómata celular

EN Equilibrio de Nash

EWL Eisert-Wilkens-Lewenstein

HOT Hotelling

HOT2 HOT con coste de desplazamiento cuadrático

HS Hotelling-Smithies

LDM Li-Du-Massar

OP Óptimo de Pareto

SCC Solución de consenso colectiva

TJ Teoría de Juegos

TJC Teoría de Juegos Cuántica

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Contexto y estado del arte

Con cierta frecuencia, como potenciales compradores que somos, nos enfrentamos a mercados donde la diferenciación entre productos es muy pequeña o prácticamente inexistente. Por ejemplo, en nuestras ciudades existe la tendencia a que comercios que venden productos similares se sitúen muy cerca unos de otros. Tal es el caso de los paseos marítimos de muchos lugares turísticos, donde podemos encontrar infinidad de heladerías y bares cuya oferta es muy similar y que se encuentran muy próximos entre sí. Esta situación no es algo nuevo, sino que viene ocurriendo desde mucho tiempo atrás. Basta con recordar las denominaciones de algunas calles de ciudades como Madrid que daban nombre al gremio que se dedicaba a comerciar con sus productos en esa zona concreta de la ciudad, como puede ser Cuchilleros, Libreros, Latoneros, Botoneras, etc.

Otro ejemplo muy claro de este fenómeno nos lo encontramos en la semejanza que existe, en muchas ocasiones, en la oferta que presentan los distintos fabricantes para un mismo producto. Tenemos numerosos ejemplos de bienes de consumo (televisores, teléfonos móviles, etc.) donde la mayoría de las marcas nos ofrecen productos con características similares de tal modo que, si una marca presenta algo diferencial en su oferta que pueda atraer a muchos clientes, rápidamente el resto de competidores trata de imitarla. Por supuesto, también hay marcas que se dirigen a un segmento del mercado muy reducido y tratan de diferenciar su oferta para hacerla atractiva para esos clientes, pero muchas veces son la excepción.

Podemos encontrar escenarios similares en otros campos, como la política. Si nos encontramos ante un escenario bipartidista clásico, a los partidos les conviene aproximarse al centro en lo que se refiere a ideología. Ello es así debido a que, aunque normalmente los votantes se distribuyen a lo largo de todo el espectro ideológico, generalmente suelen ser más numerosos en el centro. Esto hace que los candidatos no tengan tendencia al extremismo en este tipo de panoramas políticos más tradicionales, sino que busquen el centro para captar el mayor número de votos posibles. Las cosas cambian cuando un nuevo partido entra en juego en el tablero político, o lo hacen varios, como nos encontramos frecuentemente en los escenarios actuales. En este caso, la tendencia de los partidos existentes es mantener, en la medida de lo

posible, su posición ideológica y su área de influencia, tratando de reducir el impacto de este nuevo partido. En el caso de que este nuevo participante intente ocupar una opción intermedia entre los dos partidos existentes, la tendencia de éstos suele ser aproximar su ideología más hacia el centro para invadir su área de influencia y tratar de eliminar así esta nueva amenaza. Por el contrario, si este nuevo partido se situara en uno de los extremos, escenario muy frecuente en la actualidad favorecido por el radicalismo ideológico, el partido existente situado en ese lado del tablero político tiene que tratar de competir por los votantes de ideología extremista con esta nueva opción política, manteniendo al mismo tiempo sus seguidores de centro.

Todos estos casos a los que estamos tan acostumbrados en nuestros días, se los planteó ya hace cerca de un siglo el matemático y economista estadounidense Harold Hotelling (Fulda, Minnesota, 29 de septiembre de 1895 - Chapel Hill, Carolina del Norte, 26 de diciembre de 1973). Hotelling se licenció en Periodismo y obtuvo un doctorado en Matemáticas por la Universidad de Princeton, ejerciendo más adelante como profesor en las universidades de Stanford, Columbia y Carolina del Norte. Los orígenes del juego que lleva su nombre datan de 1929, año en que publicó el artículo en el que definió su influyente modelo de competencia espacial (Hotelling, 1929), consistente en dos vendedores que se sitúan en dos puntos de un segmento y que venden un producto idéntico a una serie de consumidores distribuidos uniformemente a lo largo de dicho segmento. Los jugadores compiten en localización y precio en el modelo homogéneo propuesto, de tal modo que un cliente decide comprar el producto a uno de ellos en función del precio y del coste de desplazamiento desde su posición al punto de venta. En el modelo inicial del juego, el coste de desplazamiento varía linealmente con la distancia. La suma del precio del producto y el coste de desplazamiento asociado a un consumidor representa el coste total para adquirir un producto por parte del consumidor. Hotelling definió lo que se denomina el *principio de mínima diferenciación*, que establece que las compañías fabrican productos que tienden a parecerse o como dice en su artículo: “una tendencia excesiva de los competidores a imitarse en términos de calidad de los bienes, localización y en otros aspectos esenciales”. En el caso concreto del modelo inicial de Hotelling, ello implica que las empresas tienden a elegir ubicaciones similares para sus tiendas. A partir de entonces, surge una gran cantidad de literatura relativa a competencia espacial y diferenciación del producto, inspirando el desarrollo de modelos espaciales de competencia política y convirtiéndose en una parte indispensable de la enseñanza de Economía. A pesar de las corrientes críticas que surgieron con relación al modelo debido a sus limitaciones, no se pudo demostrar que el *principio de mínima diferenciación* no era válido hasta cincuenta años después (d’Aspremont *et al.*, 1979), donde se establece que el equilibrio de Nash (EN) en el juego sólo existe bajo ciertas condiciones, en contraste con el análisis previo de Hotelling. El concepto de EN, que sirve de base a las conclusiones de Hotelling, es una situación estable del juego donde los jugadores no tienen ningún incentivo en cambiar de estrategia porque, de hacerlo, su beneficio disminuiría, como se definirá más adelante y de forma rigurosa en esta tesis doctoral (sec. 3.1.2).

La primera extensión relevante del modelo fue introducida por Lerner y Singer (1937). En el modelo inicialmente propuesto por Hotelling, cada consumidor compra una unidad de producto a uno de los jugadores, sin importar lo elevado que sea el coste total del producto. Es decir, no habría ninguna barrera en cuanto a elevar los precios, ya que los clientes seguirían

comprando siempre el producto. Lerner y Singer, con el propósito de hacer más realista el modelo, introducen un límite superior de coste por encima del cual los consumidores no compran el producto y la demanda cae de modo abrupto de uno a cero.

En el artículo original, la demanda se asume que es inelástica (es decir, no varía en función del coste total en terminología económica), sin embargo se predice qué ocurriría en el caso de ser variable o elástica. De acuerdo con ello, Hotelling escribió lo siguiente refiriéndose a dos empresas A y B (Hotelling, 1929): “con demanda elástica, las observaciones realizadas sobre el resultado serán cualitativamente verdaderas; pero la tendencia de B a establecer su negocio muy cerca de A es menos marcada”. Smithies contribuyó a la evolución del modelo incluyendo el concepto de demanda elástica, adicionalmente al límite superior de coste mencionado (Smithies, 1941b). De acuerdo con ello, la demanda varía en función del precio y de la distancia del cliente a la localización del punto de venta. Existe mucha bibliografía relacionada con el juego de Hotelling y su variante con límite de coste (Economides, 1993; Hinloopen y Van Marrewijk, 1999). Sin embargo, el juego de Hotelling-Smithies (HS), a pesar de su aparición en 1941, se ha abordado con menor frecuencia. Esto se debe, en gran parte, a las dificultades de computación derivadas de la elasticidad de la demanda, las cuales llevaron a Smithies a presentar su argumentación desde un punto de vista puramente verbal en su artículo original, dado que se trataba de un problema demasiado complejo para ser tratado a través de un método riguroso y, mucho más, si lo comparamos con el trabajo de Lerner y Singer, donde los autores recurrieron a métodos gráficos (Lerner y Singer, 1937). El juego de HS se estudia de modo analítico normalizando el segmento de mercado al intervalo  $[-1, 1]$  en algunos textos (Puu, 2002; Puu y Sushko, 2002), a diferencia del intervalo  $[0, L]$  considerado a lo largo de este documento. Smithies analiza también la política de precios adoptada en un mercado monopolista considerando diversos escenarios de la función de demanda (Smithies, 1941a).

A partir de entonces, surgen otras variantes del modelo inicial de Hotelling como, por ejemplo, considerar un coste de desplazamiento con variación cuadrática, en lugar de lineal, con respecto a la distancia. En algunas referencias, esta alternativa se utiliza para resolver las limitaciones del modelo con coste de desplazamiento lineal (d’Aspremont *et al.*, 1979). Algunos autores se han mostrado reacios a considerar el modelo con coste cuadrático, como es el caso de Puu, quien afirmó (Puu, 2002): “más allá, para huir de algunas consecuencias de la paradoja, apareció la poco realista y artificiosa idea del coste de desplazamiento cuadrático y se hizo popular”. Para hacer un recorrido selectivo y, al mismo tiempo, útil por el juego de Hotelling, se pueden consultar un gran número de referencias (Aydinonat y Köksal, 2019; Brenner, 2011; J. J. Gabszewicz y Thisse, 1992; Graitson, 1982; Kilkenny y Thisse, 1999).

Con objeto de validar los resultados obtenidos analíticamente en el juego de Hotelling, a lo largo de esta tesis doctoral se utilizan métodos de simulación numérica ya empleados con éxito por Alonso-Sanz en otros conocidos juegos continuos como es el caso del duopolio de Cournot (Alonso-Sanz, 2019b), el duopolio de Stackelberg (Alonso-Sanz y Martin-Gutierrez, 2020), el juego de Bertrand (Alonso-Sanz y Adamatzky, 2020b) o la guerra de desgaste (Alonso-Sanz y Adamatzky, 2020a). Del mismo modo, se han analizado juegos discretos mediante simulación en diversos artículos, recopilados por Alonso-Sanz (2019a). El uso de técnicas de simulación permite, además de confirmar la veracidad de los resultados analíticos, conocer el

comportamiento del juego en aquellos casos donde su complejidad dificulta extremadamente los cálculos. Esto quiere decir que el estudio del juego desde un punto de vista analítico y las técnicas de simulación numérica son herramientas que utilizadas conjuntamente nos permiten tener un conocimiento más completo del juego.

Uno de los aspectos más novedosos que se incluyen en esta tesis es la cuantización de los juegos a través de la aplicación de los principios fundamentales de la mecánica cuántica a la Teoría de Juegos (TJ), que constituye lo que se denomina Teoría de Juegos Cuántica (TJC). Ello nos permite definir un modelo del juego que establece una correlación entre las estrategias de los jugadores, de modo similar a la propiedad de entrelazamiento existente en los sistemas cuánticos. La intensidad de esta correlación entre las estrategias se modela mediante un parámetro denominado coeficiente o factor de entrelazamiento. Si este parámetro es positivo, nos encontramos ante el juego cuántico, mientras que si su valor es cero estamos ante el juego clásico (sin entrelazamiento entre las estrategias). Esta técnica fue aplicada por primera vez por Meyer (1999) demostrándose que, en un juego de suma cero, un jugador que tiene acceso a una estrategia cuántica siempre gana el juego frente a otro que sigue una clásica. Sin embargo, Eisert *et al.* (1999) analizaron juegos de suma no nula, como el dilema del prisionero, demostrando también que se mejoran los resultados cuando el juego se extiende al dominio cuántico, a través del denominado esquema de Eisert-Wilkens-Lewenstein (EWL). Es decir que, también en este caso, el jugador que sigue una estrategia cuántica basada en el esquema EWL obtiene mayor beneficio que el que adopta una clásica. A lo largo de los años, muchos autores han publicado trabajos de investigación basados en la TJC utilizando diferentes esquemas de cuantización. Una de las aportaciones más destacadas en este campo es el modelo de Li-Du-Massar (LDM), que los autores mismos calificaron como una “*mínima* extensión del juego clásico del duopolio de Cournot en el dominio cuántico” (Li *et al.*, 2002), a diferencia de otros modelos mucho más complejos que se han intentado aplicar recientemente a juegos continuos, como es el caso de la modificación del modelo de EWL utilizada por Kameshwari y Balakrishnan (2021). Según, el esquema de LDM, los dos jugadores de un duopolio de Cournot cooperan en una cierta medida debido al entrelazamiento existente entre ellos, puesto que la cantidad producida por una firma depende, no sólo de su propia estrategia, sino también de la estrategia de la otra firma. Esta correlación entre las estrategias hace que el beneficio crezca a medida que el entrelazamiento aumenta. A consecuencia de ello, surgieron un gran número de artículos relativos a juegos cuánticos con el objetivo de optimizar los resultados obtenidos en los juegos clásicos. Son numerosos los ejemplos de aplicación del esquema de LDM al juego de Cournot (S. F. Wang, 2022; X. Zhang, Sun y Jiang, 2020; Y. Zhang *et al.*, 2023). Se han publicado trabajos donde se demuestra la unicidad del EN en el dominio cuántico (Sekiguchi *et al.*, 2010), donde se prueba que el entrelazamiento cuántico permite mejorar la eficiencia económica reduciendo el riesgo de monopolio (Du *et al.*, 2005) o donde se estudia el juego cuántico con demanda y coste no lineales (N. Wang y Yang, 2022). Esta misma técnica también se ha aplicado a otros juegos, como el duopolio de Bertrand, demostrando que el entrelazamiento puede mejorar la estabilidad del sistema (X. Zhang, Sun, Ma y Zhang, 2020) o al duopolio de Stackelberg, probando que no existe ventaja para el jugador que actúa en primer lugar (líder) si hay un alto grado de correlación entre las estrategias (Frackiewicz, 2018). Otro esquema de cuantización similar al de LDM es el propuesto por Frackiewicz (2016), que se aplicó inicialmente al duopolio de Cournot. A

lo largo de esta tesis se aplicará el esquema de entrelazamiento cuántico de LDM al juego de Hotelling con el objetivo de optimizar los resultados obtenidos en el juego clásico y, en menor medida, el esquema de entrelazamiento cuántico de Frackiewicz.

Esta tesis doctoral está basada en una serie de artículos sobre diferentes aspectos del juego de Hotelling que se desarrollarán con detalle a lo largo de los siguientes capítulos (García-Perez *et al.*, 2021, 2023, 2024b; Grau-Climent *et al.*, 2022). Además de ello, durante el período de doctorado, se ha colaborado en otros trabajos no incluidos en esta tesis doctoral. Se han estudiado otros juegos apoyándose en la simulación y en la TJC, cuyos resultados se han publicado en diversos artículos. De acuerdo con esta línea de investigación, se han analizado el juego de Bertrand, donde los jugadores compiten únicamente en el precio de venta de un producto en el mercado (Grau-Climent *et al.*, 2023c), y el juego de los bienes públicos, donde se comparte un recurso común cuyo uso excesivo puede conducir a su agotamiento (Grau-Climent *et al.*, 2023a; García-Perez *et al.*, 2024a). Del mismo modo, se han abordado los juegos desde otra perspectiva a través de sistemas dinámicos acoplados en el tiempo discreto, analizando su estabilidad así como el efecto de la memoria o del entrelazamiento cuántico en ellos. Bajo este enfoque, se han explorado el juego de Cournot, donde los jugadores compiten en la cantidad de un determinado producto que ponen en el mercado (García-Perez *et al.*, 2022; Grau-Climent *et al.*, 2023b), y, de nuevo, el juego de los bienes públicos (Grau-Climent *et al.*, 2024).

## 1.2. Objetivos

Esta tesis doctoral se enmarca dentro de la rama de la ciencia denominada TJ, que estudia el comportamiento estratégico de los individuos y su toma de decisiones ante determinadas situaciones. A lo largo de la historia, se ha escrito abundante literatura abordando el tema de la TJ desde diferentes puntos de vista. Podemos encontrar documentos que utilizan un enfoque más teórico o filosófico mientras que otros se inclinan por utilizar una perspectiva analítica, apoyándose en las matemáticas. Esta disciplina tiene múltiples aplicaciones prácticas en campos tan diversos como la economía, la política, la sociología o la biología, por poner algunos ejemplos.

Partiendo de esta base, en el caso del trabajo de investigación llevado a cabo para la elaboración de esta tesis doctoral se ha optado por una metodología basada en un acercamiento a la TJ desde una doble perspectiva. Por un lado, se ha estudiado el problema desde un punto de vista analítico y, por otro, se han utilizado herramientas de simulación numérica basadas en autómatas celulares para monitorizar el juego, estudiar su evolución y determinar su comportamiento real. En este contexto, el objetivo principal que se persigue con esta tesis doctoral es la utilización de una metodología novedosa y fiable que permita analizar el juego de forma altamente operativa, en particular localizando sus soluciones críticas. Este objetivo general podemos descomponerlo en otros más específicos, que son fundamentales para alcanzarlo:

- Adaptar la simulación basada en autómatas celulares a la casuística de juegos cuánticos para validar la veracidad de los resultados obtenidos analíticamente y poder estudiar el sistema en situaciones más complejas.

- Analizar cómo influye la cuantización de las estrategias en el juego y estudiar la transición de la competencia pura en el juego clásico a la *colusión* en el juego completamente correlado.
- Estudiar el efecto del entrelazamiento cuántico de las estrategias de los jugadores en el beneficio que obtienen como resultado del juego, con el fin de optimizarlo, y comparar los resultados obtenidos frente al juego clásico (en ausencia de entrelazamiento).
- Estudiar los límites de la región donde existe EN, en la que el juego es estable, y analizar el comportamiento del juego con jugadores próximos, donde no hay equilibrio.
- Encontrar combinaciones de valores críticos de las variables que intervienen en el juego, a partir de los cuales se pueden optimizar los beneficios.

De acuerdo con esta línea de trabajo, esta tesis se centra en el estudio del juego de Hotelling y sus diferentes variantes con un enfoque económico. La complejidad de este juego, en cuanto al número de variables que intervienen, hace que sea idóneo para desarrollar un análisis de estas características.

### 1.3. Estructura de la tesis

De acuerdo con lo anterior, el documento está estructurada del modo que se detalla a continuación. Este capítulo 1, que sirve de introducción, contextualiza el trabajo de investigación desarrollado y establece las bases generales en que se fundamenta esta tesis, incluyendo los objetivos que se persiguen con la misma. El capítulo 2 hace un breve recorrido por la historia de la TJ, señalando cómo surge, para continuar con su evolución, sus hitos más importantes y la relevancia de este campo en la actualidad. En el capítulo 3, se realiza una descripción teórica del modelo del juego de Hotelling original y de sus variantes. En el capítulo 4, se establecen una serie de conceptos fundamentales que se utilizan en el modelado y análisis del juego, como son el EN y el óptimo de Pareto (OP), las técnicas de simulación del tipo autómatas celulares y la TJC. El capítulo 5 está dedicado al análisis y simulación del juego de Hotelling con límite de coste. En los capítulos 6 y 7, se estudia el juego de HS desde el punto de vista clásico y cuántico, respectivamente. El capítulo 8 explora cómo se comporta el juego con jugadores próximos, donde no existe EN. Por último, el capítulo 9 explica las conclusiones más relevantes obtenidas como resultado de esta tesis doctoral, así como las líneas futuras de investigación.

Al final de algunos capítulos, existe un apartado de Notas, donde se explican con más detalle algunos conceptos desarrollados a lo largo del capítulo.

## Capítulo 2

# Recorrido por la historia de la Teoría de Juegos

El juego es una actividad inherente al ser humano y, desde la infancia, sirve de instrumento para la interacción y desarrollo social de los individuos, que deben actuar en base a unas reglas preestablecidas que condicionan el desarrollo del juego. De hecho, en contraposición a los términos filosóficos *Homo sapiens* (hombre que sabe), denominación biológica del ser humano para diferenciarlo del resto de especies animales, y *Homo faber* (hombre que fábrica), concibiendo al hombre como un ser que se sirve de la naturaleza y de su capacidad para fabricar o construir, Johan Huizinga propuso el concepto de *Homo ludens* (hombre que juega) para referirse a la especie humana en su libro del mismo nombre (Huizinga, 2008). En él destaca la importancia del juego para el desarrollo social y cultural de las personas. El juego necesita reglas para que pueda existir y es necesaria la capacidad para guardar las experiencias pasadas con el fin de que se puedan mantener las reglas cada vez que se inicia de nuevo el juego. Para ello es fundamental el papel del lóbulo frontal del cerebro, más desarrollado en el hombre que en el resto de animales y responsable, además, del pensamiento, la conducta y la motivación de la especie humana. De hecho, Neubert *et al.*(2014) identificaron una región específica del lóbulo frontal del cerebro humano que no está presente en el del mono, comparando tomografías cerebrales de 25 humanos y 25 macacos. Esta región está involucrada en los procesos de toma de decisiones y de anticipar estrategias, estrechamente relacionadas con el juego, así como en la capacidad de hacer varias tareas de forma simultánea.

Las matemáticas permiten crear modelos para el análisis de situaciones del mundo real donde se producen interacciones entre los individuos que toman parte en ellas, que deben seguir una estrategia para la toma de la decisión que más le beneficie a cada uno. Así surge la TJ como el área de las matemáticas que se encarga del estudio del comportamiento y las diferentes estrategias de los agentes (los jugadores) que intervienen cuando se plantea una situación de competencia o interacción (el juego). Al considerar la estrategia más beneficiosa para un jugador dado es importante tener en cuenta que ésta depende de las estrategias seguidas por el resto de jugadores. Al modelizar una determinada interacción como un juego, es posible encontrar analogías con otras situaciones de distinta naturaleza pero con una estructura similar y que, por tanto, admiten el mismo análisis formal para obtener la estrategia

óptima asociada a cada jugador. Esto posibilita que la TJ tenga aplicaciones muy diversas en campos como la economía, ciencias sociales, biología, psicología, etc. A continuación, se explora la historia de la TJ en su vertiente clásica, a través de las contribuciones realizadas por diferentes investigadores y la repercusión de estas aportaciones (Villalón y Caraballo, 2015), mientras que los inicios y la evolución de la TJC se abordan más adelante, en la sec. 4.2.

Aunque fue John von Neumann (1944) el que introdujo el término TJ tal y como hoy lo conocemos, existen algunos antecedentes que se pueden considerar precursores de esta rama de la ciencia. La primera referencia conocida a los juegos y su lógica se debe al matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz, con la obra *Nouveaux essais sur l'entendement humain* escrita en 1704 y publicada posteriormente (Leibniz, 1765). Según Leibniz, la mente humana “se despliega más minuciosamente en los juegos que en actividades más serias”. Tenía interés en establecer un tratado de juegos que tuviera aplicación a toda actividad humana.

La siguiente aportación relevante se produce en 1713, fruto de la correspondencia entre Molmort, Bernoulli y Waldegrave (de Montmort, 1713), donde aparece el concepto de estrategia mixta y la regla minimax o solución minimax, por la que se minimiza la posible pérdida en el peor escenario planteado por el otro jugador.

En 1770 (aunque publicada unos años más tarde), el matemático, físico y político francés Jean-Charles de Borda presenta en la Académie Royale des Sciences (Borda, 1781) un método de elección con un único ganador, llamado posteriormente recuento de Borda, que se obtiene en base a la ordenación hecha por cada votante según sus preferencias por los candidatos.

Por su parte, en 1785 el Marqués de Condorcet publicaría su *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (De Condorcet, 1785) en el que aparece por primera vez el teorema del jurado y la paradoja de Condorcet. El teorema del jurado nos dice que la probabilidad de que un grupo llegue a la respuesta correcta en una decisión entre dos opciones puede aumentar o disminuir al aumentar el tamaño del grupo dependiendo de la probabilidad de que cada individuo elija o no la decisión correcta, respectivamente. La paradoja de Condorcet demuestra que las preferencias colectivas son cíclicas (no transitivas) aunque las preferencias individuales no lo sean.

Ya en el siglo XIX, Cournot presenta un modelo (Cournot, 1838), que se conoce como duopolio de Cournot, donde compiten dos empresas con la misma función de coste y productos homogéneos en un escenario estático. En este modelo, ambas empresas eligen la cantidad que deben producir para que exista un equilibrio donde las dos obtengan el máximo beneficio. Esto es lo que se denomina equilibrio de Cournot o de Cournot-Nash, como un caso particular de lo que posteriormente sería el EN.

El matemático y economista francés Bertrand propone otro modelo (Bertrand, 1883) donde las empresas compiten en el precio del bien, en lugar de hacerlo en la cantidad que produce cada una de ellas. En este caso, el jugador que pone menor precio se queda con todo el mercado y, si ambos igualan el precio, se lo reparten equitativamente. En el supuesto de que las dos compañías tengan el mismo coste marginal, el equilibrio se alcanza cuando el precio coincide con el coste para ambas y su beneficio es nulo, que es lo que se conoce como paradoja de Bertrand.

Unos años más tarde, el economista y estadístico Edgeworth propuso una variante, conocida como modelo de Bertrand-Edgeworth (1897), donde se introducen restricciones en la capacidad de producción de las empresas para salvar la paradoja de Bertrand. Es también responsable de la llamada conjetura de Edgeworth, que introduce en su obra *Mathematical psychics* (Edgeworth, 1881) y, según la cual, el aumento del número de agentes en el mercado reduce el grado de incertidumbre.

También en el s. XIX, en su obra *The descent of man, and selection in relation to sex* (Darwin, 1871), el científico inglés Darwin introduce aplicaciones de la TJ en ámbitos diferentes del económico y social, en concreto en la biología evolutiva. Aquí Darwin expone la teoría de la selección sexual, para explicar la aparición de caracteres sexuales secundarios (no relacionados con la función reproductora) que influyen en la selección de un sexo (normalmente el femenino) sobre el otro para aparearse. Esta teoría fue rechazada en su momento, pero sería respaldada, en esencia, por la teoría genética de la evolución natural de Fisher (1930).

En el s. XX aparecen las primeras publicaciones matemáticas y con resultados formales, basándose en el juego del ajedrez pero que podrían englobarse dentro de la TJ. La primera publicación la realiza el matemático y lógico alemán Zermelo (1913), donde se plantea dos preguntas: a) el significado de que un jugador esté en posición ganadora y su definición de una forma matemática objetiva; y b) si puede determinarse el número de movimientos necesarios para forzar la victoria a partir de dicha posición. Dicho trabajo fue complementado y generalizado por publicaciones de dos matemáticos húngaros, primero por König (1927), y posteriormente por Kalmár (1928).

Entre 1921 y 1927, el matemático y político Borel publica una serie de artículos (Borel, 1921, 1924a, 1924b, 1926, 1927a, 1927b) que anticipan algunos aspectos de los trabajos de von Neumann y Morgenstern, considerados como el punto de partida de la TJ tal y como la conocemos en nuestros días. En ellos, Borel formula por primera vez matemáticamente una estrategia mixta y analiza la existencia de la solución minimax.

Poco tiempo después, el matemático von Neumann (1928) publica su primer trabajo sobre TJ donde demuestra el teorema de minimax para juegos no cooperativos con independencia del número de jugadores y se define el concepto formal de estrategia tal y como se utiliza actualmente.

Un año más tarde, el economista y estadístico Hotelling (1929), en su artículo *Stability in Competition*, establece su modelo de ciudad lineal donde dos empresas que venden un producto homogéneo deben elegir su localización y el precio de venta de dicho producto para maximizar sus beneficios, teniendo en cuenta que existen unos costes asociados al desplazamiento del potencial cliente al punto de venta.

Pocos años después, el economista von Stackelberg (1934) presenta el modelo secuencial que lleva su nombre. De acuerdo con este modelo, dos empresas compiten en un mercado donde una de ellas fija su producción en primer lugar (líder) mientras que la otra decide la cantidad que va a producir posteriormente (seguidora). La empresa que actúa como líder, para determinar su producción, tiene en cuenta la respuesta de la seguidora a su estrategia.

Después de todos estos precedentes, llega la obra fundamental que se considera el nacimiento de la TJ moderna, la citada *Theory of games and economic behavior* de von Neumann y Morgenstern (1944). Este libro constituye el primer tratamiento riguroso y exhaustivo del concepto de juego y en él se analizan tanto los juegos no cooperativos de suma cero como los juegos cooperativos.

El impacto de la obra de von Neumann y Morgenstern fue de tal magnitud, que se inició un período de creciente labor investigadora en este campo y sus distintas aplicaciones, abarcando desde la década de los 50 hasta principios de los años 60.

Entre 1950 y 1953, el matemático estadounidense Kuhn introduce la formulación actual de juegos en forma extensiva y establece los resultados básicos de este tipo de juegos (Kuhn, 1950, 1953).

La publicación más relevante en los años 50 corresponde sin duda al matemático estadounidense Nash (1951), que publica su tesis doctoral *Non-cooperative games*, que sirve como base para el estudio posterior de este tipo de juegos. En ella se establece el concepto de punto de equilibrio (lo que hoy denominamos EN) y se prueba su existencia. A partir de esta definición de equilibrio, el propio Nash junto al matemático Mayberry y el economista Shubik publican un artículo (Mayberry *et al.*, 1953) en el que se demuestra que el EN es una generalización del equilibrio clásico en el duopolio de Cournot.

La Corporación RAND (*Research ANd Development*) creada en Estados Unidos en 1948 también contribuye de modo relevante al desarrollo de la TJ. Dentro de su ámbito, en 1950 los matemáticos Dresher y Flood desarrollan el modelo teórico del juego conocido como dilema del prisionero, que sería formalizado y definido por Tucker, tal y como lo entendemos en la actualidad, en ese mismo año. Aunque la publicación de la formalización de Tucker no se produce hasta unos años más tarde (Tucker, 1980), tanto Flood (Flood, 1958) como Dresher (Dresher, 1961) realizaron publicaciones previas donde se definía el modelo.

También en el seno de la Corporación RAND, se introduce el concepto de *core* o núcleo utilizado en TJ por los matemáticos Shapley (1952) y Gillies (1953). Corresponde a Gilles (1959) la definición de *core* tal y como hoy se conoce, como un subconjunto de posibles soluciones en juegos cooperativos que deben cumplir una serie de restricciones. La relación entre el concepto de *core* y el de curva de contrato definido por Edgeworth fue establecido por Shubik (1959). Por su parte, Shapley (1953) establece lo que se denomina el valor de Shapley en los juegos cooperativos, que es un método de distribución de los beneficios entre los jugadores en función de la contribución o importancia que tiene cada jugador en el juego.

Otra aportación destacada en esta época es la del matemático francés Debreu (1952), al introducir el primer modelo de equilibrio competitivo, que precede al artículo que publica dos años más tarde en compañía del economista americano Arrow (Arrow y Debreu, 1954), donde se establece el modelo de Arrow-Debreu. Según este modelo, si se cumplen una serie de supuestos económicos, debe existir un conjunto de precios tal que las ofertas agregadas sean iguales a las demandas agregadas para cada bien en la economía.

Las décadas de los años 50 y 60 fue un período de desarrollo de aplicaciones de la TJ a los problemas del mundo real. En el ámbito de las ciencias políticas podemos encontrar

ejemplos como la utilización, por parte de Shapley y Shubik (1954), del valor de Shapley para determinar el poder de los miembros del Consejo de Seguridad de la ONU. Otro ejemplo de aplicación en Política es el análisis de las distribuciones de poder que podían tener lugar en un congreso conformado por dos partidos políticos que realizan el matemático Luce y el psicoanalista y politólogo Rogow, ambos estadounidenses (Luce y Rogow, 1956). Por su parte, Riker (1959) estudia el tamaño óptimo de las coaliciones y desarrolla un índice para determinar el poder de un político. También surgen aplicaciones de la TJ al comportamiento humano y a la teoría de la decisión, donde destaca la colaboración de Luce con el estadístico estadounidense Raiffa (Luce y Raiffa, 1957).

Por otro lado, continuaron los avances en la aplicación de la TJ a las Ciencias Económicas. El matemático Aumann (1959) introduce el concepto de equilibrio fuerte y enuncia el teorema de la tradición oral para este tipo de equilibrios. Posteriormente, el propio Aumann conjuntamente con Shapley extiende este resultado a los juegos repetidos de información incompleta y a los equilibrios perfectos de Nash de dichos juegos (Aumann y Shapley, 1994). Por su parte, el economista y matemático Rubinstein (1979, 1994) llega a estos mismos resultados pero de manera independiente.

Dentro de la evolución histórica de la TJ, es importante destacar la obra *The strategy of conflict* del economista estadounidense Schelling (1960), que se considera una obra de referencia en el ámbito de las Ciencias Sociales. En esta obra se subraya el hecho de que casi todos los problemas de decisión entre múltiples personas contienen una mezcla de intereses comunes y en conflicto, y que la interacción entre ambos podía ser analizada de forma efectiva por medio de la TJ no cooperativa. Aplica dicho análisis a la primera carrera armamentística nuclear mundial y logra contribuir al entendimiento de sus implicaciones.

Además de su contribución en el ámbito de las Ciencias Sociales, Políticas o Económicas, surge la primera aplicación de la TJ en Biología evolutiva con el trabajo del biólogo americano Lewontin (1961), donde plantea que las poblaciones juegan contra la naturaleza, es decir, contra las condiciones medioambientales locales, con la supervivencia de la especie como pago. Sin embargo, es la publicación de *The Logic of Animal Conflict* por parte de Maynard Smith y Price (1973) donde se introduce el término *estructura evolutivamente estable*, fundamento de la TJ evolutiva. Unos años más tarde, el propio Maynard Smith publica *Evolution and the Theory of Games* (Smith, 1982) donde se estudian varios aspectos de la Biología evolutiva basándose en la TJ. Suya es la interpretación del juego clásico halcón-paloma, donde dos individuos compiten por un mismo recurso con un comportamiento agresivo o cooperativo.

También es importante la aplicación de la TJ a la dinámica de las negociaciones de control armamentístico a lo largo de la Guerra Fría, destacando los trabajos de Aumann, Maschler y Stern para la Agencia de Desarme y Control de Armas de los Estados Unidos entre los años 1965 y 1968. Algunos de estos artículos se convirtieron en la base y fundamento de lo que hoy se denominan juegos repetidos o iterados (Aumann *et al.*, 1995).

Sin embargo, el auténtico reconocimiento a nivel mundial y su relevancia en las últimas décadas surge a partir de la concesión del Premio Nobel de Economía a diversos investigadores por sus trabajos relacionados con la TJ. Este premio no se encontraba entre los inicialmente propuestos por Alfred Nobel y es el Banco Central de Suecia quien decide financiarlo a

partir de 1968 con el nombre oficial de *Premio Banco de Suecia en Ciencias Económicas en Memoria de Alfred Nobel*, conocido popularmente como Premio Nobel de Economía.

En 1994 se concede por primera vez el Premio Nobel de Economía a trabajos relacionados con esta disciplina, en concreto a los investigadores Nash, Harsányi y Selten debido a sus contribuciones en el análisis de equilibrios de la TJ no cooperativa. La aportación del ya citado Nash es especialmente relevante ya que suya es la definición del equilibrio que lleva su nombre para juegos no cooperativos. Por su parte, Selten (1965a, 1965b) es reconocido por aplicar la idea de Nash a juegos dinámicos, eliminando de las estrategias aceptables las amenazas no creíbles, que son aquellas que quien las formuló no va a llevar a la práctica cuando llegue el momento. Harsányi (1967, 1968a, 1968b) analiza los juegos de información incompleta y extiende la idea de equilibrio a este tipo de juegos.

Unos años más tarde, en 2005, los ya citados Schelling y Aumann son galardonados con el Nobel de Economía por sus trabajos en la TJ, en concreto por la comprensión de los fenómenos del conflicto y la cooperación a través del análisis de la teoría del juego. Sus trabajos constituyen un avance en lo que se refiere a explicar la naturaleza de la competencia entre grupos empresariales, que valoran sus opciones frente a las de su rival.

Por su parte, en 2007 el Premio Nobel de Economía es concedido a los estadounidenses Hurwicz (1972, 1973), Maskin (1999, 2002) y Myerson (1979, 1981), por establecer los fundamentos de la teoría de diseño de mecanismos. Esta teoría económica estudia el diseño de procedimientos de decisión social en situaciones en que los agentes económicos tienen información privada y la utilizan de forma estratégica.

En 2009, el Nobel de Economía recae en Williamson (1975, 1985) y Ostrom (1990, 1999), siendo esta última la primera mujer en conseguirlo. Ostrom, basándose en la TJ, explica el éxito de las estrategias de cooperación en la gestión de los bienes comunes, sin necesidad de privatizarlos o de la regulación del estado. En el caso de Williamson, es reconocido por sus trabajos relativos al papel de las empresas como estructuras de gobierno alternativas y sus límites, así como por su enfoque sobre los costes de transacción.

En 2012 la TJ es premiada nuevamente con el Nobel por los trabajos del ya citado Shapley (1962) y de Roth (1992) en la teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercado, con aplicaciones que abarcan distintas áreas como la educación y la sanidad. En este caso, la Academia reconoce las aportaciones de los dos científicos de manera independiente, Shapley por su investigación teórica y Roth por sus investigaciones empíricas, que utilizadas de manera conjunta contribuyen a la optimización de las asignaciones entre oferta y demanda.

Por último, en 2020, ya iniciados los estudios de doctorado recogidos en la presente tesis, el Nobel de Economía recae en Milgrom (2004, 1982) y Wilson (1979, 1985), por sus aportaciones en el campo de la teoría de subastas, que es una rama de la TJ. En concreto, sus investigaciones han contribuido a explicar el funcionamiento de las subastas y el comportamiento de los postores, así como han permitido crear nuevas formas de subastas. Un ejemplo de aplicación de sus trabajos es la asignación de frecuencias de telefonía móvil.

# Capítulo 3

## El juego de Hotelling

En este capítulo se describen los diferentes modelos del juego de Hotelling que se analizan a lo largo de esta tesis. Antes de ello, se definen algunos conceptos que se utilizarán recurrentemente a lo largo del texto, como son el EN y el OP.

### 3.1. Conceptos previos de Teoría de Juegos

En el estudio del comportamiento de un juego hay dos conceptos que se suelen analizar y que representan situaciones concretas del mismo: el EN y el OP. En ambos casos, se trata de una combinación de estrategias que da lugar a una posición en el juego con un resultado significativo desde el punto de vista del pago o beneficio que recibe cada jugador.

#### 3.1.1. Representación de un juego en forma normal

Antes de explicar estos conceptos, conviene conocer cómo se representa un juego en forma normal, ya que ello nos permitirá poder dar una definición formal del EN y del OP. Para definir un juego, necesitamos los siguientes elementos:

- Un conjunto de jugadores finito,  $N = 1, 2, \dots, n$ .
- Un conjunto de estrategias para cada jugador que, una vez conocidas, determinan el resultado final. Ese conjunto de estrategias se representa como  $S_i, i \in N$  y se define el espacio de estrategias como  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ .
- Una función que asigna a cada jugador el beneficio o pago que le corresponde como resultado de las estrategias de todos los jugadores. Esta función se denota como  $u_i : S \rightarrow R, i \in N$ .

Un juego en forma normal se representa como la terna:  $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ . Un elemento del espacio de estrategias  $S$  es un perfil de estrategias y se representa como  $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ . Dado un perfil de estrategias  $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , podemos definir  $\bar{s}_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  como el conjunto de estrategias  $s_j, j \in N \setminus \{i\}$ .

### 3.1.2. El equilibrio de Nash y el óptimo de Pareto

El EN es la situación del juego en la cual los jugadores compiten, de tal modo que la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a las estrategias del resto (Nash, 1951). Es decir, se trata de una posición estable en que ninguno de los actores que participan en el juego tiene incentivo alguno para variar su estrategia de modo unilateral ya que, de hacerlo, su pago o beneficio disminuiría. Para un determinado juego, puede existir o no EN y, en caso de haberlo, puede no ser único.

Dado un juego en forma normal,  $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ , un determinado perfil de estrategias  $\bar{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$  es un EN del juego  $G$  si y sólo si se cumple que:

$$\forall i \in N, u_i(s_i^*, \bar{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \bar{s}_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i. \quad (3.1)$$

El OP viene dado por una combinación de estrategias donde los jugadores se ponen de acuerdo para lograr el mejor resultado posible para todos ellos. Es decir, la eficiencia en el sentido de Pareto es la situación del juego en que ningún jugador puede modificar su estrategia para incrementar su beneficio sin que ello haga que dicho pago sea menor para alguno de los demás jugadores (Pareto, 1919). Consideraremos en este caso que existe una situación de *colusión*<sup>[3.1]</sup> entre las firmas que compiten para, de este modo, conseguir que el beneficio que obtienen sea óptimo. El término *colusión* se define como una situación del mercado donde las empresas se ponen de acuerdo para maximizar sus beneficios en lugar de competir entre ellas, con el consiguiente perjuicio para el consumidor. En este sentido, los organismos reguladores de la competencia suelen perseguir y castigar prácticas como la fijación de precios o el reparto del mercado. Además, una compañía que entra a formar parte de un acuerdo de colusión podría romperlo unilateralmente y bajar los precios para capturar una parte mayor del mercado así como informar del pacto de *colusión* a las autoridades.

Desde un punto de vista formal, dado un juego en forma normal,  $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ , un determinado perfil de estrategias  $\bar{s}^\bullet = (s_1^\bullet, s_2^\bullet, \dots, s_n^\bullet)$  es OP del juego  $G$  si y solo si se cumple que:

$$\forall i \in N / u_i(s_i, \bar{s}_{-i}^\bullet) > u_i(s_i^\bullet, \bar{s}_{-i}^\bullet) \Rightarrow \exists j \in N / u_j(s_j, \bar{s}_{-j}^\bullet) < u_j(s_j^\bullet, \bar{s}_{-j}^\bullet), \quad \forall s_i \in S_i. \quad (3.2)$$

En esta tesis doctoral se consideran sólo dos jugadores, prestando particular atención a la obtención del EN y del OP simétrico, calculados como se describe a continuación.

- El EN se calcula del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_1(s_1, s_2)}{\partial s_1} = 0 \\ \frac{\partial u_2(s_1, s_2)}{\partial s_2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (s_1^*, s_2^*). \quad (3.3)$$

- En el caso de juegos simétricos, es decir, con  $s_1 = s_2 = s$ , el OP se puede obtener como sigue:

$$\frac{\partial u(s)}{\partial s} = 0 \Rightarrow s^\bullet. \quad (3.4)$$

En general, una combinación de estrategias en EN puede no ser eficiente en el sentido de Pareto. En este caso, partiendo de la situación de EN, podríamos encontrar otra combinación de estrategias en que se incrementa el beneficio de, al menos, uno de los jugadores a costa de la pérdida de equilibrio en el juego. Por ello, esta dualidad Nash-Pareto es uno de los principales objetivos que se persigue en el estudio del comportamiento de un juego. No obstante, como se ha mencionado anteriormente conviene recordar que este comportamiento del juego es óptimo desde el punto de vista de las firmas presentes en el mercado (los jugadores), pero no lo es tanto desde la perspectiva de los consumidores.

## 3.2. El juego de Hotelling original y sus variantes

### 3.2.1. El juego de Hotelling original

En el juego o modelo de Hotelling (1929), representado en la fig. 3.1, dos jugadores o empresas (1 y 2) se sitúan a lo largo de un segmento de longitud  $L$  y se localizan en las posiciones  $x_1 = a$  y  $x_2 = L - b$ , respectivamente, siendo  $a$  y  $b$  las distancias a los extremos de dicha línea. Ambos jugadores venden un producto homogéneo pero a precios diferentes,  $p_1$  y  $p_2$ .

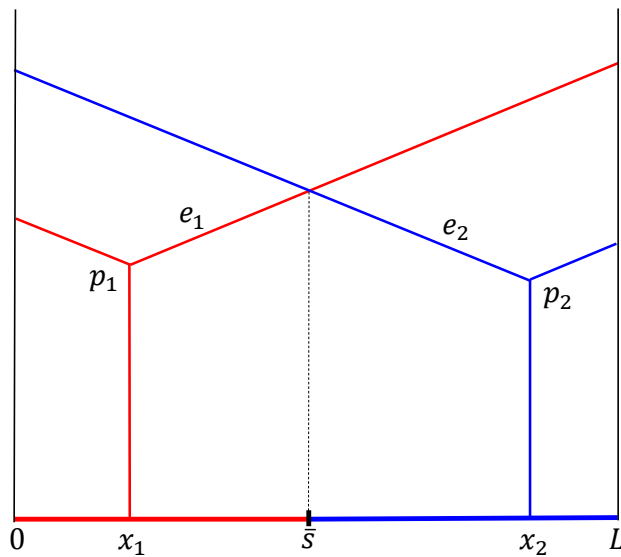


Figura 3.1: Modelo del juego de Hotelling (Hotelling, 1929).

En el modelo, los consumidores se distribuyen uniformemente a lo largo del segmento de longitud  $L$  y se asume que todos ellos compran una unidad del producto. Existe un coste por desplazamiento de los compradores a las localizaciones donde se encuentran los jugadores. Si se asume que este coste es lineal con la distancia, el coste asociado a la distancia  $x$  es  $tx$ , donde  $t$  es el coste de desplazamiento unitario. De acuerdo con ello, el coste total de un consumidor genérico situado en  $s$  viene dado por  $e_1(s) = p_1 + t|s - x_1|$ ,  $e_2(s) = p_2 + t|s - x_2|$ , dependiendo de si se compra el producto al jugador-1 ó al jugador-2, respectivamente. El consumidor siempre comprará al jugador que le suponga un menor coste total.

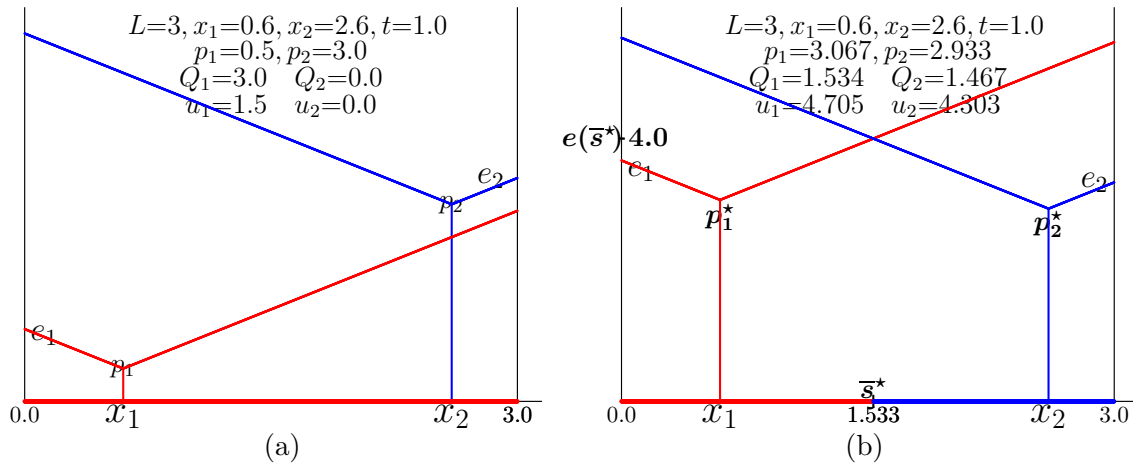
Al consumidor que le supone el mismo coste total comprar el producto al jugador-1 que al jugador-2 se le denomina consumidor indiferente. Para ello, debe cumplirse que  $e_1(s) = e_2(s)$  y, por tanto, la localización del consumidor indiferente  $\bar{s}$  vendrá dada por la ec. (3.5).

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{p_2 - p_1}{t} \right). \quad (3.5)$$

En el caso particular de que los precios sean iguales,  $p_1 = p_2$ , se cumple que  $\bar{s} = (x_1 + x_2)/2$ , independientemente del valor de  $t$ .

En la fig. 3.2 se representan dos ejemplos del juego de Hotelling, donde  $L=3.0$ ,  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ . Las expresiones generales de los beneficios en el juego de Hotelling en las diferentes casuísticas posibles vienen dadas por las ecs. (3.6). Si consideramos el caso en que un jugador captura todo el mercado a través de un precio bajo, como ocurre en la fig. 3.2(a) con el jugador-1, los beneficios son  $u_1 = Lp_1$ ,  $u_2 = 0$  (si es el jugador-2 el que acapara el mercado, se invertirá la situación y  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = Lp_2$ ). Si  $e_1$  y  $e_2$  se cortan, como en la fig. 3.2(b), el mercado se reparte y los beneficios de cada uno de los jugadores vienen dados por  $u_1 = \bar{s}p_1$ ,  $u_2 = p_2(L - \bar{s})$ .

$$u_1 = \begin{cases} Lp_1 & \text{si } p_1 < p_2 - td_x \\ \bar{s}p_1 & \text{si } |p_1 - p_2| \leq td_x \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 + td_x \end{cases}, \quad u_2 = \begin{cases} Lp_2 & \text{si } p_2 < p_1 - td_x \\ (L - \bar{s})p_2 & \text{si } |p_1 - p_2| \leq td_x \\ 0 & \text{si } p_2 > p_1 + td_x \end{cases}, \quad d_x = x_2 - x_1. \quad (3.6)$$



**Figura 3.2:** El juego de Hotelling con  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $p_1=0.5$ ,  $p_2=3.0$ . (b)  $p_1=3.067$ ,  $p_2=2.933$ .

El EN se alcanza donde se cortan las funciones de reacción de los dos jugadores, siendo éstas las funciones que resultan de  $\frac{\partial u_1}{\partial p_1}=0$  y  $\frac{\partial u_2}{\partial p_2}=0$ . Los precios en EN y sus correspondientes beneficios vienen dados por las siguientes expresiones:

$$(p_1^*, p_2^*) = (L + k, L - k)t, \quad (u_1^*, u_2^*) = \frac{1}{2} \left( (L + k)^2, (L - k)^2 \right) t, \quad k = \frac{a - b}{3}. \quad (3.7)$$

De las ecs. (3.7) se deduce que

$$\bar{s}^* = \frac{1}{2}(L + k), \quad e(\bar{s}^*) = p_1^* + (\bar{s}^* - a)t = \left( L + \frac{L - a - b}{2} \right) t. \quad (3.8)$$

$$p_2^* - p_1^* = -2kt, \quad p_1^* + p_2^* = 2Lt, \quad \frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{3L + a - b}{3L - (a - b)}. \quad (3.9)$$

En el caso particular de  $a = b$ , se cumple que  $p_1^* = p_2^* = tL$ ,  $\bar{s}^* = L/2$ ,  $u_1^* = u_2^* = tL^2/2$ . En la fig. 3.2(b), tenemos que  $p_1 = p_1^* = 3.0\hat{6}$ ,  $p_2 = p_2^* = 2.9\hat{3}$ , con lo cual  $\bar{s}^* = 1.5\hat{3}$ ,  $e(\bar{s}^*) = 3.0\hat{6} + (1.5\hat{3} - 0.6) = 4.0$ . Se observa que  $\bar{s}^*$  está muy próximo al punto medio de la línea de longitud  $L$ ,  $L/2 = 1.5$ , ya que los dos precios del EN también lo están, lo cual es consecuencia de que las distancias de los jugadores a los extremos de la línea  $a$  y  $b$  son también similares.

Se observa que se cumple que  $\frac{\partial u_1^*}{\partial a} > 0$ , y  $\frac{\partial u_2^*}{\partial b} > 0$ , lo cual significaría que la tendencia del jugador-1 sería a aumentar el valor de  $a$ , mientras que el jugador-2 haría lo mismo con el de  $b$ , de tal modo que ambos jugadores tenderían a coincidir en su localización, un hecho que se denomina *principio de mínima diferenciación* (Hotelling, 1929). Sin embargo, posteriormente se comprobó que las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del EN en el juego de Hotelling vienen dados por las ecs. (3.10) (d'Aspremont *et al.*, 1979). Dichas condiciones implican que si los dos jugadores están muy próximos, no existe EN, con lo cual se demuestra que el *principio de mínima diferenciación* no es válido en ese caso.

$$1) (L + k)^2 \geq 4L(a + 2b)/3, \quad 2) (L - k)^2 \geq 4L(b + 2a)/3, \quad k = (a - b)/3. \quad (3.10)$$

Si  $a = b$ , las dos restricciones de las ecs. (3.10) se convierten en una única:  $a = b \leq L/4$ .

### 3.2.2. El juego de Hotelling con límite de coste

En el modelo clásico de Hotelling, cada consumidor compra una unidad de producto al jugador que le genere un menor coste total, sin importar lo elevado que éste sea. Es decir, no existe ninguna barrera en relación a los precios y los jugadores podrían ponerse de acuerdo para elevarlos hasta donde consideren, en perjuicio del consumidor (*colusión*). Entonces, suponiendo que ningún jugador capture el mercado completo  $[0, L]$ , se cumple que los beneficios de cada jugador son  $u_1 = p_1Q_1$ ,  $u_2 = p_2Q_2$ , donde sus demandas respectivas son  $Q_1 = \bar{s}$ ,  $Q_2 = L - \bar{s}$ .

Lerner y Singer (1937), añadieron al modelo un *límite de coste*, que es el coste total que un consumidor está dispuesto a asumir. Este umbral de coste,  $\alpha$ , se comporta como un límite superior, por encima del cual la demanda cae a cero. Esta nueva variante se denomina juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha$  ( $\alpha$ -HOT).

Si consideramos  $x_j^i$  y  $x_j^s$ , los límites superior e inferior del mercado del jugador  $j$  siendo  $j = 1, 2$ , entonces las demandas vendrán dadas por  $Q_1 = (x_1^s - x_1^i)$  y  $Q_2 = (x_2^s - x_2^i)$ . Dichos límites del mercado para ambos jugadores se calculan de acuerdo con las ecs. (3.11).

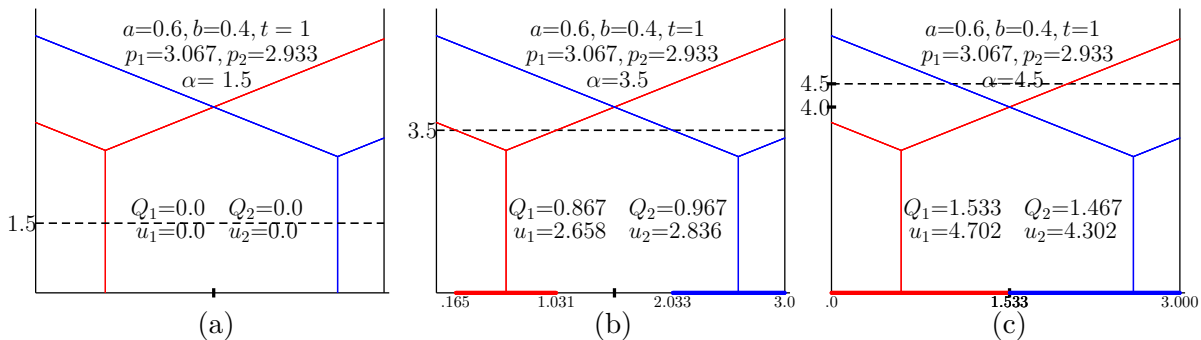
$$x_1^i = \max(l_1^i, 0), \quad x_1^s = \min(l_1^s, \bar{s}), \quad (3.11a)$$

$$x_2^i = \max(l_2^i, \bar{s}), \quad x_2^s = \min(l_2^s, L). \quad (3.11b)$$

Los límites del mercado se obtienen a partir de las localizaciones  $l_i$ , donde el umbral de coste  $\alpha$  se iguala al coste total  $e_i(s)$ , de modo que:  $\alpha - (p_i + t|l_i - x_i|) = 0$ , resultando que  $l_i^i = x_i - r_i$ ,  $l_i^s = x_i + r_i$ ,  $r_i = (\alpha - p_i)/t$ ,  $i=1, 2$ . Por tanto, los radios del mercado ( $r_i$ ) crecen con  $\alpha$  y decrecen a medida que aumenta el precio y el coste de desplazamiento unitario. Si los radios son lo suficientemente pequeños, pueden inducir monopolios disjuntos (Hinlopen y Van Marrewijk, 1999), como ocurre en el ejemplo de la fig. 3.3(b).

La fig. 3.3 representa varias casuísticas del juego de  $\alpha$ -HOT en el escenario de la fig. 3.2(b), es decir cuando el mercado no es monopolístico:

- En la fig. 3.3(a),  $\alpha=1.5$  es inferior al  $\min(p_1, p_2)$ , luego no hay demanda para ninguno de los jugadores.
- En la fig. 3.3(b),  $\alpha=3.5$ , lo cual implica que  $r_1 = 3.5 - 3.066 = 0.434$  y la demanda correspondiente al jugador-1 abarca el intervalo  $[0.166, 1.034]$ . En cambio,  $r_2 = 3.5 - 2.933 = 0.567$ , por lo que la demanda para el jugador-2 ocupa el intervalo  $[2.033, 3.0]$ . Es importante notar que no existe demanda en los intervalos  $(0, 0.166)$  y  $(1.034, 2.033)$ , dando lugar a dos monopolios disjuntos. Como resultado,  $u_1 = 2 \cdot 0.434 \cdot 3.066 = 2.569$  y  $u_2 = 2.933 \cdot (3.0 - (2.6 - 0.567)) = 2.839$ .
- En la fig. 3.3(c),  $\alpha = 4.5 > e(\bar{s}) = 4.0$ , por lo que la demanda y los beneficios de los jugadores coinciden con los del juego original de Hotelling. Sin embargo, dado que existe un límite de coste, los jugadores no podrían elevar sus precios indefinidamente, pues ello haría disminuir sus demandas y sus beneficios asociados.

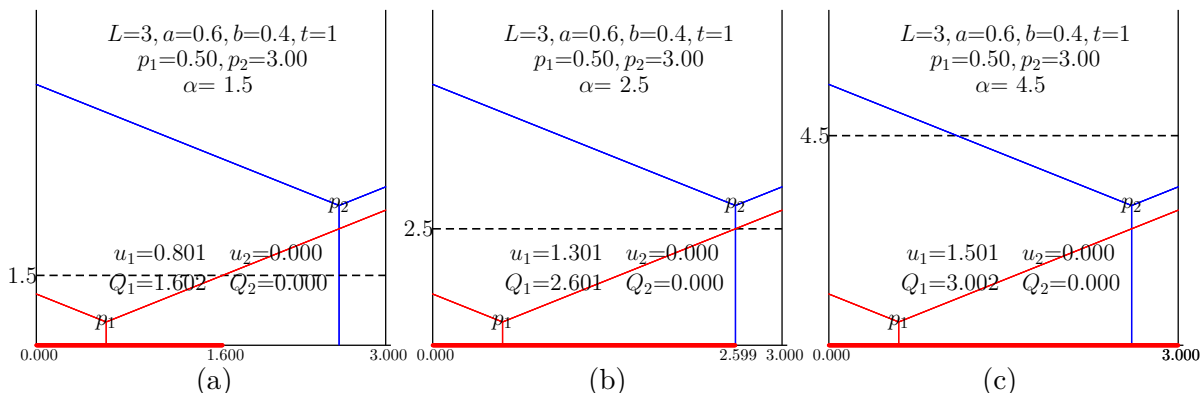


**Figura 3.3:** El juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha$  para  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $p_1=3.066$ ,  $p_2=2.933$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=1.5$ . (b)  $\alpha=3.5$ . (c)  $\alpha=4.5$ .

En la fig. 3.4 se considera que  $p_1=0.5$ ,  $p_2=3.0$ , cumpliéndose que  $0.5 = p_1 < p_2 - (x_2 - x_1) = 1$ , y, por tanto, el jugador-1 captura toda la potencial demanda. Se han representado tres escenarios:

- En la fig. 3.4(a),  $\alpha=1.5$  induce la demanda  $s=1.600$ .
- En la fig. 3.4(b), un valor más alto del límite de coste  $\alpha=2.5$  implica un valor mayor de la demanda  $s=2.599$ . Sin embargo, el jugador-1 no es capaz de capturar la totalidad del mercado.
- En la fig. 3.4(c),  $\alpha=4.5$  sobrepasa el máximo valor del coste total para el jugador-1, es decir,  $e_1(3.0) = 0.5 + (3 - 0.6) = 2.9 < \alpha = 4.5$ , con lo cual el jugador-1 captura la

totalidad de la demanda posible, en este caso  $L=3.0$ .



**Figura 3.4:** El juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha$  para  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ ,  $p_1=0.5$ ,  $p_2=3.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=1.5$ . (b)  $\alpha=2.5$ . (c)  $\alpha=4.5$ .

### 3.2.3. El juego de Hotelling-Smithies

En el juego de HS, además de existir un límite de coste, la demanda del consumidor ( $q$ ) es una función decreciente del coste total ( $e$ ). Esta variante del juego se denomina juego de HS con límite de coste  $\alpha$  ( $\alpha$ -HS) y la demanda típicamente es de la forma  $q_i(s) = \max(\alpha - \beta e_i(s), 0)$ ,  $i = 1, 2$  (Smithies, 1941b; Puu, 2002; Puu y Sushko, 2002). Consideraremos aquí el caso  $\beta=1$ , de tal modo que la demanda del jugador  $i$  para un consumidor situado en el punto genérico  $s$  será la siguiente:

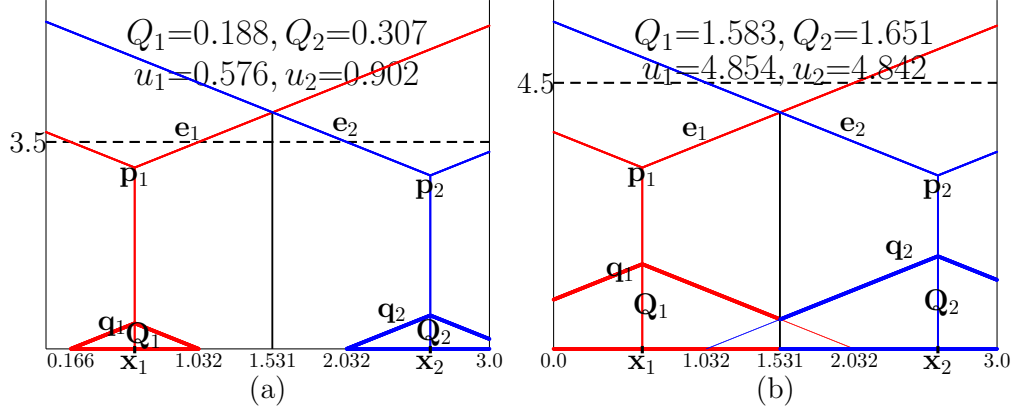
$$q_i(s) = \max(\alpha - (p_i + t|s - x_i|), 0), \quad i = 1, 2. \quad (3.12)$$

Como consecuencia de ello, la demanda total del jugador- $i$  ( $Q_i$ ) viene dada por la ec. (3.13), donde los límites de la integral, i.e., el intervalo de la demanda, se calculan según las ecs. (3.11)<sup>[3.2]</sup>. En definitiva, los beneficios de los jugadores vendrán dados por  $u_i = Q_i p_i$ ,  $i = 1, 2$ .

$$Q_i = \int_{x_i^i}^{x_i^s} (\alpha - (p_i + t|s - x_i|)) ds, \quad i = 1, 2. \quad (3.13)$$

La fig. 3.5 muestra dos ejemplos del juego de  $\alpha$ -HS para  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $t=1$  y los precios en EN del juego original, es decir,  $p_1 = 3.066$ ,  $p_2 = 2.933$ . En la fig. 3.5(a), con  $\alpha = 3.5$ , la demanda viene dada por  $Q_1=0.188$ <sup>[3.3]</sup>, y  $Q_2=0.307$ <sup>[3.4]</sup>, resultando,  $u_1 = 0.188 \cdot 3.066 = 0.576 < u_2 = 0.307 \cdot 2.933 = 0.902$ . Por tanto, el juego 3.5-HS con los precios en EN del juego convencional da lugar a beneficios mucho más bajos que en dicho juego convencional, donde  $u_1=4.702 > u_2=4.302$ . En la fig. 3.5(b), con  $\alpha = 4.5$ , la demanda viene dada por:  $Q_1=1.583$ <sup>[3.5]</sup>,  $Q_2=1.650$ <sup>[3.6]</sup> resultando,  $u_1 = 1.583 \cdot 3.066 = 4.854 > u_2 = 1.650 \cdot 2.933 = 4.841$ . De acuerdo con ello, se concluye que el juego 4.5-HS da lugar a beneficios mayores que los que se consiguen tanto en el juego 3.5-HS como en el modelo convencional.

En el juego de  $\alpha$ -HS con un valor del límite de coste elevado, como en el ejemplo de la fig. 3.5(b), tenemos un duopolio típico donde la demanda de cada jugador viene dada por la suma de las áreas de los dos trapezios siguientes: <sup>[3.7]</sup>



**Figura 3.5:** El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  para  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $p_1=3.066$ ,  $p_2=2.933$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=3.5$ . (b)  $\alpha=4.5$ .

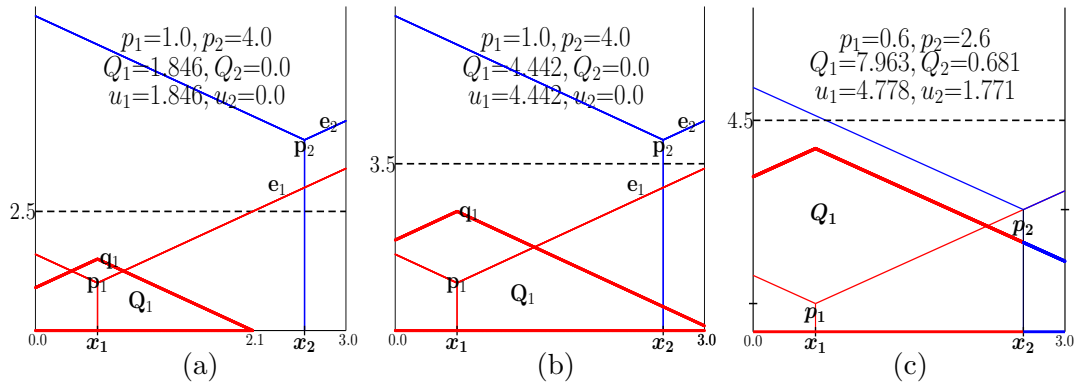
$$Q_1 = \frac{q_1(0)+q_1(x_1)}{2}x_1 + \frac{q_2(x_1)+q_2(\bar{s})}{2}(\bar{s}-x_1) = (\alpha - p_1)\bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2), \quad (3.14a)$$

$$Q_2 = \frac{q_1(\bar{s})+q_1(x_2)}{2}(x_2-\bar{s}) + \frac{q_2(x_2)+q_2(L)}{2}(L-x_2) = (\alpha - p_2)(L - \bar{s}) + t(b(L - \bar{s}) - (L - \bar{s})^2/2 - b^2). \quad (3.14b)$$

Si ambos jugadores se ponen de acuerdo en sus estrategias ( $a = b$ ,  $p_1 = p_2 = p$ ), se cumple que  $\bar{s} = L/2$ , de tal modo que las ecs. (3.14) se simplifican en la ec. (3.15).

$$Q_{1,2} = Q = (\alpha - p)\frac{L}{2} - c, \quad c = \frac{1}{2} \left[ a^2 + \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 \right] t. \quad (3.15)$$

En la fig. 3.6, se considera  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$  (como en la fig. 3.5). En la fig. 3.6(a) y la fig. 3.6(b), los precios tienen los valores  $p_1=1.0$ ,  $p_2=4.0$ , de tal modo que se cumple que  $e_1 < e_2$  en el intervalo  $[0, L]$ , es decir, el coste total asociado al jugador-1 está por debajo del correspondiente al jugador-2, que se queda sin demanda. En la fig. 3.6(b), donde  $\alpha=3.5$  es mayor que el valor máximo de  $e_1$ ,  $e_1(3.0) = 1.0 + 2.4 = 3.4$ , el jugador-1 se queda con la totalidad del mercado  $[0, L]$ . Sin embargo, en la fig. 3.6(a), donde  $\alpha=2.5$ , el intervalo de mercado que acapara el jugador-1 sólo llega hasta  $s=2.099$  ( $s = 0.6 + r_1$ ,  $r_1 = 2.5 - 1.0 = 1.5$ ), y para los consumidores que se localizan por encima de este valor de  $s$  no hay demanda del producto. En la fig. 3.6(c) se cumple que  $x_2 - x_1 = p_2 - p_1 = 2.0$  y, de acuerdo con ello, a partir de la ec. (3.5) y con  $t=1$ , se cumple que  $\bar{s} = x_2 = 2.6$ , lo que implica que todos los consumidores donde  $s \geq \bar{s} = 2.6$  son indiferentes en lo que se refiere a qué jugador comprar. En este escenario, se adopta el criterio de que comprarán al jugador-2 debido a que es el más próximo de los dos.



**Figura 3.6:** El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  para  $x_1=0.6, x_2=2.6$ .  $L=3.0, t=1$ .  
 (a)  $p_1=1.0, p_2=4.0, \alpha=2.5$ . (b)  $p_1=1.0, p_2=4.0, \alpha=3.5$ . (c)  $p_1=0.6, p_2=2.6, \alpha=4.5$ .



# Notas

[3.1] La RAE (Real Academia Española) define *colusión* como el pacto entre dos personas o grupos en contra de un tercero. Según Wikipedia, *colusión* es el acuerdo entre dos o más partes para limitar la competencia.

[3.2] En el modelo original de Hotelling  $Q_1 = \int_0^{\bar{s}} ds = \bar{s}$ ,  $Q_2 = \int_{\bar{s}}^L ds = L - \bar{s}$ , mientras que en el modelo de Hotelling con límite de coste  $Q_1 = \int_{x_1^i}^{x_1^s} ds = x_1^s - x_1^i$ ,  $Q_2 = \int_{x_2^i}^{x_2^s} ds = x_2^s - x_2^i$ .

[3.3] La demanda del jugador-1 en  $x_1=0.6$  es  $q_1(0.6) = 3.5 - 3.066 = 0.434$ , de tal modo que la demanda total del jugador-1 vendrá dada por el resultado de sumar el área de dos triángulos rectángulos idénticos, o lo que es lo mismo  $Q_1 = 2 \cdot 0.434 \cdot 0.434/2 = 0.188 < 1.533$ . Es decir, en este caso la demanda es menor en el juego de HS que en el juego original de Hotelling.

[3.4] Las demanda del jugador-2 en  $x_2=2.6$  y  $L=3.0$  son  $q_2(2.6) = 3.500 - 2.933 = 0.567$ ,  $q_2(3.0) = 0.567 - 0.40 = 0.167$ , respectivamente. Por tanto, la demanda total del jugador-2 vendrá dada por la suma de las áreas de un triángulo rectángulo y de un trapecio, es decir,  $Q_2 = 0.567^2/2 + [(0.567 + 0.167)/2] \cdot 0.4 = 0.307 < 1.467$ . Es decir, en este caso la demanda es menor en el juego de HS que en el juego original de Hotelling.

[3.5] Las demandas del jugador-1 en  $\bar{s}=1.533$ ,  $x_1=0.6$  y en  $s=0$  vienen dadas por  $q_1(\bar{s}=1.533) = q_2(\bar{s}=1.533) = 4.5 - 3.066 - (1.533 - 0.6) = 0.501$ ,  $q_1(0.6) = 4.5 - 3.066 = 1.434$ ,  $q_1(0.0) = 1.434 - 0.6 = 0.834$ , respectivamente. Por tanto, en este caso la demanda total del jugador-1 será la suma de las áreas de dos trapecios, de acuerdo con la expresión  $Q_1 = [(0.834 + 1.434)/2] \cdot 0.6 + [(1.434 + 0.501)/2] \cdot 2.933 = 1.583 > 1.533$ . Es decir, en este caso la demanda es mayor en el juego de HS que en el juego original de Hotelling.

[3.6] Las demanda del jugador-2 en  $x_2=2.6$  y  $L=3.0$  son  $q_2(2.6) = 4.5 - 2.933 = 1.567$ ,  $q_2(3.0) = 1.567 - 0.4 = 1.167$ , respectivamente. Por tanto, en este caso la demanda total del jugador-2 vendrá dada por la suma de las áreas de dos trapecios, según la expresión  $Q_2 = [(0.501 + 1.567)/2] \cdot 1.067 + [(1.567 + 1.167)/2] \cdot 0.40 = 1.650 > 1.467$ . Es decir, en este caso la demanda es mayor en el juego de HS que en el juego original de Hotelling.

[3.7] La expresión de la demanda del jugador-1 viene dada por

$$Q_1 = \frac{q_1(0)+q_1(x_1)}{2}x_1 + \frac{q_1(x_1)+q_1(\bar{s})}{2}(\bar{s} - x_1) = \frac{1}{2}(q_1(x_1)\bar{s} + q_1(0)x_1 + q_1(\bar{s})(\bar{s} - x_1)),$$

siendo  $q_1(x_1) = \alpha - p_1$ ,  $q_1(0) = \alpha - p_1 - ta$ ,  $q_1(\bar{s}) = \alpha - p_1 - t(\bar{s} - a)$ .

Operando se obtiene que  $Q_1 = (\alpha - p_1)\bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2)$ .

Análogamente, considerando la expresión de la demanda del jugador-2, se deduce que:

$$Q_2 = \frac{q_2(\bar{s})+q_2(x_2)}{2}(x_2 - \bar{s}) + \frac{q_2(x_2)+q_2(L)}{2}(L - x_2) = \frac{1}{2}(q_2(x_2)(L - \bar{s}) + q_2(\bar{s})(x_2 - \bar{s}) + q_2(L)(L - x_2)),$$

siendo  $q_2(x_2) = \alpha - p_2$ ,  $q_2(\bar{s}) = \alpha - p_2 - t(L - b - \bar{s})$ ,  $q_2(L) = \alpha - p_2 - tb$ .

Operando se obtiene que  $Q_2 = (\alpha - p_2)(L - \bar{s}) + t(b(L - \bar{s}) - (L - \bar{s})^2/2 - b^2)$ .



# Capítulo 4

## Herramientas para el estudio del juego de Hotelling

En este capítulo, se describe la técnica de simulación empleada a lo largo del análisis del juego, que nos ayudará a llegar a una comprensión profunda del comportamiento de éste. Del mismo modo, se explican los métodos de cuantización que utilizaremos para optimizar el resultado del juego.

### 4.1. Técnicas de simulación basadas en autómatas celulares

Un autómata celular (AC) es un modelo matemático y computacional para un sistema dinámico que evoluciona en pasos discretos. Es adecuado para modelar sistemas naturales o artificiales que puedan ser descritos como una colección de objetos simples que interactúan localmente unos con otros. Se han utilizado con éxito en campos diversos como la física, la biología, la química, las matemáticas y las ciencias de la computación, entre otros.

El modelo matemático consiste en una retícula formada por un conjunto de celdas que pueden cambiar de estado o no dependiendo de una función de transición local sensible a los estados de las células vecinas, que es la regla de evolución que determina el comportamiento del autómata. De acuerdo con ello, los elementos básicos de un AC son los siguientes:

- Un espacio regular. Ya sea una línea, un plano de 2 dimensiones o un espacio  $n$ -dimensional. Cada división homogénea del espacio se denomina célula.
- Conjunto de estados (también denominado alfabeto). Es finito y cada elemento o célula del espacio toma un valor de este conjunto de estados. Puede ser expresado en valores o colores.
- Configuración inicial. Es la asignación inicial de un estado a cada una de las células del espacio.
- Vecindades. Define el conjunto de células que se consideran adyacentes a una dada, así

como la posición relativa respecto a ella. Cuando el espacio es uniforme, la vecindad de cada célula es isomorfa, es decir, tiene el mismo aspecto.

- **Función de transición local.** Es la regla de evolución que determina el comportamiento del AC. Se calcula a partir del estado de la célula y su vecindad. Define cómo debe cambiar de estado cada célula dependiendo de su estado anterior y de los estados anteriores de su vecindad.

Para terminar de definir el autómata, es necesario especificar el tipo de límite o frontera del espacio, existiendo diversos tipos:

- **Frontera Abierta.** Se considera que todas las células fuera del espacio del autómata toman un valor fijo.
- **Frontera Reflectora.** Las células fuera del espacio del autómata toman los valores que están dentro, como si se tratara de un espejo.
- **Frontera Periódica o Circular.** Las células que están en la frontera interactúan con sus vecinos inmediatos y con las células que están en el extremo opuesto del espacio, como si lo dobláramos en forma de cilindro.
- **Sin Frontera.** La representación del autómata no tiene límites, es infinito. Es decir, cada vez que las células deben interactuar con células fuera de la retícula, esta se hace más grande para dar cabida a estas interacciones.

La historia de los autómatas celulares se puede dividir en tres etapas, marcadas por tres científicos cuyas aportaciones supusieron un punto de inflexión dentro del desarrollo de este campo: von Neumann, Conway y Wolfram.

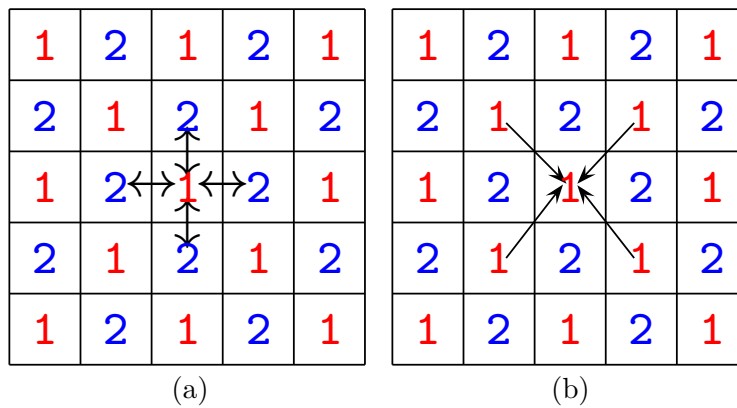
La primera aportación en este campo corresponde a von Neumann en 1948 para el Simposio Hison en el Instituto Tecnológico de California, aunque publicada muchos años después (von Neumann, 2017). En su planteamiento, von Neumann consideró la posibilidad de generación de vida artificial, tratando de que un robot se copiara a sí mismo. Para ello, Ulam le recomendó a von Neumann la utilización de patrones, en una cuadrícula en el plano, que evolucionan según una regla de transformación fija (von Neumann y Burks, 1966). Posteriormente, Conway (1970) presentó el AC más conocido, el Juego de la Vida. Se trata de una rejilla bidimensional constituida por células con dos estados: vivas o muertas. La vecindad de cada célula está formada por sus 8 células vecinas y su estado evoluciona en cada unidad de tiempo en función de una serie de reglas y del estado de sus células vecinas. Por su parte, Wolfram (1986), en la década de los 80, estudió los autómatas celulares unidimensionales y su evolución, estableciendo que el AC exhibe diferentes comportamientos para diferentes condiciones iniciales. Wolfram clasificó el comportamiento cualitativo de un AC en función de su complejidad en una de las siguientes clases:

- **Clase I.** La evolución lleva a una configuración estable y homogénea.
- **Clase II.** La evolución lleva a un conjunto de estructuras simples que son estables o periódicas.
- **Clase III.** La evolución lleva a un patrón pseudo-aleatorio o caótico. Son muy depen-

dientes de las condiciones iniciales.

- Clase IV. La evolución lleva a estructuras aisladas que muestran un comportamiento complejo, es decir, ni completamente caótico, ni completamente ordenado.

En el modelo de simulación numérica basado en autómatas celulares que se adopta en este trabajo, un gran número de jugadores de tipo 1 y de tipo 2 se disponen en una retícula de dos dimensiones de  $N \times N$ . Cada jugador se sitúa en una posición o célula  $(i, j)$ , alternando su lugar en la retícula en la forma de un tablero de ajedrez. De este modo, cada jugador está rodeado de cuatro rivales (1-2, 2-1) y cuatro iguales (1-1, 2-2) como se observa en la fig. 4.1. Los precios y localizaciones iniciales de los jugadores se asignan de modo aleatorio en las posiciones de la retícula, de acuerdo con sendas distribuciones uniformes. En el caso de los precios y de acuerdo con el modelo del juego que se muestra en la fig. 3.1, en el intervalo  $[0, 4L]$ , mientras que en el de las localizaciones de los jugadores,  $x_1$  se distribuye en el intervalo  $[0, L/2]$  y  $x_2$  en el  $[L/2, L]$ . Por tanto, inicialmente  $\bar{p} \simeq L/2$ ,  $\sigma_p \simeq \sqrt{(4L)^2/12} = 3.464$  para ambos jugadores, mientras que  $\bar{x}_1 \simeq L/4$ ,  $\bar{x}_2 \simeq 3L/4$  con  $\sigma_x \simeq \sqrt{(L/2)^2/12} = 0.433$  para ambos jugadores. En las simulaciones de esta tesis doctoral, consideraremos  $N=600$  en los capítulos 5 y 6, reduciéndose a  $N=400$  en los capítulos 7 y 8, con objeto de reducir el tiempo de computación dada la complejidad de los cálculos. Una retícula de menores dimensiones puede generar problemas de convergencia en las simulaciones.



**Figura 4.1:** Disposición de las interacciones en las simulaciones numéricas. (a) Juego. (b) Actualización de posición y precio. El jugador-1 se representa en rojo y el jugador-2 en azul.

El juego se itera al modo de un AC, es decir, con interacciones uniformes, locales y síncronas (Wolfram, 2002). En cada iteración, cada jugador juega con sus cuatro rivales adyacentes, de tal modo que el pago  $u_{i,j}^{(T)}$  de un individuo en la iteración  $T$  es la media de estos cuatro juegos. A continuación, cada jugador localizará, entre sus vecinos iguales y él mismo, aquél con el mayor beneficio para adoptar sus parámetros de precio y localización. El modelo descrito sigue el espíritu de aprendizaje vía interacción local implementado en estudios previos de simulación de juegos continuos y discretos (Alonso-Sanz, 2019b; Alonso-Sanz y Martín-Gutiérrez, 2020).

## 4.2. Teoría de Juegos Cuántica

En nuestros días, se hace uso del término cuántico con mucha frecuencia y de un modo cotidiano, normalmente con un matiz de innovación o avance en algún ámbito de la ciencia. Sin embargo, la teoría cuántica tiene su origen mucho tiempo atrás, a principios del siglo XX, y surge, en contraposición a la mecánica clásica, como una rama de la física que permite explicar los fenómenos de la naturaleza de escala atómica y subatómica (estudia el comportamiento tanto de electrones y fotones, como de átomos y moléculas). En concreto, sus orígenes datan de 1900, cuando Max Planck estableció que la materia sólo puede emitir o absorber energía en pequeñas unidades discretas llamadas cuantos e introdujo una constante universal, denominada constante de Planck (Planck, 1901).

A lo largo de toda su existencia, han sido múltiples sus aplicaciones a campos tan diversos como la química, la óptica, la computación, la criptografía, la medicina, etc. En este contexto, la TJ no ha sido ajena a este desarrollo y expansión de la mecánica cuántica por las múltiples ramas de la ciencia y, en este sentido, existen varios autores que han conseguido resultados positivos a partir de la aplicación de sus principios. Antes de establecer un vínculo entre ambas materias, vamos a introducir algunos de los principios fundamentales que se manejan en el mundo cuántico, tales como la superposición de estados, el entrelazamiento y la teletransportación (Ballentine, 2014; Nielsen y Chuang, 2010).

La superposición cuántica es un principio fundamental en la mecánica cuántica que establece que un sistema físico puede existir en todos sus estados posibles de forma simultánea. Esto significa que, en lugar de tener un estado definido, como en la física clásica, un sistema cuántico puede estar en una combinación de múltiples estados simultáneamente. Este principio implica que el sistema no se encuentra en un estado concreto hasta que se realiza una medición, momento en el cual el sistema colapsa a uno de esos estados que forman la superposición. Es decir que, en general, solo podemos saber las probabilidades de que el sistema esté en cada uno de esos posibles estados cuando midamos, pero no podemos saber con certeza cuál va a ser el resultado de la medida. Del mismo modo, antes y después de la medida, sólo podemos conocer el estado del sistema con una cierta probabilidad.

Por su parte, el entrelazamiento cuántico es un fenómeno en el que dos o más partículas interactúan entre sí de tal manera que el estado de una partícula afecta instantáneamente al estado de la otra, independientemente de la distancia que las separe. Esto significa que sus estados no pueden ser descritos de modo independiente y cuando uno de ellos es medido, el otro, o los otros, también colapsan, incluso si están infinitamente lejos en el espacio en ese instante. Es decir, si medimos el estado de una de las partículas, conocemos el estado de la otra en ese mismo instante de tiempo sin importar la distancia que las separe y podemos considerar que existe una correlación entre los estados de las partículas entrelazadas. Esta propiedad de entrelazamiento entre las partículas cuestiona el principio de localidad en que se basan la mecánica clásica y la relativista, de acuerdo con el cual los objetos son influenciados solo por su entorno más próximo y que ninguna influencia o causa puede propagarse a una velocidad mayor que la de la luz. Por tanto, según la mecánica cuántica, la naturaleza no puede considerarse local.

La teletransportación cuántica es otro de los principios de la teoría cuántica que se deriva

del entrelazamiento de las partículas y es un proceso por el cual el estado de un sistema cuántico se transmite de un lugar a otro del espacio. Para que sea posible la teletransportación tiene que existir necesariamente entrelazamiento entre las partículas implicadas.

En 1999, Meyer fue el primer autor en aplicar la teoría cuántica a la TJ (Meyer, 1999), en concreto a los juegos no cooperativos de suma cero, que son aquéllos en que las ganancias de un jugador se traducen en pérdidas en su oponente o, visto de otro modo, la suma de las ganancias de los jugadores permanece constante. Se sirvió de un juego consistente en darle la vuelta a una moneda varias veces por parte de dos jugadores P y Q (*penny flipover game*). El juego se inicia con la moneda en posición de cara, se introduce en una caja y cada jugador en cada turno decide si darle una vuelta a la moneda o no, sin permitir al otro jugador que lo vea. Primero juega Q, luego P y finalmente Q, descubriéndose la caja a continuación y ganando el jugador Q si la moneda muestra cara y el jugador P, si muestra cruz. Meyer fue capaz de demostrar que si el jugador Q seguía una estrategia cuántica frente a la clásica de P, Q era capaz de ganar siempre el juego. Dicha estrategia cuántica se basa en la aplicación del principio de superposición, según el cual Q puede adoptar una estrategia que es una combinación de cara o cruz y ello le permite ganar el juego.

Por su parte, Eisert *et al.* (1999) introdujeron el concepto de juegos cuánticos con el esquema de cuantización EWL y lo aplicaron a juegos no cooperativos de suma no nula, en concreto al dilema del prisionero. En la definición tradicional del juego clásico, el único EN posible viene dado por la elección de delatar por parte de los dos jugadores, aunque ambos mejorarían su resultado global si cooperaran. Eisert *et al.* demostraron que si ambos jugadores adoptan estrategias cuánticas, a partir del esquema EWL, se puede alcanzar el EN, que además es OP. Estas estrategias cuánticas están basadas en el principio de entrelazamiento y vienen determinadas por un parámetro denominado coeficiente de entrelazamiento, cuyo valor particular cero representa el juego clásico.

A partir de ese momento, surgen opiniones críticas con respecto a los juegos cuánticos por diversas razones (Benjamin y Hayden, 2001; van Enk y Pike, 2002). Algunos autores consideran que, aunque es una extensión de la TJ, no puede considerarse estrictamente mecánica cuántica, mientras que otros afirman que, al existir correlación entre las estrategias, no tiene sentido hablar de juegos no cooperativos. Es cierto que la optimización del resultado en presencia de entrelazamiento se puede interpretar como una consecuencia de la existencia de un cierto grado de acuerdo mutuo entre los jugadores, determinado por la correlación entre sus estrategias. Es decir, el hecho de que las estrategias que adoptan no sean independientes y ambas estén entrelazadas hace que su beneficio sea mayor. Desde este punto de vista, el entrelazamiento puede considerarse como la aplicación de una regulación justa por parte de un organismo independiente, que se comunica a los jugadores para su mutuo beneficio, pero que no debe confundirse con un modo de cooperación. En los juegos cooperativos la comunicación es necesaria, así como el compromiso y el poder de contratación, mientras que en el caso de los no cooperativos no se requiere ninguno de estos factores pero sí se permite la comunicación y es ahí donde reside la diferencia entre ambos tipos de juegos (Aumann, 1974).

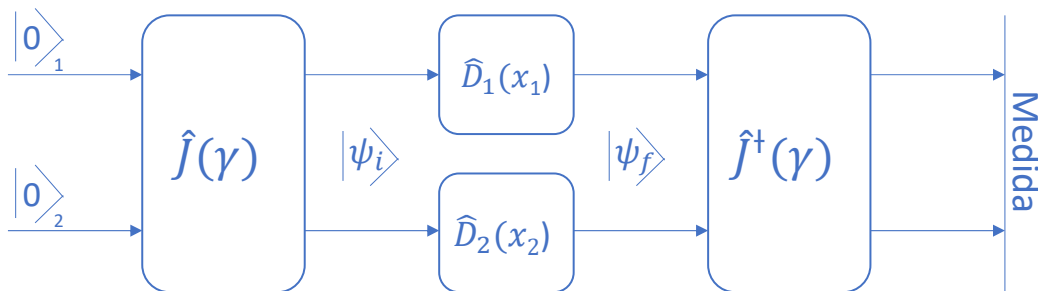
Nos centraremos ahora en explicar el método de cuantización que se va a utilizar principalmente a lo largo de esta tesis doctoral, que es el esquema de LDM (Li *et al.*, 2002),

pudiéndose consultar otras fuentes para conocer más detalles sobre la historia y la evolución de los juegos cuánticos (Khan *et al.*, 2018). A diferencia de los ejemplos anteriores, basados en juegos discretos, en este caso los jugadores tienen acceso a un conjunto continuo de estrategias en el juego clásico. Se toma como punto de partida el duopolio de Cournot, donde dos jugadores deciden las cantidades que cada uno pone en el mercado de un producto homogéneo que se vende a un determinado precio y con un coste idéntico para cada uno de ellos (juego simétrico). En el juego clásico, el beneficio en el EN es inferior al OP mientras que, si se cuantiza siguiendo el esquema de LDM, se observa que el beneficio en el EN en el dominio cuántico va creciendo a medida que aumenta el entrelazamiento. Esto es así hasta el punto de que, con un valor lo suficientemente elevado de entrelazamiento, el beneficio en el EN es exactamente el OP, que es el mejor resultado que pueden obtener los jugadores. Por tanto, como resultado del entrelazamiento y a pesar de comportarse egoístamente, se puede decir que los dos jugadores se ponen de acuerdo virtualmente en el dominio cuántico, lo que hace aumentar sus beneficios según la interpretación de Li *et al.* (2002). Posteriormente, en otro artículo (Du *et al.*, 2005), algunos de estos mismos autores interpretan el entrelazamiento como un *control del gobierno*, que necesita mejorar la eficiencia económica y, para ello, establece las cantidades que deberían producir los dos jugadores que participan en el juego.

El esquema de cuantización de LDM se representa en la fig. 4.2, donde se muestra la estructura del juego en el dominio cuántico. La extensión de un juego clásico en el dominio cuántico generalmente se hace estableciendo un espacio de Hilbert, asignando el resultado de cada estrategia clásica a un cierto estado cuántico. En este modelo de cuantización se parte de dos campos electromagnéticos de un único modo cuyo estado inicial es el vacío,  $|0\rangle_i$  con  $i = 1, 2$ . Sobre ellos, actúa un operador unitario de entrelazamiento  $\hat{J}(\gamma)$ , que viene dado por la expresión

$$\hat{J}(\gamma) = e^{-\gamma(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2)}, \quad (4.1)$$

donde  $a_i^\dagger$  y  $\hat{a}_i$  representan los operadores creación y destrucción, respectivamente, del campo electromagnético del jugador- $i$  con  $i = 1, 2$  y  $\gamma \geq 0$  se denomina *parámetro de compresión* o bien *grado o coeficiente de entrelazamiento*.



**Figura 4.2:** El esquema de cuantización de Li-Du-Massar (Li *et al.*, 2002).

Ello da lugar al estado inicial del sistema

$$|\psi_i\rangle = \hat{J}(\gamma)|0\rangle_1|0\rangle_2. \quad (4.2)$$

A continuación, los dos campos electromagnéticos resultantes son enviados a los jugadores 1 y 2, que ejecutan movimientos estratégicos asociados con los operadores unita-

rios  $\hat{D}_i(x_i)$  con  $i = 1, 2$  y que, tras actuar sobre ellos el operador de desentrelazamiento  $\hat{J}^\dagger(\gamma) = e^{\gamma(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2)}$ , dan lugar al estado final del sistema:

$$|\psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger(\gamma) \left( \hat{D}_1(x_1) \otimes \hat{D}_2(x_2) \right) \hat{J}(\gamma) |0\rangle_1 |0\rangle_2. \quad (4.3)$$

El operador unitario  $\hat{D}_i(x_i)$  representa la estrategia del jugador  $i$ , siendo  $i = 1, 2$ , y viene dado por la siguiente expresión:

$$\hat{D}_i(x_i) = e^{x_i(\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i)/\sqrt{2}}. \quad (4.4)$$

Las cantidades entrelazadas  $q_1$  y  $q_2$  del duopolio de Cournot cuántico vienen determinadas por las medidas finales de los observables  $\hat{X}_1$  y  $\hat{X}_2$  sobre el estado final  $|\psi_f\rangle$ ,  $\hat{X}_i = \frac{\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i}{\sqrt{2}}$ , con  $i = 1, 2$ . A partir de ahí, se obtiene que

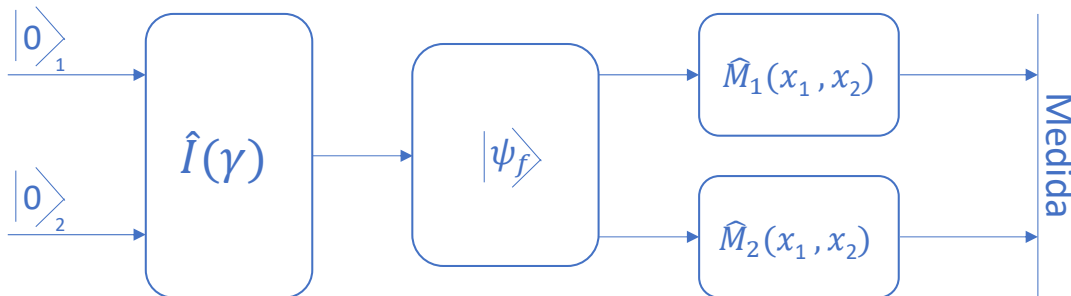
$$\begin{aligned} q_1 &\equiv \langle \psi_f | \hat{X}_1 | \psi_f \rangle = x_1 \cosh \gamma + x_2 \sinh \gamma, \\ q_2 &\equiv \langle \psi_f | \hat{X}_2 | \psi_f \rangle = x_2 \cosh \gamma + x_1 \sinh \gamma, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $x_i \in [0, \infty)$  y  $q_i \in [0, \infty)$ , con  $i = 1, 2$ , representan las cantidades independientes y entrelazadas, respectivamente, de cada jugador en el juego cuántico. Cuando el grado de entrelazamiento es nulo ( $\gamma=0$ ), el juego vuelve a su versión clásica y  $q_i = x_i$ , con  $i = 1, 2$ . Para más detalles, se puede consultar el anexo A.

Otro método de cuantización que se utilizará en este trabajo, aunque en menor medida, es el propuesto por Frackiewicz (2016), que se representa en la fig. 4.3. La idea se aplica inicialmente al duopolio de Cournot y es similar a la del método de LDM, ya que busca entrelazar las magnitudes  $x_1$  y  $x_2$ , que son las estrategias de los dos jugadores que intervienen en el juego. Se parte del estado inicial  $|00\rangle$  con  $\gamma \in [0, \pi/4]$ , donde  $\gamma$  representa el grado de entrelazamiento. En este caso, el operador de entrelazamiento  $\hat{I}(\gamma)$  viene dado por la expresión:

$$\hat{I}(\gamma) = \hat{\mathbb{1}}^{\otimes 2} \cos \gamma + i \hat{\sigma}_x^{\otimes 2} \sin \gamma, \quad \gamma \in [0, \pi/4]. \quad (4.6)$$

donde  $\hat{\mathbb{1}}$  es el operador identidad y  $\hat{\sigma}_x$  es el operador de Pauli.



**Figura 4.3:** El esquema de cuantización de Frackiewicz (Frackiewicz, 2016).

El estado final resultante de actuar el operador entrelazamiento sobre el estado inicial es el siguiente:

$$|\psi_f\rangle = \hat{I}(\gamma)|00\rangle = \cos \gamma|00\rangle + i \sin \gamma|11\rangle. \quad (4.7)$$

A partir de las estrategias de los jugadores  $x_i \in [0, \infty)$  con  $i = 1, 2$ , se definen los dos operadores siguientes:

$$\hat{M}_i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1|0\rangle\langle 0| + x_2|1\rangle\langle 1|, & i = 1, \\ x_2|0\rangle\langle 0| + x_1|1\rangle\langle 1|, & i = 2. \end{cases} \quad (4.8)$$

El esquema de cuantización de Frackiewicz se basa en el operador densidad del estado final, que viene dado por  $\hat{\rho} = |\psi_f\rangle\langle\psi_f|$ . La medida definida por  $\hat{M}(x_1, x_2)$  con  $i = 1, 2$  determina las cantidades entrelazadas  $q_1$  y  $q_2$  del modo siguiente:

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{tr}(\hat{M}_1\rho_1) = x_1 \cos^2 \gamma + x_2 \sin^2 \gamma, \\ q_2 &= \text{tr}(\hat{M}_2\rho_2) = x_2 \cos^2 \gamma + x_1 \sin^2 \gamma, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $\hat{\rho}_1 = \text{tr}_2(|\psi_f\rangle\langle\psi_f|)$  y  $\hat{\rho}_2 = \text{tr}_1(|\psi_f\rangle\langle\psi_f|)$  representan los operadores densidad reducidos del qubit 1 y del qubit 2, respectivamente. Para más detalles, se puede consultar el anexo B.

Es importante resaltar que, en ambos esquemas de cuantización, las variables entrelazadas o efectivas (las cantidades en el juego de Cournot o, como veremos, los precios en el juego de Hotelling) son las que, en la práctica, utiliza cada jugador en el juego. Sin embargo, la estrategia de cada jugador viene dada por las magnitudes independientes y es el entrelazamiento de esas estrategias lo que da lugar a las cantidades (Cournot) o precios (Hotelling) operativos o efectivos en el juego.

# Capítulo 5

## El juego de Hotelling con límite de coste

En este capítulo se estudia el juego de  $\alpha$ -HOT, descrito previamente en la sec. 3.2.2, tanto en su versión clásica como en la cuántica desde una doble perspectiva, analíticamente y través de la simulación. Se consideran varias casuísticas, como el escenario con localizaciones fijas y precios variables así como el de localizaciones y precios variables, explorando las versiones con coste de desplazamiento lineal y cuadrático. De acuerdo con ello, se analiza el juego cuántico de Hotelling bajo los esquemas de cuantización de LDM y de Frackiewicz. El contenido de esta sección está basado en los trabajos de investigación sobre este tema llevados a cabo por Garcia-Perez *et al.* (2021).

### 5.1. Simulación del juego clásico con límite de coste

Se muestran aquí varios ejemplos de simulación del juego de  $\alpha$ -HOT, de acuerdo con el modelo de simulación descrito en detalle en la sec. 4.1.

#### Simulación con localización fija

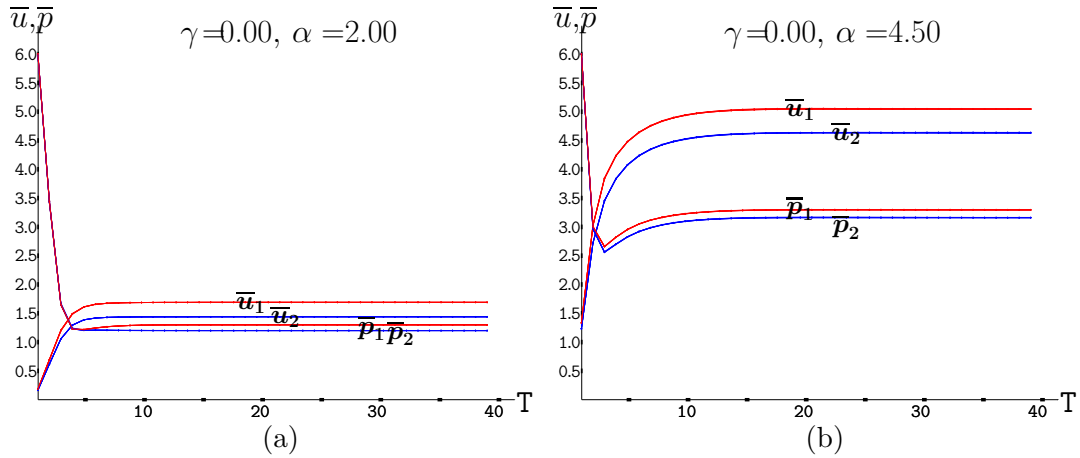
Consideremos el caso del juego de  $\alpha$ -HOT y localizaciones fijas de los jugadores  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$  ( $L=3$ ,  $t=1$ ), estudiado en las figs. 5.2-5.3. En primer lugar, tenemos la fig. 5.1 donde se muestra un ejemplo de los valores de las iteraciones iniciales de la simulación en un subconjunto de  $5 \times 5$  de toda la retícula de la fig. 4.1, en este caso para  $\alpha=4.5$ . En  $T=1$ , muchas celdas obtienen cero beneficios, dado que inicialmente muchos valores de los precios están por encima del límite de coste pero, después de la primera actualización en  $T=2$ , sólo una de las celdas mostradas obtiene beneficios nulos.

La fig. 5.2 muestra la dinámica hasta la iteración  $T=40$  en la simulación numérica de precios del juego clásico de  $\alpha$ -HOT ( $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ ). En rojo, se muestran los datos relativos al jugador-1 y, en azul, los relacionados con el jugador-2. En la fig. 5.2(a) se representa la dinámica con  $\alpha=2.0$ , mientras que en la fig. 5.2(b), con  $\alpha=4.5$ . Se muestra el resultado de cinco configuraciones iniciales de precios aleatorios en los dos casos, pero dichas

$(p_1^1, p_2^1)$					$(u_1^1, u_2^1)$					$(p_1^2, p_2^2)$					$(u_1^2, u_2^2)$				
0.9	7.5	5.4	8.5	8.4	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	1.9	3.9	0.8	3.9	3.7	5.7	0.6	2.5	2.5	3.4
9.5	5.0	3.9	8.4	6.3	0.0	0.0	3.5	0.0	0.0	9.5	2.4	3.9	2.4	1.9	0.0	5.8	1.8	5.1	3.2
9.9	10.2	2.4	8.4	1.9	0.0	0.0	5.7	0.0	4.7	1.9	3.9	2.4	3.9	1.9	4.4	1.8	5.3	1.8	3.8
0.7	2.3	2.6	0.8	9.2	1.7	4.7	3.5	2.1	0.0	0.7	2.4	2.6	2.4	1.6	1.5	3.9	3.3	4.2	2.4
3.7	7.1	6.7	1.6	10.2	3.9	0.0	0.0	3.2	0.0	2.3	2.6	2.3	2.6	0.8	4.3	3.7	4.2	2.9	2.0

**Figura 5.1:** Precios y beneficios de las iteraciones iniciales en un subconjunto de  $5 \times 5$  de toda la retícula en una simulación del juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  y localizaciones fijas  $x_1=0.6, x_2=2.6$ .  $L=3.0, t=1.0$ .

simulaciones son indistinguibles. En ambas casuísticas, se observa que durante las iteraciones iniciales los precios promedio caen en picado desde el valor inicial  $\bar{p} \simeq 6.0$  y, como resultado, los beneficios promedio aumentan. Sin embargo, tras estas tendencias iniciales, los precios y los beneficios se estabilizan y se vuelven estacionarios aproximadamente en  $T=5$  en la simulación con  $\alpha=2.0$  y en  $T=10$  en la simulación con  $\alpha=4.5$ . En ambos escenarios se cumple que  $\bar{p}_1 > \bar{p}_2$  lo que induce  $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$ , debido a que  $a > b$  en los dos casos considerados.

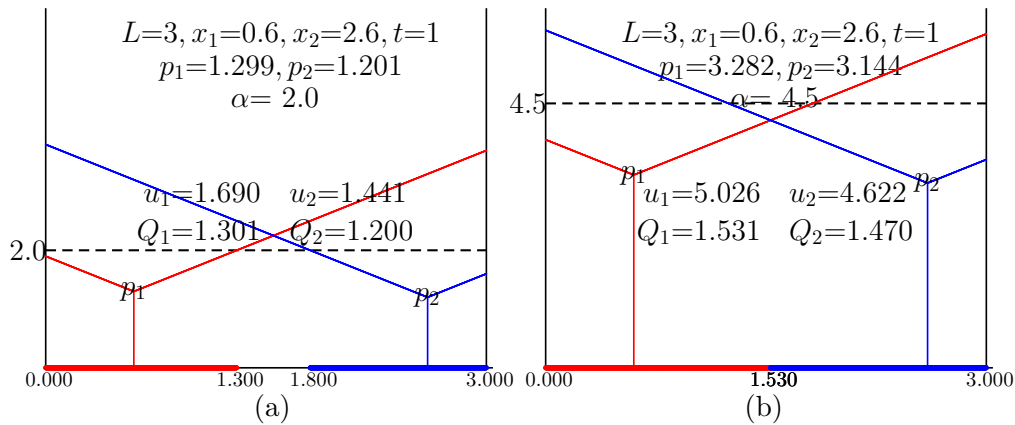


**Figura 5.2:** Dinámica hasta  $T=40$  en la simulación del juego de juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha$  para cinco configuraciones de precios iniciales fijadas las localizaciones  $x_1=0.6, x_2=2.6$ .  $L=3.0, t=1.0$ . (a)  $\alpha=2.0$ . (b)  $\alpha=4.5$ .

La fig. 5.3 muestra el juego de  $\alpha$ -HOT con los precios estacionarios de la fig. 5.2. En la fig. 5.3(a), la condición  $\alpha=2.0$  hace que los consumidores en el intervalo central  $[1.3, 1.8]$  rechacen comprar el producto y, en consecuencia, ambos jugadores obtengan bajos beneficios. Adicionalmente, un  $\alpha$  muy pequeño induce precios muy bajos, de tal modo que los jugadores no interactúan ya que sus mercados locales son disjuntos. En tal escenario, el concepto de EN no es operativo pero, en cualquier caso, ambos jugadores querrán maximizar sus beneficios y, por lo tanto, el juego se resolverá con la solución del OP. En el juego simétrico de localización, donde  $a = b$ , la solución del OP con límite de coste muy bajo viene dada por la ec. (5.1)<sup>[5.1]</sup>, donde hay que destacar que  $p^\bullet$  no depende de  $t$  y la demanda  $Q^\bullet$  decrece con  $t$ .

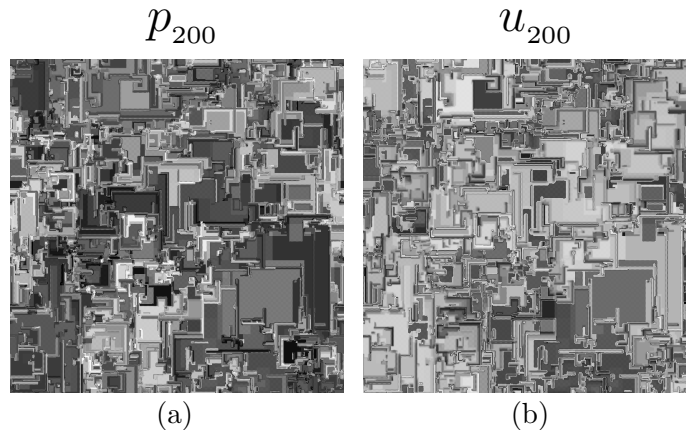
$$p_{1,2}^\bullet = \frac{\alpha}{2}, \quad Q_{1,2}^\bullet = \frac{1}{t}\alpha, \quad \alpha \leq \alpha_1 = 2at. \quad (5.1)$$

En la fig. 5.3(b), la ubicación del consumidor indiferente corresponde a la del EN convencional, es decir,  $\bar{s}^*=1.533$ , pero los precios alcanzados en la simulación son ligeramente superiores a los de dicho equilibrio, (3.282, 3.144) vs. (3.067, 2.933), lo que induce ganancias ligeramente mayores que en la solución del EN, (5.026, 4.622) vs. (4.705, 4.303). En cambio, en la simulación con  $\alpha=e^*=4.0$ , los precios en EN se alcanzan casi exactamente. De hecho, el escenario de la fig. 5.3(b) es análogo al de la fig. 3.2(b), ya que el coste total asociado al consumidor indiferente en el juego convencional en EN es  $e(\bar{s}^*)=4.0$  y, de este modo, si  $\alpha \geq 4.0$ , el EN no se ve afectado por  $\alpha$ . En general, podemos decir que el equilibrio no varía si se cumple que  $\alpha$  está por encima de  $e(\bar{s}^*)$ .



**Figura 5.3:** El juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha$  fijadas las localizaciones  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=2.0$ . (b)  $\alpha=4.5$ .

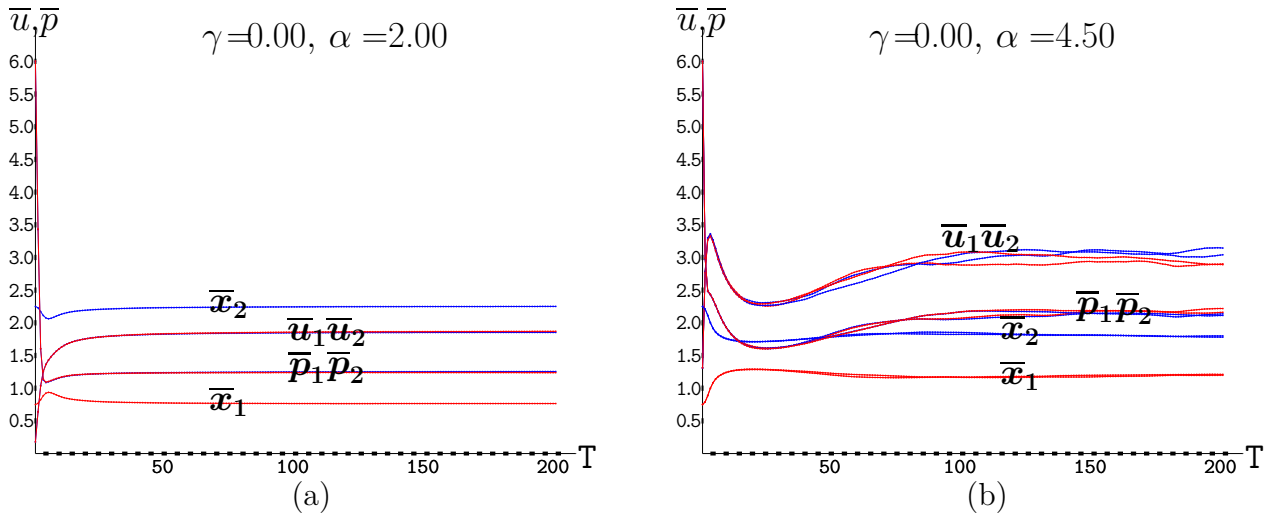
La fig. 5.4 muestra los patrones en  $T=200$  de la simulación de la fig. 5.2 con  $\alpha=4.5$ . El aumento del nivel de intensidad del tono de gris se asocia a valores crecientes, asignando el blanco y el negro al mínimo y máximo alcanzados, respectivamente. La aparición de estructuras intrincadas se hace evidentes en los patrones, tanto del precio como de los beneficios, lo que de alguna manera recuerda a una compleja placa de circuito impreso.



**Figura 5.4:** Patrones en  $T=200$  del juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  para  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Precios. (b) Beneficios. Mayor intensidad en el tono del gris indica un valor más elevado.  $p_{min}=2.901$ ,  $p_{max}=3.591$ ;  $u_{min}=4.246$ ,  $u_{max}=5.560$ .

## Simulación con localización y precio variables

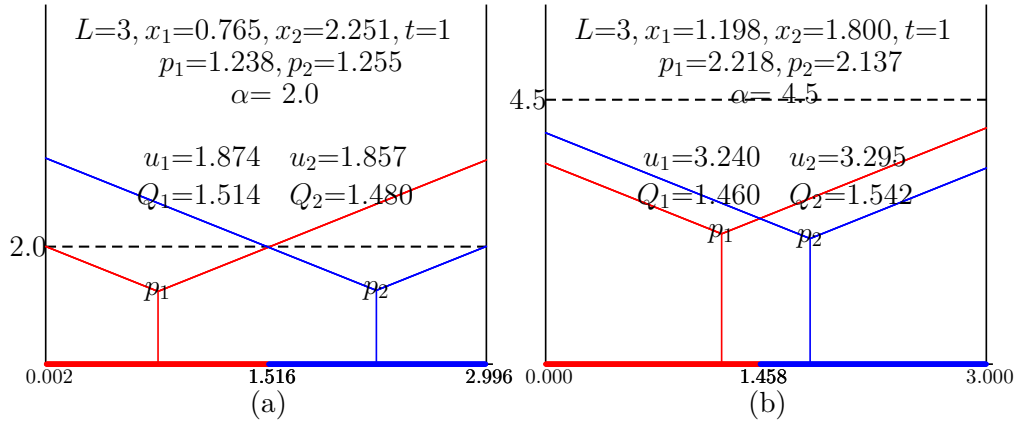
La fig. 5.5 muestra la dinámica hasta  $T=200$  en la simulación en localización-precio del juego clásico de  $\alpha$ -HOT. Inicialmente el valor de los precios es  $\bar{p} \simeq 6.0$  (como en la fig. 5.2), y el de las localizaciones resulta ser  $\bar{x}_1 \simeq 0.75$ ,  $\bar{x}_2 \simeq 2.25$ , tanto en la simulación con  $\alpha=2.0$  en la fig. 5.5(a) como con  $\alpha=4.5$  en la fig. 5.5(b). Durante las iteraciones iniciales, los precios promedio caen en picado y los beneficios promedio aumentan considerablemente, pero esta fuerte tendencia inicial se interrumpe de modo abrupto (como en la fig. 5.2) de modo que, en la simulación con  $\alpha=2.0$  los precios y beneficios promedio se estabilizan rápidamente en un valor cercano a  $T=50$ , mientras que en la simulación con  $\alpha=4.5$  dicha estabilización se retrasa más, teniendo lugar aproximadamente en  $T=100$ . En este caso, el resultado de las cinco configuraciones iniciales de precios aleatorios se puede distinguir en la figura con  $\alpha=4.5$ . Las ubicaciones promedio de los jugadores varían muy poco de sus valores iniciales en la simulación con  $\alpha=2.0$ , ya que sus niveles estacionarios, alcanzados en pocas iteraciones, resultan ser:  $x_1=0.765$ ,  $x_2=2.255$ . En contraste con ello, las localizaciones promedio de los jugadores varían notablemente de sus valores iniciales en la simulación con  $\alpha=4.5$ , ya que sus niveles estacionarios resultan ser:  $x_1=1.198$ ,  $x_2=1.800$ .



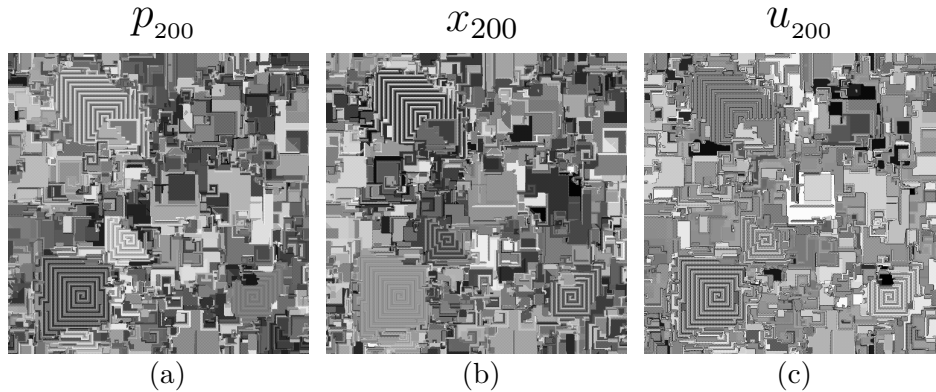
**Figura 5.5:** Dinámica hasta  $T=200$  en la simulación del juego de Hotelling con límite de coste en localización-precio.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=2.0$ . (b)  $\alpha=4.5$ .

La fig. 5.6 muestra el juego de  $\alpha$ -HOT con los precios y las ubicaciones estacionarias de la fig. 5.5. En la fig. 5.5(a), el nivel bajo  $\alpha=2.0$  induce localizaciones de los jugadores bastante separadas y precios bajos, que dan lugar a bajos beneficios. En contraste con ello, en la fig. 5.5(b), el nivel alto  $\alpha=4.5$  induce localizaciones de los jugadores bastante cercanas y precios más elevados, que se traducen en beneficios mayores.

La fig. 5.7 muestra los patrones en  $T=200$  de la fig. 5.5 con  $\alpha=4.5$ . Las características principales de los patrones en la fig. 5.4 se conservan en la fig. 5.7, aunque ahora emergen algunas estructuras en forma de laberinto en los mismos.



**Figura 5.6:** El juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha$  en la simulación con localización y precio variables. (a)  $\alpha=2.0$ . (b)  $\alpha=4.5$ .

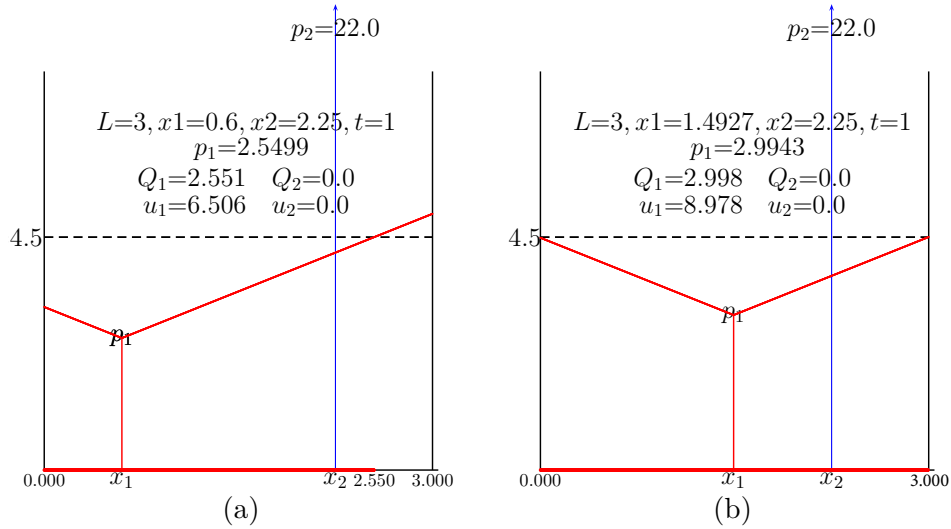


**Figura 5.7:** Patrones en  $T=200$  de la simulación del juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  en localización-precio. (a) Precios. (b) Localizaciones. (c) Beneficios. Mayor intensidad en el tono del gris indica un valor más elevado.  $p_{min}=0.8719$ ,  $p_{max}=3.7319$ ;  $x_{min}=0.2615$ ,  $x_{max}=2.5637$ ;  $u_{min}=0.0000$ ,  $u_{max}=8.2735$ .

### 5.1.1. Monopolio

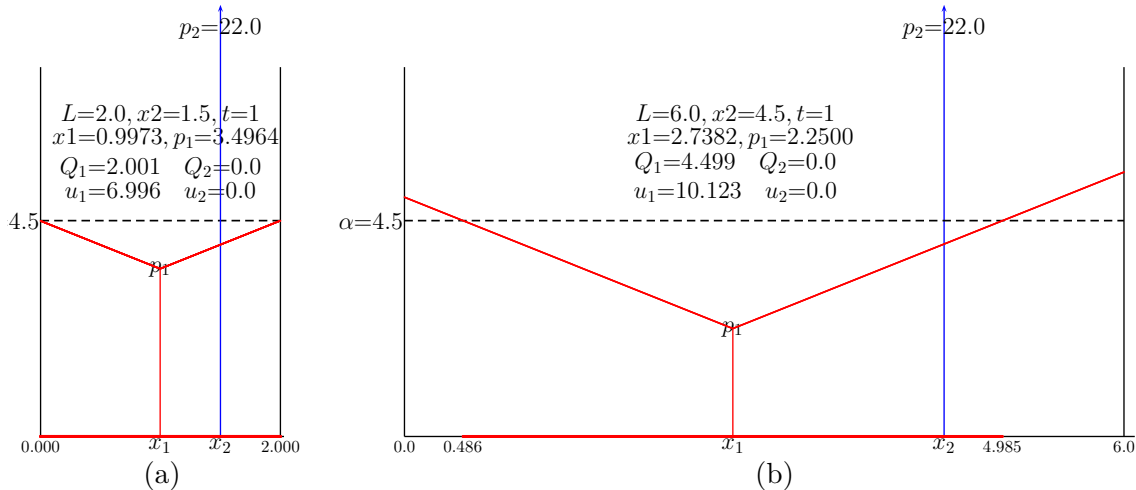
El escenario de monopolio se puede estudiar mediante simulación asignando un precio muy alto a uno de los jugadores, de modo que el otro jugador capture todo el mercado (como en los ejemplos de la fig. 3.4). Esto ocurre también en la fig. 5.8, que muestra el juego de 4.5-HOT con el precio y la localización estacionarios del jugador-1 alcanzados en una simulación donde el precio del jugador-2 se fija en  $p_2=22.0$ . Conviene recordar que la longitud del mercado es  $L=3.0$  y el precio del jugador-1 es  $p_1 \in [0, 12]$ . En la fig. 5.8(a), la localización del jugador-1 está fijada a  $x_1 = 0.6$ . En este escenario de  $x_1$  fijo, se cumple que  $p_1 + x_1^s - x_1 = \alpha$  ( $t=1.0$ ). Por lo tanto,  $x_1^s = x_1 + \alpha - p_1$  y, en consecuencia,  $u_1 = p_1 x_1^s$ . El beneficio anterior se maximiza para  $p_1^m = (x_1 + \alpha)/2$ , lo que induce  $x_1^s = (x_1 + \alpha)/2$  y, finalmente,  $u_1^m = ((x_1 + \alpha)/2)^2$ . De la fig. 5.8(a) resulta que  $p_1 = 2.5499 \simeq p_1^m = (0.6 + 4.5)/2 = 2.55$ ,  $u_1 = 6.506 \simeq u_1^m = 2.55^2 = 6.503$ .

En la fig. 5.8(b) no sólo  $p_1$  evoluciona en la simulación, sino que también lo hace  $x_1$ , alcanzando  $x_1 \simeq 1.5 = L/2$ , mientras que  $p_1 \simeq 3.0$ , de modo que  $p_1 + |L - x_1| \simeq \alpha = 4.5$  y  $u_1 \simeq 9.0 > 6.506$ . En un modelo de  $\alpha$ -HOT sin la restricción que delimita la dimensión del mercado



**Figura 5.8:** El juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  y el precio del jugador-2 fijado a  $p_2=22.0$  en una simulación con la localización y precio estacionarios del jugador-1.  $L=3.0, t=1.0$ . (a) Localización fija del jugador-1  $x_1=0.6$ . (b)  $x_1$  sin restricciones.

$[0, L]$ , un jugador monopolista con precio  $p$  alcanzará el radio de mercado  $r = (\alpha - p)/t$ , de modo que  $u = p[2(\alpha - p)/t]$ . Este beneficio se maximiza con  $p^m = \alpha/2$ , lo que se traduce en que  $u^m = \alpha^2/2t$ . En la fig. 5.9(b), se llega a este mismo resultado a través de la simulación con una longitud grande del segmento de mercado ( $L=6$ ), donde  $p^m = 4.5/2 = 2.25$ , de modo que  $u^m = 4.5^2/2 \cdot 1 = 10.125$ . En cualquier modelo del juego con límite de coste  $\alpha$ , siendo  $L < \alpha$ , como es el caso de la fig. 5.9(a) con  $\alpha=4.5, L=2$  (o la fig. 5.8(b)), se cumple que  $p = \alpha - (Lt/2) = 4.5 - 2/2 = 3.5, u = pL = 3.5 \cdot 2.0 = 7.0$ .



**Figura 5.9:** El juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  y el precio del jugador-2 fijado a  $p_2=22.0$  en una simulación con la localización y precio estacionarios del jugador-1.  $t=1.0$ . (a)  $L=2.0$ . (b)  $L=6.0$ .

## 5.2. El enfoque cuántico del juego con límite de coste

De acuerdo con la extensión *mínima* de los juegos continuos clásicos al dominio cuántico mediante el modelo LDM, los precios independientes  $p_1$  y  $p_2$  se *entrelazan* generando unos nuevos precios *efectivos*  $p_1^c(p_1, p_2; \gamma)$  y  $p_2^c(p_1, p_2; \gamma)$ . En el juego cuántico de Hotelling, dichos precios efectivos se definen a partir de las ecs. (5.2), siendo  $w_1(\gamma) = \cosh \gamma$ ,  $w_2(\gamma) = \sinh \gamma$ . El parámetro  $\gamma$  actúa como un grado o factor de entrelazamiento, de modo que el escenario clásico se recupera en  $\gamma=0.0$ , es decir,  $p_1^c(0) = p_1$ ,  $p_2^c(0) = p_2$ , mientras que, con valores elevados de  $\gamma$ , se cumple que  $\cosh \gamma \simeq \sinh \gamma$  y, por tanto,  $p_1^c \simeq p_2^c$ .

$$p_1^c = p_1 w_1(\gamma) + p_2 w_2(\gamma), \quad p_2^c = p_2 w_1(\gamma) + p_1 w_2(\gamma). \quad (5.2)$$

Bajo el enfoque cuántico de la ec. (5.2), si se cumple que  $|p_1 - p_2| \leq t(x_2 - x_1)$ , el consumidor indiferente se localiza en  $\bar{s}(\gamma)$ , que viene dado por ec. (5.3)<sup>[5.2]</sup>. En el modelo cuántico de LDM, se cumple que  $w_1(\gamma) - w_2(\gamma) = e^{-\gamma}$ , de modo que la contribución de  $p_2 - p_1$  en la expresión de  $\bar{s}$  tiende a desaparecer con valores de  $\gamma$  elevados.

$$\bar{s}(\gamma) = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{p_2 - p_1}{t} (w_1 - w_2) \right). \quad (5.3)$$

En el juego cuántico del modelo original definido por Hotelling (sin restricciones), los precios independientes y entrelazados en EN<sup>[5.3]</sup> resultan ser,

$$(p_1^*, p_2^*) = \frac{w_1}{w_1^2 - w_2^2} \left( L + k(\gamma), L - k(\gamma) \right) t, \quad (5.4a)$$

$$(p_1^{c*}, p_2^{c*}) = \frac{w_1}{w_1 - w_2} \left( L + k(\gamma) \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2}, L - k(\gamma) \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} \right) t, \quad (5.4b)$$

donde

$$k(\gamma) = \frac{(a - b)(w_1 + w_2)}{3w_1 - w_2}. \quad (5.5)$$

Como consecuencia de ello, la localización del consumidor indiferente en el equilibrio, junto con su coste total asociado, vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\bar{s}^*(\gamma) = \frac{1}{2} \left( L + \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} k(\gamma) \right), \quad e(\bar{s}^*(\gamma)) = \left( \frac{Lw_1}{w_1 - w_2} + \frac{1}{2} (L - b - a) \right) t. \quad (5.6)$$

En el juego cuántico de  $\alpha$ -HOT, se cumple que  $u_1^c(\alpha) = p_1^c Q_1(\alpha, \gamma)$ ,  $Q_1 = x_1^s(\alpha, \gamma) - x_1^i(\alpha, \gamma)$  y  $u_2^c(\alpha) = p_2^c Q_2(\alpha, \gamma)$ ,  $Q_2 = x_2^s(\alpha, \gamma) - x_2^i(\alpha, \gamma)$ , donde los límites del mercado para cada jugador se calculan de acuerdo con las ecs. (5.7). Dichos límites se obtienen a partir de las localizaciones donde el coste total es igual a  $\alpha$ , i.e., donde se cumple que  $\alpha - (p_i^c + t|l_i - x_i|) = 0$ . Todo ello da lugar a las siguientes expresiones:

$$x_1^i(\alpha, \gamma) = \max(l_1^i(\alpha, \gamma), 0), \quad x_1^s(\alpha, \gamma) = \min(l_1^s(\alpha, \gamma), \bar{s}(\gamma)). \quad (5.7a)$$

$$x_2^i(\alpha, \gamma) = \max(l_2^i(\alpha, \gamma), \bar{s}(\gamma)), \quad x_2^s(\alpha, \gamma) = \min(l_2^s(\alpha, \gamma), L), \quad (5.7b)$$

donde  $l_i^i(\alpha, \gamma) = x_i - r_i$ ,  $l_i^s(\alpha, \gamma) = x_i + r_i$ ,  $r_i = (\alpha - p_i^c)/t$ ,  $i = 1, 2$ .

Si  $\alpha$  es mayor que el coste total asociado al consumidor indiferente en el juego clásico,  $e(\bar{s}^*)$ , dado por la ec. (3.8), el EN dado por las ecs. (5.4) sigue siendo válido hasta al nivel de  $\gamma$  donde  $e(\bar{s}^*(\gamma)) = \alpha$ . Esto es, hasta el nivel de entrelazamiento que verifica  $\frac{w_1}{w_1 - w_2} = \frac{2\alpha - (x_2 - x_1)t}{2Lt}$ , que se corresponde con el valor crítico  $\gamma^\bullet$ . La condición para hallar el valor crítico  $\gamma^\bullet$  se puede escribir de modo más simplificado como

$$\Omega = \left(1 - \frac{2Lt}{h}\right), \quad \Omega = \frac{w_2}{w_1}, \quad h = 2\alpha - (L - a - b)t. \quad (5.8)$$

Cuando  $\gamma > \gamma^\bullet$ , la relación de los precios independientes en EN hallados con  $\gamma \leq \gamma^\bullet$ ,  $\rho(\gamma) = \frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{L+k(\gamma)}{L-k(\gamma)}$ , sigue siendo válida (*à la Pareto*). Como resultado de ello, los precios independientes y entrelazados en EN vienen dados por las ecs. (5.9), siendo  $k(\gamma)$  el mismo que en la ec. (5.5)<sup>[5.4]</sup>. La ec. (5.4) y la ec. (5.9) coinciden cuando  $\frac{w_1}{w_1 - w_2} = \frac{h}{2Lt}$ , es decir, en  $\gamma = \gamma^\bullet$ .

$$(p_1^*, p_2^*) = \frac{h}{2L(w_1 + w_2)} (L + k(\gamma), L - k(\gamma)), \quad (5.9a)$$

$$(p_1^{c*}, p_2^{c*}) = \frac{h}{2L} \left( L + k(\gamma) \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2}, L - k(\gamma) \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} \right). \quad (5.9b)$$

Si  $a = b$ , entonces  $k(\gamma) = 0$  y  $\bar{s}^*(\gamma) = L/2$ . Por tanto,

$$p_1^* = p_2^* = \frac{w_1}{w_1^2 - w_2^2} Lt, \quad p_1^{c*} = p_2^{c*} = \frac{w_1}{w_1 - w_2} Lt, \quad u_1^{c*} = u_2^{c*} = \frac{1}{2} \frac{w_1}{w_1 - w_2} L^2 t, \quad \gamma \leq \gamma^\bullet, \quad (5.10a)$$

$$p_1^* = p_2^* = \frac{h}{2(w_1 + w_2)}, \quad p_1^{c*} = p_2^{c*} = \frac{h}{2}, \quad u_1^{c*} = u_2^{c*} = \frac{hL}{4}, \quad \gamma \geq \gamma^\bullet, \quad (5.10b)$$

donde,

$$\gamma = \gamma^\bullet \rightarrow \Omega = \left(1 - \frac{2Lt}{h}\right), \quad \Omega = \frac{w_2}{w_1}, \quad h = 2\alpha - (L - 2a)t. \quad (5.11)$$

### 5.3. Simulación del juego cuántico con límite de coste

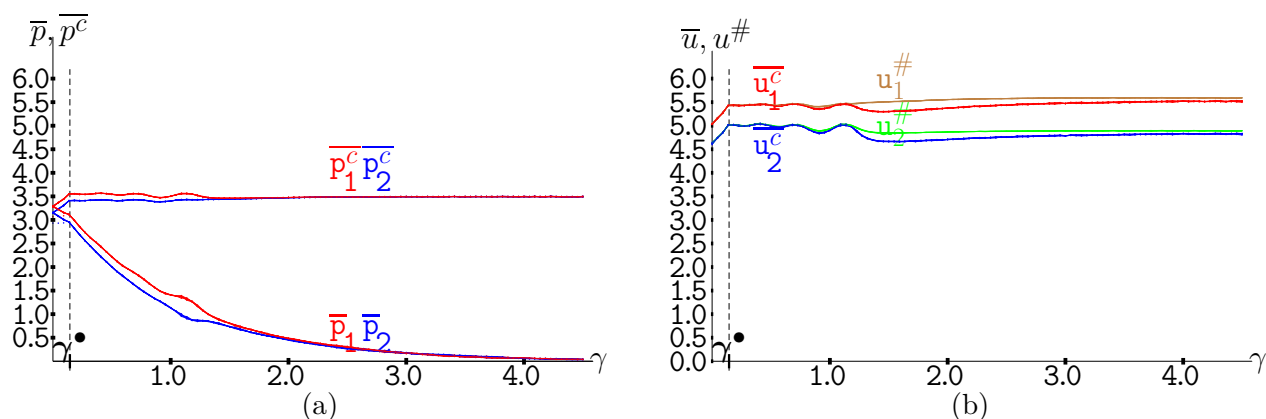
#### Simulación con localización fija

La fig. 5.10 muestra el juego cuántico de 4.5-HOT ( $L=3.0$ ,  $t=1.0$ ) con localizaciones fijas  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$  en una simulación en  $T=200$ . Conviene destacar que el gráfico muestra cinco

simulaciones superpuestas (de cinco configuraciones iniciales de precios aleatorios), que resultan ser indistinguibles. En la fig. 5.10(a), se muestran los precios medios independientes y entrelazados, observándose que los precios promedio independientes de ambos jugadores ( $\bar{p}$ ) disminuyen monótonamente hacia cero y tienden a converger a un mismo valor tan pronto como  $\gamma$  aumenta, mientras que los precios promedio entrelazados ( $\bar{p}^c$ ) tienden a estabilizarse y coincidir en un mismo valor aproximadamente a partir de  $\gamma=1.5$ . Hay que tener en cuenta que si  $p_1 = p_2 = p$ , las ecs. (5.2) conducen a  $p_1^c = p_2^c = pe^\gamma$ , de modo que la disminución en  $p$  se ve *compensada* por la exponencial en  $\gamma$ . En la fig. 5.10(b), los beneficios promedio ( $\bar{u}$ ) de ambos jugadores también se vuelven bastante estables desde  $\gamma=1.5$ , cumpliéndose que el beneficio del jugador-1 sobrepasa al del jugador-2 dado que  $a > b$ .

El OP alcanzado en la simulación de la fig. 5.10(a) para un valor elevado de  $\gamma$ , se consigue: *i*) con precios iguales, de tal modo que  $\bar{s} = (x_1 + x_2)/2 = 1.6000$ , y *ii*) cuando la intersección de los costes totales se produce en el valor del límite de coste  $\alpha$ , ya que ninguna otra solución incrementaría el beneficio de los jugadores. Por tanto,

$$p^\bullet + t(\bar{s} - x_1) = p^\bullet + t(x_2 - \bar{s}) = \alpha \longrightarrow p^\bullet = \alpha - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)t. \quad (5.12)$$



**Figura 5.10:** Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite coste  $\alpha=4.5$  y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=200$  para cinco configuraciones de precios iniciales.  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Precios medios independientes ( $\bar{p}$ ) y entrelazados ( $\bar{p}^c$ ). (b) Beneficios promedio simulados ( $\bar{u}$ ) y beneficios de campo medios ( $u^\#$ ).

Los precios entrelazados y los beneficios en el régimen estacionario de la fig. 5.10 se aproximan mucho a los del OP calculado según la ec. (5.12) para  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ , es decir:  $p^\bullet = 4.5 - (2.6 - 0.6)/2 = 3.5000$ ;  $(u_1^\bullet, u_2^\bullet) = (5.600, 4.900)$ . Sin embargo, no coinciden exactamente y, de hecho, los valores numéricos de las cinco simulaciones de la fig. 5.10 en  $\gamma=2.0$  recopilados en la tab. 5.1 indican que los precios promedio obtenidos mediante la simulación son algo inferiores a los del OP, al igual que los beneficios, que también están por debajo de los del OP. En  $\gamma=4.0$  los precios entrelazados y los beneficios aumentan ligeramente en comparación con los de  $\gamma=2.0$ , de modo que los beneficios promedio de la simulación están aún más cerca de los de la solución del OP.

En la fig. 5.10(b), se muestran los beneficios de campo medios ( $u^\#$ ) alcanzados en un escenario hipotético en el que cada uno de los jugadores adoptara un precio entrelazado

**Tabla 5.1:** Precios independientes y entrelazados medios, beneficios de campo y beneficios medios en cinco simulaciones del juego cuántico de Hotelling con límite coste  $\alpha=4.5$  para  $\gamma=2.0$ .  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ .

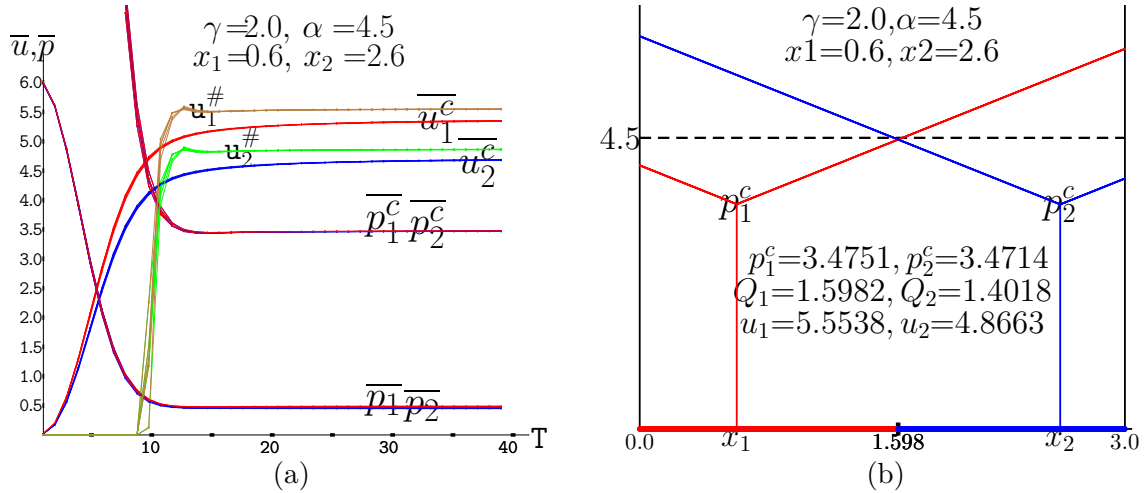
$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_1^c$	$\bar{p}_2^c$	$u_1^\#$	$u_2^\#$	$\bar{u}_1^c$	$\bar{u}_2^c$
0.4835	0.4566	3.4751	3.4714	5.5538	4.8663	5.3780	4.7103
0.4823	0.4585	3.4772	3.4740	5.5579	4.8692	5.3785	4.7105
0.4935	0.4465	3.4759	3.4695	5.5504	4.8684	5.3722	4.7102
0.4860	0.4547	3.4775	3.4733	5.5566	4.8699	5.3676	4.7024
0.4779	0.4622	3.4742	3.4721	5.5550	4.8646	5.3785	4.7080

promedio calculado a partir de los precios independientes resultado de la simulación, i.e., los beneficios generados a partir de los valores de  $p^\#$  dados en las ecs. (5.13). Los beneficios de campo medios se muestran en marrón para el jugador-1 y en verde para el jugador-2. Se puede observar que los beneficios de campo medios y los que se obtienen de la simulación prácticamente coinciden hasta  $\gamma \simeq 1.4$  pero, a partir de ese valor, los beneficios de campo medios están ligeramente por encima de los beneficios promedio de la simulación.

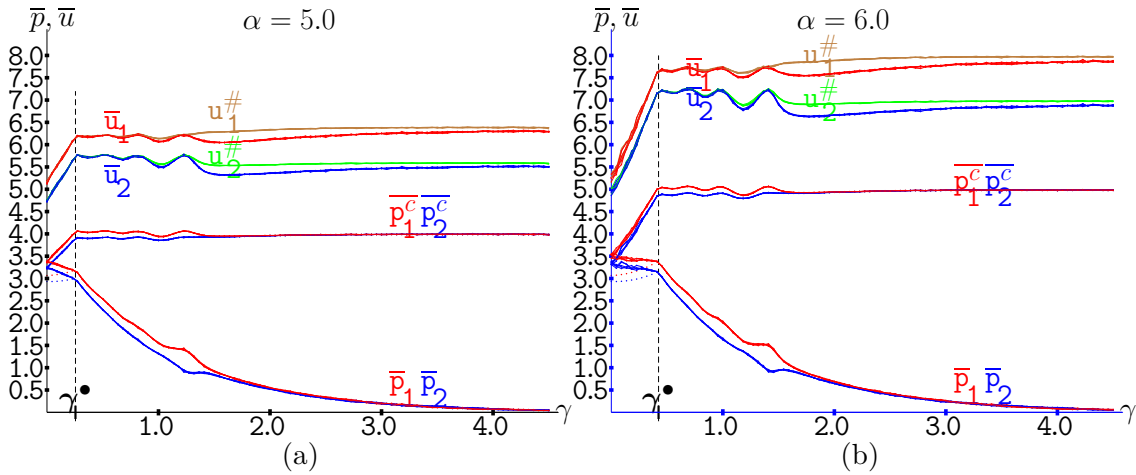
$$p_1^\# = \bar{p}_1 \cosh \gamma + \bar{p}_2 \sinh \gamma, \quad p_2^\# = \bar{p}_2 \cosh \gamma + \bar{p}_1 \sinh \gamma. \quad (5.13)$$

La fig. 5.11 muestra la simulación de la fig. 5.10 en  $\gamma=2.0$ . En la fig. 5.11(a), se muestra la dinámica hasta  $T=40$  en cinco simulaciones con condiciones iniciales aleatorias. En este marco, los precios independientes medios disminuyen rápidamente hasta aproximadamente 0.5, y los precios entrelazados medios (que solo se muestran desde  $T=9$ ) también descienden rápidamente hasta aproximadamente 3.5. Los beneficios de campo medios son cero en las primeras iteraciones debido al valor muy alto de los precios entrelazados medios, pero se disparan en  $T=9$  y tienden a estabilizarse aproximadamente en  $T=15$ , sobrepasando ligeramente los beneficios medios que da la simulación. Como resultado de esta dinámica, los beneficios promedio crecen rápidamente durante las primeras diez iteraciones y, a partir de entonces, lo hacen a una velocidad mucho menor. En la fig. 5.11(b), se muestra el juego de Hotelling con los precios entrelazados medios en una simulación de la fig. 5.11(a) para  $\gamma=2.0$ . Cabe destacar lo siguiente: *i*) el beneficio agregado logrado en la simulación de la fig. 5.11,  $u_1 + u_2 = 10.417$  está ligeramente por encima del beneficio de un monopolista sin restricción en el tamaño del mercado representado en la fig. 5.9(b),  $u^m=10.125$ , y *ii*) las líneas que representan los costes totales se cruzan prácticamente en el valor  $\alpha=4.5$ , es decir,  $e(\bar{s}) = \alpha$ , que es la referencia donde se obtiene el OP.

Las figs. 5.12 y 5.13 muestran cómo el entrelazamiento también induce el OP en otros dos valores de  $\alpha > 4.5$ , como  $\alpha=5.0$  en la parte (a) y  $\alpha=6.0$  en la parte (b) de dichas figuras. De acuerdo con las ecs. (5.12), los precios del OP (y en consecuencia los beneficios) aumentan a medida que  $\alpha$  aumenta. Por lo tanto, la *meseta* de la fig. 5.12(b) sobrevalora la de la fig. 5.12(a), y las líneas de coste total se cortan en los dos casos de la fig. 5.13 en una ordenada prácticamente igual a su correspondiente  $\alpha$ , como ocurre cuando se presenta la solución del OP. El beneficio agregado logrado en ambas simulaciones subestima el obtenido por un jugador monopolista,  $u_1^m = ((x_1 + \alpha)/2)^2$ , i.e., con  $x_1=0.6$ ,  $u_1^m(\alpha=5.0) = 15.68$ ,  $u_1^m(\alpha=6.0) = 21.78$ , mientras que  $(u_1 + u_2)(\alpha=5.0) = 11.89$ ,  $(u_1 + u_2)(\alpha=6.0) = 14.79$ .



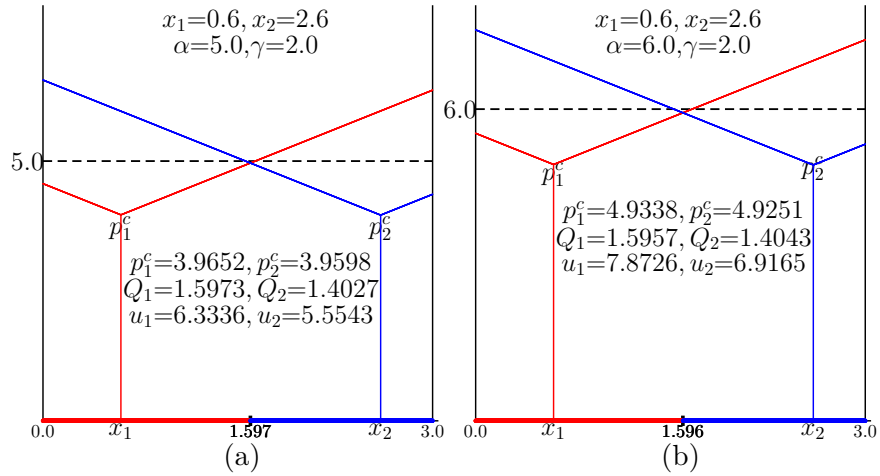
**Figura 5.11:** El juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  para  $\gamma=2.0$ .  $x_1=0.6, x_2=2.6$ .  $L=3.0, t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=40$  en cinco simulaciones. (b) El juego con los precios medios entrelazados alcanzados de de las simulaciones. Precios independientes ( $\bar{p}$ ), precios entrelazados ( $\bar{p}^c$ ) y beneficios ( $\bar{u}$ ) obtenidos en la simulación y los beneficios de campo medios ( $u^\#$ ).



**Figura 5.12:** Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=200$  para cinco configuraciones de precios iniciales.  $x_1 = 0.6, x_2 = 2.6, L=3.0, t=1.0$ . (a)  $\alpha=5.0$ . (b)  $\alpha=6.0$ . Precios independientes ( $\bar{p}$ ), precios entrelazados ( $\bar{p}^c$ ) y beneficios ( $\bar{u}$ ) obtenidos en la simulación y los beneficios de campo medios ( $u^\#$ ).

En el modelo cuántico de LDM, los precios independientes en EN dados en las ecs. (5.4) se convierten en los dados por las ecs. (5.14), que se reducen a los de las ecs.(3.7) en  $\gamma=0.0$ . Si  $a = b$ , entonces se cumple que  $p_1^* = p_2^* = Lt \cosh \gamma$ , que aumenta con  $\gamma$  a partir de  $p^*(\gamma=0.0) = Lt$ . En caso de no existir límite de coste, las ecs. (5.14) inducirían el crecimiento sin restricción de los precios independientes y, en consecuencia, el de los precios entrelazados y los beneficios.

$$(p_1^*(\gamma), p_2^*(\gamma)) = \cosh \gamma \left( L + k(\gamma), L - k(\gamma) \right) t, \quad k(\gamma) = \frac{(a-b)e^{2\gamma}}{2 + e^{2\gamma}}, \quad \gamma \leq \gamma^\bullet. \quad (5.14)$$



**Figura 5.13:** El juego cuántico de Hotelling con límite de coste para  $\gamma = 2.0$ .  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=5.0$ . (b)  $\alpha=6.0$ .

Como generalización de las ecs. (3.9), a partir de las ecs. (5.14) se obtiene que

$$p_1^* + p_2^* = 2Lt \cosh \gamma, \quad \rho(\gamma) = \frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{(L + (a - b))e^{2\gamma} + 2L}{(L - (a - b))e^{2\gamma} + 2L}. \quad (5.15)$$

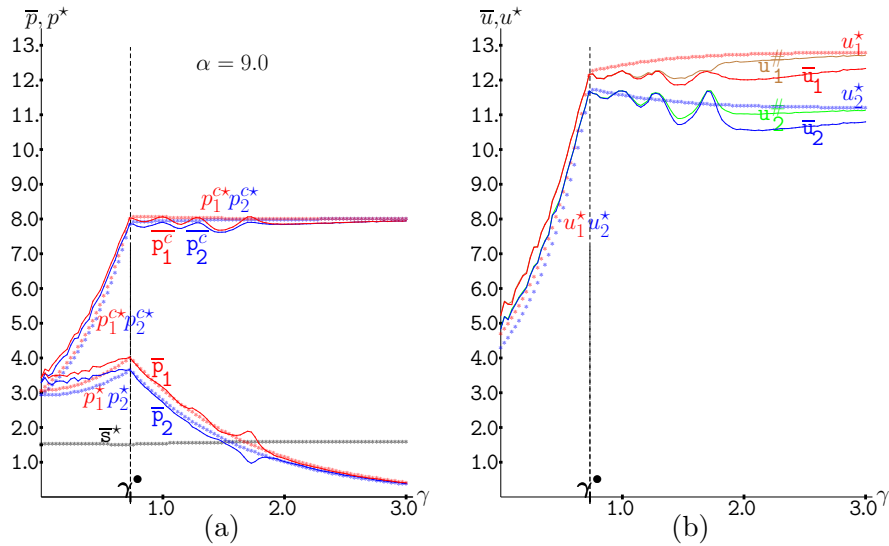
Si  $\alpha$  es mayor que el coste total asociado al consumidor indiferente,  $e(\bar{s}^*)$ , los precios independientes en EN vienen dados por las ecs. (5.14), siendo de este modo hasta que se alcanza el valor crítico del factor de entrelazamiento  $\gamma^\bullet$ , lo cual indica que se ha alcanzado el OP. A partir de la ec. (5.8), con  $\Omega = \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma} = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{e^\gamma + e^{-\gamma}} = \frac{e^{2\gamma} - 1}{e^{2\gamma} + 1}$ , resulta que el valor de  $\gamma^\bullet$  se corresponde con el dado por la ec. (5.16). El entrelazamiento crítico  $\gamma^\bullet$  aumenta con  $\alpha$  y se vuelve cero cuando se cumple  $\frac{h}{Lt} - 1 = 1$ , i.e., cuando  $\alpha = (L + (L - a - b)/2)t = e(\bar{s}^*, \gamma=0.0)$ . Para diferentes valores del límite de coste  $\alpha$ , se cumple que: en la fig. 5.10 con  $\alpha=4.5$ ,  $\gamma^\bullet=0.1436$ ,  $\bar{s}^*(\gamma^\bullet)=1.5302$ ; en la fig. 5.12(a) con  $\alpha=5.0$ ,  $\gamma^\bullet=0.2554$ ,  $\bar{s}^*(\gamma^\bullet)=1.5280$ ; y en la fig. 5.12(b) con  $\alpha=6.0$ ,  $\gamma^\bullet=0.4236$ ,  $\bar{s}^*(\gamma^\bullet)=1.5234$ .

$$\gamma^\bullet = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{h}{Lt} - 1 \right), \quad h = 2\alpha - (L - a - b)t. \quad (5.16)$$

La fig. 5.14 considera el juego de 9.0-HOT en el intervalo  $\gamma \in [0, 3.0]$ . Los gráficos de  $(p^*, u^*)$  muestran los resultados teóricos en EN. En el intervalo  $[0, \gamma^\bullet]$ , según las ecs. (5.14), los precios y los beneficios promedio alcanzados por la simulación están por encima de los teóricos en condiciones de bajo entrelazamiento, pero tienden a converger al aproximarse a  $\gamma^\bullet$ .

Para  $\gamma \geq \gamma^\bullet$ , se conserva la relación de los precios en EN dada por las ecs. (5.15),  $\rho(\gamma)$ , y, como resultado de ello, los precios independientes en equilibrio vienen dados por las ecs. (5.17), que convergen a cero a medida que  $\gamma$  crece, como se muestra en la fig. 5.14(a).

$$(p_1^*(\gamma), p_2^*(\gamma)) = \frac{he^{-\gamma}}{2L} \left( L + k(\gamma), L - k(\gamma) \right), \quad k(\gamma) = \frac{(a - b)e^{2\gamma}}{2 + e^{2\gamma}}, \quad \gamma \geq \gamma^\bullet. \quad (5.17)$$



**Figura 5.14:** Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=9.0$  y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=200$ .  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Precios independientes y entrelazados ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ). (b) Beneficios obtenidos en la simulación ( $\bar{u}$ ) y de campo medios ( $u^{\#}$ ). Los gráficos de ( $p^*$ ,  $u^*$ ) muestran los resultados teóricos en equilibrio de Nash.

Nótese que las ecs. (5.14) y las ecs. (5.17) se igualan cuando  $\frac{he^{-\gamma}}{2L} = t \cos \gamma$ , es decir, en  $\gamma = \gamma^*$  y que, si  $a = b$ , las ecs. (5.17) se reducen a  $p_1^*(\gamma) = p_2^*(\gamma) = \frac{he^{-\gamma}}{2}$ .

A partir de la ec. (5.6), se deduce la localización del consumidor indiferente  $\bar{s}^*(\gamma)$  en el modelo de LDM, que viene dada por las ecs.(5.18)<sup>[5.5]</sup>. Se observa que su valor no varía significativamente, ya que  $\bar{s}^*(0) = (L + k)/2 = 1.533$  y, a partir de  $\gamma = \gamma^*$ ,  $\bar{s}^*$  converge a  $(L + (a - b))/2 = 1.600$ . En la fig. 5.14, resulta que  $\bar{s}^*(\gamma^*)=1.5158$  y  $\bar{s}^*(3.0)=1.5987$ . Ambas ecuaciones de  $\bar{s}^*(\gamma)$  se igualan en  $\gamma = \gamma^*$ <sup>[5.6]</sup>.

$$\bar{s}^*(\gamma) = \frac{1}{2} \left( L + \frac{a-b}{2 + e^{2\gamma}} \right), \gamma \leq \gamma^*; \quad \bar{s}^*(\gamma) = \frac{1}{2} \left( L + a - b - \frac{h(a-b)}{L(2 + e^{2\gamma}t)} \right), \gamma \geq \gamma^*. \quad (5.18)$$

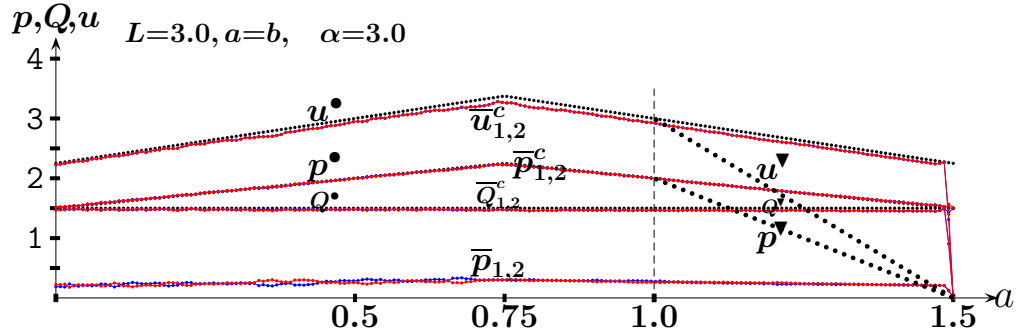
## Representación del juego en función de la localización

En la fig. 5.15, tenemos el juego cuántico de 3.0-HOT con localización  $a = b$  variable. La solución del OP en el juego de  $\alpha$ -HOT con  $a = b \leq L/4$ ,  $t=1$ , viene dada por la ec. (5.19)<sup>[5.7]</sup>.

$$(p_{1,2}^{\bullet}, Q_{1,2}^{\bullet}) = \begin{cases} (\alpha/2, \alpha) & \text{si } \alpha \leq \alpha_1 = 2a \\ (\alpha - a, 2a) & \text{si } \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 = 3a \\ ((\alpha + a)/2, (\alpha + a)/2) & \text{si } \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3 = L - a \\ (\alpha - (L/2 - a), L/2) & \text{si } \alpha \geq \alpha_3 \end{cases} \quad (5.19)$$

En el escenario de la fig. 5.15, la solución del OP es  $(p^{\bullet}, Q^{\bullet}) = (\alpha - (L/2 - a), L/2)$  si  $a \leq L/4$ , y  $(p^{\bullet}, Q^{\bullet}) = (\alpha - a, L/2)$  si  $a \geq L/4$ . En la fig. 5.15, los precios, demandas y beneficios entrelazados resultado de la simulación se acercan mucho a los de la solución del

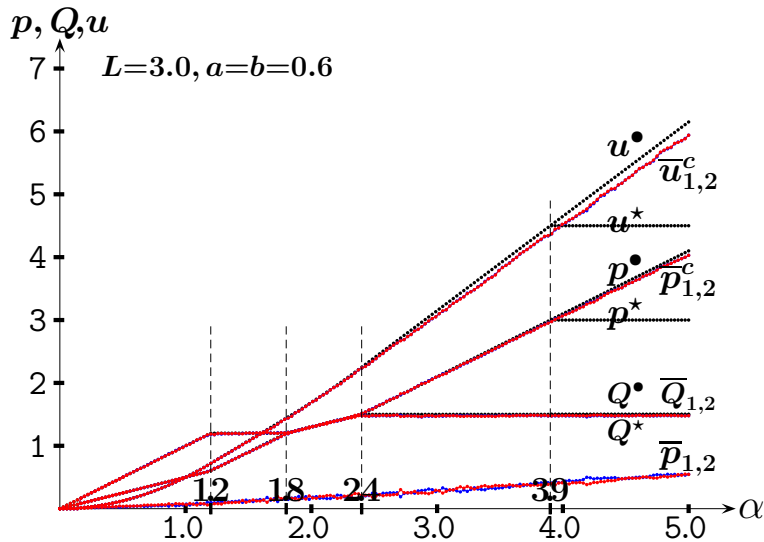
OP y el EN coincide con el OP hasta  $a=a^\nabla=1.0$ . En este valor  $a^\nabla$ , se cumple que  $p^* = \alpha - a$  se corta con  $p^\nabla = 2(L - 2a)^{[5,8]}$ , que representa el precio en la región donde no existe EN o *solución de consenso colectiva* (SCC). A partir del valor crítico  $a^\nabla=1.0$ , no existe EN en el juego clásico debido a la proximidad de los jugadores. Este hecho notable no impide que se alcance la solución del OP en la simulación del juego cuántico también con  $a > a^\nabla = 1.0$ .



**Figura 5.15:** El juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=3.0$ ,  $\gamma=2.0$  y  $a=b$  variable.  $L=3.0, t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan el óptimo de Pareto. Los gráficos en color rojo y azul de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores medios en la simulación para  $T=100$ . Los gráficos de  $(p^\nabla, Q^\nabla, u^\nabla)$  representan la *solución de consenso colectiva* en el juego clásico a partir de  $a=1.0$ .

### Representación del juego en función del límite de coste

En la fig. 5.16, se trata el juego cuántico de  $\alpha$ -HOT con límite de coste variable para  $a=b=0.6$ . El EN viene dado por la ec.(5.19) con  $\alpha \leq \alpha_4$  siendo  $\alpha_4 = 3L/2 - a = 3.9$ , ya que con  $\alpha > \alpha_4$ , se cumple que  $(p_{1,2}^*, Q_{1,2}^*) = (L, L/2) = (3.0, 1.5)$ , de tal modo que  $u_{1,2}^* = L^2/2 = 4.5$ .



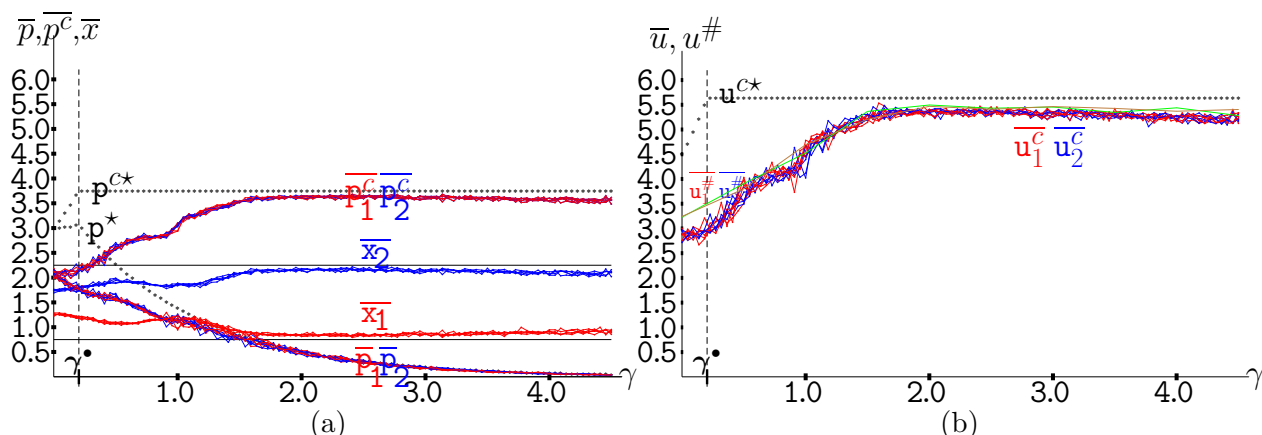
**Figura 5.16:** El juego de cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha$  variable,  $a=b=0.6$ ,  $\gamma=2.0$ .  $L=3.0, t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan el óptimo de Pareto. Los gráficos en color rojo y azul de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores medios en la simulación para  $T=100$ . Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan el equilibrio de Nash en el juego clásico a partir de  $\alpha=3.9$ .

En la simulación para el juego cuántico de  $\alpha$ -HOT con  $\gamma=2.0$  de la fig. 5.16, se observa que los valores promedio de precio entrelazado, demanda y beneficio alcanzados en la simulación se acercan mucho a los del OP, incluso cuando  $\alpha > 3.9$ , aunque se subestima ligeramente el beneficio del OP con valores de  $\alpha$  elevados.

## Simulación con localización y precio variables

Las figs. 5.17-5.18 abordan la hipótesis en que la posición de los jugadores también es variable, al igual que lo es el precio.

La fig. 5.17 muestra el juego cuántico de 4.5-HOT ( $L=3.0$ ,  $t=1.0$ ) en cinco simulaciones en localización-precio en  $T=300$  en una retícula con  $N=800$ . Los precios independientes y entrelazados medios ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ) en la fig. 5.17(a) evolucionan con  $\gamma$  análogamente desde el punto de vista cualitativo que en la fig. 5.10. Es decir, los precios independientes medios de ambos jugadores disminuyen monótonamente hacia cero a medida que  $\gamma$  aumenta, mientras que los precios promedio entrelazados de ambos jugadores aumentan a medida que  $\gamma$  comienza a crecer, volviéndose prácticamente estables a partir de aproximadamente  $\gamma=2.0$ . La variabilidad en la localización promedio de los jugadores ( $\bar{x}$ ) también cesa en aproximadamente  $\gamma=2.0$ . En fig. 5.17(b), los beneficios medios ( $\bar{u}$ ) de los dos jugadores también se vuelven bastante estables a partir de  $\gamma=2.0$ , obteniéndose beneficios similares por parte de ambos jugadores.



**Figura 5.17:** Simulación en localización-precio del juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=300$  para cinco configuraciones de precios iniciales.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Localización media de los jugadores ( $\bar{x}$ ) y precios independientes y entrelazados ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ). (b) Beneficios medios reales ( $\bar{u}$ ) y beneficios de campo medios ( $u^\#$ ). Los gráficos de  $(p^*, p^{c*}, u^{c*})$  muestran los resultados teóricos en EN cuando  $a=b=L/4=0.75$ .

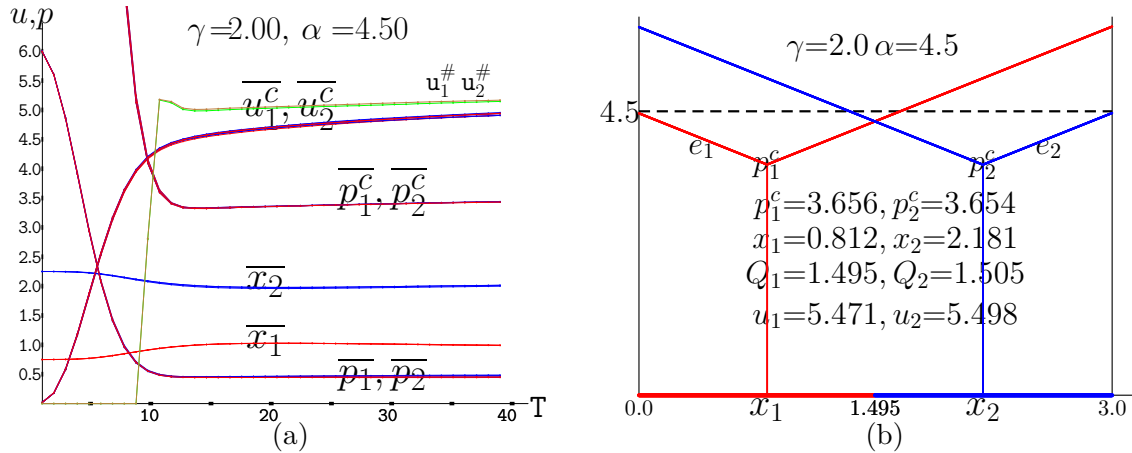
El aspecto algo *ruidoso* de los gráficos en la fig. 5.17 es el resultado de las cinco simulaciones implementadas, aún existiendo una cierta superposición entre los mismos. La tab. 5.2 muestra los valores numéricos de los precios, las localizaciones, los beneficios y los beneficios de campo medios en el caso particular de  $\gamma=2.0$  para cuantificar con mayor precisión la proximidad de estas magnitudes para ambos jugadores.

La fig 5.18 representa la simulación correspondiente a la fig. 5.17 en  $\gamma=2.0$ . En la fig 5.18(a) se muestra la dinámica hasta  $T=40$  en las cinco simulaciones. Se observa que los precios in-

**Tabla 5.2:** Precios independientes y entrelazados medios, beneficios de campo y beneficios medios en cinco simulaciones del juego cuántico de Hotelling con límite coste  $\alpha=4.5$  para  $\gamma=2.0$ .  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ .

$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_1^c$	$\bar{p}_2^c$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$u_1^\#$	$u_2^\#$	$\bar{u}_1^c$	$\bar{u}_2^c$
0.5010	0.4883	3.6558	3.6541	0.8124	2.1810	5.4687	5.4962	5.3745	5.4016
0.5254	0.4538	3.6224	3.6127	0.8542	2.1527	5.4285	5.4241	5.3367	5.3467
0.4909	0.4920	3.6313	3.6315	0.8458	2.1541	5.4470	5.4472	5.3529	5.3433
0.4797	0.6081	3.6474	3.6513	0.8212	2.1748	5.4708	5.4772	5.4097	5.3858
0.4669	0.5048	3.5987	3.6035	0.8524	2.1354	5.3846	5.4187	5.3015	5.3477

dependientes medios disminuyen rápidamente hasta aproximadamente 0.5, del mismo modo que ocurre con los precios entrelazados medios (solo se muestran desde  $T=9$ ) hasta aproximadamente 3.5. Los beneficios de campo medios son nulos en las primeras iteraciones debido al valor muy alto de los precios entrelazados medios, pero se disparan en  $T=9$  y se vuelven bastante estables aproximadamente en  $T=15$ , sobrepasando ligeramente los beneficios medios de la simulación. Las localizaciones convergen, en gran medida, a sus valores estacionarios tan pronto como  $T=15$ . Como resultado de esta dinámica, se observa que los beneficios medios crecen rápidamente durante las primeras diez iteraciones y, a una velocidad mucho menor, a partir de entonces.

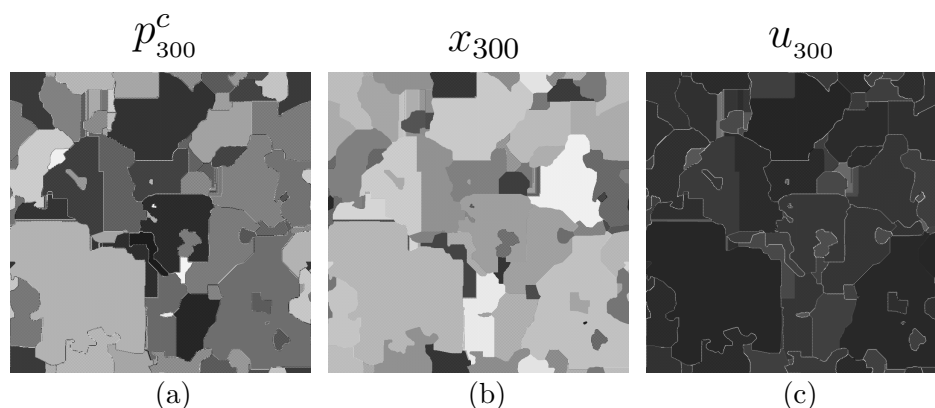


**Figura 5.18:** El juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  para  $\gamma=2.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=40$  en las cinco simulaciones superpuestas. (b) El juego con los precios entrelazados y las localizaciones medias de una de las simulaciones. Precios independientes ( $\bar{p}$ ), precios entrelazados ( $\bar{p}^c$ ), localizaciones ( $\bar{x}$ ) y beneficios ( $\bar{u}$ ) obtenidos en la simulación y los beneficios de campo medios ( $u^\#$ ).

En la fig.5.18(b), se representa el juego de Hotelling con las localizaciones y los precios entrelazados medios para  $\gamma=2.0$  en la simulación de la fig. 5.17(a) en  $T=200$ . Las posiciones de los jugadores no están lejos de  $L/4=0.75$ ,  $3L/4=2.25$ , pero resultan estar algo más próximas al centro del segmento de mercado. Si se cumpliera que  $x_1 = L/4$  y  $x_2 = 3L/4$  y  $p_1 = p_2$ , tendríamos que  $\bar{s} = L/2$  y, entonces, las ecs.(5.12) proporcionarían la solución del OP,  $p_1^\bullet = p_2^\bullet = \alpha - t(L/4)$ , que en el caso particular de  $L=3.0$ ,  $\alpha=4.5$ ,  $t=1.0$  vendría dada por

$p_1^\bullet = p_2^\bullet = 3.85$ . Estos valores se aproximan a los de  $p_i^c$ ,  $i = 1, 2$  de la fig. 5.18(b) pero están algo por encima. Como resultado de estas características en las localizaciones y precios, las líneas que representan los costes totales se cruzan en una ordenada cercana a  $\alpha = 4.5$ , pero no exactamente en este valor.

La fig. 5.19 representa los patrones en  $T=200$  para una de las cinco simulaciones de la fig. 5.17 con  $\gamma=2.0$ . Los patrones muestran un aspecto muy *parcelado*. En los patrones de los beneficios del marco (c), se hacen evidentes bordes blancos, es decir, celdas con beneficios muy bajos, que separan clusters homogéneos.



**Figura 5.19:** Patrones en  $T=300$  de la simulación en localización-precio del juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  para  $\gamma=2.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Precios entrelazados. (b) Localizaciones. (c) Beneficios.  $p_{min}^c=0.081$ ,  $p_{max}^c=6.261$ ;  $x_{min}=0.462$ ,  $x_{max}=2.828$ ;  $u_{min}=0.000$ ,  $u_{max}=6.032$ .

El beneficio agregado en el escenario clásico de la fig. 5.17 resulta cercano a 6.0, significativamente menor que 9.0, el correspondiente al monopolista de la fig. 5.8. En contraste con ello, el beneficio agregado en  $\gamma=2.0$  resulta ser cercano a 11.0, significativamente próximo al beneficio de un monopolista en un modelo con límite de coste  $\alpha$  sin la restricción de tamaño del segmento, es decir,  $u^m=10.125$ .

Si  $a = b$ , se cumple que  $\bar{s}^* = L/2$  y las ecs. (5.10) se convierten en las ecs. (5.20). De acuerdo con las ecs. (5.20b), en la fig. 5.17 se cumple que  $\gamma^\bullet = 0.203$ , y  $p_{1,2}^{c*} = 3.75$ ,  $u_{1,2}^* = 5.625$  cuando  $\gamma > \gamma^\bullet$ . Los precios y beneficios teóricos,  $p^*$  y  $u^*$ , respectivamente, en el caso  $a=b=0.75$  se muestran en la fig. 5.17.

$$p_{1,2}^* = \cosh \gamma Lt, \quad p_{1,2}^{c*} = \cos \gamma e^\gamma Lt, \quad u_{1,2}^{c*} = \cos \gamma e^\gamma L^2 t / 2, \quad \gamma \leq \gamma^\bullet, \quad (5.20a)$$

$$p_{1,2}^* = \frac{he^{-\gamma}}{2}, \quad p_{1,2}^{c*} = \frac{h}{2}, \quad u_{1,2}^{c*} = \frac{hL}{4}, \quad \gamma \geq \gamma^\bullet, \quad (5.20b)$$

donde

$$h = 2\alpha - (L - 2a)t, \quad \gamma^\bullet = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{h}{Lt} - 1 \right). \quad (5.21)$$

## 5.4. Coste de desplazamiento cuadrático

En lugar de considerar un coste de desplazamiento lineal, se puede asumir que el coste de desplazamiento asociado a la distancia  $x$  viene dado por la expresión  $tx^2$  como proponen d'Aspremont *et al.* (1979). En tal escenario, la posición del consumidor indiferente  $\bar{s}$  viene dada por ec. (5.22). Como en el modelo de coste lineal, si  $p_1 = p_2$ , se cumple que  $\bar{s} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ , independientemente del valor de  $t$ .

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{p_2 - p_1}{t(x_2 - x_1)} \right). \quad (5.22)$$

Las expresiones del beneficio ( $u$ ) en el juego de Hotelling con coste de desplazamiento cuadrático (HOT2) vienen dadas por la ec. (5.23).

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{s} < 0 \\ \bar{s}p_1 & \text{si } 0 \leq \bar{s} \leq L \\ Lp_1 & \text{si } \bar{s} > L \end{cases}, \quad u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} Lp_2 & \text{si } \bar{s} < 0 \\ (L - \bar{s})p_2 & \text{si } 0 \leq \bar{s} \leq L \\ 0 & \text{si } \bar{s} > L \end{cases}. \quad (5.23)$$

La intersección de las funciones de reacción de los dos jugadores en el modelo con coste de desplazamiento cuadrático dan lugar a los precios en EN y sus beneficios resultantes, dados por las ecs. (5.24).

$$(p_1^*, p_2^*) = (x_2 - x_1)(L + k, L - k)t, \quad (u_1^*, u_2^*) = \frac{(x_2 - x_1)}{2} \left( (L + k)^2, (L - k)^2 \right)t, \quad k = \frac{a - b}{3}. \quad (5.24)$$

donde,  $\bar{s}^* = (L + k)/2$  como en el modelo con coste lineal.

Con  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ ,  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ , los precios en EN para el modelo con coste cuadrático son  $(p_1^*, p_2^*) = (6.1\hat{3}, 5.8\hat{6})$ , i.e., el doble que en el modelo con coste lineal dado que  $x_2 - x_1 = 2.0$ .

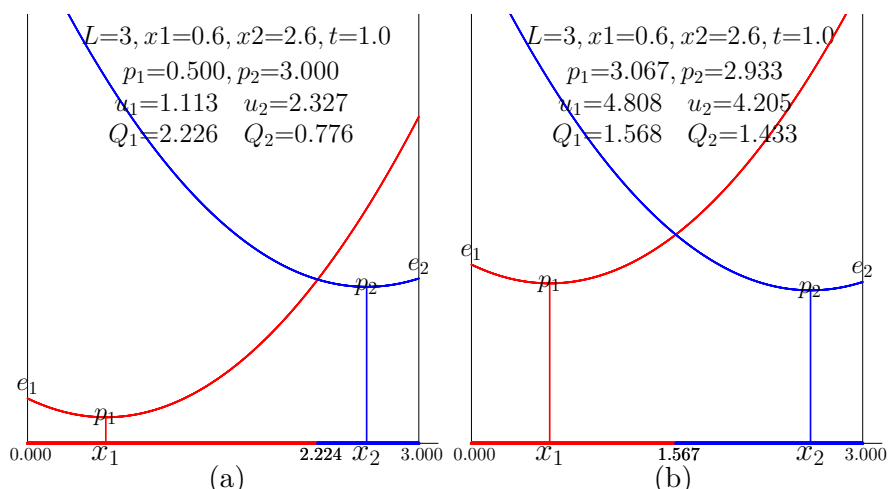
En el modelo con coste de desplazamiento cuadrático, se cumple que  $\frac{\partial u_1^*}{\partial a} < 0$  y  $\frac{\partial u_2^*}{\partial b} < 0$ , al contrario de lo que sucede en el modelo con coste lineal.

### Simulación con localización fija

La fig. 5.20 muestra los beneficios en el juego de HOT2 en los mismos escenarios que en la fig. 3.2. En la fig. 5.20(a) cabe destacar que el jugador-1 no captura todo el mercado, a pesar de que tiene un valor de precio bajo,  $p_1$ , en comparación con el del jugador-2,  $p_2$ . En la fig. 5.20(b), el jugador-1, al estar más cerca del centro, obtiene un beneficio ligeramente mayor con el coste de desplazamiento cuadrático en comparación con el lineal, como resultado del ligero aumento en el valor de  $\bar{s}$ .

Los límites del mercado para ambos jugadores en el juego de Hotelling con límite de coste y coste de desplazamiento cuadrático ( $\alpha$ -HOT2) deben calcularse de acuerdo con las ecs. (3.11), pero, en este caso, a partir de  $\alpha - (p_i + t(s - x_i)^2) = 0$ , se deduce que  $r_i = \sqrt{(\alpha - p_i)/t}$ ,  $i=1, 2$ .

La fig. 5.21 considera el mismo escenario de la fig. 3.3 pero con coste de desplazamiento cuadrático. En la fig. 5.21(a), con  $\alpha=1.5 < \min(p_1, p_2)$ , ningún jugador obtiene demanda. En

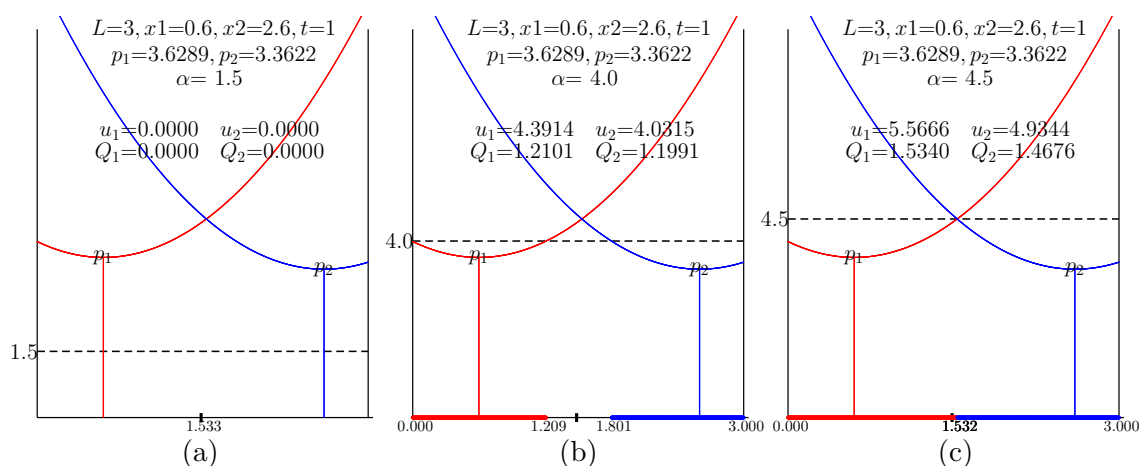


**Figura 5.20:** El juego de Hotelling con límite de coste y coste de desplazamiento cuadrático.  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $L=3$ ,  $t=1.0$ . (a)  $p_1=0.5$ ,  $p_2=3.0$ . (b)  $p_1=3.0\hat{6}$ ,  $p_2=2.9\hat{3}$ .

la fig. 5.21(b), con  $\alpha=4.0$ , no existe demanda en el intervalo  $(1.209, 1.801)$ . En la fig. 5.21(c), con  $\alpha=4.5$ , cabe destacar que si consideráramos los precios en EN del juego de HOT2,  $(p_1 = p_1^*, p_2 = p_2^*) = (6.1\hat{3}, 5.8\hat{6})$ , que son precios significativamente más altos que los de la figura, ningún jugador obtendría demanda. Los precios adoptados en la fig. 5.21(c) son los de la solución del OP con un coste de desplazamiento cuadrático, dado  $\bar{s}^*$ . Tal OP viene dada por las ecs. (5.25), que particularizados al escenario de la fig. 5.21(c) dan lugar a  $p_1^\bullet=3.6289$ ,  $p_2^\bullet=3.3622$ ,  $u_1^\bullet=5.5643$ ,  $u_2^\bullet=4.9313$ .

$$p_1^\bullet + t(\bar{s}^* - x_1)^2 = \alpha \longrightarrow p_1^\bullet = \alpha - t(\bar{s}^* - x_1)^2, \quad (5.25a)$$

$$p_2^\bullet + t(x_2 - \bar{s}^*)^2 = \alpha \longrightarrow p_2^\bullet = \alpha - t(x_2 - \bar{s}^*)^2. \quad (5.25b)$$



**Figura 5.21:** El juego de Hotelling con límite de coste y coste de desplazamiento cuadrático.  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $p_1=3.629$ ,  $p_2=3.362$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=1.5$ . (b)  $\alpha=4.0$ . (c)  $\alpha=4.5$ .

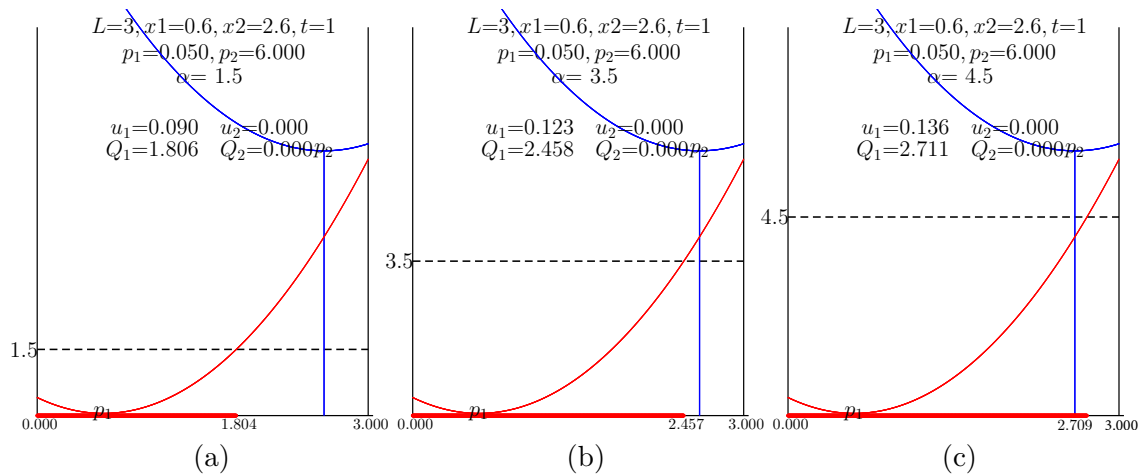
En el juego de  $\alpha$ -HOT2, el EN convencional no se ve afectado por el límite de coste si  $\alpha$

está por encima de  $e(\bar{s}^*)$ , donde:

$$e(\bar{s}^*) = p_1^* + t(\bar{s}^* - a)^2 = \left[ (x_2 - x_1)(L + k) + ((L + k)/2 - a)^2 \right] t. \quad (5.26)$$

En el caso particular en que  $L=3$ ,  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $t=1.0$ , se obtiene que  $e(\bar{s}^*)=7$ , con lo que tendría que cumplirse que  $\alpha > e(\bar{s}^*)$  para que el EN en el juego de  $\alpha$ -HOT2 no se viera afectado por el límite de coste.

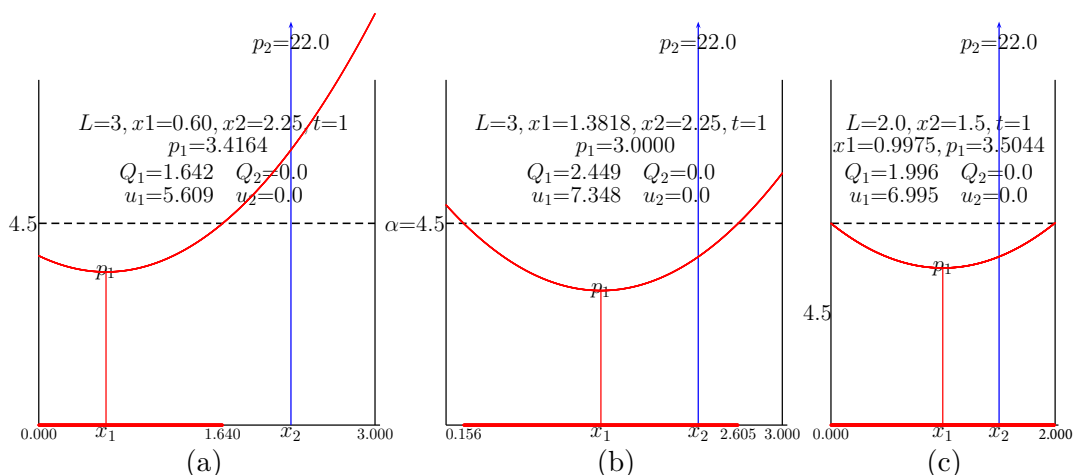
La fig 5.22 trata la casuística en que un jugador capta toda la demanda potencial. Como ocurre con la fig. 3.4, en la variante con coste de desplazamiento cuadrático ha habido que fijar un precio muy bajo para uno de los jugadores ( $p_1=0.05$ ) y un precio comparativamente alto para el otro jugador ( $p_2=6.0$ ). Como resultado, las curvas de coste total no se cruzan en el intervalo  $[0, 3]$ , quedando la del jugador-1 siempre por debajo de la del jugador-2. Se observa que el beneficio del jugador-1 aumenta a medida que lo hace el límite de coste en las tres casuísticas de la fig. 5.22.



**Figura 5.22:** El juego de Hotelling con límite de coste y coste de desplazamiento cuadrático.  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $p_1=0.05$ ,  $p_2=6.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=1.5$ . (b)  $\alpha=3.5$ . (c)  $\alpha=4.5$ .

### 5.4.1. Monopolio

La fig. 5.23 muestra el juego de 4.5-HOT2 en la localización y el precio estacionario del jugador-1 que se obtiene a partir de una simulación donde el precio del jugador-2 se fija en  $p_2=22.0$ , es decir, el caso análogo de la fig. 5.8 pero con coste de desplazamiento cuadrático. En la fig. 5.23(a), fijada la posición del jugador-1 en  $x_1=0.6$ , se obtiene que  $p_1=1.642$  y  $u_1=5.069$ , un beneficio menor si comparamos con  $u_1=6.506$ , que es el logrado en la fig. 5.8. En un modelo con límite de coste y coste de desplazamiento cuadrático sin la restricción de tamaño  $[0, L]$ , un jugador monopolista con precio  $p$  alcanzará el radio de mercado  $r = \sqrt{(\alpha - p)/t}$ , de modo que  $u = 2p\sqrt{(\alpha - p)/t}$ . Con  $t=1$ , este beneficio se maximiza para  $p^m = 2\alpha/3$ , lo que da lugar a un beneficio de  $u^m = 4(\alpha/3)^{3/2}$ . Este resultado se obtiene mediante simulación en la fig. 5.23(b), donde  $p^m = 2 \cdot 4.5/3 = 3.0$  y  $u^m = 4(4.5/3)^{3/2} = 7.348$ . En cualquier modelo  $\alpha$ -HOT2 con  $t=1$  y  $L < 2\sqrt{\alpha/3}$ , como en la fig. 5.23(c), donde  $L = 2 < 2.4495 = 2\sqrt{4.5/3}$ , se cumple que  $p = \alpha - (L/2)^2 = 4.5 - 4/4 = 3.5$ ,  $u = pL = 3.5 \cdot 2.0 = 7.0$ .



**Figura 5.23:** El juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$ , coste de desplazamiento cuadrático y el precio del jugador-2 fijado a  $p_2=22.0$  en una simulación con la localización y precio estacionarios del jugador-1.  $t=1.0$ . (a)  $x_1=0.6$ ,  $L=3.0$ . (b)  $x_1$  sin restricciones,  $L=3.0$ . (c)  $x_1$  sin restricciones,  $L=2.0$ .

### 5.4.2. Enfoque cuántico

En el enfoque cuántico del juego de  $\alpha$ -HOT2, las variables  $p_1$  y  $p_2$  en las ecs. (5.23) deben ser sustituidas por  $p_1^c$  y  $p_2^c$ , de tal modo que la ec. (5.22) se convierte en

$$\bar{s}(\gamma) = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{p_2 - p_1}{t(x_2 - x_1)} e^{-\gamma} \right). \quad (5.27)$$

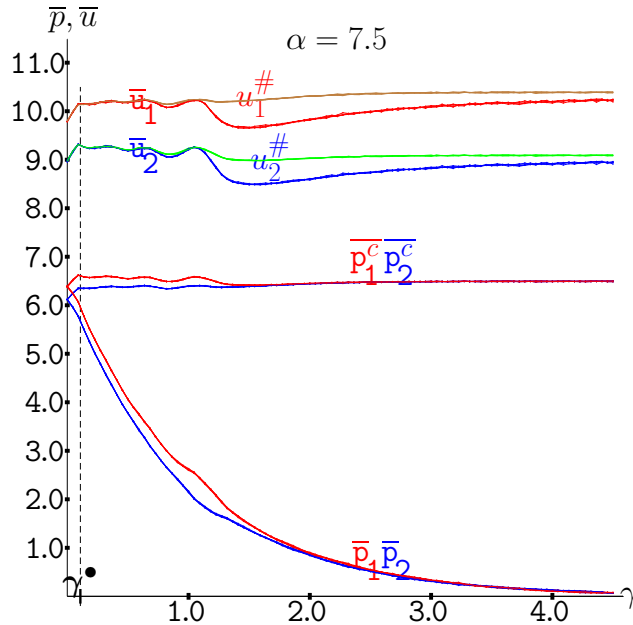
En el modelo cuántico de LDM con coste de desplazamiento cuadrático, los precios independientes en EN vienen dados por las ecs. (5.28), es decir, los mismos de las ecs. (5.14) multiplicados por  $x_2 - x_1$ . Como resultado de ello, la expresión de  $\bar{s}^*(\gamma)$  es la misma que la de la primera de las ecs. (5.18).

$$(p_1^*(\gamma), p_2^*(\gamma)) = (x_2 - x_1) \cosh \gamma \left( L + k(\gamma), L - k(\gamma) \right) t, \quad k(\gamma) = \frac{(a - b)e^{2\gamma}}{2 + e^{2\gamma}}. \quad (5.28)$$

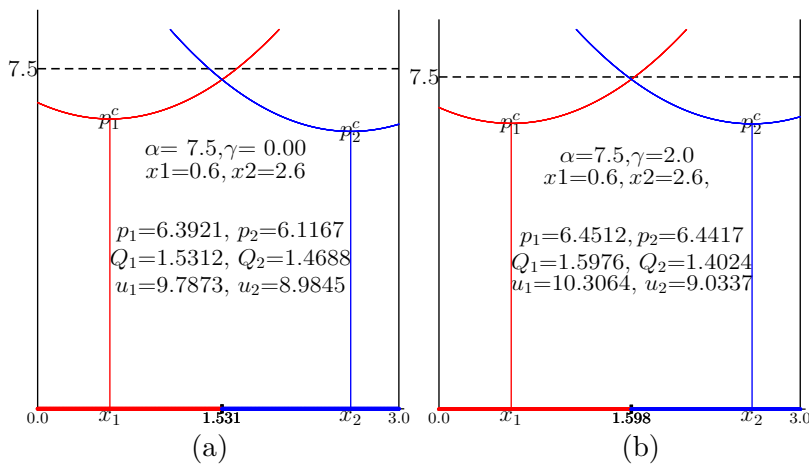
### Simulación con localización fija

La fig. 5.24 representa la simulación del juego cuántico de 7.5-HOT2 en  $T=200$  fijados los parámetros  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . En la simulación se muestra el resultado prácticamente indistinguible de cinco configuraciones con precios iniciales aleatorios. Los precios independientes medios de ambos jugadores ( $\bar{p}$ ) disminuyen monótonamente hacia cero y tienden a converger a un valor casi idéntico al aumentar  $\gamma$ . Los precios entrelazados medios de ambos jugadores ( $\bar{p}^c$ ) se comportan también de modo parecido, tendiendo a estabilizarse a medida que aumenta  $\gamma$ . Al igual que ocurre con el coste de desplazamiento lineal en la fig. 5.10, también con coste de desplazamiento cuadrático se cumple que si  $p_1 = p_2 = p$ , las ecs. (5.2) se reducen a  $p_1^c = p_2^c = pe^\gamma$ , de modo que la disminución en  $p$  es *compensada*

por la exponencial en  $\gamma$ . De nuevo, como ocurre en la fig. 5.10, en la fig. 5.24 el aumento inicial de  $\gamma$  induce un aumento inicial de los precios entrelazados (y en consecuencia de los beneficios entrelazados), que conduce a la solución del OP representada en la fig. 5.25(b) para  $\gamma=2.0$ . Por su parte, en la fig. 5.25(a), se muestra el juego con los precios estacionarios de la simulación del juego clásico ( $\gamma=0.0$ ). Se observa que las curvas de coste total se cruzan en una ordenada ligeramente por debajo de  $\alpha=7.5$ , de modo que  $p_1 = 6.392 > p_1^* = 6.1\hat{3}$ , y  $p_2 = 6.117 > p_2^* = 5.8\hat{6}$ , es decir, los valores que se obtienen en la simulación son algo más elevados que los del EN.



**Figura 5.24:** Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=7.5$ , coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=300$  para cinco configuraciones de precios iniciales.  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Precios independientes ( $\bar{p}$ ), precios entrelazados ( $\bar{p}^c$ ) y beneficios ( $\bar{u}$ ) obtenidos en la simulación y de campo medios ( $u^\#$ ).



**Figura 5.25:** El juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=7.5$  y coste de desplazamiento cuadrático en  $T=300$ .  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\gamma=0.0$ . (b)  $\gamma=2.0$ .

Análogamente a lo que ocurría en la fig. 5.10(a), la solución del OP alcanzada en la simulación de la fig. 5.24 para un valor elevado de  $\gamma$ , se consigue: *i*) con precios iguales, de tal modo que  $\bar{s} = (x_1 + x_2)/2 = 1.600$ , y *ii*) cuando la intersección de las curvas de costes totales se produce en el valor del límite de coste  $\alpha$ , ya que ninguna otra solución incrementaría el beneficio de ambos jugadores. Por tanto,

$$p^\bullet + t(\bar{s} - x_1)^2 = p^\bullet + t(x_2 - \bar{s})^2 = \alpha \longrightarrow p^\bullet = \alpha - \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 t. \quad (5.29)$$

Los precios entrelazados y los beneficios en el régimen estacionario de la fig. 5.24 se aproximan mucho a los del OP calculado según la ec. (5.29) para  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ , es decir:  $p^\bullet = 7.5 - [(2.6 - 0.6)/2]^2 = 6.5000$ ;  $(u_1^\bullet, u_2^\bullet) = (10.400, 9.100)$ . Al igual que ocurre en el caso con coste lineal, los precios efectivos y los beneficios que se obtienen mediante simulación en  $\gamma=2.0$  están ligeramente por debajo del OP. Sin embargo, en la fig. 5.24, se observa que a partir de ese valor de  $\gamma$  sus valores siguen creciendo levemente para, de este modo, aproximarse aún más al OP.

En el valor crítico del factor de entrelazamiento  $\gamma^\bullet$ , que indica que se ha alcanzado el OP con coste de desplazamiento cuadrático, debe cumplirse,

$$p_1^{c^\star} + t(\bar{s}^\star - x_1)^2 = \alpha, \quad (5.30a)$$

$$p_2^{c^\star} + t(x_2 - \bar{s}^\star)^2 = \alpha, \quad (5.30b)$$

siendo  $p_1^{c^\star}$  y  $p_2^{c^\star}$  los precios entrelazados que se obtienen a partir de la ec. (5.28). Considerando también la ec. (5.22), que proporciona la localización del consumidor indiferente, obtenemos la ecuación que debe cumplir el valor crítico del factor de entrelazamiento  $\gamma^\bullet$ ,

$$t(x_1 + x_2 - L)^2(e^{2\gamma} + 1)^2 + [(x_2 - x_1)(2Lt(e^{2\gamma} + 1) + t(x_2 - x_1)) - 4\alpha](e^{2\gamma} + 2)^2 = 0. \quad (5.31)$$

Si se considera el juego simétrico ( $x_1 = L - x_2$ ,  $a = b$ ), la ec. (5.31) se simplifica y se puede obtener la expresión analítica del factor crítico de entrelazamiento  $\gamma^\bullet$  con coste de desplazamiento cuadrático,

$$\gamma^\bullet = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\alpha - t(L - 2a)^2}{2(L - 2a)Lt} - 1 \right). \quad (5.32)$$

Al comparar la ec. (5.32) con la ec. (5.16) para coste lineal,  $\gamma^\bullet = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2\alpha - (L - 2a)}{Lt} - 1 \right)$ , se observa que el valor de  $\gamma^\bullet$  es menor para el coste cuadrático que para el lineal.

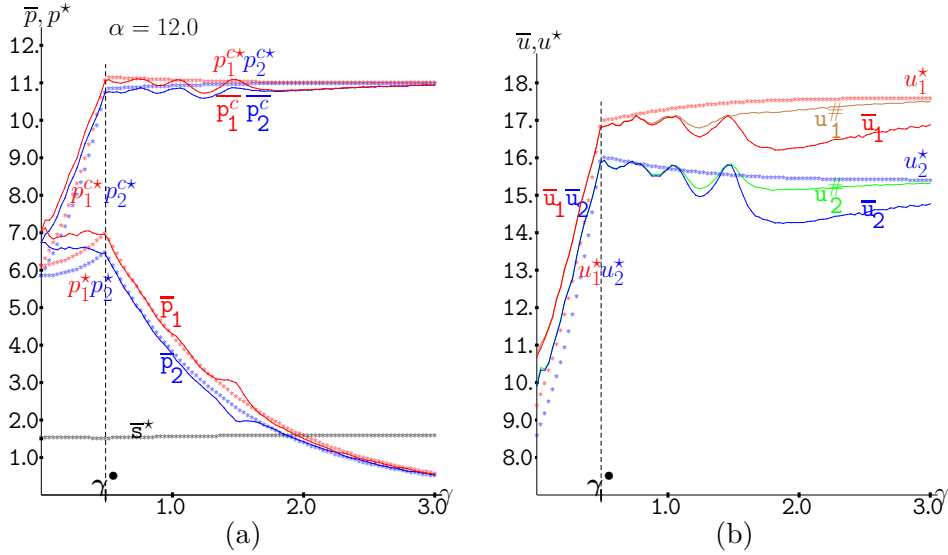
En el caso más complejo del juego no simétrico ( $a \neq b$ ), se ha utilizado el método de Newton-Raphson para el cálculo del valor de  $\gamma^\bullet$ . En la tab. 5.3 se recoge el cálculo para la simulación de la fig. 5.24 con el cambio de variable  $y = e^{2\gamma}$ , de tal modo que la ec. (5.31) se convierte en  $f(y) = t(x_1 + x_2 - L)^2(y + 1)^2 + [(x_2 - x_1)(2Lt(y + 1) + t(x_2 - x_1)) - 4\alpha](y +$

$2)^2 = 0$ . En la primera iteración, se ha considerado  $\gamma_1^\bullet = 0.5$  y, por tanto,  $y_1 = e^1 = 2.7182$ . Tras varias iteraciones, se observa que el método converge, resultando que  $y = 1.1651$  y  $\gamma^\bullet = 0.5 \ln(1.1651) = 0.0764$ .

**Tabla 5.3:** Cálculo de  $\gamma^\bullet$  por el método de Newton-Raphson para el juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha = 7.5$ .  $x_1 = 0.6$ ,  $x_2 = 2.6$ .  $L = 3.0$ ,  $t = 1.0$ .

$y_n$	$f(y)$	$f'(y)$	$y_{n+1}$	$\gamma_{n+1}^\bullet$
2.7182	415.0611	443.1466	1.7816	0.2887
1.7816	105.8492	227.6505	1.3166	0.1375
1.3166	20.0193	144.1333	1.1778	0.0818
1.1778	1.5389	122.2044	1.1652	0.0764
1.1652	0.0120	120.2848	1.1651	0.0764

La fig. 5.26 considera el juego cuántico de 12-HOT2 en el intervalo  $[0, 3.0]$  de  $\gamma$ , donde los gráficos de  $(p^*, u^*)$  muestran los resultados teóricos en EN. A partir de la ec. (5.29), se deduce que  $p^\bullet = 12.0 - [(2.6 - 0.6)/2]^2 = 11.000$ ;  $(u_1^\bullet, u_2^\bullet) = (17.600, 15.400)$ . Análogamente al caso de la fig. 5.24, por el método de Newton-Raphson se obtiene que  $\gamma^\bullet = 0.4900$  en la fig. 5.26. En el intervalo  $[0, \gamma^\bullet]$ , los precios y beneficios medios alcanzados por la simulación están por encima de los teóricos para valores de  $\gamma$  bajos, pero tienden a converger cuando se aproximan a  $\gamma^\bullet$ . Estos resultados son análogos cualitativamente a los reportados con coste de desplazamiento lineal en la fig. 5.14.



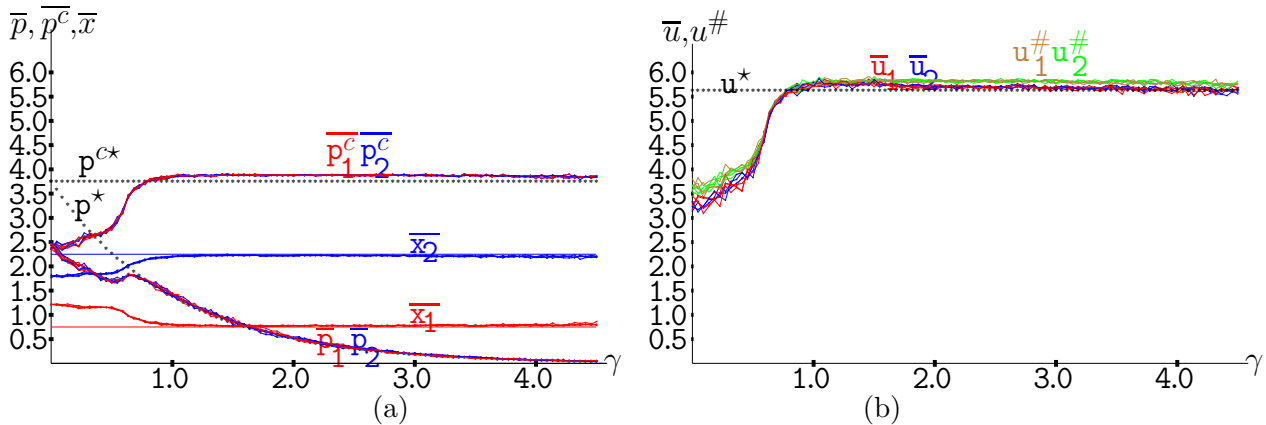
**Figura 5.26:** Simulación del juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha = 12.0$  con coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T = 200$ .  $x_1 = 0.6$ ,  $x_2 = 2.6$ .  $L = 3.0$ ,  $t = 1.0$ . (a) Precios independientes y entrelazados  $(\bar{p}, \bar{p}^c)$ . (b) Beneficios obtenidos en la simulación  $(\bar{u})$  y de campo medios  $(u^\#)$ . Los gráficos de  $(p^*, u^*)$  muestran los resultados teóricos en equilibrio de Nash.

La localización del consumidor indiferente,  $\bar{s}^*(\gamma)$  no varía significativamente en el modelo con coste de desplazamiento cuadrático. Su expresión viene dada por la ec. (5.33) para  $\gamma \leq \gamma^\bullet$  con  $\bar{s}^*(0) = (L+k)/2 = 1.533$  y, a partir de  $\gamma = \gamma^\bullet$ , converge a  $\bar{s}^*(\gamma \rightarrow \infty) = (L+(a-b))/2 = 1.600$ . En el caso concreto de la fig. 5.26, se obtiene que  $\bar{s}^*(\gamma^\bullet) = 1.521$ .

$$\bar{s}^*(\gamma) = \frac{1}{2} \left( L + \frac{a-b}{2+e^{2\gamma}} \right), \gamma \leq \gamma^* \quad (5.33)$$

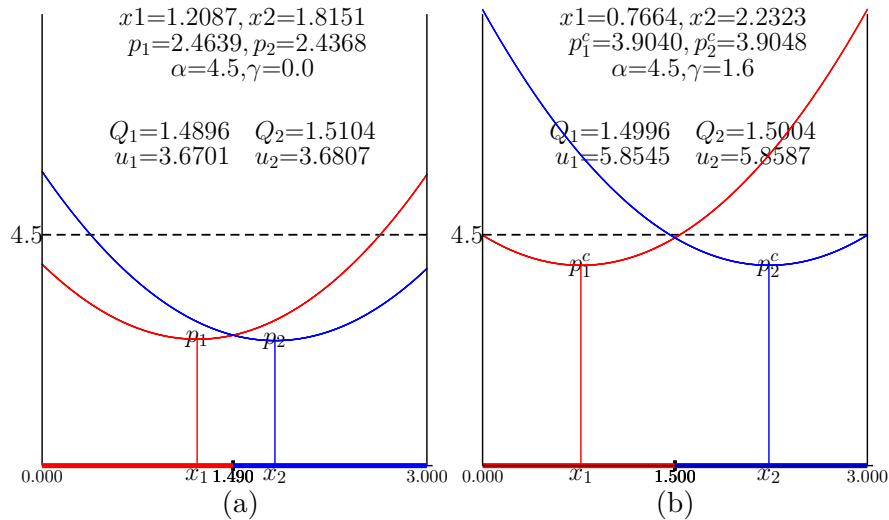
## Simulación con localización y precio variables

La fig. 5.27 muestra la simulación en localización-precio del juego cuántico de 4.5-HOT2 en cinco simulaciones para  $T=300$  con una retícula con  $N=800$  y  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ , es decir, el caso análogo a la fig. 5.17 con coste de desplazamiento cuadrático. Los gráficos de la fig. 5.27 evolucionan con  $\gamma$  como en la fig. 5.17 desde un punto de vista cualitativo. De este modo, *i*) en la fig. 5.27(a), los precios independientes medios de ambos jugadores disminuyen monótonamente hacia cero a medida que  $\gamma$  aumenta, mientras que los precios entrelazados medios aumentan a medida que  $\gamma$  comienza a crecer, pero se vuelven bastante estables desde aproximadamente  $\gamma=1.0$ , al igual que ocurre con la localización media de los jugadores ( $\bar{x}$ ) aproximadamente en ese mismo valor; *ii*) en la fig. 5.27(b), los beneficios medios de ambos jugadores ( $\bar{u}$ ) también se vuelven bastante estables desde aproximadamente  $\gamma=1.0$  y, además, ambos jugadores obtienen resultados similares. Se observa que los beneficios de campo medios son ligeramente superiores a los obtenidos en la simulación.



**Figura 5.27:** Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=300$  para cinco configuraciones de localización-precio iniciales.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Localización media de los jugadores ( $\bar{x}$ ) y precios independientes y entrelazados ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ). (b) Beneficios medios de la simulación ( $\bar{u}$ ) y de campo medios ( $u^\#$ ). Los gráficos de ( $p^*$ ,  $u^*$ ) muestran los resultados teóricos en equilibrio de Nash cuando  $a=b=L/4=0.75$ .

La fig. 5.28 muestra el juego de 4.5-HOT2 cuando se alcanzan los precios estacionarios en la simulación de la fig. 5.27 para dos valores de entrelazamiento  $\gamma$  diferentes. La fig. 5.28(a) muestra que, en el escenario clásico ( $\gamma=0$ ), los resultados están lejos de ser óptimos. Por el contrario, la fig. 5.28(b) muestra que, con el escenario cuántico en  $\gamma=1.6$ , surge la solución del OP, con localizaciones de los jugadores próximas a  $L/4=0.75$  y  $3L/4=2.25$ . Si  $x_1 = L/4$  y  $x_2 = 3L/4$  con  $p_1 = p_2$ , se cumple que  $\bar{s} = L/2$ , de modo que las ecs. (5.25) proporcionan la solución del OP,  $p_1^\bullet = p_2^\bullet = \alpha - t(L/4)^2$ . En el caso particular de  $L=3.0$ ,  $\alpha=4.5$  y  $t=1.0$ , el OP viene dado por  $p_1^\bullet = p_2^\bullet = 3.9375$ , valor muy próximo al de los precios  $p_i^c$ ,  $i = 1, 2$  en la fig. 5.28(b).



**Figura 5.28:** El juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  y coste cuadrático.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\gamma=0.0$ . (b)  $\gamma=1.6$ .

Si  $a = b$ , entonces  $\bar{s}^* = L/2$ , y los precios y beneficios en EN con coste de desplazamiento cuadrático vienen dados por las ecs. (5.34). Los precios teóricos y los beneficios con  $a=b=0.75$  se representan en la fig. 5.27 por medio de  $(p^*, u^*)$ , respectivamente. Concuerdan con las ecs. (5.34b), ya que  $\alpha=4.5$  es menor que el valor de  $e(\bar{s}^*)$  en el juego clásico. Como resultado de ello, en la fig. 5.27 se obtiene que  $p_{1,2}^{c*} = h/2 = 7.5/2 = 3.75$ ,  $u_{1,2}^{c*} = hL/4 = 7.4 \cdot 3.0/4 = 5.625$ .

$$p_{1,2}^* = (L-2a) \cosh \gamma Lt, \quad p_{1,2}^{c*} = (L-2a) \cos \gamma e^\gamma Lt, \quad u_{1,2}^{c*} = (L-2a) \cos \gamma e^\gamma L^2 t/2, \quad \gamma \leq \gamma^\bullet. \quad (5.34a)$$

$$p_{1,2}^* = \frac{he^{-\gamma}}{2}, \quad p_{1,2}^{c*} = \frac{h}{2}, \quad u_{1,2}^{c*} = \frac{hL}{4}, \quad \gamma \geq \gamma^\bullet. \quad (5.34b)$$

donde

$$h = 2\alpha - (L-2a)t, \quad \gamma^\bullet = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{h}{Lt} - 1 \right). \quad (5.35)$$

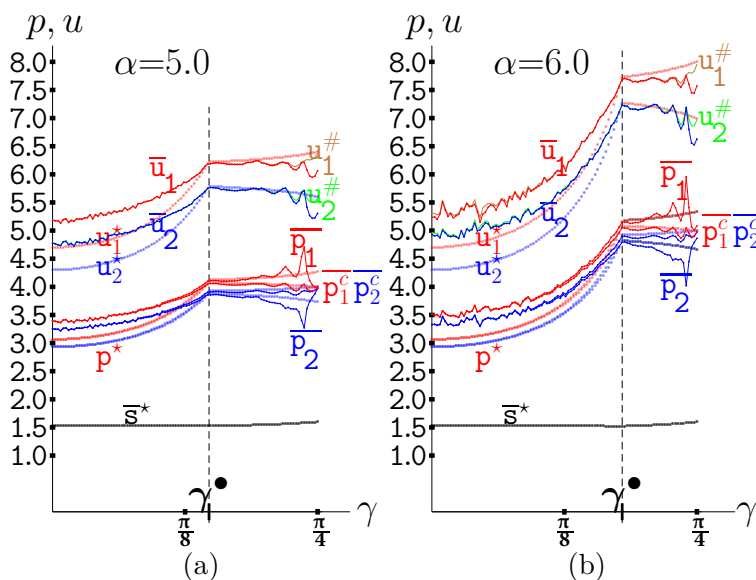
## 5.5. Entrelazamiento trigonométrico

Esta sección presenta el entrelazamiento cuántico bajo el enfoque de Frackiewicz (2016), es decir, con  $w_1 = \cos^2 \gamma$ ,  $w_2 = \sin^2 \gamma$ ,  $\gamma \in [0, \pi/2]$ . Bajo este esquema de entrelazamiento, de acuerdo con (5.2), se cumple que  $p_1^c + p_2^c = p_1 + p_2$ , y el consumidor indiferente en el juego de Hotelling se ubica en  $\bar{s}(\gamma)$ , que viene dado por la ec. (5.36)<sup>[5.9]</sup>. Notar que la contribución de  $p_2 - p_1$  en  $\bar{s}$  tiende a disminuir con el incremento de  $\gamma$ .

$$\bar{s}(\gamma) = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{(p_2 - p_1) \cos 2\gamma}{t} \right). \quad (5.36)$$

## Simulación con localización fija

La fig. 5.29 muestra el efecto del entrelazamiento trigonométrico en los dos escenarios de la fig. 5.12. A diferencia de lo que sucede bajo el modelo de LDM en la fig. 5.12, en el caso del entrelazamiento de Frackiewicz los precios independientes no caen a cero, sino que aumentan aproximadamente en paralelo con los precios entrelazados. De hecho, ambos precios son indistinguibles hasta aproximadamente  $\gamma^\bullet$ . A partir de ese valor, ambos tipos de precios divergen en cierta medida, pero tienden a converger nuevamente en  $\gamma=\pi/4$ . Por su parte, los beneficios de campo medios difieren de los simulados medios cuando el grado de entrelazamiento es muy elevado. En cualquier caso, en ambas simulaciones los resultados obtenidos con un alto entrelazamiento en la fig. 5.29 son similares a los obtenidos en la fig. 5.12.



**Figura 5.29:** Simulación del juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=12.0$  y entrelazamiento trigonométrico  $\gamma$  variable en  $T=200$  con cinco configuraciones de precios iniciales.  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=5.0$ , (b)  $\alpha=6.0$ . Los gráficos de  $(p^*, u^*)$  muestran los resultados teóricos en equilibrio de Nash.

A partir de la ec. (5.16) con  $\Omega = \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} = \tan^2 \gamma$ , el valor de  $\gamma^\bullet$  viene dado por la ec. (5.37). El entrelazamiento crítico  $\gamma^\bullet$  aumenta con  $\alpha$  y es igual a cero cuando  $1 - \frac{2Lt}{h} = 0$ , es decir, cuando  $\alpha = (L + (L - a - b)/2)t = e(\bar{s}^*, \gamma=0.0)$ . En la fig. 5.29(a) con  $\alpha=5.0$ , resulta que  $\gamma^\bullet=0.4636$ , mientras que en a fig. 5.29(b) con  $\alpha=6.0$ ,  $\gamma^\bullet=0.5639$ .

$$\gamma^\bullet = \arctan \left( \sqrt{1 - \frac{2Lt}{h}} \right), \quad h = 2\alpha - (L - a - b)t. \quad (5.37)$$

Los precios independientes en EN en el modelo de Frackiewicz vienen dados por la ec. (5.38). En la fig. 5.29, los precios independientes medios están por encima de los teóricos  $p^*$  para  $\gamma < \gamma^\bullet$ , y como consecuencia de ello, los beneficios también lo están. Esto es particularmente cierto con un factor de entrelazamiento bajo pero, a medida que  $\gamma$  crece, la

diferencia entre los precios simulados y teóricos tiende a disminuir y a converger en  $\gamma = \gamma^\bullet$ .

$$(p_1^*(\gamma), p_2^*(\gamma)) = \frac{\cos^2 \gamma}{\cos 2\gamma} \left( L + k(\gamma), L - k(\gamma) \right) t, \quad \gamma \leq \gamma^\bullet, \quad (5.38a)$$

$$(p_1^*(\gamma), p_2^*(\gamma)) = \frac{h}{2L} \left( L + k(\gamma), L - k(\gamma) \right) t, \quad \gamma \geq \gamma^\bullet, \quad (5.38b)$$

donde

$$k(\gamma) = \frac{a - b}{4 \cos^2 \gamma - 1}. \quad (5.39)$$

La ec. (5.38a) y la ec. (5.38b) se igualan cuando se cumple  $\frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma} = \frac{h}{2Lt}$ , lo que da lugar a la expresión del  $\gamma$  crítico de la ec. (5.37). Si no existe límite de coste, las ecs. (5.38a) aplican en el intervalo completo  $[0, \pi/4]$ . En tal escenario, la pendiente de los beneficios independientes de ambos jugadores crece extremadamente con alto entrelazamiento de tal manera que divergen en  $\gamma = \pi/4$  donde se cumple que  $\cos 2\gamma = 0$ .

Como en el modelo de LDM, la ubicación del consumidor indiferente  $\bar{s}^*(\gamma)$  en el esquema de Frackiewicz, dado por las ecs. (5.40)<sup>[5.10]</sup>, no varía significativamente, puesto que  $\bar{s}^*(0) = (L + k)/2 = 1.5\hat{3}$  y, a partir de  $\gamma = \gamma^\bullet$ ,  $\bar{s}^*$  converge a  $(L + (a - b))/2 = 1.600$ .

$$\bar{s}^*(\gamma) = \frac{1}{2} \left( L + a - b - 2 \frac{\cos^2 \gamma}{\cos 2\gamma} k(\gamma) \right), \gamma \leq \gamma^\bullet; \quad \bar{s}^*(\gamma) = \frac{1}{2} \left( L + a - b - \frac{h}{L} k(\gamma) \right), \gamma \geq \gamma^\bullet. \quad (5.40)$$

## Simulación con localización y precio variables

La fig. 5.30 muestra el juego cuántico de 4.5-HOT bajo el esquema de Frackiewicz en una simulación en localización-precio con  $T=300$ . A diferencia de lo que sucede bajo el enfoque cuántico de LDM en la fig. 5.17, con el entrelazamiento de Frackiewicz los precios independientes no llegan a cero, sino que se mantienen estables hasta poco después de  $\gamma = \pi/8$  y, a partir de ese valor, comienzan a crecer, como se observa en la fig. 5.29(a). Los precios entrelazados y los simulados medios se confunden prácticamente en la gráfica, ya que sus valores son similares. De hecho, en el esquema de Frackiewicz, si  $p_1 = p_2 = p$ , entonces se cumple que  $p_1^c = p_2^c = p(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = p$ . Las localizaciones medias de los jugadores ( $\bar{x}$ ) permanecen estables hasta aproximadamente  $\gamma = \pi/8$ , luego divergen muy ligeramente y, en un valor muy alto del factor de entrelazamiento, ambas comienzan a separarse más notablemente, de modo que, en  $\gamma = \pi/4$ ,  $\bar{x}_1 = 0.8273$  y  $\bar{x}_2 = 2.1674$ . Con entrelazamiento máximo, los valores de los beneficios en la fig. 5.29(b) son  $\bar{u}_1 = 5.3097$  y  $\bar{u}_2 = 5.3332$ , similares a los alcanzados en la fig. 5.17 ya en  $\gamma = 2.0$  (como se muestra en la tab. 5.2).

Si  $a = b$ , entonces  $\bar{s}^* = L/2$  y, con entrelazamiento trigonométrico, las ecs. (5.10) se convierten en las las ecs. (5.41). De acuerdo con la ec. (5.41b) y la ec. (5.42), en la fig. 5.30 se cumple que  $\gamma^\bullet = 0.421$ , y  $p_{1,2}^* = p_{1,2}^{c*} = 3.75$ ,  $u_{1,2}^* = 5.625$  cuando  $\gamma > \gamma^\bullet$ , es decir, los mismos precios y beneficios para valores elevados de entrelazamiento que en el esquema de LDM. Los gráficos de  $(p^*, u^*)$  en la fig. 5.30 muestran los precios teóricos en EN y sus beneficios

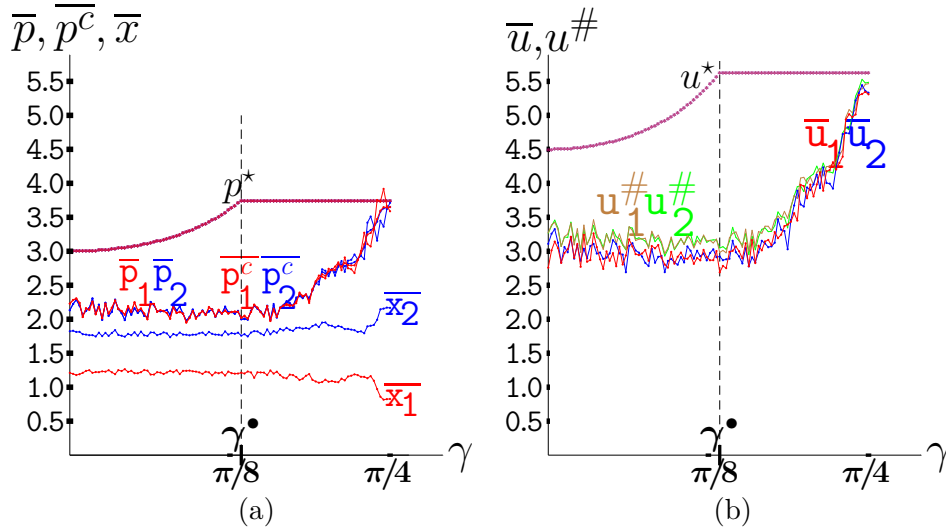
asociados en el juego con  $a=b=0.75$ ,  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ , donde  $\gamma^\bullet = \arctan\left(\sqrt{1 - \frac{6}{7.5}}\right) = 0.4025$ , próximo a  $\pi/8=0.3927$ .

$$p_{1,2}^* = p_{1,2}^{c*} = \frac{\cos^2 \gamma}{\cos 2\gamma} Lt, \quad u_{1,2}^{c*} = \frac{\cos^2 \gamma}{\cos 2\gamma} L^2 t / 2, \quad \gamma \leq \gamma^\bullet, \quad (5.41a)$$

$$p_{1,2}^* = p_{1,2}^{c*} = \frac{h}{2}, \quad u_{1,2}^{c*} = \frac{hL}{4}, \quad \gamma \geq \gamma^\bullet, \quad (5.41b)$$

donde

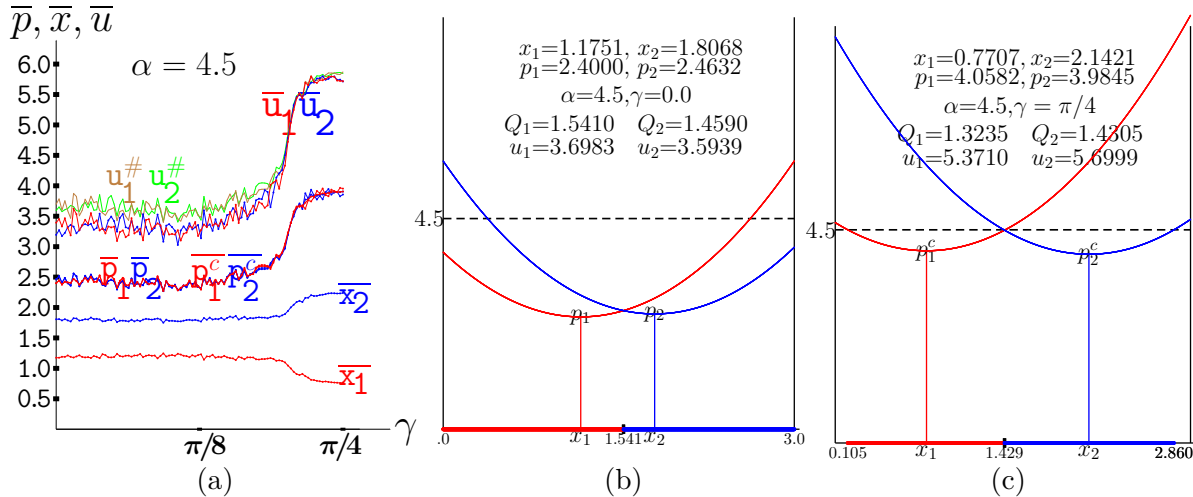
$$h = 2\alpha - (L - 2a)t, \quad \gamma^\bullet = \arctan\left(\sqrt{1 - \frac{2Lt}{h}}\right). \quad (5.42)$$



**Figura 5.30:** Simulación en localización-precio del juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  y entrelazamiento trigonométrico  $\gamma$  variable en  $T=300$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Localización promedio de los jugadores ( $\bar{x}$ ) y precios independientes y entrelazados medios ( $\bar{p}, \bar{p}^c$ ). (b) Beneficios medios simulados ( $\bar{u}$ ) y de campo medios ( $u^\#$ ). Los gráficos de ( $p^*, u^*$ ) muestran los resultados teóricos en equilibrio de Nash para  $a=b=L/4=0.75$ .

La fig. 5.31 considera el escenario análogo al de la simulación de las figs. 5.27-5.28 pero bajo el esquema cuántico de Frackiewicz o también puede interpretarse como el escenario de la simulación de la fig. 5.30 con coste de desplazamiento cuadrático.

Las características principales de los gráficos en la fig. 5.31(a) son las observadas en la fig. 5.30. En particular, las localizaciones promedio de los jugadores ( $\bar{x}$ ) permanecen estables hasta aproximadamente  $\gamma=\pi/8$ , a continuación divergen muy ligeramente y, en un valor muy alto del factor de entrelazamiento, se separan apreciablemente, de modo que en  $\gamma=\pi/4$  se cumple que  $\bar{x}_1=0.7665$  y  $\bar{x}_2=2.2390$ , valores muy próximos a  $L/4=0.75$  y  $3L/4=2.25$ . La fig. 5.31(b) y la fig. 5.31(c) muestran el juego clásico y el juego con un entrelazamiento de  $\gamma=\pi/4$ , respectivamente. En concreto, en la fig. 5.31(c) se observa que el entrelazamiento parece inducir el OP, aunque sorprendentemente existen pequeñas porciones en los extremos del mercado donde no existe demanda del producto.



**Figura 5.31:** Simulación en localización-precio del juego cuántico de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$ , coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento trigonométrico  $\gamma$  variable en  $T=300$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Localización promedio de los jugadores ( $\bar{x}$ ) y precios independientes y entrelazados medios ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ); beneficios medios simulados ( $\bar{u}$ ) y beneficios de campo medios ( $u^\#$ ). (b) El juego en  $\gamma=0.0$ . (c) El juego en  $\gamma=\pi/4$ .

## 5.6. Conclusiones

La simulación numérica con interacción local resulta ser una poderosa herramienta para examinar el comportamiento del juego cuántico de  $\alpha$ -HOT. Permite analizar cómo el aumento del entrelazamiento hace que emerja la solución del OP en el EN tanto en simulaciones del juego con precios variables y localizaciones fijas de los jugadores, como en el escenario más complejo con precios y localizaciones variables. En el último caso, los jugadores comparten el mercado, ubicándose ambos jugadores en posiciones próximas a  $(L/4, 3L/4)$ . Estos resultados generales se alcanzan con coste de desplazamiento lineal y cuadrático, en este último caso con una convergencia más precisa hacia la solución del OP con el aumento del factor de entrelazamiento. En la última parte del capítulo se ha analizado el juego cuántico bajo el esquema de Frackiewicz, obteniendo resultados similares a los alcanzados previamente con el modelo de LDM.

# Notas

[5.1] Se cumple que  $Q=2r = 2(\alpha - p)/t$ , de tal modo que el beneficio  $u = pQ$  se maximiza en el caso en que  $p^\bullet = \frac{\alpha}{2} \rightarrow Q^\bullet = \frac{\alpha}{t}$ . Se verifica en el caso en que  $r^\bullet = \frac{\alpha - p^\bullet}{t} \leq a \rightarrow \alpha_1 \leq 2at$ .

[5.2] Se puede expresar la diferencia de los precios efectivos o entrelazados en función de los precios independientes:  $p_2^c - p_1^c = p_2w_1 + p_1w_2 - (p_1w_1 + p_2w_2) = p_2(w_1 - w_2) - p_1(w_1 - w_2) = (p_2 - p_1)(w_1 - w_2)$ .

[5.3] El EN se obtiene de modo análogo al caso del juego clásico:  $u_1^c = p_1^c(Q_1(\gamma) = \bar{s}(\gamma))$ ,  $u_2^c = p_2^c(Q_2(\gamma) = (L - \bar{s}(\gamma)))$ ,  $\frac{\partial u_1(\gamma)}{\partial p_1} = 0 \cap \frac{\partial u_2(\gamma)}{\partial p_2} = 0 \rightarrow p_1^*(\gamma), p_2^*(\gamma)$ .

[5.4] El EN para  $\gamma > \gamma^\bullet$  se obtiene considerando que se debe cumplir:  $e(s) = \alpha \rightarrow p_1^c + (s - a)t = \alpha$ ,  $p_2^c + (L - b - s)t = \alpha$ ,  $\rightarrow p_1^c + p_2^c = 2\alpha - (L - b - a)t \rightarrow (p_1 + p_2)(w_1 + w_2) = h$ .

Además, teniendo en cuenta que se mantiene la relación entre los precios independientes, se obtiene:  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{L+k(\gamma)}{L-k(\gamma)} \rightarrow (p_1 + \frac{L-k(\gamma)}{L+k(\gamma)}p_1)(w_1 + w_2) = h$ ,  $p_1(\frac{2L}{L+k(\gamma)})(w_1 + w_2) = h$ .

[5.5] Para  $\gamma \geq \gamma^\bullet$ , se cumple que:  $p_2^*(\gamma) - p_1^*(\gamma) = \frac{he^{-\gamma}}{2L}[-2k(\gamma)]$ . A partir de la expresión anterior, se obtiene la localización del consumidor indiferente cuando  $\gamma \geq \gamma^\bullet$ ,  $\bar{s}^*(\gamma) = \frac{1}{2}(L + a - b + \frac{(p_2^*(\gamma) - p_1^*(\gamma))e^{-\gamma}}{t}) = \frac{1}{2}(L + a - b - \frac{he^{-\gamma}}{Lt} \frac{(a-b)e^{2\gamma}}{2+e^{2\gamma}})$ .

[5.6] Si igualamos las expresiones del consumidor indiferente para  $\gamma \leq \gamma^\bullet$  y  $\gamma \geq \gamma^\bullet$ , se demuestra que obtenemos la expresión de  $\gamma^\bullet$ :  $\frac{1}{2}(L + \frac{a-b}{2+e^{2\gamma}}) = \frac{1}{2}(L + a - b - \frac{h(a-b)}{L(2+e^{2\gamma})t}) \rightarrow \frac{a-b}{2+e^{2\gamma}} = a - b - \frac{h(a-b)}{L(2+e^{2\gamma})t} \rightarrow \frac{1}{2+e^{2\gamma}} = 1 - \frac{h}{L(2+e^{2\gamma})t} \rightarrow 1 = 2 + e^{2\gamma} - \frac{h}{Lt} \rightarrow e^{2\gamma} = \frac{h}{Lt} - 1$ .

[5.7] El OP en las distintas regiones existentes, dependiendo del valor de  $\alpha$ , viene dado por las siguientes expresiones:

- $\underline{\alpha \leq \alpha_1}$ :  $Q = 2(\alpha - p)$ ,  $u = 2(\alpha - p)p$ ,  $u'/2 = (\alpha - p) - p \rightarrow p^\bullet = \frac{1}{2}\alpha \rightarrow Q^\bullet = 2(\alpha - \frac{\alpha}{2}) = \alpha$ .  
 $\alpha - p^\bullet = a \rightarrow \alpha_1 = 2a$ .
- $\underline{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2}$ :  $Q = 2a$ ,  $p^\bullet = \alpha - a$ .
- $\underline{\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3}$ :  $Q = a + \alpha - p$ ,  $u'/2 = a + \alpha - p - p \rightarrow p^\bullet = (\alpha + a)/2 \rightarrow Q^\bullet = a + \alpha - (\alpha + a)/2 = (\alpha + a)/2$ .  
 $\alpha - p^\bullet = a \rightarrow \alpha_2 = 3a$ .  $Q^\bullet = (\alpha + a)/2 = L/2 \rightarrow \alpha_3 = L - a$ .
- $\underline{\alpha \geq \alpha_3}$ :  $Q = L/2$ ,  $p^\bullet = \alpha - (L/2 - a)$ . Si  $a > L/4$ ,  $a$  debe sustituirse por  $L/2 - a$  en la ec. (5.19).

[5.8] Como se tratará en detalle en la sec. 8, donde se analizará el juego con localizaciones próximas de los jugadores,  $p^\bullet$  es el precio que cumple  $pL/2 = (p - (L - 2a)t)L$ , que se corresponde con el precio en la región donde no existe equilibrio o SCC. Es decir, es el precio resultante de igualar el beneficio que obtendría un jugador si su precio fuera el de equilibrio ( $p^\bullet L/2$ ) con el beneficio que obtendría el otro jugador si capturara todo el mercado ( $(p^\bullet - (L - 2a)t)L$ ).

[5.9] La expresión de los precios efectivos o entrelazados en función de los precios independientes se obtiene

del siguiente modo:  $p_2^c - p_1^c = p_2 w_1(\gamma) + p_1 w_2(\gamma) - (p_1 w_1(\gamma) + p_2 w_2(\gamma)) = p_2(w_1(\gamma) - w_2(\gamma)) - p_1(w_1(\gamma) - w_2(\gamma)) = (p_2 - p_1)(w_1(\gamma) - w_2(\gamma))$ ,  $w_1(\gamma) - w_2(\gamma) = \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma = \cos 2\gamma$ .

<sup>[5.10]</sup> Ambas expresiones de  $\bar{s}^*(\gamma)$  se igualan cuando se cumple que  $\gamma = \gamma^\bullet$ :  $\frac{1}{2}(L + a - b - 2\frac{\cos^2 \gamma}{\cos 2\gamma} k(\gamma)) = \frac{1}{2}(L + a - b - \frac{h}{L} k(\gamma)) \rightarrow 2\frac{\cos^2 \gamma}{\cos 2\gamma} = \frac{h}{L} \rightarrow \frac{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} = \frac{2L}{h} \rightarrow 1 - \tan^2 \gamma = \frac{2L}{h}$ .

# Capítulo 6

## El juego clásico de Hotelling-Smithies

En este capítulo se estudia el modelo del juego de Hotelling donde, además de existir límite de coste, la demanda es elástica (variable), descrito previamente en la sec. 3.2.3, es decir, el juego de  $\alpha$ -HS. Se aborda únicamente el juego clásico, dejando para el capítulo siguiente el juego cuántico de  $\alpha$ -HS. En este contexto, la simulación del juego descrita previamente en la sec. 4.1, nos permitirá comprobar la veracidad de la solución analítica en el caso en que haya sido posible calcularla y explorar aquellos escenarios donde analíticamente no hayamos podido llegar a un resultado. Se estudian diversas variantes del juego, como es el caso de localizaciones fijas y precios variables, el de precios fijos y localizaciones variables, el monopolio o la versión con coste cuadrático. El contenido de esta sección está basado en el artículo relativo a este tema de Grau-Climent *et al.* (2022).

### 6.1. Simulación del juego clásico de Hotelling-Smithies

#### Simulación con localización fija

Consideremos el juego de 4.5-HS con localizaciones fijas de los jugadores  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$  ( $L=3$ ,  $t=1$ ). La fig. 6.1 representa un ejemplo de los valores de la simulación del juego de HS en las iteraciones iniciales y en la iteración  $T=100$  en un subconjunto de  $5 \times 5$  de toda la retícula de la fig. 4.1.

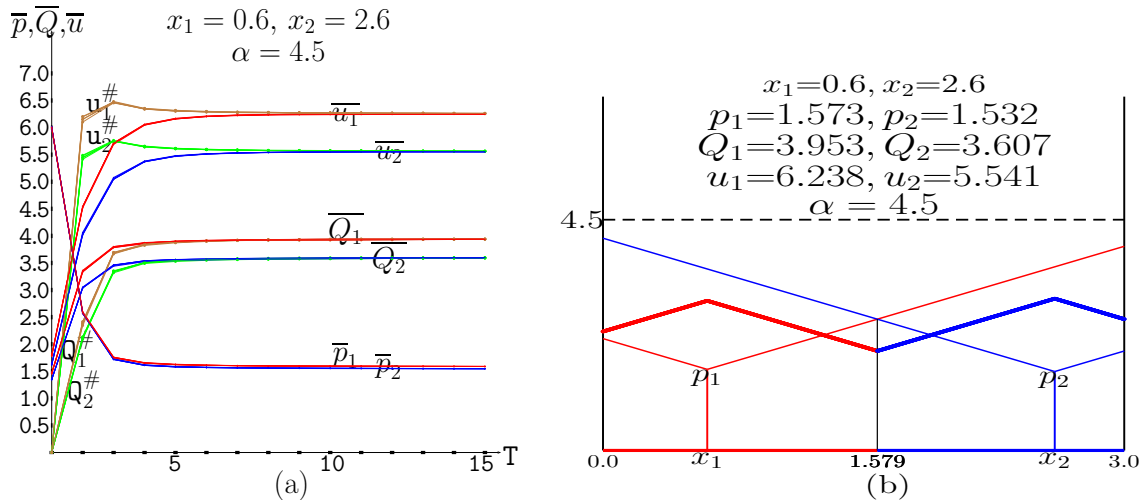
La fig. 6.1 muestra que en  $T=1$  muchas celdas obtienen cero beneficios al estar muchos precios por encima del límite de coste. Sin embargo, después de la primera actualización de los precios, en  $T=2$  sólo dos de las celdas mostradas obtienen beneficios nulos. En  $T=100$ , se observa como para los precios, demandas y beneficios se obtienen ya valores estables.

Siguiendo con el mismo ejemplo, la fig. 6.2(a) muestra la dinámica hasta  $T=15$ , donde los precios medios iniciales  $\bar{p}_{1,2} \simeq 6.0$  implican demandas y beneficios medios iniciales muy bajos. Durante las primeras iteraciones, los precios medios caen en picado, al contrario que las demandas y beneficios promedio, que se disparan. Sin embargo, estas fuertes tendencias iniciales pronto se interrumpen, de modo que los precios, demandas y beneficios medios se vuelven casi estacionarios antes de  $T=10$ . En el régimen estacionario,  $\bar{p}_1$  supera ligeramente a  $\bar{p}_2$  y  $\bar{Q}_1$  supera claramente a  $\bar{Q}_2$ , lo que induce que  $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$ . La razón última de que esto

$(p_1^1, p_2^1)$	$(Q_1^1, Q_2^1)$	$(u_1^1, u_2^1)$	$(p_1^2, p_2^2)$	$(Q_1^2, Q_2^2)$	$(u_1^2, u_2^2)$
7.5 7.2 10.5 9.0 7.9	0.0 0.0 0.0 0.0 3.5	0.0 0.0 0.0 0.0 0.0	1.4 0.9 1.4 2.6 3.0	4.3 5.5 4.8 2.0 1.6	6.0 5.2 6.7 5.2 4.6
2.3 1.4 6.6 7.6 4.8	2.9 5.9 0.0 0.0 0.1	6.7 8.4 0.0 0.0 0.0	2.3 1.4 3.5 2.9 2.2	1.9 5.0 0.2 1.8 2.9	4.3 7.1 0.7 5.1 6.5
10.7 3.5 0.6 8.0 2.9	0.0 0.4 8.8 0.0 2.0	0.0 0.0 1.5 4.9 0.0	1.4 2.3 1.4 2.6 2.2	5.2 1.8 5.5 1.9 3.5	7.4 4.1 7.7 4.9 7.7
8.8 11.9 2.6 2.2 8.8	0.0 0.0 1.7 3.8 0.0	0.0 0.0 4.4 8.2 0.0	3.5 0.9 2.6 2.2 4.3	0.0 7.0 1.6 3.4 0.0	0.0 6.4 4.1 7.5 0.1
0.9 5.0 2.9 6.7 6.7	7.7 0.0 2.0 0.0 0.0	7.7 0.0 5.8 0.0 0.0	0.9 2.6 2.2 2.6 2.2	7.5 1.3 3.4 2.0 3.6	6.9 3.2 7.5 5.2 7.7
	$(p_1^{100}, p_2^{100})$	$(Q_1^{100}, Q_2^{100})$	$(u_1^{100}, u_2^{100})$		
	1.6 1.6 1.6 1.5 1.6	4.0 3.6 4.0 3.6 4.0	6.3 5.5 6.3 5.5 6.2		
	1.6 1.6 1.6 1.6 1.5	3.6 4.0 3.6 4.0 3.6	5.5 6.3 5.5 6.2 5.5		
	1.6 1.6 1.6 1.5 1.6	4.0 3.6 4.0 3.6 4.0	6.3 5.5 6.3 5.5 6.2		
	1.6 1.6 1.6 1.6 1.5	3.6 4.0 3.6 4.0 3.6	5.5 6.3 5.5 6.2 5.5		
	1.6 1.6 1.6 1.5 1.6	4.0 3.6 4.0 3.6 4.0	6.3 5.5 6.3 5.5 6.2		

**Figura 6.1:** Precios, demandas y beneficios de las iteraciones iniciales e iteración  $T=100$  en un subconjunto de  $5 \times 5$  de toda la retícula en una simulación del juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=4.5$  y localizaciones fijas  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ .

sea así es que  $a > b$  en el ejemplo analizado. El resultado de cinco configuraciones de precios aleatorios iniciales se muestra en la fig. 6.2(a), pero tales simulaciones son indistinguibles. La fig. 6.2(b) muestra la representación del juego en una de las simulaciones de la fig. 6.2(a) con precios estacionarios en  $T=100$  (cuyos valores veíamos anteriormente en la fig. 6.1). La localización del consumidor indiferente,  $\bar{s}=1.579$ , permanece cercana a la del EN en el juego de Hotelling original, es decir,  $\bar{s}^*=1.533$ , pero los precios, las demandas y los pagos difieren de los mostrados en la fig. 3.5(b). El efecto de la variación de  $\alpha$  en este escenario se analiza más adelante en la fig. 6.12.



**Figura 6.2:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y localizaciones fijas de los jugadores  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=15$  en cinco simulaciones. (b) El juego con los precios medios estacionarios de una de las simulaciones en  $T=100$ .

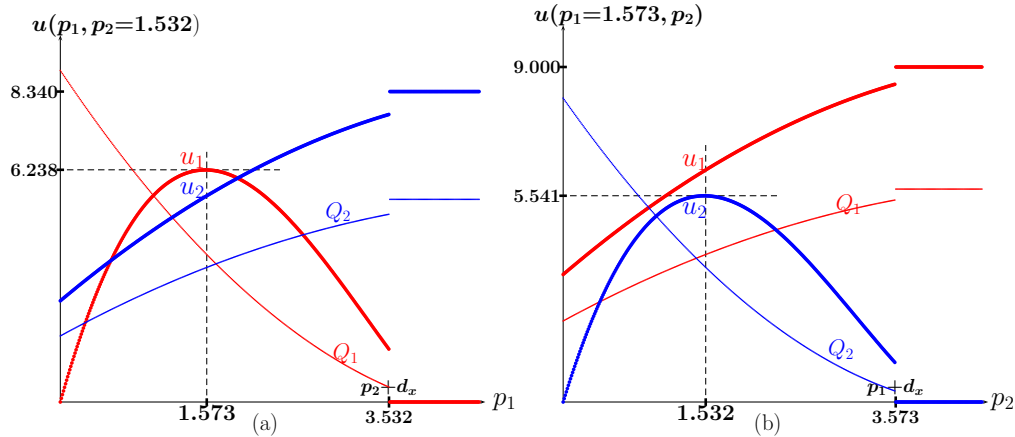
La fig. 6.2(a) muestra también los valores de campo medios de las demandas y los beneficios  $(Q^\#, u^\#)$  logrados en un escenario hipotético donde dos jugadores adoptan los precios medios  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$  que aparecen en la simulación numérica, lo que da lugar a las demandas dadas en las ecs. (6.1), donde  $\bar{s}^\# = \bar{s}(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ . Los valores de campo medios de las demandas y los beneficios están representados en color marrón para el jugador-1 y en color verde para el jugador-2. Se observa que, estos valores de campo medios, en las demandas y en los beneficios, sólo difieren de los valores medios de la simulación en las iteraciones iniciales, de modo que antes

de  $T=10$ , los valores de campo medios y los de la simulación coinciden.

$$Q_1^\# = (\alpha - \bar{p}_1)\bar{s}^\# + t(a\bar{s}^\# - \bar{s}^{\#2}/2 - a^2), \quad (6.1a)$$

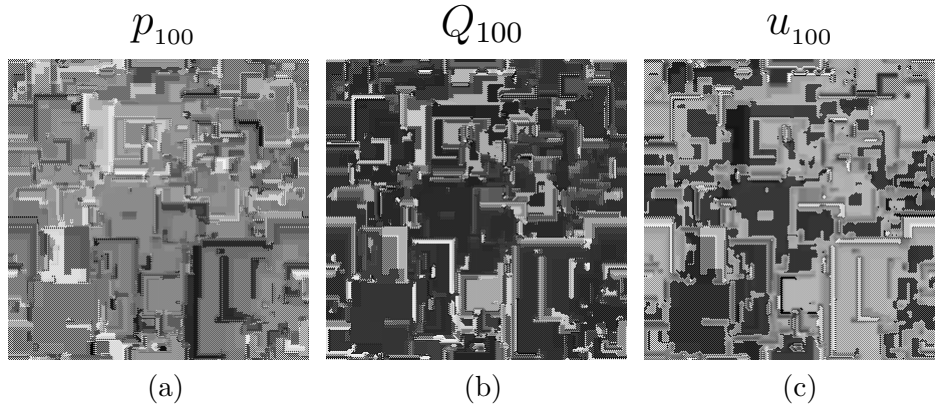
$$Q_2^\# = (\alpha - \bar{p}_2)(L - \bar{s}^\#) + t(b(L - \bar{s}^\#) - (L - \bar{s}^\#)^2/2 - b^2). \quad (6.1b)$$

La simulación proporciona una estimación muy precisa de la solución en EN, como confirman las funciones de respuesta de la fig. 6.3 en el juego reportado en la fig. 6.2(b):  $p_1=1.573$  es la mejor respuesta a  $p_2=1.532$  y  $p_2=1.532$  es la mejor respuesta a  $p_1=1.573$ .



**Figura 6.3:** Funciones de respuesta del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y localizaciones fijas de los jugadores  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Precio del jugador-1 ( $p_1$ ) variable, dado  $p_2=1.532$ . (b) Precio del jugador-2 ( $p_2$ ) variable, dado  $p_1=1.573$ .

La fig. 6.4 muestra los patrones de precio, demanda y beneficio en  $T=100$  en la simulación del juego de la fig. 6.2(b). Los tonos de gris más oscuros se asocian a valores crecientes. Los patrones presentan estructuras intrincadas similares a una compleja placa de circuito impreso.

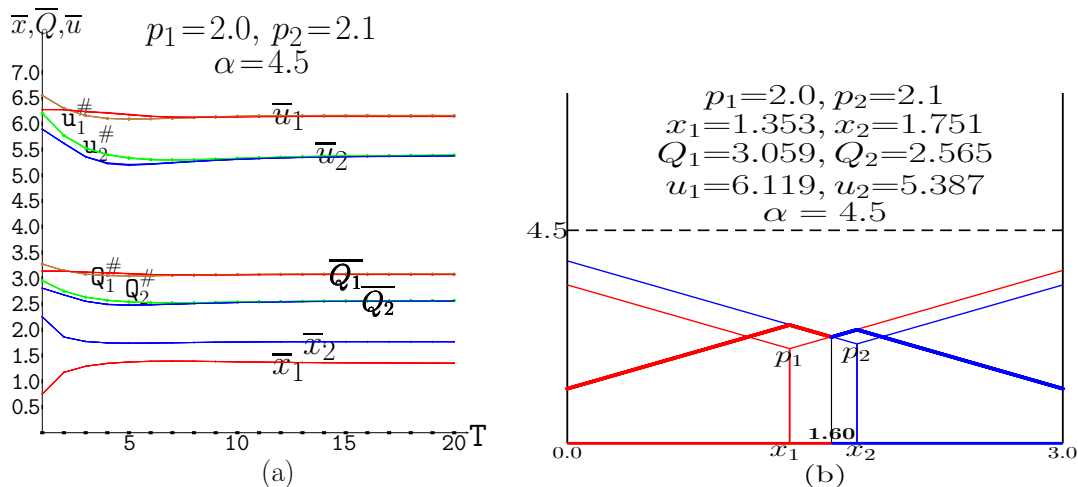


**Figura 6.4:** Patrones en  $T=100$  en la simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y localizaciones fijas de los jugadores  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Precios. (b) Demandas. (c) Beneficios. El aumento del nivel de intensidad del tono de gris se asocia a valores crecientes.  $p_{min}=1.413$ ,  $p_{max}=1.766$ ;  $Q_{min}=3.117$ ,  $Q_{max}=4.315$ ;  $u_{min}=5.364$ ,  $u_{max}=6.507$

### Simulación con precio fijo

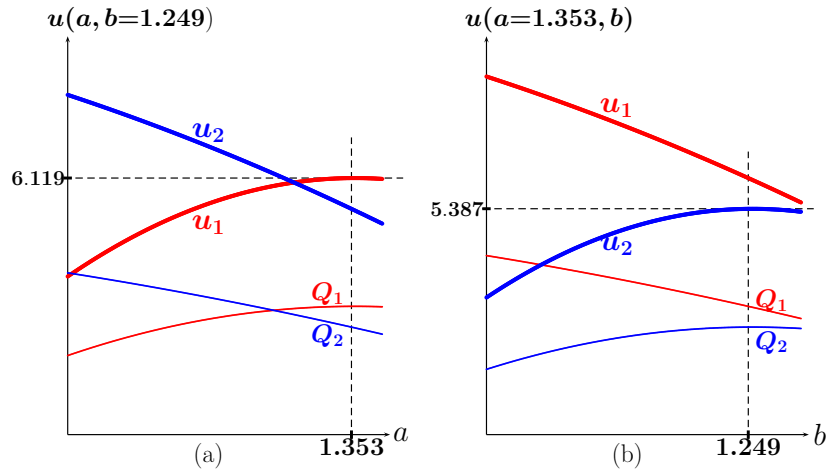
La fig. 6.5 muestra la simulación del juego de 4.5-HS con precios fijos de los jugadores  $p_1=2.0$ ,  $p_2=2.1$ . La fig. 6.5(a) muestra la dinámica hasta  $T=20$ , donde las localizaciones medias iniciales de ambos jugadores son  $\bar{x}_1 \simeq 0.75$ ,  $\bar{x}_2 \simeq 2.25$ , a partir de la asignación de valores aleatorios a la posición inicial. A diferencia de lo que sucede en la fig. 6.2, en la fig. 6.5 los beneficios iniciales no son muy bajos y son muy próximos a sus valores estacionarios, que se alcanzan rápidamente en la simulación. Los valores medios de las localizaciones y las demandas también se estabilizan pronto, con  $\bar{x}_1 \simeq 1.346 > 0.75$  y  $\bar{x}_2 \simeq 1.754 < 2.25$  en  $T=20$ . Las localizaciones alcanzadas en  $T=100$  se representan en el juego de la fig. 6.5(b). El efecto de la variación de  $\alpha$  en este escenario se analiza más adelante en la fig. 6.15.

Las localizaciones en EN para unos precios dados  $(p_1, p_2)$  y un valor de  $\alpha$  intermedio se corresponden con las de la ec. (6.8), que en el caso particular de  $(p_1=2.0, p_2=2.1)$  resultan ser  $(x_1^*=1.367, x_2^*=1.733)$ , valores muy próximos a los alcanzados en la simulación ( $\bar{x}_1=1.346, \bar{x}_2=1.754$ ). A partir de la ec. (6.8) obtenemos que se cumple que  $x_1^* + x_2^* = L + \frac{1}{t}(p_2 - p_1)$  (notar que no hay dependencia con  $\alpha$ ), de modo que  $\bar{s}^* = \frac{L}{2} + \frac{1}{t}(p_2 - p_1)$ . Como resultado de ello, si  $p_2 > p_1$ , se cumple que  $\bar{s}^* > L/2$ . Este es el caso de la fig. 6.5 donde  $p_2 - p_1 = 0.10$ , de modo que  $\bar{s}^* = 1.60$ , lo que induce un mayor beneficio para el jugador-1 (6.127 vs. 5.401), a pesar de tener un precio más bajo en comparación con el del jugador-2 (2.0 vs. 2.1), que se ve compensado con una mayor demanda (3.063 vs. 2.572).



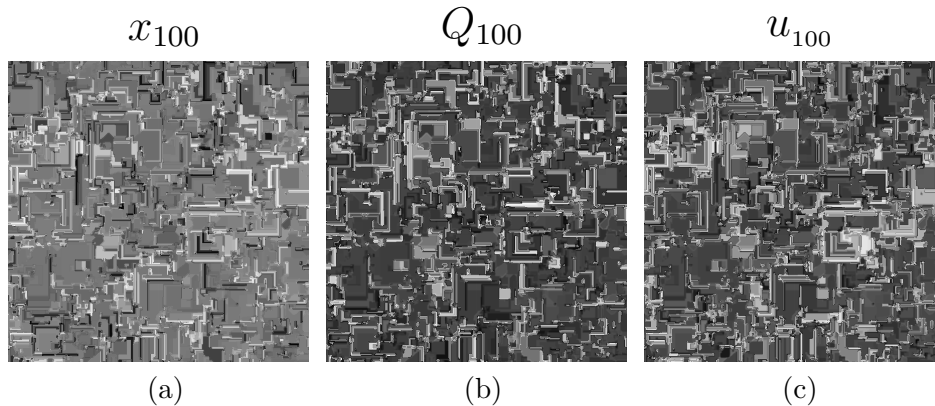
**Figura 6.5:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y precios fijos de los jugadores  $p_1=2.0$ ,  $p_2=2.1$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=20$  en cinco simulaciones. (b) El juego con las localizaciones medias estacionarios de una de las simulaciones en  $T=100$ .

La fig. 6.6 permite confirmar gráficamente la afirmación de que la simulación en localizaciones con precios fijos proporciona una estimación muy precisa del EN en el caso particular del juego reportado en la fig. 6.5(b):  $a=1.353$  es la mejor respuesta a  $b=1.249$  (fig. 6.6(a)), y  $b=1.249$  es la mejor respuesta a  $a=1.353$  (fig. 6.6(b)). Los valores exactos en EN son algo complejos de encontrar gráficamente debido a la amplia curvatura que presentan las funciones de respuesta. A diferencia de lo que sucede en la fig. 6.3, no aparece ninguna discontinuidad en las funciones de respuesta de la fig. 6.6.



**Figura 6.6:** Funciones de respuesta en el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y precios fijos de los jugadores  $p_1=2.0$ ,  $p_2=2.1$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Localización del jugador-1  $a$  variable, dado  $b=1.249$ . (b) Localización del jugador-2  $b$  variable, dado  $a=1.353$ .

Los patrones en  $T=100$  de la simulación del juego en la fig. 6.5(b) se muestran en la fig. 6.7. Como puede observarse, son muy similares a los de la fig. 6.4.

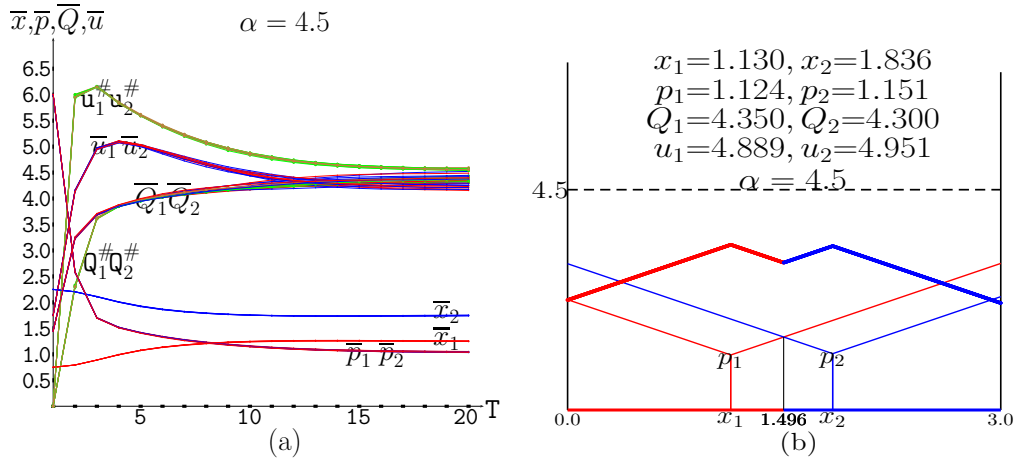


**Figura 6.7:** Patrones en  $T=100$  en la simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y precios fijos de los jugadores  $p_1=2.0$ ,  $p_2=2.1$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Localizaciones. (b) Demandas. (c) Beneficios. El aumento del nivel de intensidad del tono de gris se asocia a valores crecientes.  $x_{min}=1.041$ ,  $x_{max}=2.061$ ;  $Q_{min}=2.380$ ,  $Q_{max}=3.341$ ;  $u_{min}=4.998$ ,  $u_{max}=6.682$ .

### Simulación con localización y precio variables

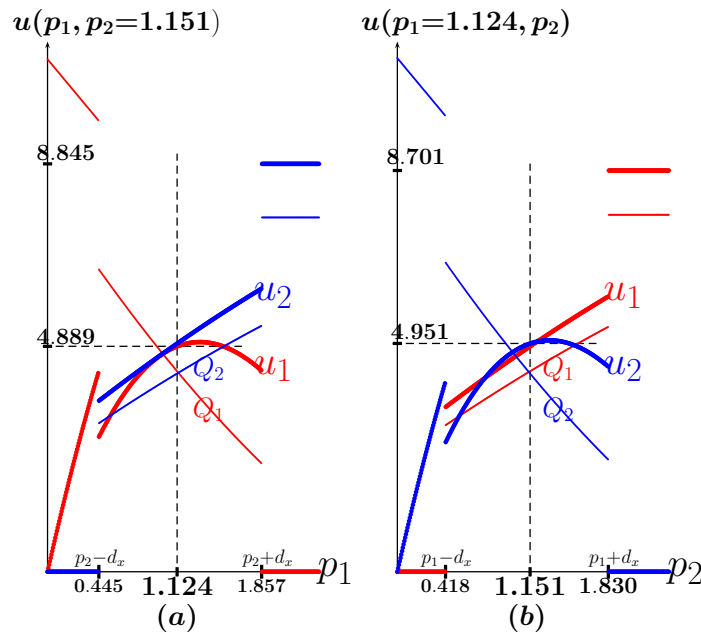
La fig. 6.8 trata la simulación del juego de 4.5-HS con localizaciones y precios variables. La fig. 6.8(a) muestra la dinámica hasta  $T=20$ , y la fig. 6.8(b), el juego con las posiciones y los precios medios estacionarias alcanzados en una simulación en  $T=300$ . Los precios, demandas y beneficios son muy similares para ambos jugadores a lo largo de las distintas iteraciones, mientras que las localizaciones medias tienden a aproximarse desde  $a=b=L/4=0.75$  hasta aproximadamente  $a=b=3L/8=1.125$ . El efecto de la variación de  $\alpha$  en este escenario se analiza más adelante en la fig. 6.16.

La fig. 6.9 muestra las funciones de respuesta ( $p_1$ ,  $p_2$ ) en el juego de la fig. 6.8(b). Por un lado, la fig. 6.9(a) muestra que  $p_1=1.124$  está muy cerca de ser la mejor respuesta a  $p_2=1.151$



**Figura 6.8:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y localizaciones y precios variables.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=15$  en cinco simulaciones. (b) El juego con las localizaciones y los precios medios estacionarios alcanzados en una simulación en  $T=100$ .

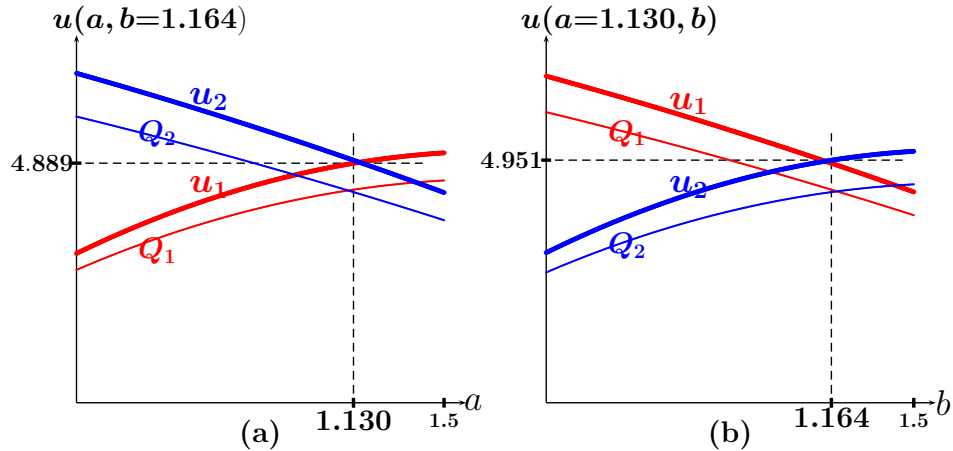
y, por otro lado, la fig. 6.9(b) muestra que  $p_2=1.151$  está muy cerca de ser la mejor respuesta a  $p_1=1.124$ . Cabe destacar que surgen dos discontinuidades en las funciones de respuesta: la inferior en  $p_i - (x_2 - x_1)$  y la superior en  $p_i + (x_2 - x_1)$ . Estos límites superior e inferior en los precios indican que un jugador captura la totalidad del mercado porque pone un precio significativamente menor que el otro.



**Figura 6.9:** Funciones de respuesta en precio para el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y localizaciones fijas  $x_1=1.130$ ,  $x_2=1.836$ . (a) Precio del jugador-1  $p_1$  variable, dado  $p_2=1.151$ . (b) Precio del jugador-2  $p_2$  variable, dado  $p_1=1.124$ .

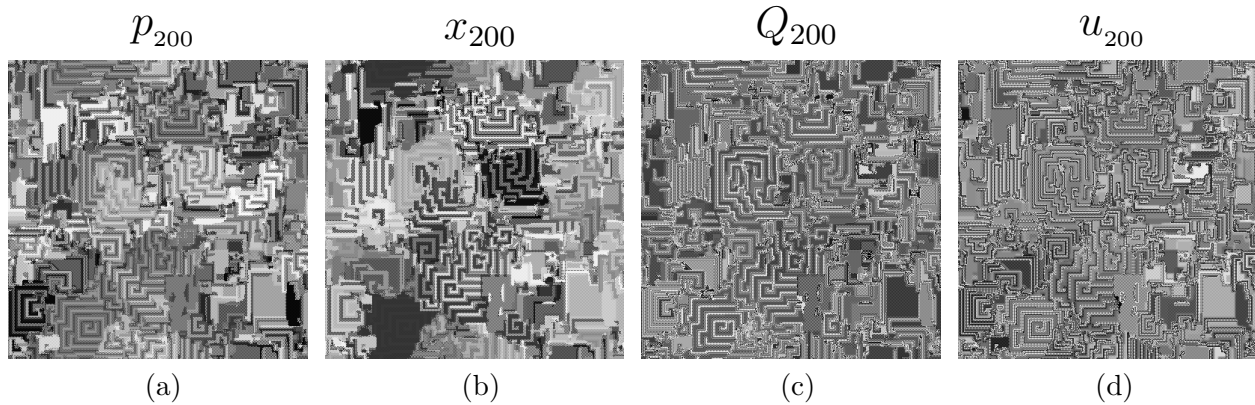
La fig. 6.10 muestra las funciones de respuesta (a, b) en el juego de la fig. 6.8(b). La fig. 6.10(a) muestra la respuesta a  $b=1.164$  y la fig. 6.10(b), la respuesta a  $a=1.130$ . Ambas subfiguras indican que la mejor la respuesta de posición es 1.5 en ambos casos en lugar

de los valores de  $a$  y  $b$  alcanzados en la simulación conjunta de localización-precio.



**Figura 6.10:** Funciones de respuesta en localización para para el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y precios fijos:  $p_1=1.124, p_2=1.151$ . (a) Localización del jugador-1  $a$  variable, dado  $b=1.164$ . (b) Localización del jugador-2  $b$  variable, dado  $a=1.130$ .

La fig. 6.11 muestra los patrones en  $T=200$  de la simulación del juego de la fig. 6.8(b). Los patrones de la fig. 6.11 presentan estructuras laberínticas, lo que hace que su aspecto sea bastante diferente a los de la fig. 6.4.



**Figura 6.11:** Patrones en  $T=200$  en la simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y localizaciones y precios variables.  $L=3.0, t=1.0$ . (a) Precios. (b) Localizaciones. (c) Demandas. (d) Beneficios. El aumento del nivel de intensidad del tono de gris se asocia a valores crecientes.  $p_{min}=0.417, p_{max}=1.703; x_{min}=0.727, x_{max}=2.248; Q_{min}=0.000, Q_{max}=10.000; u_{min}=0.000, u_{max}=8.826$ .

La variabilidad dentro de la retícula de precios, localizaciones, demandas y beneficios en cinco simulaciones en  $T=200$  del juego 4.5-HS, considerando localizaciones y precios variables, se cuantifica a través de la desviación estándar de estos parámetros del juego, tal y como se muestra en la tab. 6.1. Como ya se había observado al abordar la dinámica del juego, no se aprecian diferencias significativas en cuanto a la desviación estándar de precios y localizaciones en la tab. 6.1 debido al cambio de la asignación aleatoria inicial en las cinco simulaciones. En cambio, los valores de la desviación estándar no son despreciables en el caso las demandas

y los beneficios. Este hecho podemos decir que se podía haber esperado si se considera la fig. 6.8(a), donde las demandas y los beneficios de campo medios se aproximaban, pero no coincidían con los valores medios correspondientes a la simulación.

**Tabla 6.1:** Desviación estándar de los precios, localizaciones, demandas y beneficios de cinco simulaciones en localización-precio del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  en  $T=200$ .

$p_1$	$p_2$	$x_1$	$x_2$	$Q_1$	$Q_2$	$u_1$	$u_2$
0.339	0.326	0.205	0.202	2.228	2.160	1.489	1.601
0.304	0.372	0.258	0.223	2.167	2.346	1.779	1.443
0.323	0.362	0.213	0.223	2.102	2.272	1.682	1.396
0.344	0.281	0.204	0.220	2.315	2.087	1.329	1.667
0.371	0.334	0.200	0.198	2.305	2.247	1.507	1.678

### 6.1.1. Representación del juego en función del límite de coste

Esta sección estudia el efecto de la variación del límite de coste,  $\alpha$ , en el juego de HS. Se analizará el juego con localizaciones fijas y precios variables (fig. 6.12), con precios fijos y localizaciones variables (fig. 6.15) y, por último, con localizaciones y precios variables (fig. 6.16).

#### Simulación con localización fija

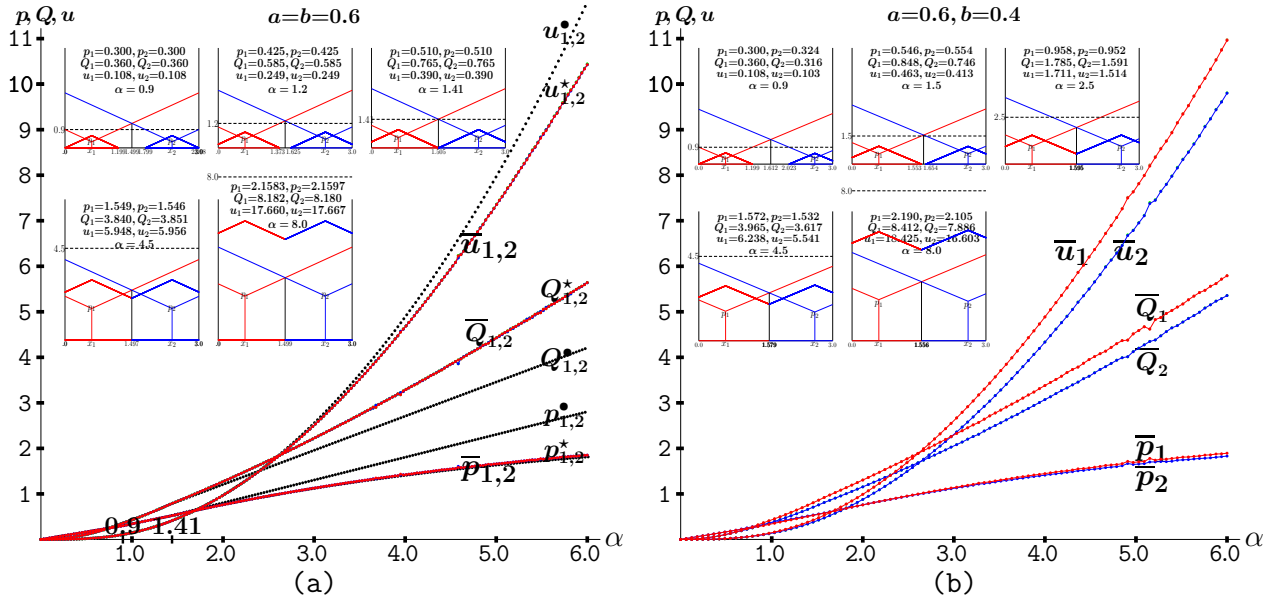
La fig. 6.12 representa el juego de HS con un límite de coste,  $\alpha$ , variable y localizaciones fijas:  $a=b=0.6$  (fig. 6.12-(a)); y  $a=0.6$ ,  $b=0.4$  (fig. 6.12(b)). En ambos escenarios, con valores muy bajos de  $\alpha$ , los jugadores no interactúan ya que las regiones de mercado de ambos jugadores son disjuntas (por ejemplo, con  $\alpha=0.9$  en el recuadro superior izquierdo de las dos casuísticas de la fig. 6.12). Por lo tanto, con valores de  $\alpha$  bajos, la simulación proporciona la solución del OP del juego, que puede encontrarse analíticamente optimizando el pago de cada jugador. En el caso particular de localización simétrica ( $a = b$ ), la solución del OP también será simétrica (ambos jugadores ponen el mismo precio y tienen idénticas demandas y beneficios), de modo que basta con optimizar el beneficio de uno de los jugadores.

$$a = b \leq L/4$$

Con  $a = b \leq L/4$ , para valores de  $\alpha$  muy bajos, el OP viene dado por la ec. (6.2)<sup>[6.1]</sup>, la versión con demanda elástica de la ec. (5.1). Así, en la fig. 6.12(a) tenemos que  $p_{1,2}^{\bullet} = \alpha/3$  si  $\alpha \leq \alpha_1 = 3 \cdot 0.6/2 = 0.9$ . El juego con  $\alpha=0.9$  se muestra en el recuadro superior izquierdo de la fig. 6.12(a), donde  $p = 0.9/3 = 0.30$ ,  $Q = (0.60)^2 = 0.360$ ,  $u = 0.3 \cdot 0.36 = 0.108$ .

$$\left(p_{1,2}^{\bullet}, Q_{1,2}^{\bullet}\right) = \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{1}{t} \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2\right) \quad \alpha \leq \alpha_1 = \frac{3}{2}at. \quad (6.2)$$

Los jugadores no interactúan en el intervalo intermedio  $[\alpha_1, \alpha_2]$  en el juego  $a = b$ ,  $t=1$  de la fig. 6.12(a), pero el precio de ambos jugadores en la solución del OP dada en la ec. (6.3)<sup>[6.2]</sup> cambia si la comparamos con la obtenida en  $\alpha \leq \alpha_1$ . Se puede comprobar que no hay



**Figura 6.12:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable y localizaciones fijas en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ . Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores medios en la simulación. Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  en trazo discontinuo representan el óptimo de Pareto. Los recuadros muestran el modelo con: (a)  $\alpha=0.9, 1.2, 1.41, 4.5, 8.0$ ; (b)  $\alpha=0.9, 1.5, 2.5, 4.5, 8.0$ .

discontinuidad de precios en  $\alpha = \alpha_1 = 3a/2$ , al sustituir el valor de  $\alpha_1$  en la ec. (6.2) para obtener  $p_{1,2}^*(\alpha_1) = (3a/2)/3 = a/2$ , que coincide con el valor resultante de hacer lo mismo en la ec. (6.3)<sup>[6.3]</sup>. En el ejemplo de la fig.6.12(a) tenemos que  $\alpha_2 = 3(3/4) - 0.6 - 2(0.6^2)/3 = 1.41$ .

$$p_{1,2}^* = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3(\alpha^2 + (2\alpha - a)a)}}{3}, \quad \lambda = 2(\alpha + a), \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 = 3\frac{L}{4} - a - 2\frac{a^2}{L}. \quad (6.3)$$

Con un valor elevado de  $\alpha$  ambos jugadores interactúan, como se ilustra en los recuadros de las dos casuísticas del juego de HS de la fig. 6.12. En el juego con localización simétrica ( $a = b$ ), el OP, también simétrico, viene dado por la ec. (6.4)<sup>[6.4]</sup>, donde el valor de  $\alpha_2$  es el mismo que en la ec. (6.3)<sup>[6.5]</sup>. Por lo tanto, en la fig. 6.12(a) tenemos que  $c = (0.6^2 + 0.9^2)/2 = 0.585$ , y  $p_{1,2}^* = \alpha/2 - 0.585/3$ , cuando  $\alpha \geq \alpha_2 = 3 - 1.2 - 2 \cdot 0.585/3 = 1.410$ . El juego con  $\alpha=1.41$  se muestra en el recuadro superior derecho de la fig. 6.12(a), donde  $p = (1.41/2) - (0.585/3) = 0.510$ ,  $Q = 0.510 \cdot 1.5 = 0.765$ ,  $u = 0.510 \cdot 0.765 = 0.390$ .

$$p_{1,2}^* = \frac{\alpha}{2} - \frac{c}{L}, \quad Q_{1,2}^* = p_{1,2}^* \frac{L}{2}, \quad c = \frac{1}{2} \left( a^2 + \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 \right) t, \quad \alpha \geq \alpha_2 = L - 2a - 2\frac{c}{L}. \quad (6.4)$$

Con  $\alpha \geq \alpha_2$ , en el juego simétrico en localización de la fig. 6.12(a) los precios del OP superan los valores medios simulados, mientras que las demandas del OP están por debajo

de los valores medios simulados, de tal modo que los beneficios del OP superan los promedios simulados, aunque no en gran medida.

La simulación de la fig. 6.12(a) proporciona valores medios que se ajustan perfectamente a los del EN. En concreto, los precios medios se ajustan a los del EN dado por ec.(6.5)<sup>[6.6]</sup>. En el punto crítico  $\alpha=1.41$  en la fig. 6.12(a), se cumple que  $p^*(1.41)=p^\bullet(1.41)=0.51$ .

$$p_{1,2}^* = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4t(\alpha L - 2c)}}{2}, \quad \lambda = \alpha + t \left( a + 3\frac{L}{2} \right), \quad \alpha \geq \alpha_2. \quad (6.5)$$

En el juego con localización asimétrica de los jugadores de la fig. 6.12(b),  $\bar{p}_1$  excede muy ligeramente a  $\bar{p}_2$  pero  $\bar{Q}_1$  sobrepasa claramente a  $\bar{Q}_2$ , ya que  $\bar{s} > L/2$ . Esto induce que  $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$ , siendo la razón última de todo ello que  $a > b$  (recordemos el ejemplo particular de  $\alpha=4.5$  en la fig. 6.2). Las cantidades promedio logradas en la simulación proporcionan una estimación altamente precisa de la solución en EN, como se puede observar en el análisis de las funciones de respuesta de la fig. 6.3 en el caso particular  $\alpha=4.5$ . Otros autores, como Puu (2002), analizan el EN en el juego de  $\alpha$ -HS en el intervalo  $[-1, 1]$ , en lugar de hacerlo en  $[0, L]$ .

#### $a = b > L/4$

Si  $a = b > L/4$ ,  $a$  debe reemplazarse por  $(L/2) - a$  en las ecs. (6.2), (6.3) y (6.4)<sup>[6.7]</sup>, donde el valor de  $c$  no varía y viene dado por la ec. (6.4). Como resultado de ello,  $\alpha_1(a) = \frac{3}{2}(\frac{L}{2} - a)t$  y  $\alpha_2(a) = 2a - 2\frac{c}{L}$ . Como caso particular, en el valor límite  $a = L/4$ , se cumple que  $(L/2) - a = a$ . Si  $a = b < L/4$  y  $a' = b' = (L/2) - a$ , se cumple que  $(L/2) - a' = a$ , de modo que  $\alpha_1(a) = \alpha_1(a')$  y  $\alpha_2(a) = \alpha_2(a')$ . Por ejemplo, en el caso particular de  $a = L/8$ , se cumple que  $\alpha_1(L/8) = \alpha_1(3L/8) = 3Lt/16$  y  $\alpha_2(L/8) = \alpha_2(3L/8) = 19Lt/32$

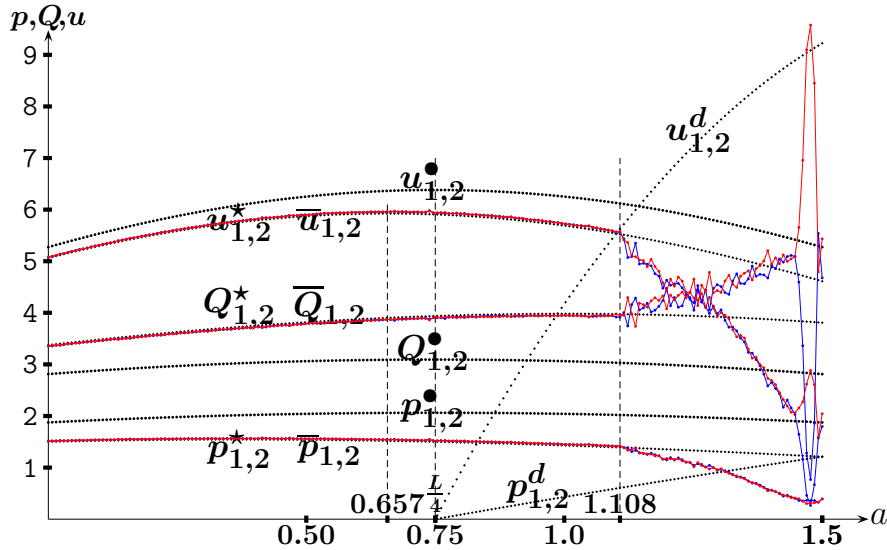
A diferencia de lo que sucede si  $a = b \leq L/4$ , si  $a = b > L/4$  los jugadores interactúan en el intervalo  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , donde la solución del OP vendrá dada por la ec. (6.3) sustituyendo  $a$  por  $L/2 - a$  y los precios en EN con  $t=1$  vendrán dados por la expresión<sup>[6.8]</sup>,

$$p_{1,2}^* = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 16 \left[ \alpha^2 + \left( 2\alpha - \left( \frac{L}{2} - a \right) \right) \left( \frac{L}{2} - a \right) \right]}}{8}, \quad \lambda = 5\alpha + 3 \left( \frac{L}{2} - a \right), \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \quad (6.6)$$

### Representación del juego en función de la localización

La fig. 6.13 muestra la simulación del juego de 4.5-HS con localización  $a = b$  variable. El beneficio máximo de la solución en EN se consigue en  $a=0.657$ , lo que da lugar a  $u=5.924$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  corresponden a la solución del OP según la ec. (6.4), mientras que los de  $(p^*, Q^*, u^*)$  corresponden a la solución en EN según la ec. (6.5). Como cabía esperar, los precios del OP son mayores que los del EN. Esto da lugar a menores demandas pero, al mismo tiempo, mayores beneficios. El beneficio máximo de la solución del OP se alcanza en

$a=L/4=0.75^{[6.9]}$ , lo que da lugar a  $u^\bullet=6.381$ . El beneficio medio máximo en la simulación (con 200 puntos equidistantes muestreados) resulta ser  $\bar{u}=5.980$  en  $a=0.739$ .



**Figura 6.13:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y  $a=b$  variable en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  en trazo discontinuo representan el óptimo de Pareto. Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan el equilibrio de Nash. Los gráficos en color rojo y azul de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación.

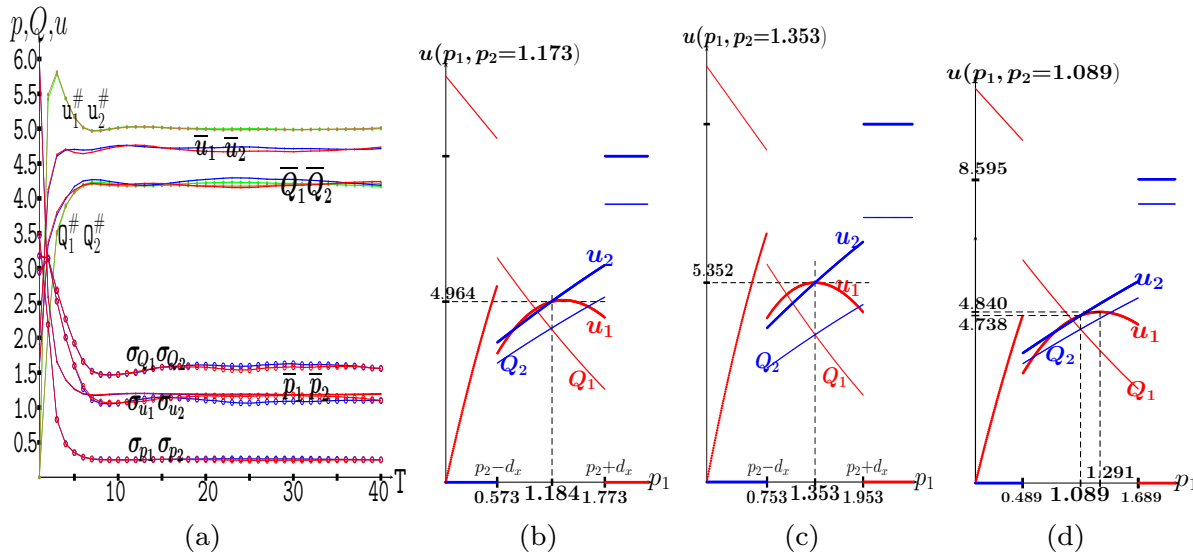
Continuando con el juego simétrico, la disminución de los precios (y los beneficios) con valores elevados de la localización,  $a$ , está de alguna manera asociada con la disminución de la importancia del componente de ubicación en el juego cuando los jugadores están lo bastante próximos. De hecho, en  $a=1.5$  la ubicación no desempeña ningún papel en absoluto y el juego se establece sólo en precios, de modo que la única solución en EN es aquella en la que ambos precios son cero (juego de Bertrand). Los gráficos del EN dejan de coincidir con los valores promedio simulados en la fig. 6.13 a partir de aproximadamente  $a^\nabla=1.108$ , coincidiendo con una disminución de los precios (y de los beneficios) más acusada. Ello es consecuencia de la falta de EN cuando los jugadores están muy cerca el uno del otro. En la ec. (6.7), se muestra la condición necesaria y suficiente para la existencia de EN en el juego simétrico ( $a = b$ ). De acuerdo con ello, la condición que debe satisfacerse es que el beneficio obtenido con el precio del EN,  $p^*$ , ha de ser mayor que el obtenido con el precio  $p^d = p^* - t(L - 2a)$ , que representa el precio con el que el mercado es acaparado completamente por uno de los jugadores. En la fig. 6.13, con  $\alpha=4.5$ , ambos términos de la ec. (6.7) se igualan en  $a^\nabla=1.108$ , con  $\alpha=3.0$  en  $a^\nabla=1.221$ , y con  $\alpha=6.0$  en  $a^\nabla=1.023$ , valores próximos a  $3L/8=1.125$ .

$$p^* \left[ (\alpha - p^*) \frac{L}{2} - \frac{1}{2}t \left( a^2 + \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 \right) \right] > u^d = p^d \left[ (\alpha - p^d) L - \frac{1}{2}t \left( a^2 + (L - a)^2 \right) \right], \quad (6.7)$$

siendo  $p^d = p^* - t(L - 2a)$ , el precio que hace que el mercado se convierta en un monopolio.

La fig. 6.14 representa la simulación del juego de 4.5-HS para  $a=b=1.2$  en el contexto de la fig. 6.13. La fig. 6.14(a) muestra la dinámica evolutiva hasta  $T=40$ , incluida la de las desviaciones estándar de precios, demandas y beneficios. A diferencia de lo que sucede en

simulaciones con  $a = b < L/4$ , las desviaciones estándar en la fig. 6.14(a) no caen en picado a cero, sino que permanecen bastante elevadas durante toda la simulación. La simulación con  $a=b=1.2$  devuelve en  $T=100$  unos valores de precio muy próximos entre sí,  $\bar{p}_1=1.184$  y  $\bar{p}_2=1.173$ . La fig. 6.14(b) muestra que la mejor respuesta en precio del jugador-1,  $p_1$ , al precio del jugador-2  $p_2=1.173$ , no es  $p_1=1.184$ , ya que los valores de  $p_1$  cercanos a 0.573 proporcionarían mayores ganancias al jugador-1. Con  $a=b=1.2$ , la ec. (6.5) da como resultado unos valores de precio  $p_{1,2}=1.353$ . La fig. 6.14(c) muestra que este supuesto EN no es tal: los valores de  $p_1$  cercanos a 0.753 proporcionarían mayores pagos al jugador-1. La fig. 6.14-(d) muestra que  $p_1 = 1.089 < 1.184$  tampoco es la mejor respuesta a  $p_2=1.089$ , si no que es  $p_1=1.291$ , lo que corresponde a  $u_1=4.840$ .



**Figura 6.14:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y  $a=b=1.2$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=40$ . (b)  $p_1$ -respuesta a  $p_2=1.173$ . (c)  $p_1$ -respuesta a  $p_2=1.353$ . (d)  $p_1$ -respuesta a  $p_2=1.089$ .

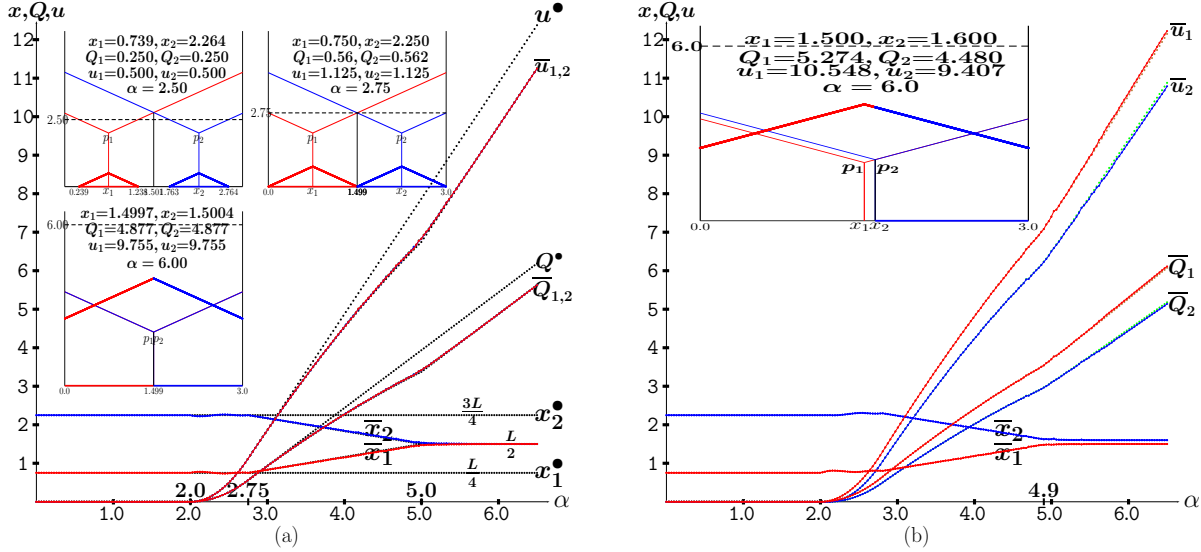
### Simulación con precio fijo

La fig. 6.15 muestra el juego  $\alpha$ -HS con precios fijos y localizaciones variables de los jugadores, donde el EN en localizaciones para un valor de  $\alpha$  intermedio viene dado por la ec. (6.8)<sup>[6.10]</sup>.

$$x_1^* = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} + \frac{\alpha + p_2 - 2p_1}{t} \right), \quad x_2^* = \frac{1}{3} \left( \frac{5L}{2} - \frac{\alpha + p_1 - 2p_2}{t} \right). \quad (6.8)$$

En la fig. 6.15(a) se fijan los precios,  $p_1=p_2=2.0$ , por lo que no hay demanda por debajo de  $\alpha_0=2.0$ . Antes del valor crítico  $\alpha_1=2.75$ , los jugadores se ubican aproximadamente en  $a^*=b^*=L/4=0.75$  (recuadro superior izquierdo), con  $Q_{1,2} = (\alpha - p)^2/t$  (en el caso límite  $\alpha=2.75$  del recuadro superior derecho, tenemos que  $Q_{1,2} = (2.75 - 2.0)^2 = 0.562$ ). Si  $p_1 = p_2 = p$ , las expresiones de la ec. (6.8) se convierten en la ec. (6.9a)<sup>[6.11]</sup>, simétrica en localizaciones. Por tanto, en la fig. 6.15(a) las localizaciones en EN de ambos jugadores se desplazan hacia el centro de acuerdo con  $a^* = b^* = \frac{1}{3}(\alpha - \frac{1}{2})$  cuando  $\alpha$  aumenta, desde  $\alpha_1=2.75$  hasta

$\alpha_2=5.0$ . A partir de  $\alpha_2=5.0$ , ambos jugadores se ubican en  $L/2=1.5$  (recuadro inferior), con  $Q_{1,2}^* = \frac{3}{2}(\alpha - \frac{11}{4})$  según la ec. (6.9b), es decir, la ec. (6.9a) con  $a^* = L/2$ . La solución del OP en la simulación con precios fijos e iguales de la fig. 6.15(a) se logra a partir de la ec. (6.9c) [6.12], cuyo beneficio supera al logrado con la solución en EN.



**Figura 6.15:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable y precios fijos en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $p_1=p_2=2.0$ . (b)  $p_1=2.0, p_2=2.1$ . Los gráficos de  $(x^*, Q^*, u^*)$  representan el óptimo de Pareto. Los gráficos de  $(\bar{x}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio en la simulación. Los recuadros muestran el modelo con: (a)  $\alpha=2.5, 2.75, 6.00$ ; (b)  $\alpha=6.0$ .

$$a^* = b^* = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} + \frac{\alpha - p}{t} \right), \quad Q_{1,2}^* = \frac{1}{2} \left( (\alpha - p)L - t \left( \left( \frac{L}{2} - a^* \right)^2 + (a^*)^2 \right) \right), \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad (6.9a)$$

$$a^* = b^* = \frac{L}{2}, \quad Q_{1,2}^* = \frac{1}{2} \left( (\alpha - p)L - t \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right), \quad \alpha \geq \alpha_2, \quad (6.9b)$$

$$a^* = b^* = \frac{L}{4}, \quad Q_{1,2}^* = (\alpha - p) \frac{L}{2} - t \left( \frac{L}{4} \right)^2, \quad \alpha \geq \alpha_1, \quad (6.9c)$$

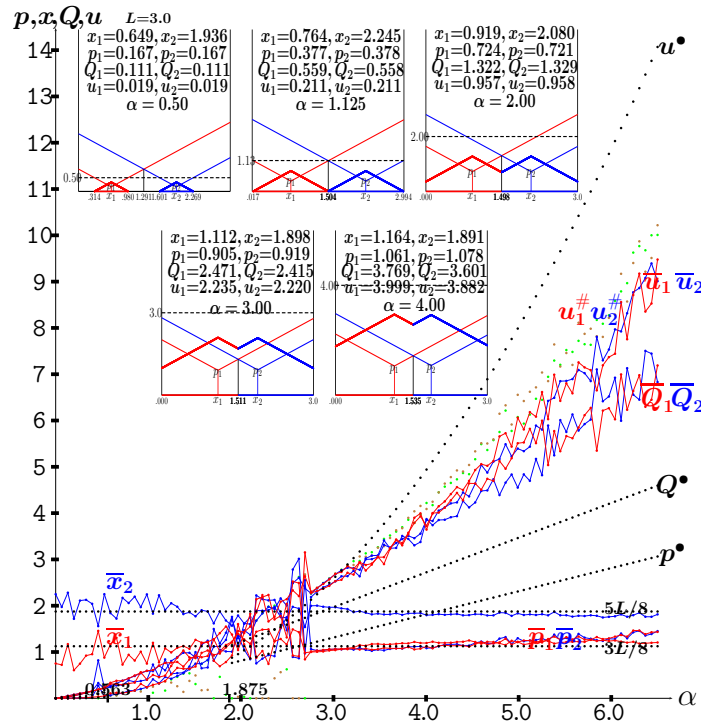
donde

$$\alpha_1 = p + \frac{L}{4}t, \quad \alpha_2 = p + Lt. \quad (6.10)$$

En la fig. 6.15(b) tenemos que  $p_1=2.0, p_2=2.1$ , de modo que el jugador-1 supera al jugador-2 en beneficio, como ocurría en la fig. 6.5. La tendencia hacia el centro de la posición de ambos jugadores a medida que  $\alpha$  crece también es evidente en el juego con precios diferentes, aunque no completamente como en el juego con precios iguales. En este caso, sólo el jugador-1 alcanza  $x_1=L/2=1.5$ , mientras que con  $\alpha$  alto se cumple que  $x_2 = 1.6 > L/2$  (vease el recuadro  $\alpha=6.0$  en la fig. 6.15(b)). Se verifica que  $x_1=1.5$  a partir de  $\alpha=4.9$ , i.e., del valor de  $\alpha$  donde  $x_1 = (1.5 + \alpha + (2.1 - 4.0))/3 = 1.5$ .

### Simulación con localización y precio variables

La fig. 6.16 trata el juego de  $\alpha$ -HS con localizaciones y precios variables. Con un valor de  $\alpha$  elevado, las localizaciones promedio convergen a valores próximos,  $a=b=3L/8=1.125$ . Por este motivo y con objeto de tener una referencia, se han representado los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  en la figura, que corresponden al OP en el juego de  $\alpha$ -HS para  $a=b=3L/8=1.125$ . Los precios promedio alcanzados en la simulación de la fig. 6.16 se ajustan bastante bien al OP  $p^\bullet = \alpha/3$  hasta  $\alpha_1 = 9/16 = 0.563$ . Sin embargo, el precio de la solución del OP  $p^\bullet = \frac{\alpha}{2} - \frac{L}{16}$  supera notablemente los precios medios alcanzados en la simulación con  $\alpha > \alpha_2 = 15/8 = 1.875$ . Con valores de  $\alpha$  elevados, ambos precios promedio se sitúan en valores próximos a la unidad en la fig. 6.16. Como resultado, los beneficios promedio tienen valores próximos a las demandas en la figura. Los recuadros en la fig. 6.16 consideran algunos juegos con valores particulares de  $\alpha$  representándose los precios y localizaciones medios alcanzados en la simulación. Se observa claramente la tendencia hacia el centro de los jugadores al aumentar  $\alpha$ .



**Figura 6.16:** Simulación en localización-precio del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  en trazo discontinuo representan el óptimo de Pareto. Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación. Los recuadros muestran el modelo con  $\alpha=0.50, 1.125, 2.00, 3.00, 4.00$ .

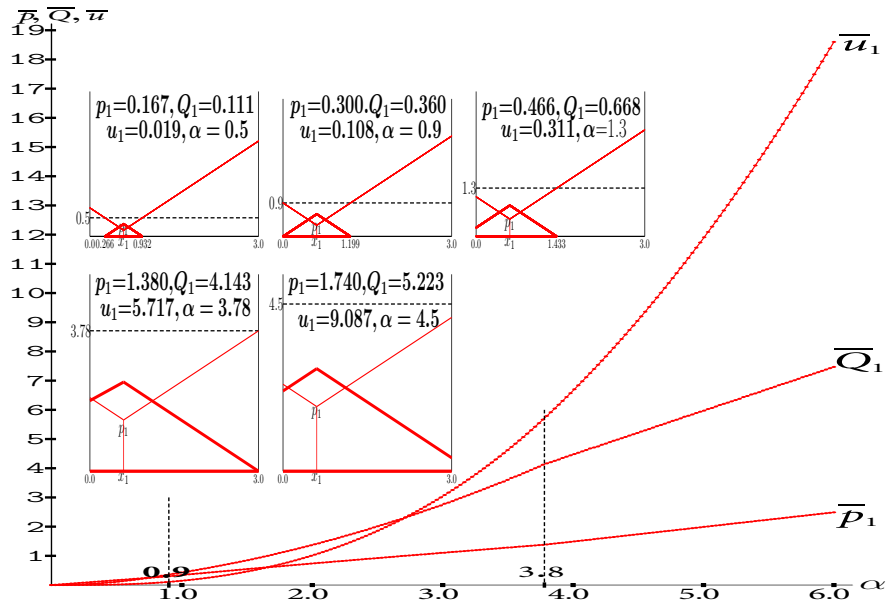
### 6.1.2. Monopolio

El escenario de monopolio (Smithies, 1941a) se puede estudiar mediante simulación asignando un precio muy alto a uno de los jugadores, de modo que el otro jugador capture todo el mercado. Así se han obtenido las simulaciones de la fig. 6.17, donde el precio del jugador-2 se fija en  $p_2=22.0$  y, como es habitual en esta tesis doctoral, inicialmente  $p_1 \in [0, 12]$ .

La fig. 6.17 representa una simulación monopolística del juego de  $\alpha$ -HS con  $\alpha$  variable,

donde la localización del jugador-1 es  $x_1=0.6$  y  $T=200$ . Los recuadros muestran el modelo con  $\alpha=0.5; 0.9; 1.3; 3.78; 4.5$ . El precio, la demanda y el beneficio obtenidos mediante simulación coinciden con los óptimos teóricos. De esta manera, el óptimo se logra de acuerdo con la ec. (6.2), hasta  $\alpha_1 = 3 \cdot 0.6/0.2 = 0.9$ , y según la ec. (6.11)<sup>[6.13]</sup>, es decir, la ec. (6.4) con  $L$  reemplazado por  $2L$ , cuando  $\alpha \geq \alpha_2 = 2(3 - 0.6)c/6 = 3.78$ , con  $c = (0.6^2 - 2.4^2)/2 = 3.06$ . Para el tramo  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , sigue siendo válida la ec. (6.3) (sólo varía el valor de  $\alpha_2$  que establece el límite superior del rango de valores donde aplica). En el caso particular de  $\alpha=4.5$  (recuadro inferior derecho de la fig. 6.17), se cumple que  $p_1 = 4.5/2 - 3.06/6 = 1.740$ ,  $Q = 4.5 \cdot 3.0/2 - 3.06/2 = 5.223$  y, en consecuencia,  $u_1 = 1.740 \cdot 5.223 = 9.087$ .

$$p^m = \frac{1}{2} \left( \alpha - \frac{c}{L} \right), \quad Q^m = p^m L, \quad c = \frac{1}{2}(a^2 + (L-a)^2), \quad \alpha \geq \alpha_2 = 2(L-a) - c/L. \quad (6.11)$$

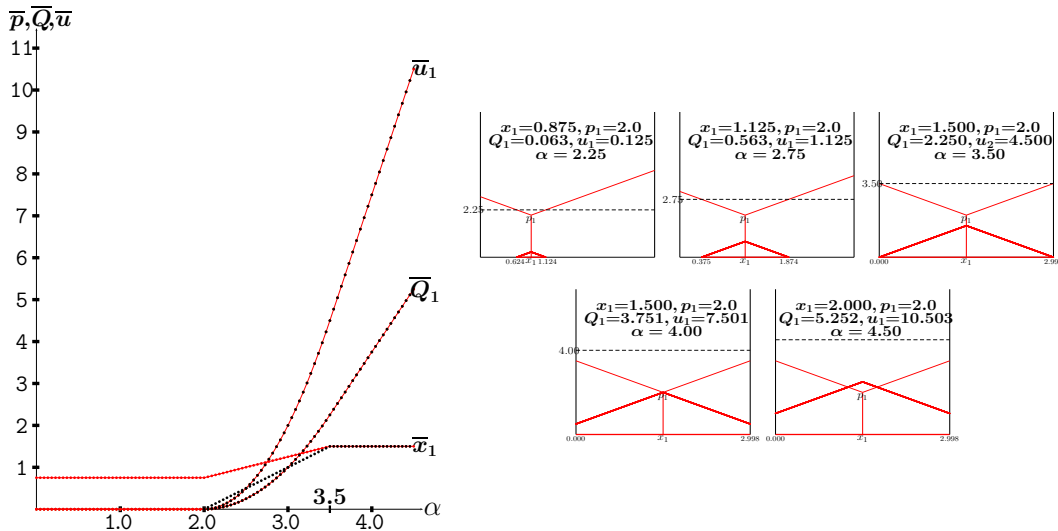


**Figura 6.17:** Simulación monopolística del juego Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable y localización fija del jugador-1  $x_1=0.6$  en  $T=200$ .  $p_2=22.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación. Los recuadros muestran el modelo con  $\alpha=0.5, 0.9, 1.3, 3.78, 4.5$ .

La fig. 6.18 representa una simulación monopolística del juego de  $\alpha$ -HS para  $p_1=2.0$  en  $T=200$ . Los recuadros en la figura muestran el modelo con  $\alpha=2.25; 2.75; 3.50; 4.0; 4.5$ . Las ecs. (6.12) rigen los gráficos de la fig. 6.18, con  $Q_1=u_1=0.0$  si  $\alpha \leq p_1$ . En el intervalo  $\alpha \in (p_1, p_1 + \frac{L}{4})$ , la simulación no induce la ubicación  $x_1 = \alpha - p_1$ , sino  $x_1 = L/4 + (\alpha - p_1)/2$ , como se puede comprobar en los recuadros. En cualquier caso, esto no es relevante en lo que se refiere a la demanda, por lo que la demanda lograda en la simulación es la dada por la ec. (6.12a).

$$(x^m, Q^m) = \left( \alpha - p, (\alpha - p)^2 \right), \quad p \leq \alpha \leq \alpha_1 = p + \frac{L}{4}. \quad (6.12a)$$

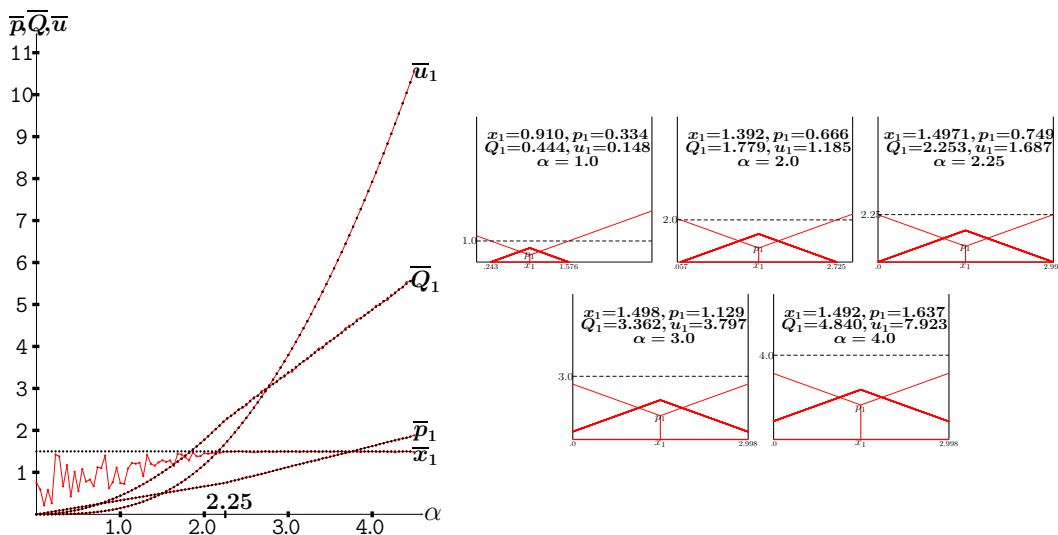
$$(x^m, Q^m) = \left( \frac{L}{2}, \left( 2(\alpha - p) - \frac{L}{2} \right) \frac{L}{2} \right), \quad \alpha \geq \alpha_1. \quad (6.12b)$$



**Figura 6.18:** Simulación monopolística del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable para  $p_1=2.0$  en  $T=200$ .  $p_2=22.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  muestran los valores promedio de la simulación. Los recuadros muestran el modelo con  $\alpha=2.25, 2.75, 3.5, 4.0, 4.5$ .

La fig. 6.19 muestra una simulación monopolística del modelo de  $\alpha$ -HS con localización y precio variables. En valores bajos de  $\alpha$ , aplica la ec. (6.2) con  $a = L/2$ , de modo que  $\alpha_1 = 3 \cdot 3/4 = 2.25$ . Con  $\alpha < \alpha_1$ , en la simulación no emerge la posición central  $x_1 = L/2$ , sino en valores más bajos (recuadros con  $\alpha=1.0$  y  $\alpha=2.0$ ). Si  $\alpha \geq \alpha_1$ , la localización  $x_1 = L/2$  emerge en la simulación, lo que lleva a la ec. (6.13)<sup>[6.14]</sup>, es decir, la ec. (6.11) con  $a = L/2$ .

$$p^m = \frac{1}{2} \left( \alpha - \frac{L}{4} \right), \quad Q^m = p^m L, \quad \alpha \geq \alpha_1 = \frac{3L}{8}. \quad (6.13)$$



**Figura 6.19:** Simulación monopolística del juego Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable para localizaciones y precios variables en  $T=200$ .  $p_2=22.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación. Los recuadros muestran el modelo con  $\alpha=1.0, 2.0, 2.25, 3.0, 4.0$ .

## 6.2. Coste de desplazamiento cuadrático

En lugar de considerar un coste de desplazamiento lineal, se puede suponer que este coste es cuadrático con respecto a la distancia (d'Aspremont *et al.*, 1979), de modo que  $e_i = p_i + t(s - x_i)^2$ ,  $i = 1, 2$ . Como resultado de ello, tal y como veíamos en la sec. 5.4, en el juego de HOT2, el consumidor indiferente se ubica en  $\bar{s}$ , que viene dado por la ec. (6.14), las funciones de beneficio ( $u$ ) se corresponden con la ec.(6.15), y los precios en EN y sus beneficios inducidos vienen dados por la ec. (6.16),

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{p_2 - p_1}{td_x} \right), \quad d_x = x_2 - x_1. \quad (6.14)$$

$$u_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{s} < 0 \\ \bar{s}p_1 & \text{si } 0 \leq \bar{s} \leq L, \\ Lp_1 & \text{si } \bar{s} > L \end{cases}, \quad u_2 = \begin{cases} Lp_2 & \text{si } \bar{s} < 0 \\ (L - \bar{s})p_2 & \text{si } 0 \leq \bar{s} \leq L. \\ 0 & \text{si } \bar{s} > L \end{cases}. \quad (6.15)$$

$$(p_1^*, p_2^*) = td_x [L + k, L - k], \quad (u_1^*, u_2^*) = \frac{1}{2} [p_1^*(L + k), p_2^*(L - k)], \quad k = \frac{a - b}{3}. \quad (6.16)$$

Se cumple que  $\bar{s}^* = (L + k)/2$ , como ocurre en el modelo con coste de desplazamiento lineal.

En el juego de Hotelling con coste de desplazamiento cuadrático, se verifica que  $\frac{\partial u_1^*}{\partial a} < 0$  y  $\frac{\partial u_2^*}{\partial b} < 0$ , al contrario de lo que sucede en el juego convencional con coste de desplazamiento lineal. Con  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ ,  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ , en el juego con coste de desplazamiento cuadrático los precios en EN se convierten en  $(p_1^*, p_2^*)=(6.1\hat{3}, 5.8\hat{6})$ , valores que son el doble que en el juego convencional con coste de desplazamiento lineal, ya que  $x_2 - x_1 = 2.0$ .

En el juego de  $\alpha$ -HS con coste de desplazamiento cuadrático ( $\alpha$ -HS2), las funciones de demanda resultan ser las siguientes:

$$q_i(s) = \text{máx}(\alpha - p_i - t(s - x_i)^2, 0), \quad i = 1, 2. \quad (6.17)$$

Los límites del mercado de ambos jugadores en el juego de  $\alpha$ -HS2 se calculan de acuerdo con las ecs. (3.11), pero ahora partiendo de  $\alpha - (p_i + t(s - x_i)^2) = 0$ , de tal modo que  $r_i = s_i - x_i = \sqrt{(\alpha - p_i)/t}$ ,  $i=1, 2$ .

### Simulación con localización fija

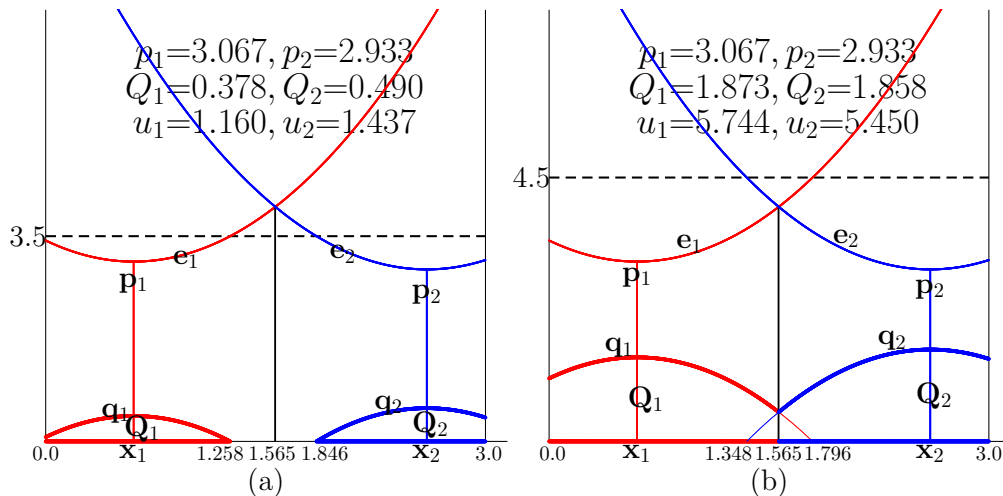
La fig. 6.20 es la análoga a la fig. 3.5 pero, en este caso, con coste de desplazamiento cuadrático. Sorprendentemente, a primera vista, los beneficios de ambos jugadores aumentan en la fig. 6.20 en comparación con los de la fig. 3.5. Ello es así porque  $|x - x_i|^2$  es menor que  $|x - x_i|$  cuando  $|x - x_i| < 1.0$ . Esto sucede en el ejemplo bajo estudio, por lo que las demandas aumentan con coste de desplazamiento cuadrático.

En el juego de  $\alpha$ -HS2, para un valor de  $\alpha$  elevado, como ocurre en la fig. 6.20(b), es decir, el modelo de duopolio genuino, las demandas vienen dadas por las ecs. (6.18)<sup>[6.15]</sup> (las análogas a las ecs. (3.14) con coste cuadrático). En el escenario simétrico, donde  $a = b$ ,  $p_1 = p_2 = p$  y  $\bar{s} = L/2$ , las ecs. (6.18) se reducen a la ec. (6.19) (análoga a la ec. (3.15)).

$$Q_1 = (\alpha - p_1)\bar{s} - \frac{1}{3}t((\bar{s} - a)^3 + a^3), \quad (6.18a)$$

$$Q_2 = (\alpha - p_2)(L - \bar{s}) + \frac{1}{3}t((\bar{s} - (L - b))^3 - b^3). \quad (6.18b)$$

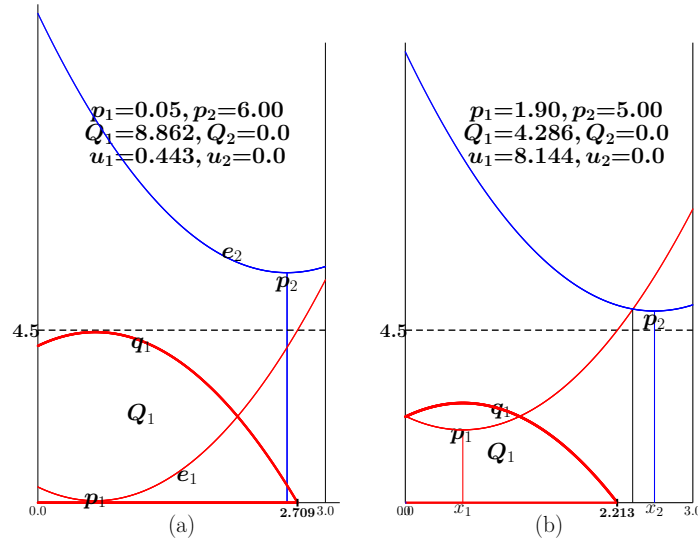
$$Q_{1,2} = (\alpha - p)\frac{L}{2} - c, \quad c = \frac{1}{3}\left(a^3 + \left(\frac{L}{2} - a\right)^3\right)t. \quad (6.19)$$



**Figura 6.20:** El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  y coste de desplazamiento cuadrático para  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ ,  $p_1=3.066$ ,  $p_2=2.933$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $\alpha=3.5$ . (b)  $\alpha=4.5$ .

En los dos juegos de la fig. 6.21 tenemos que  $Q_2=0.0$ . En la fig. 6.21(a), el jugador-1 captura toda la demanda potencial porque las curvas de los costes totales,  $e_1$  y  $e_2$ , no se cortan en el intervalo  $[0, L]$ . Para lograrlo ha sido necesario establecer un nivel muy bajo de precio para uno de los jugadores ( $p_1=0.05$ ) y un precio comparativamente alto para el otro jugador ( $p_2=6.0$ ). Así, en la fig. 6.21(a), el jugador-2 no obtiene demanda y el jugador-1 obtiene demanda hasta  $l_1^s=2.709$  ( $l_1^s = 0.6 + r_1$ ,  $r_1 = \sqrt{4.5 - 0.05} = 2.109$ ). En la fig. 6.21(b), ambos costes totales se cortan en el intervalo  $[0, L]$  pero, dado que  $p_2 > \alpha$ , entonces el jugador-2 no tiene demanda ( $Q_2=0.0$ ). Por su parte, el jugador-1 obtiene demanda hasta  $l_1^s=2.213$  ( $l_1^s = 0.6 + r_1$ ,  $r_1 = \sqrt{4.5 - 1.90} = 1.613$ ). La elección de  $p_1=1.90$  se explica en base a la función de respuesta de la fig. 6.23(b).

Algunos expertos en el juego de Hotelling se muestran reacios a considerar el caso del coste de desplazamiento cuadrático<sup>[6.16]</sup>. En contraste con ello, creemos que en nuestro estudio se debe tener en cuenta ya que, generalmente, se considera en los artículos que tratan sobre el juego de Hotelling, como en el ya citado de d'Aspremont *et al.* (1979). De acuerdo con nuestro criterio, ignorarlo no es una opción. Además, el enfoque analítico del juego con



**Figura 6.21:** El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y coste de desplazamiento cuadrático para  $Q_2=0.0$ .  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $p_1=0.05$ ,  $p_2=6.0$ . (b)  $p_1=1.90$ ,  $p_2=5.0$ .

coste cuadrático es mucho más difícil de implementar que el caso con coste lineal. De hecho, muchas veces el cálculo analítico del EN es inviable, por lo que recurrir a la simulación es, de algún modo, obligatorio para evaluar las diferencias entre los dos modelos de coste de desplazamiento, tal y como se ha realizado en este estudio.

## 6.2.1. Representación del juego en función del límite de coste

### Simulación con localización fija

La fig. 6.22 es análoga a la fig. 6.12, pero con coste de desplazamiento cuadrático. En la fig. 6.22(a), donde  $a = b = 0.6 < L/4 = 0.75$ , el OP viene dado por las ecs (6.20)<sup>[6.17]</sup>. Por tanto, *i*)  $p_{1,2}^\bullet = 2\alpha/5$  si  $\alpha \leq \alpha_1 = \frac{5}{3}0.6^2 = 0.6$ , y *ii*)  $c = ((\frac{3}{2}-0.6)^3 + 0.6^3)/3 = 0.315$ , resultando  $p_{1,2}^\bullet = \alpha/2 - 0.315/3$ , cuando  $\alpha \geq \alpha_2 = 2(0.9^2 - 0.315/3) = 1.410$ . En el recuadro de la parte superior izquierda de la fig. 6.28(a), con  $\alpha=0.6$ , tenemos que  $\bar{p}_1 = p_1^\bullet = 2 \cdot 0.6/5 = 0.240$  y  $r = \sqrt{0.60 - 0.24} = 0.6$ , i.e.,  $x_1^i = 0.0$ . Con  $\alpha=1.410$ , tenemos que  $p_{1,2}^\bullet = \frac{1}{2}1.410 - \frac{0.315}{3} = 0.60$ , y  $r = \sqrt{1.41 - 0.60} = 0.90$ , i.e.,  $x_1^s = 0.6 + 0.9 = 1.5 = L/2$ .

Curiosamente, se da la circunstancia de que  $\alpha_2=1.410$  en los escenarios de la fig. 6.22(a) y la fig. 6.12(a). No se trata de un resultado general, sino el resultado de los valores de los parámetros elegidos  $L=3$ ,  $a=b=0.6$ . Por ejemplo, con  $a=b=L/4=0.75$  tendríamos que  $\alpha_2 = (5 \cdot 9)/(16 \cdot 3) = 0.938$  en la fig. 6.22 y  $\alpha_2 = (3 \cdot 3)/(4 \cdot 2) = 1.125$  en la fig. 6.12.

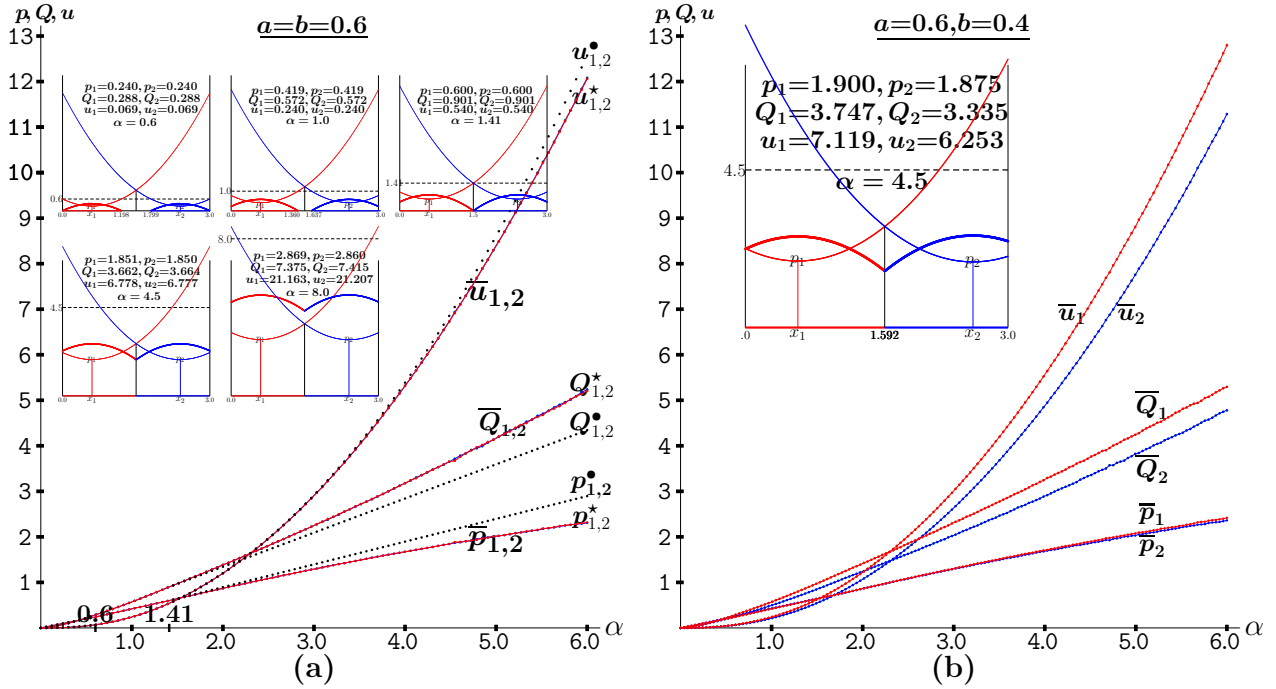
$$p_{1,2}^\bullet = \frac{2}{5}\alpha, \quad Q_{1,2}^\bullet = \frac{4}{3} \left( \frac{3}{5}\alpha \right)^{3/2}, \quad \alpha \leq \alpha_1, \quad (6.20a)$$

$$p_{1,2}^\bullet = \frac{\alpha}{2} - \frac{c}{L}, \quad Q_{1,2}^\bullet = p_{1,2}^\bullet \frac{L}{2}, \quad \alpha \geq \alpha_2, \quad (6.20b)$$

donde

$$c = \frac{1}{3} \left( a^3 + \left( \frac{L}{2} - a \right)^3 \right) t, \quad \alpha_1 = \frac{5}{3} a^2, \quad \alpha_2 = 2 \left( \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 - \frac{c}{L} \right). \quad (6.21)$$

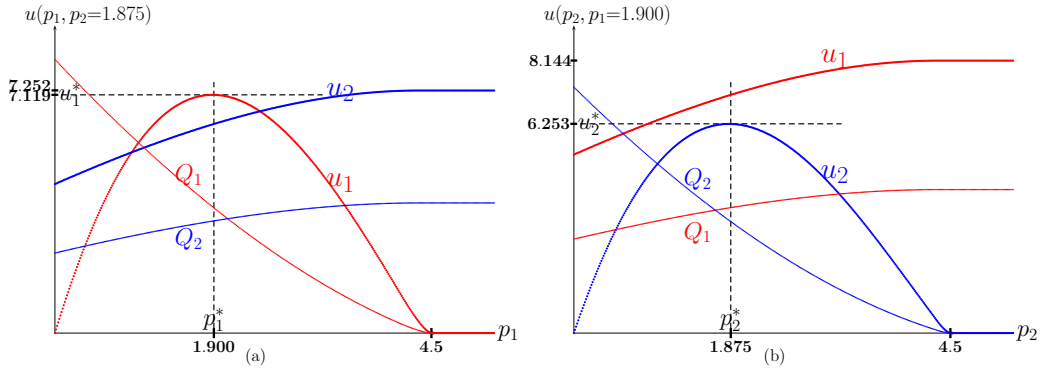
En el intervalo  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , no ha sido posible obtener una fórmula explícita de  $p^\bullet$  en el juego de  $\alpha$ -HS2, dada su complejidad<sup>[6.18]</sup>.



**Figura 6.22:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable y coste de desplazamiento cuadrático en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=0.6, b=0.4$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  en trazo discontinuo representan el óptimo de Pareto. Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación. Los recuadros muestran el modelo con: (a)  $\alpha=0.9, 1.0, 1.41, 4.5, 8.0$ ; (b)  $\alpha=4.5$ .

Si  $a = b = L/4$ , tenemos que  $c = \frac{1}{3}(a^3 + (4a/2 - a)^3) = 2a^3/3$  y de acuerdo con las ecs. (6.20), se cumple que  $\alpha_2 = 2 \left( \left( \frac{4a}{2} - a \right)^2 - \frac{2a^3/3}{4a} \right) = 2 \left( a^2 - \frac{a^2}{3} \right) = 5a^2/3 = \alpha_1$ . Paralelamente a lo que sucede con el coste de desplazamiento lineal, si  $a = b \geq L/4$ ,  $a$  debe sustituirse por  $\frac{L}{2} - a$  en las ecs. (6.20). De acuerdo con ello, por ejemplo,  $\alpha_1 = \frac{5}{3} \left( \frac{L}{2} - a \right)^2$ .

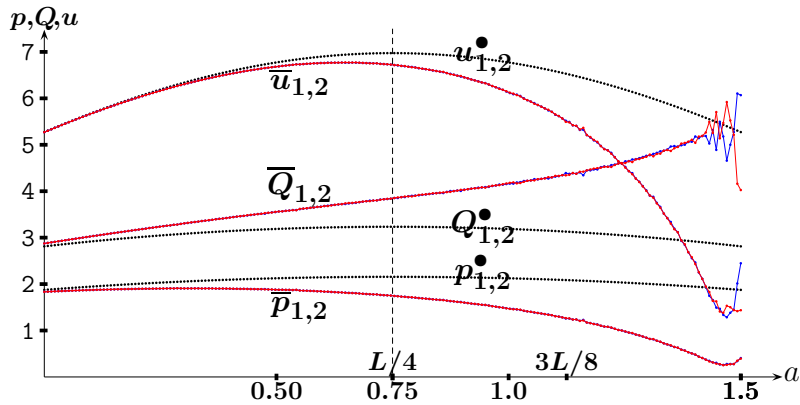
Las características de los gráficos de la fig. 6.22(b) son análogas a las comentadas respecto a la fig. 6.12(b). En resumen, el beneficio del jugador-1 supera al del jugador-2 porque  $a > b$ . Nuevamente aquí, las cantidades promedio logradas en la simulación proporcionan una estimación altamente precisa de la solución del EN. Por su parte, la fig. 6.23 es análoga a la fig. 6.3 con coste de desplazamiento cuadrático y respalda esta afirmación en el caso particular de  $\alpha=4.5$ , donde  $\bar{p}_1=1.900$ ,  $\bar{p}_2=1.875$ . Como se puede observar, las funciones de respuesta en la fig. 6.23 indican que  $p_1=1.900$  es la mejor respuesta a  $p_2=1.875$  y que  $p_2=1.875$  es la mejor respuesta a  $p_1=1.900$ . Hay que tener en cuenta que la discontinuidad con precio elevado presente en la fig. 6.3 desaparece en la fig. 6.23.



**Figura 6.23:** Funciones de respuesta en el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y coste de desplazamiento cuadrático para  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Precio del jugador-1 ( $p_1$ ) variable, dado  $p_2=1.875$ . (b) Precio del jugador-2 ( $p_2$ ) variable, dado  $p_1=1.900$ .

### Representación del juego en función de la localización

La fig. 6.24 es la análoga a la fig. 6.13 con coste de desplazamiento cuadrático. De nuevo, como en la fig. 6.13, el máximo en la fig. 6.24 se alcanza en  $a = L/4$ <sup>[6.19]</sup>. La solución en EN resulta estar cerca del OP con valores no muy elevados de  $a$ , y está significativamente por debajo de ella con valores altos de  $a$ .

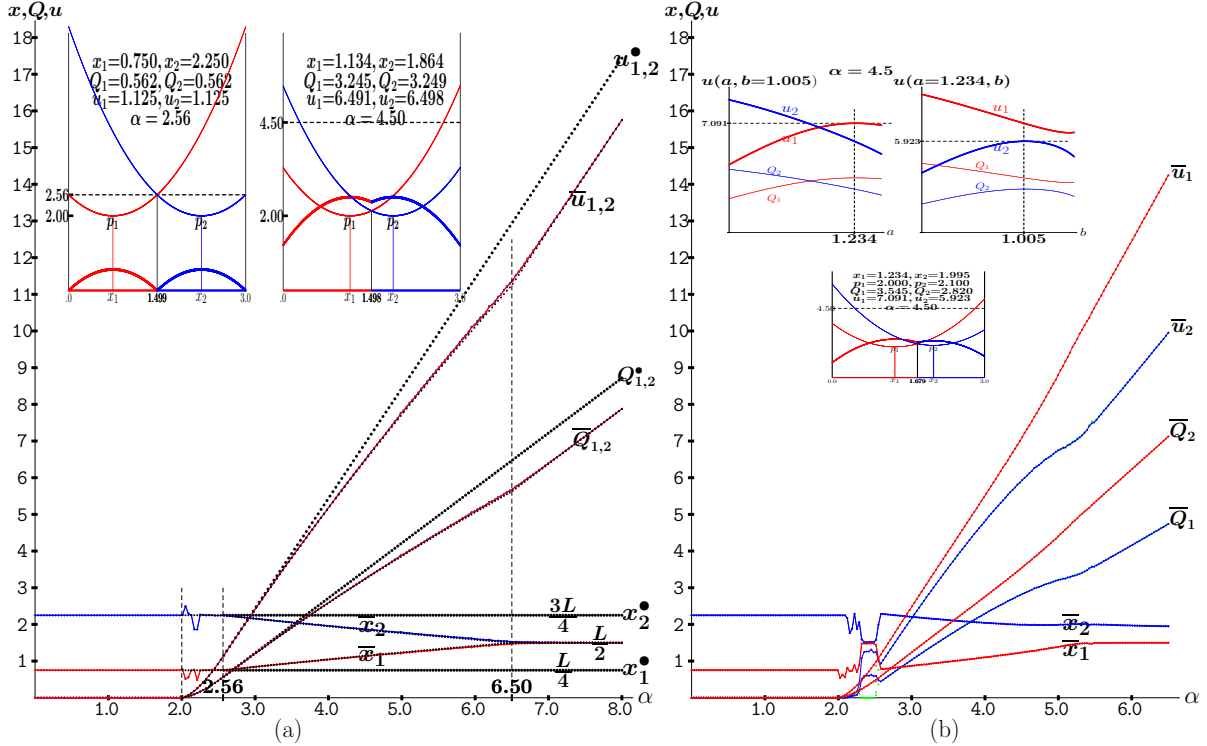


**Figura 6.24:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$ , coste de desplazamiento cuadrático y  $a=b$  variable en  $T=200$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  en trazo discontinuo representan el óptimo de Pareto. Los gráficos en color rojo y azul de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación.

### Simulación con precio fijo

La fig. 6.25 es análoga a la fig. 6.15, pero con coste de desplazamiento cuadrático. La tendencia hacia el centro también surge con coste cuadrático, aunque más débilmente. De este modo, en la fig. 6.25(a), donde  $p_1=p_2=2.0$ , la coincidencia en las ubicaciones se alcanza en  $\alpha_2 = p + (L^2/2)t = 6.5$ , mayor que el valor  $\alpha_2=5.0$  de la fig. 6.15. En la fig. 6.25(a), se observa que: *i*)  $\alpha_1 = (p + (L/4)^2)/t = 41/16 \simeq 2.56$  (recuadro izquierdo), que surge de  $\sqrt{(\alpha - p)/t} = L/4$ , de modo que en el intervalo  $[\alpha_0 = p, \alpha_1]$  se cumple que  $Q_{1,2} = 4(\alpha - p)^{3/2}/3$  (ver nota 6.17); *ii*) en el intervalo  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , las localizaciones en EN de ambos jugadores se

desplazan hacia el centro según la ec. (6.22a) <sup>[6.20]</sup>; y *iii*) con alto límite de coste ( $\alpha \geq \alpha_2$ ), cuando ambos jugadores están en EN se localizan en  $L/2$  y obtienen la demanda dada por la ec. (6.22b), i.e., el valor resultante de la ec. (6.19) con  $a = L/2$ . La solución del OP en la simulación con precios iguales de la fig. 6.25(a) se logra a partir de la ec. (6.22c) <sup>[6.21]</sup> (análoga a la ec. (6.9c)), i.e., la ec. (6.19) con  $a = L/4$ . Como cabía esperar, el beneficio de la solución del OP supera cada vez en mayor medida al de la solución en EN a medida que  $\alpha$  aumenta.



**Figura 6.25:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable y coste de desplazamiento cuadrático en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $p_1=p_2=2.0$ , (b)  $p_1=2.0$ ,  $p_2=2.1$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  en trazo discontinuo representan el óptimo de Pareto. Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación. Los recuadros muestran el modelo con: (a)  $\alpha=2.56, 4.50$ ; (b)  $\alpha=4.50$ .

$$a^\star = b^\star = \sqrt{\frac{L^2}{2} + \frac{\alpha - p}{t}} - \frac{L}{2}, \quad Q_{1,2}^\star = (\alpha - p) \frac{L}{2} - \frac{1}{3} \left( a^3 + \left( \frac{L}{2} - a \right)^3 \right) t, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad (6.22a)$$

$$a^\star = b^\star = \frac{L}{2}, \quad Q_{1,2}^\star = (\alpha - p) \frac{L}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right)^3 t, \quad \alpha \geq \alpha_2, \quad (6.22b)$$

$$a^\bullet = b^\bullet = \frac{L}{4}, \quad Q_{1,2}^\bullet = (\alpha - p) \frac{L}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{L}{4} \right)^3 t, \quad \alpha \geq \alpha_1, \quad (6.22c)$$

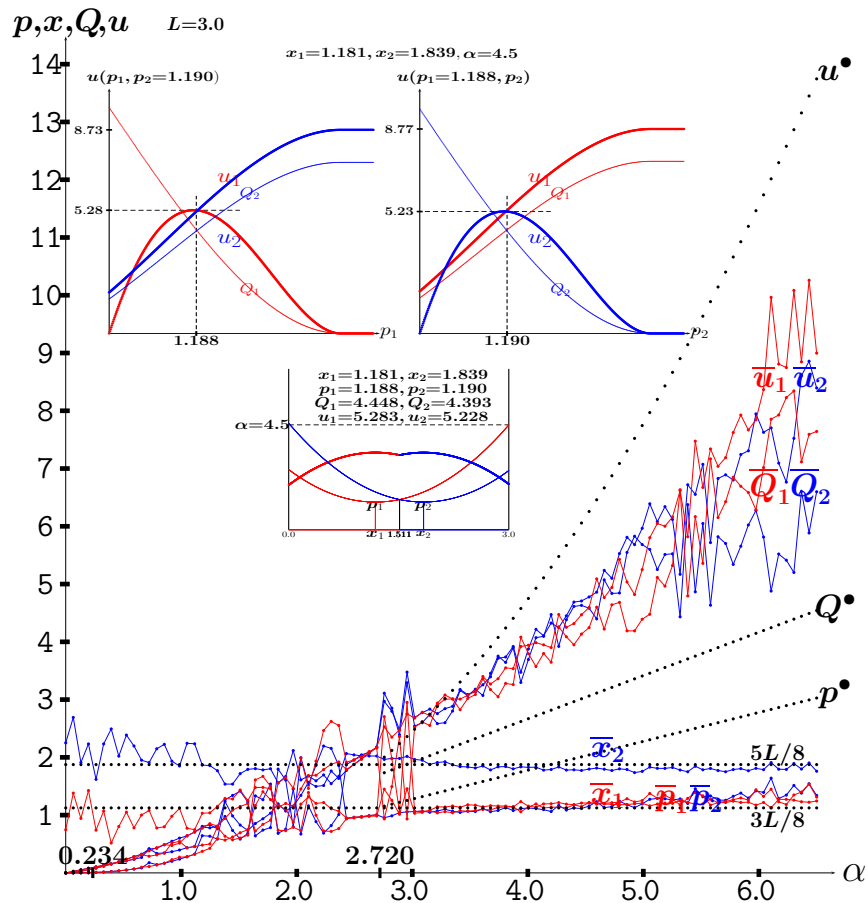
donde

$$\alpha_1 = \frac{p + (L/4)^2}{t}, \quad \alpha_2 = p + \frac{L^2}{2} t. \quad (6.23)$$

En la fig. 6.25(b), donde  $p_1=2.0$ ,  $p_2=2.1$ , existe separación entre las localizaciones incluso con  $\alpha$  altos y las funciones de respuesta en  $\alpha=4.5$ , que aparecen en los recuadros, indican que el EN en la localización se aproxima con mucha precisión con  $a^* > b^*$ , donde  $p_1 < p_2$ .

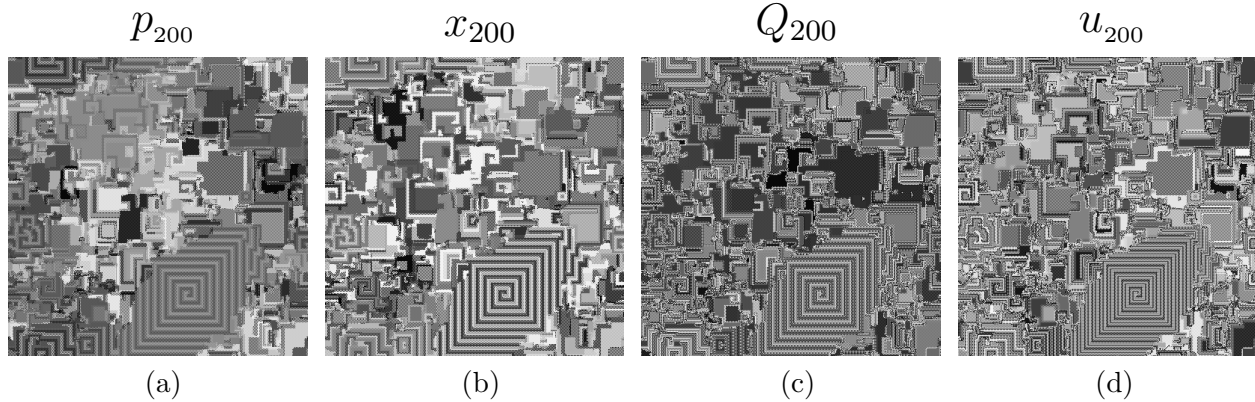
### Simulación con localización y precio variables

La fig. 6.26 es análoga a la fig. 6.16, pero con coste de desplazamiento cuadrático. En la fig. 6.26, al igual que en el caso con coste de desplazamiento lineal de la fig. 6.16, a medida que  $\alpha$  crece, las localizaciones promedio tienden a converger a aproximadamente  $a=b=3L/8=1.125$  y los precios medios a un valor algo por encima de la unidad. Los recuadros en la figura consideran el juego con  $\alpha=4.5$ . Las funciones de respuesta para  $\alpha=4.5$  en la fig. 6.26 (recuadros superiores) indican que el EN en precios se aproxima con mucha precisión. También es relevante que las discontinuidades con precios altos y bajos en la fig. 6.9 desaparecen en el recuadro de la fig. 6.26. Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  en la fig. 6.26 representan la solución del OP en el juego de  $\alpha$ -HS2 para  $a=b=3L/8=1.125$  en dos tramos:  $\alpha \leq \alpha_1$ , donde  $\alpha_1 = 5(L/2 - 3L/8)^2/3 = 0.234$ ; y  $\alpha \geq \alpha_2$ , donde  $\alpha_2 = 2((L/8)^2 - (c/L)) = 2.720$ .



**Figura 6.26:** Simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable y coste de desplazamiento cuadrático en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  en trazo discontinuo representan el óptimo de Pareto con  $a=b=3L/8$ . Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación. Los recuadros representan el modelo con  $\alpha=4.5$ .

La fig. 6.27 muestra los patrones en  $T=200$  de la simulación de la fig. 6.26 en  $\alpha=4.5$ . La estructura en forma de laberinto es más nítida en los patrones de la fig. 6.27 que en los de la fig. 6.11. Las desviaciones estándar mostradas en la tab. 6.2 son comparables a las de la tab. 6.1.



**Figura 6.27:** Patrones en  $T=200$  de la simulación del juego de Hotelling-Smithies con  $\alpha=4.5$  y coste cuadrático.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Precios. (b) Localizaciones. (c) Demandas. (d) Beneficios. El aumento del nivel de intensidad del tono de gris se asocia a valores crecientes.  $p_{min}=0.527$ ,  $p_{max}=1.911$ ;  $x_{min}=0.812$ ,  $x_{max}=2.182$ ;  $Q_{min}=0.000$ ,  $Q_{max}=9.656$ ;  $u_{min}=0.000$ ,  $u_{max}=7.189$ .

**Tabla 6.2:** Desviación estándar de los precios, localizaciones, demandas y beneficios de cinco simulaciones en localización-precio del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=4.5$  y coste de desplazamiento cuadrático en  $T=200$ .

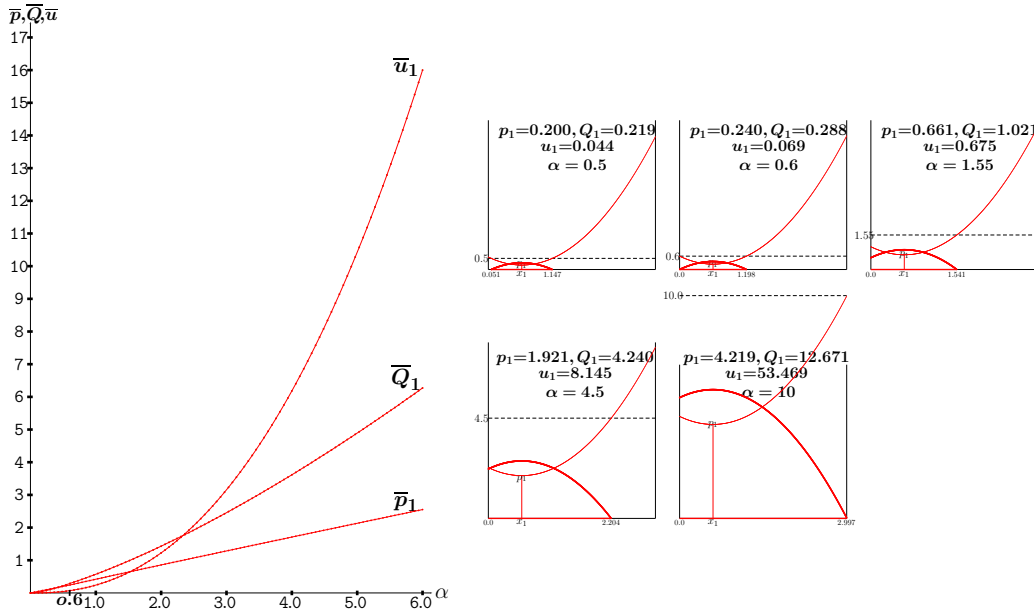
$p_1$	$p_2$	$x_1$	$x_2$	$Q_1$	$Q_2$	$u_1$	$u_2$
0.368	0.351	0.241	0.216	2.156	2.108	1.606	1.697
0.314	0.334	0.226	0.198	1.868	2.138	1.765	1.348
0.358	0.333	0.216	0.221	1.966	2.064	1.678	1.553
0.353	0.323	0.208	0.211	1.999	1.815	1.401	1.675
0.331	0.361	0.206	0.210	1.943	2.079	1.686	1.449

## Monopolio

La fig. 6.28 es análoga a la fig. 6.17, pero con coste de desplazamiento cuadrático. Salvo para valores de  $\alpha$  muy bajos, los precios, las demandas y los beneficios son menores en la fig. 6.28 en comparación con los de la fig. 6.17. Si se observan las figuras, para  $\alpha=6.0$ , el beneficio crece hasta valores próximos a 17 en la fig. 6.28 y lo hace hasta casi 19 en la fig. 6.17. Como ejemplo particular de ello, en el recuadro con  $\alpha=4.5$ , en la fig. 6.17 el agente monopolista obtiene todo el mercado y un beneficio  $u=9.087$ , mientras que en la fig. 6.28 el monopolista obtiene la porción del mercado  $[0, 2.204]$  y el beneficio  $u=8.145$ .

En el modelo monopolístico del juego de  $\alpha$ -HS2, el óptimo se logra según la ec. (6.24), es decir, la ec. (6.20b) con  $L$  reemplazado por  $2L$ <sup>[6.22]</sup>.

$$p^m = \frac{1}{2} \left( \alpha - \frac{c}{L} \right), \quad Q^m = p_1^m L, \quad c = \frac{1}{3} ((a^3 + (L-a)^3) t) \quad \alpha \geq \alpha_2 = 2(L-a)^2 - \frac{c}{L}. \quad (6.24)$$



**Figura 6.28:** Simulación monopolística del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable y coste de desplazamiento cuadrático con  $x_1=0.6$  en  $T=200$ .  $p_2=22.0$ .  $L = 3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación. Los recuadros representan el modelo con  $\alpha=0.5, 0.6, 1.55, 4.5, 10.0$ .

En la fig. 6.28, tenemos  $c = \frac{1}{3}((3 - 0.6)^3 + 0.6^3) = 4.680$ , de modo que  $p_1^m = \frac{1}{2}\alpha - \frac{4.680}{6}$ ,  $\alpha > \alpha_2 = 2 \cdot 2.4^2 - 4.680/3 = 9.960$ . De acuerdo con ello, con  $\alpha=10.0$ , tenemos que  $p_1^m = 5.0 - 0.78 = 4.32$ , valor muy próximo al simulado que se muestra en el recuadro inferior derecho, donde  $\bar{p}_1=4.219$ .

### 6.3. Conclusiones

En el caso del juego de HS, donde los cálculos analíticos resultan ser aún más complejos que en los modelos anteriores, la técnica de simulación numérica utilizada se convierte en una aliada necesaria para conocer el comportamiento del juego en ciertas situaciones. Resulta particularmente útil para evaluar el EN, lo que resulta ser una tarea desafiante incluso en el modelo con coste de desplazamiento lineal y localizaciones fijas, y más aún en los escenarios más complejos como el de precios y localizaciones variables y el de coste de desplazamiento cuadrático. La técnica de simulación implementada se ha comprobado que resulta también de gran ayuda para estudiar el juego de Hotelling cuando el EN no existe, es decir, con jugadores en posiciones muy cercanas.

La simulación produce resultados que se ajustan perfectamente a los teóricos en el modelo monopolístico, lo que sirve para verificar su buen funcionamiento y su utilidad para mostrar el comportamiento del juego. En simulaciones con localizaciones fijas y precios variables, los beneficios de la solución en EN no están lejos de los de la solución del OP.

El aumento del límite de coste en simulaciones con localizaciones y precios variables induce un EN donde la localización de ambos jugadores resulta estar bastante próxima al centro

(aproximadamente a  $L/8$  de distancia del mismo). Del mismo modo, en simulaciones con precios fijos se observa una tendencia hacia el centro en la ubicación de ambos jugadores. Estos hallazgos son comunes tanto al modelo de coste desplazamiento lineal (figs. 6.15-6.16) como al de coste cuadrático (figs. 6.25-6.26).

Por tanto, desde el punto de vista del juego de HS, la afirmación del artículo original de Hotelling (1929) sobre la tendencia de los jugadores hacia el centro del segmento de mercado sigue teniendo validez bajo determinadas condiciones, como también indican otros autores en escenarios diferentes (Irmen y Thisse, 1998).

# Notas

[6.1] Para valores pequeños de  $\alpha$ , no hay competencia entre los jugadores y el OP se calcula del modo siguiente:  
 $r = \frac{\alpha-p}{t}$ ,  $Q = 2\frac{r(\alpha-p)}{2}$ ,  $ut = p(\alpha-p)^2$ ,  $u'=0 \rightarrow p^\bullet = \frac{\alpha}{3}$ . Esta expresión es válida hasta que se cumple que  
 $r^\bullet = \frac{\alpha-p^\bullet}{t} = a \rightarrow \alpha_1 = \frac{3a}{2}t$ .

[6.2] Cuando  $\alpha > \alpha_1$ , los jugadores continúan sin interactuar pero varía el modo de calcular la demanda y, por tanto, el OP:  $Q = \frac{(\alpha-p-a)+(\alpha-p)}{2}a + \frac{(\alpha-p)(\alpha-p)}{2}$ ,  $2u = p((2(\alpha-p) - a)a + (\alpha-p)^2)$ .  $2u' = [(2\alpha - 2p - a)a + (\alpha-p)^2] + p[-2a - 2(\alpha-p)] = (2\alpha - a)a + (\alpha-p)^2 - p2[a + a + (\alpha-p)] = (2\alpha - a)a + \alpha^2 - 2p\alpha + p^2 - 4pa - 2p\alpha + 2p^2 = 3p^2 - 4p(\alpha+a) + (2\alpha - a)a + \alpha^2 = 0$ .

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene,

$$p_{1,2}^\bullet = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 3(\alpha^2 + (2\alpha - a)a)}}{3}, \quad \lambda = 2(\alpha + a).$$

Considerando  $t = 1$ , la expresión anterior es válida hasta que se cumple,

$$\alpha - p_{1,2}^\bullet = L/2 - a \rightarrow \alpha - \frac{2(\alpha+a) - \sqrt{\alpha^2 + 2a\alpha + 7a^2}}{3} = L/2 - a, \quad 3\alpha + 3a - 3L/2 = 2(\alpha+a) - \sqrt{\alpha^2 + 2a\alpha + 7a^2},$$

$$(\alpha + a - 3L/2)^2 = \alpha^2 + 2a\alpha + 7a^2 = \alpha^2 + a^2 + 9L^2/4 + 2a\alpha - 3aL - 3\alpha L, \quad 6a^2 = 9L^2/4 - 3aL - 3\alpha L,$$

$$\alpha_2 = 3L/4 - a - 2a^2/L.$$

[6.3] De la ec. (6.3),  $p_{1,2}^\bullet(\alpha = \frac{3}{2}a) = \frac{2(\frac{3}{2}a + a) - \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + 2a\frac{3}{2}a + 7a^2}}{3} = \frac{5a - \sqrt{\frac{49}{4}a^2}}{3} = \frac{5a - \frac{7}{2}a}{3} = \frac{\frac{3}{2}a}{3} = \frac{a}{2}$ .

[6.4] De la ec. (3.15), con  $t=1$ , se obtiene que,

$$u = p[(\alpha-p)\frac{L}{2} - c], \quad c = \frac{1}{2}(a^2 + (\frac{L}{2} - a)^2) \rightarrow 2u' = (\alpha-p)L - 2c - pL \rightarrow p^\bullet = \frac{\alpha - c}{L}. \quad Q^\bullet = (\alpha - p^\bullet)\frac{L}{2} - c =$$

$$(\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{c}{L})\frac{L}{2} - c = (\frac{\alpha}{2} + \frac{c}{L})\frac{L}{2} - c = \frac{\alpha L}{4} + \frac{c}{2} - c = \frac{\alpha L}{4} - \frac{c}{2}. \quad \alpha - p^\bullet = \frac{\alpha}{2} + \frac{c}{L}, \quad \alpha - p^\bullet = \frac{L}{2} - a \rightarrow \alpha_2 = L - 2a - 2\frac{c}{L}.$$

[6.5] Sustituyendo  $c = \frac{1}{2}(a^2 + (\frac{L}{2} - a)^2)$  en la expresión de  $\alpha_2$  de la ec. (6.4), se obtiene,

$$\alpha_2 = L - 2a - \frac{a^2 + (L/2 - a)^2}{L} = L - 2a - \frac{2a^2 + L^2/4 - aL}{L} = L - a - 2\frac{a^2}{L} - \frac{L^2}{4} = \frac{3}{4}L - a - 2\frac{a^2}{L}.$$

[6.6] A partir de las ecs. (3.14), se obtiene que:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} = -\bar{s} + (\alpha - p_1)\frac{\partial \bar{s}}{\partial p_1} + t(a\frac{\partial \bar{s}}{\partial p_1} - \bar{s}\frac{\partial \bar{s}}{\partial p_1}) = -\bar{s} + (\alpha - p_1 + t(a - \bar{s}))(-\frac{1}{2t}) = -\bar{s} - (a - \bar{s})\frac{1}{2} - (\alpha - p_1)\frac{1}{2t}.$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = (\alpha - p_1)\bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2) + p_1(-\bar{s} - (\alpha - p_1)\frac{1}{2t} - (a - \bar{s})\frac{1}{2}) = p_1^2\frac{1}{2t} - p_1(\alpha\frac{1}{2t} + \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\bar{s}) + \alpha\bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2).$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = 0 \rightarrow p_1^2 - (\alpha + (a + 3\bar{s})t)p_1 + t(\alpha L + t(aL - \bar{s}^2 - 2a^2)) = 0.$$

La intersección de  $\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = 0$ , obtenida en la ecuación anterior, y  $\frac{\partial u_2}{\partial p_2} = 0$  da como resultado la solución en

EN dada en la ec. (6.5) para el juego simétrico. Esto es lo mismo que sustituir  $\bar{s} = L/2$  en la expresión de  $\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = 0$  y hallar la raíz con el signo negativo de la ecuación de segundo grado, ya que la raíz con el signo positivo genera un precio superior a  $\alpha$ .

[6.7] Si consideramos la casuística  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , el OP se obtiene del modo siguiente:

$$Q(\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2) = \frac{(\alpha - p - (L/2 - a)) + (\alpha - p)}{2} (L/2 - a) + \frac{(\alpha - p)^2}{2}.$$

$$2u = p \left( (2(\alpha - p) - (L/2 - a))(L/2 - a) + (\alpha - p)^2 \right).$$

$$2u' = ((\alpha^2 - 2p\alpha + p^2) - 2p(L/2 - a) + (2\alpha - (L/2 - a))(L/2 - a)) - p(2(\alpha - p) + 2(L/2 - a)). \quad 2u' = 0 \rightarrow 3p^2 - 4p(\alpha + (L/2 - a)) + (2\alpha - (L/2 - a))(L/2 - a) + \alpha^2 = 0, \text{ i.e., la expresión obtenida en la nota 6.2 sustituyendo } a \text{ por } L/2 - a.$$

[6.8] Para obtener el EN, primeramente se calcula la demanda del jugador-1 y su derivada y, a partir de ahí, se obtiene la expresión de la derivada del beneficio:

$$Q_1 = \frac{1}{2} \left[ (\alpha - p_1)^2 + ((\alpha - p_1) + (\alpha - p_1 - (\bar{s} - a))(\bar{s} - a)) \right], \quad 2Q'_1 = -2(\alpha - p_1) + (-2 + \frac{1}{2})(\bar{s} - a) - (2(\alpha - p_1) - (\bar{s} - a)) \frac{1}{2} = -3(\alpha - p_1) - (\bar{s} - a).$$

$$2u'_1 = [(\alpha - p_1)^2 + (2(\alpha - p_1) - (\bar{s} - a))(\bar{s} - a)] - p_1 [3(\alpha - p_1) + \bar{s} - a] = [\alpha^2 - 2\alpha p_1 + p_1^2 - 2p_1(\bar{s} - a)] - [-3p_1^2 + p_1(3\alpha + (\bar{s} - a))] + (2\alpha - (\bar{s} - a))(\bar{s} - a) = 4p_1^2 - p_1 [5\alpha + 3(\bar{s} - a)] + \alpha^2 + (2\alpha - (\bar{s} - a))(\bar{s} - a).$$

Si sustituimos  $s = L/2$  en la ecuación  $4p_1^2 - p_1 [5\alpha + 3(\bar{s} - a)] + \alpha^2 + (2\alpha - (\bar{s} - a))(\bar{s} - a) = 0$  y la resolvemos, obtenemos el EN del juego simétrico.

[6.9] La expresión del beneficio  $u^\bullet = (p^\bullet)^2 L/2$  se maximiza cuando  $p^\bullet = \alpha/2 - c/L$  es máximo, por lo tanto, cuando  $c$  es mínimo, lo cual se logra con  $a = L/4 \rightarrow c = L^2/16 \rightarrow p^m = \alpha/2 - L/16 = 4.5/2 - 3/16 = 2.0 \rightarrow Q^m = p^m L/2 = 2 \cdot 3/2 = 3.0 \rightarrow u^m = 2.0 \cdot 3.0 = 6.0. \quad p^\bullet(a = 0) = p^\bullet(a = L/2) = \alpha/2 - (L^2/8)/L = 4.5/2 - 3/8 = 1.875.$

[6.10] Para hallar el EN, se derivan los beneficios correspondientes a ambos jugadores con respecto a sus localizaciones,  $a$  y  $b$ , y las expresiones resultantes se igualan a cero:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial a} &= \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial a} = (\alpha - p_1) \frac{1}{2} + t \left( a \frac{1}{2} + \bar{s} - \bar{s} \frac{1}{2} - 2a \right), \\ 2 \frac{\partial u_1}{\partial a} &= p_1 ((\alpha - p_1) + t(\bar{s} - 3a)), \quad 2 \frac{\partial u_1}{\partial a} = 0 \rightarrow a = \frac{1}{5} \left( L - b + \frac{2\alpha + p_2 - 3p_1}{t} \right), \\ \blacksquare \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial b} &= -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = (\alpha - p_2) \frac{1}{2} + t \left( b \frac{1}{2} + (L - \bar{s}) - (L - \bar{s}) \frac{1}{2} - 2b \right) \\ 2 \frac{\partial u_2}{\partial b} &= p_2 ((\alpha - p_2) + t(L - \bar{s} - 3b)), \quad 2 \frac{\partial u_2}{\partial b} = 0 \rightarrow b = \frac{1}{5} \left( L - a + \frac{2\alpha + p_1 - 3p_2}{t} \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión de  $b$  en  $a$ , se obtiene  $a = \frac{1}{5} \left( L - \left( \frac{1}{5} (L - a + \frac{2\alpha + p_1 - 3p_2}{t}) \right) + \frac{2\alpha + p_2 - 3p_1}{t} \right) \rightarrow a^\star = \frac{1}{6} L + \frac{\alpha + p_2 - 2p_1}{3t}.$

A continuación, sustituyendo el resultado obtenido para  $a$  en la expresión de  $b$  resulta que  $b^\star = \frac{1}{5} (L - (\frac{1}{6} L + \frac{\alpha + p_2 - 2p_1}{3t}) + \frac{2\alpha + p_1 - 3p_2}{t}) = \frac{1}{6} L + \frac{\alpha + p_1 - 2p_2}{3t} \rightarrow x_2^\star = L - b^\star = \frac{5}{6} L - \frac{\alpha + p_1 - 2p_2}{3t}.$

[6.11] Para determinar los límites de los tramos de las expresiones del EN para el juego simétrico:

$$r = \frac{\alpha - p}{t} = \frac{L}{4} \rightarrow \alpha_1. \quad a^\star = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} + \frac{\alpha - p}{t} \right) = \frac{L}{2} \rightarrow \alpha_2.$$

[6.12] A partir de la ec. (3.15),

$$\frac{\partial Q_1}{\partial a} = -\frac{1}{2}t(-2(\frac{L}{2} - a) - 2a) = 0 \rightarrow a^\bullet = \frac{L}{4}, Q_{1,2}^\bullet = (\alpha - p)\frac{L}{2} - \frac{1}{2}t((\frac{L}{2} - \frac{L}{4})^2 + (\frac{L}{4})^2).$$

[6.13] Para hallar el valor del OP en el tramo  $\alpha \geq \alpha_2$ :

$$Q = \frac{(\alpha - p - a) + (\alpha - p)}{2}a + \frac{(\alpha - p) + (\alpha - p - (L - a))}{2}(L - a) = (\alpha - p)L - c, \quad c = (a^2 + (L - a)^2)/2. \rightarrow u = p[(\alpha - p)L - c]. \rightarrow u' = (\alpha - p)L - c - Lp = 0. \rightarrow p^m = \alpha/2 - c/2L, \quad Q^m = \alpha L/2 - c/2. \quad \alpha - p^m = L - a \rightarrow \alpha_2 = 2(L - a) - c/L.$$

[6.14] Para hallar el OP en la región  $\alpha \geq \alpha_1$ :

$$Q = 2\frac{(\alpha - p - \frac{L}{2}) + (\alpha - p)}{2}\frac{L}{2} = (\alpha - p - \frac{L}{4})L. \rightarrow u = p[(\alpha - p - \frac{L}{4})L]. \rightarrow u' = (\alpha - p - \frac{L}{4})L - pL. \rightarrow p^m = \frac{1}{2}(\alpha - \frac{L}{4}), \quad Q^m = \frac{L}{2}(\alpha - \frac{L}{4}).$$

[6.15] El cálculo de la demanda de ambos jugadores en el juego de  $\alpha$ -HS2 se realiza resolviendo las siguientes integrales:

$$Q_1 = \int_0^{\bar{s}} (\alpha - p_1 - t(s - a)^2) ds = ((\alpha - p_1)s - \frac{1}{3}t(s - a)^3) \Big|_0^{\bar{s}} = (\alpha - p_1)\bar{s} - \frac{1}{3}t((\bar{s} - a)^3 + a^3).$$

$$Q_2 = \int_{\bar{s}}^L (\alpha - p_2 - t(s - x_2)^2) ds = ((\alpha - p_2)s - \frac{1}{3}t(s - x_2)^3) \Big|_{\bar{s}}^L = (\alpha - p_2)(L - \bar{s}) - \frac{1}{3}t((L - x_2)^3 - (\bar{s} - x_2)^3)$$

[6.16] Por ejemplo, T.Puu (2002) afirma que “más allá, para huir de algunas consecuencias de la paradoja, apareció la poco realista y artificiosa idea del coste de desplazamiento cuadrático y se hizo popular”.

[6.17] El OP para el juego de  $\alpha$ -HS2 se calcula del modo siguiente:

- $\alpha \leq \alpha_1$ :  $r = \sqrt{\alpha - p_1}$ ,  $(x_1^i, x_1^s) = (a - r, a + r)$ ,  $Q_1 = \int_{a-r}^{a+r} (\alpha - p_1 - (s - a)^2) ds = (\alpha - p_1)s \Big|_{a-r}^{a+r} - \frac{1}{3}(s - a)^3 \Big|_{a-r}^{a+r} = (\alpha - p_1)2r - \frac{1}{3}2r^3 = 2r(r^2 - \frac{1}{3}r^2) = \frac{4}{3}r^3. \quad 3u'/4 = r^3 - p_1\frac{3}{2}r, \quad u' = 0 \rightarrow (\alpha - p_1) - p_1\frac{3}{2} = 0 \rightarrow p_1^\bullet = p_1^m = \frac{2}{5}\alpha, \quad Q_1^m = \frac{4}{3}(\frac{3}{5}\alpha)^{3/2}, \quad r_1^m = \sqrt{\alpha - \frac{2}{5}\alpha} = \sqrt{\frac{3}{5}\alpha}, \quad r_1^m = a \rightarrow \alpha_1 = \frac{5}{3}a^2.$

Para comparar con el caso anterior, se pueden obtener las expresiones para el juego de  $\alpha$ -HOT2, donde se cumple que  $Q = 2r$  y  $u = 2rp$ , de tal modo que  $u' = 2r - pr^{-1/2} \rightarrow p^m = \frac{2}{3}\alpha \rightarrow Q^m = 2(\frac{\alpha}{3})^{1/2}$ , y  $\sqrt{\alpha - p^m} = a \rightarrow \alpha_1 = 3a^2$ .

- $\alpha \geq \alpha_2$ : A partir de la ec. (6.19),  $p^\bullet = \frac{\alpha}{2} - \frac{c}{L}$  como en la nota 6.4.  $r^m = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{c}{L}}, r^m = \frac{L}{2} - a \rightarrow \alpha_2 = 2((\frac{L}{2} - a)^2 - \frac{c}{L})$ .

[6.18] Para calcular el OP en la región  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ ,

$$Q_1 = \int_0^{a+r} (\alpha - p_1 - (s - a)^2) ds = (\alpha - p_1)(a + r) - \frac{1}{3}(s - a)^3 \Big|_0^{a+r} = (\alpha - p_1)(a + r) - \frac{1}{3}(r^3 + a^3). \quad u' = (\alpha - p_1)(a + r) - \frac{1}{3}(r^3 + a^3) + p_1[-(a + r) + (\alpha - p_1)r' - r^2r'] = -\frac{1}{3}(r^3 + a^3) + p_1[(\alpha - p_1)r' - r^2r'].$$

[6.19] El beneficio óptimo,  $u^\bullet$ , es máximo en  $a = L/4$ . de modo análogo a como sucede en la nota 6.9, de tal modo que  $c = \frac{1}{3}2\frac{L^3}{64} = \frac{L^3}{96}. \rightarrow p^m = \frac{\alpha}{2} - \frac{L^2}{96} = 2.25 - 9/96 = 2.156 \rightarrow Q^m = p^m L/2 = 2.156 \cdot 1.5 = 3.234 \rightarrow u^m = 2.155 \cdot 3.234 = 6.975$ .

El valor del beneficio óptimo coincide en  $a=0$  y  $a = L/2$ :  $p^\bullet(a = 0) = p^\bullet(a = L/2) = \alpha/2 - \frac{1}{3}(\frac{L^3}{8})/L = 2.25 - 3/8 = 1.875$ .

[6.20] A partir de las ecs. (6.18) con  $p_1 = p_2 = p$ , se obtiene que,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(\alpha - p) + t\left(\frac{1}{8}(x_2 - x_1)^2 - x_1^2\right) = 0, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}(\alpha - p) - t\left(\frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2 - (L - x_2)^2\right) = 0$$

De la suma de las expresiones anteriores, se obtiene la esperada condición de simetría  $x_2 = L - x_1$ . Como resultado de ello, resulta que  $4tx_1^2 + 4tLx_1 + 4(p - \alpha) - tL^2 = 0$ , cuya raíz positiva resulta  $x_1^* \equiv a^*$ , que coincide con la ec. (6.22a). Finalmente, con  $x_1^* = L/2$  se llega al valor de  $\alpha_2$  dado en la ec. (6.23).

[6.21] A partir de la ec. (6.19),  $\frac{\partial Q_1}{\partial a} = -\frac{1}{3}t \left( -3 \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 - 3a^2 \right) = 0 \rightarrow \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 = a^2 \rightarrow a^\bullet = \frac{L}{4}$ ,  
 $Q_{1,2}^\bullet = (\alpha - p) \frac{L}{2} - \frac{1}{3}t \left( \left( \frac{L}{4} \right)^3 + \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right)^3 \right)$ .

[6.22] El OP con coste de desplazamiento cuadrático en el caso de monopolio, dentro de la región  $\alpha \geq \alpha_2$ , se obtiene del modo siguiente:

$$Q = \int_0^L (\alpha - p - (s-a)^2) ds = (\alpha - p)L - c, \quad c = \frac{1}{3}((L-a)^3 + a^3)t. \rightarrow p^m = \alpha/2 - \frac{c}{2L}. \quad r^m = \sqrt{\alpha/2 + \frac{c}{2L}}. \quad r^m = L - a \rightarrow \alpha_2 = 2((L-a)^2 - \frac{c}{2L}). \quad Q^m = (\alpha - p^m)L - c = (\alpha/2 + \frac{c}{2L})L - c.$$

# Capítulo 7

## El juego cuántico de Hotelling-Smithies

Este capítulo recoge el análisis del juego de HS desde el punto de vista cuántico, en contraste con el enfoque clásico visto en la sec. 6. Se consideran diversas casuísticas, como la variación de la localización de los jugadores o del límite de coste. Al igual que en capítulos anteriores, además de la variante con coste de desplazamiento lineal, también se estudia el juego con coste cuadrático. El contenido de esta sección está basado en los trabajos de investigación sobre este tema realizados por Garcia-Perez *et al.* (2023).

### 7.1. El enfoque cuántico del juego de Hotelling-Smithies

Utilizaremos nuevamente el esquema de cuantización introducido por Li *et al.* (2002), de acuerdo con el cual los precios independientes,  $p_1$  y  $p_2$ , se *entrelazan* para dar lugar a unos nuevos precios *efectivos*,  $p_1^c(p_1, p_2; \gamma)$  y  $p_2^c(p_1, p_2; \gamma)$ , tal y como se define en,

$$p_1^c = p_1 w_1(\gamma) + p_2 w_2(\gamma), \quad p_2^c = p_2 w_1(\gamma) + p_1 w_2(\gamma), \quad (7.1)$$

con  $w_1(\gamma) = \cosh \gamma$ ,  $w_2(\gamma) = \sinh \gamma$ . El parámetro  $\gamma$  actúa como un grado o factor de entrelazamiento, de tal modo que el juego clásico se recupera en  $\gamma=0.0$ , es decir,  $p_1^c(0) = p_1$ ,  $p_2^c(0) = p_2$ . En el caso de tener un valor lo suficientemente elevado de  $\gamma$ , se cumple que  $\cosh \gamma \simeq \sinh \gamma$  y como resultado  $p_1^c \simeq p_2^c$ .

De acuerdo con este modelo, si se cumple que  $|p_1^c - p_2^c| \leq t(x_2 - x_1)$ , el consumidor indiferente se localiza en  $\bar{s}(\gamma)$  y su expresión viene dada por la ec. (7.2)<sup>[7.1]</sup>. Nótese que la contribución de  $p_2 - p_1$  en la expresión de  $\bar{s}$  tiende a desaparecer cuando aumenta  $\gamma$ .

$$\bar{s}(\gamma) = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{(p_2 - p_1)e^{-\gamma}}{t} \right). \quad (7.2)$$

Los precios independientes en EN en el modelo cuántico del juego de  $\alpha$ -HS simétrico ( $a = b$ ) vienen dados por la ec. (7.3)<sup>[7.2]</sup>, que es una generalización de la ec. (6.5), recuperándose

la expresión de dicha ecuación en el juego clásico, es decir, cuando  $\gamma=0.0$  ( $e^0=1$  y  $\cosh 0=1$ ). Los precios entrelazados  $p_{1,2}^{c*}(\gamma) = p_{1,2}^*(\gamma)e^\gamma$  convergen a los precios en la solución del OP dada por la ec. (6.4) cuando  $\gamma$  crece<sup>[7.3]</sup>.

$$p_{1,2}^*(\gamma) = \frac{\lambda' - \sqrt{\lambda'^2 - 4te^\gamma \cosh \gamma (\alpha L - 2c)}}{2e^\gamma}, \quad \lambda' = \alpha + t \left( a + 2Le^\gamma \cosh \gamma - \frac{L}{2} \right). \quad (7.3)$$

En el caso de otros autores, como Chen *et al.* (2014), la densidad de la demanda es sensible al coste de desplazamiento pero no depende del precio. Este enfoque no se considera aquí. Tampoco se explora el punto de vista seguido en Rahaman *et al.* (2012), que se centra en cantidades en lugar de en precios, es decir, *à la Cournot*, y donde, además, se analiza el caso en que el consumidor gana dinero por desplazarse a la localización del punto de venta.

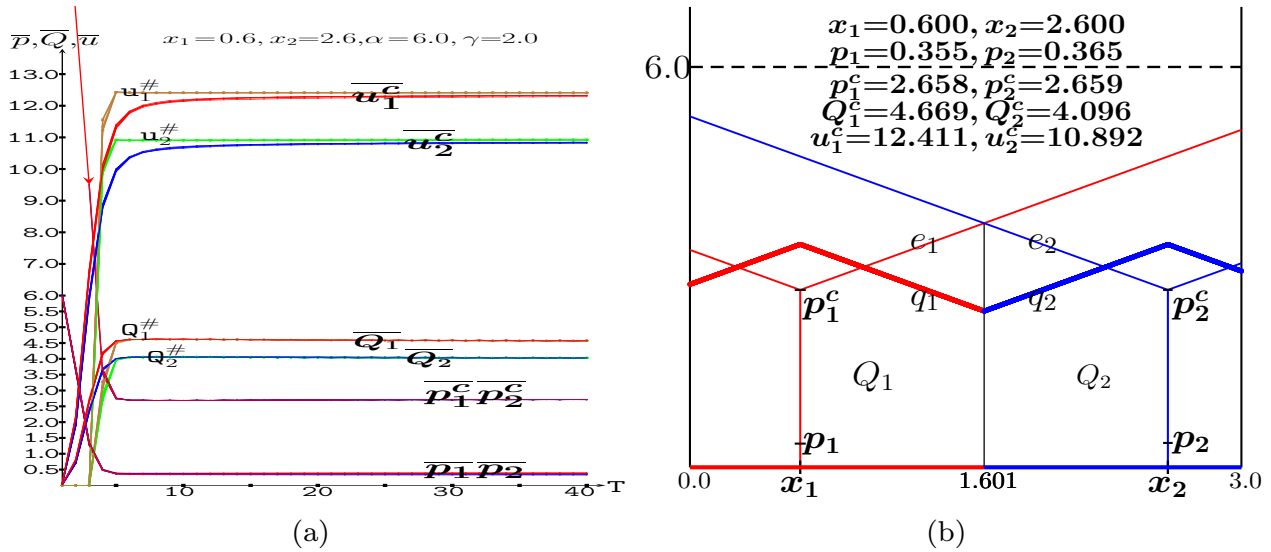
## 7.2. Simulación del juego cuántico de Hotelling-Smithies

### Simulación con localización fija

La fig. 7.1 representa la simulación del juego cuántico de 6.0-HS con grado de entrelazamiento  $\gamma=2.0$  y localizaciones fijas de los jugadores,  $x_1=0.6$ ,  $x_2=2.6$ . La fig. 7.1(a) muestra la dinámica hasta la iteración  $T=40$ . Durante las iteraciones iniciales, los precios independientes promedio caen desde  $\bar{p} \simeq 6.0$ , y las demandas y beneficios medios se disparan desde valores muy bajos. Sin embargo, estas tendencias iniciales tan marcadas pronto se interrumpen, de modo que los precios, demandas y beneficios promedio se vuelven casi estacionarios antes de  $T=10$ . En el régimen estable, los precios medios entrelazados,  $\bar{p}_1^c$  y  $\bar{p}_2^c$ , e independientes,  $\bar{p}_1$  y  $\bar{p}_2$ , son muy similares para ambos jugadores pero la demanda del jugador-1,  $\bar{Q}_1$ , sobrepasa apreciablemente a la demanda del jugador-2,  $\bar{Q}_2$ . Esto da lugar a que los beneficios se comporten análogamente,  $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$ , siendo la razón última de ello que  $a > b$  en las simulaciones estudiadas. El resultado de cinco configuraciones iniciales de precios aleatorios se muestra en la fig. 7.1(a), siendo tales simulaciones indistinguibles. La fig. 7.1(b) muestra el juego cuántico de 6.0-HS con precios estacionarios en una de las simulaciones representadas en la fig. 7.1(a). Así, la fig. 7.1(b) cuantifica el mejor comportamiento en el juego del jugador-1 frente al jugador-2 a través de la ubicación del consumidor indiferente  $\bar{s}=1.601$ , que se sitúa por encima del punto medio del mercado  $L/2=1.500$ .

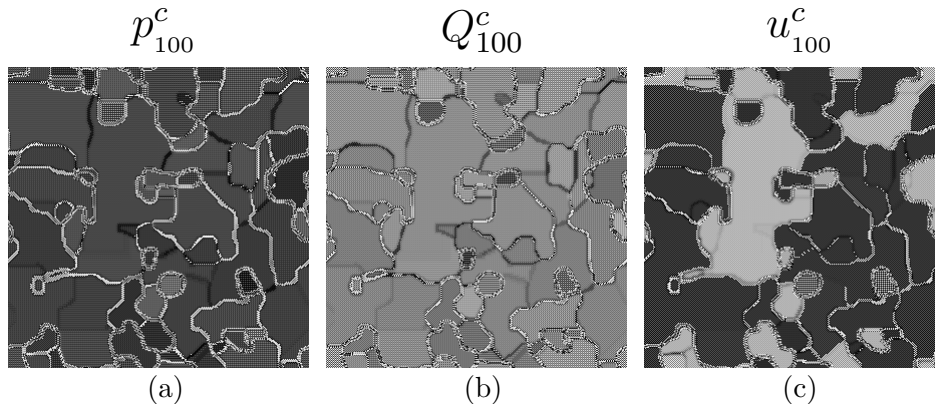
La fig. 7.1(a) muestra también los beneficios de campo medios ( $u^\#$ ) y sus demandas asociadas ( $Q^\#$ ) logradas en un único juego hipotético entre dos competidores en el que los jugadores adoptan los valores medios de precios entrelazados que aparecen en la simulación. Es decir, las ganancias generadas a partir de los valores  $p^\#$  dados en las ecs. (7.4). Los valores de campo medios se representan en marrón para el jugador-1 y en verde para el jugador-2. Se observa que los beneficios de campo medios difieren de los valores obtenidos con la simulación en las iteraciones iniciales, pero ambas magnitudes tienden a coincidir pronto a medida que avanza la dinámica. Cabe destacar que en las primeras iteraciones los beneficios de campo medios son nulos debido al alto valor de los precios independientes y entrelazados (no mostrados en la fig. 7.1(a)), que la simulación hace caer prácticamente de inmediato.

$$p_1^\# = \bar{p}_1 \cosh \gamma + \bar{p}_2 \sinh \gamma, \quad p_2^\# = \bar{p}_2 \cosh \gamma + \bar{p}_1 \sinh \gamma. \quad (7.4)$$



**Figura 7.1:** El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=6.0, \gamma=2.0$  y localizaciones fijas  $x_1=0.6, x_2=2.6$  para cinco configuraciones de precios iniciales.  $L=3.0, t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=40$  en las cinco simulaciones. (b) El juego con los precios medios entrelazados de una de las simulaciones.

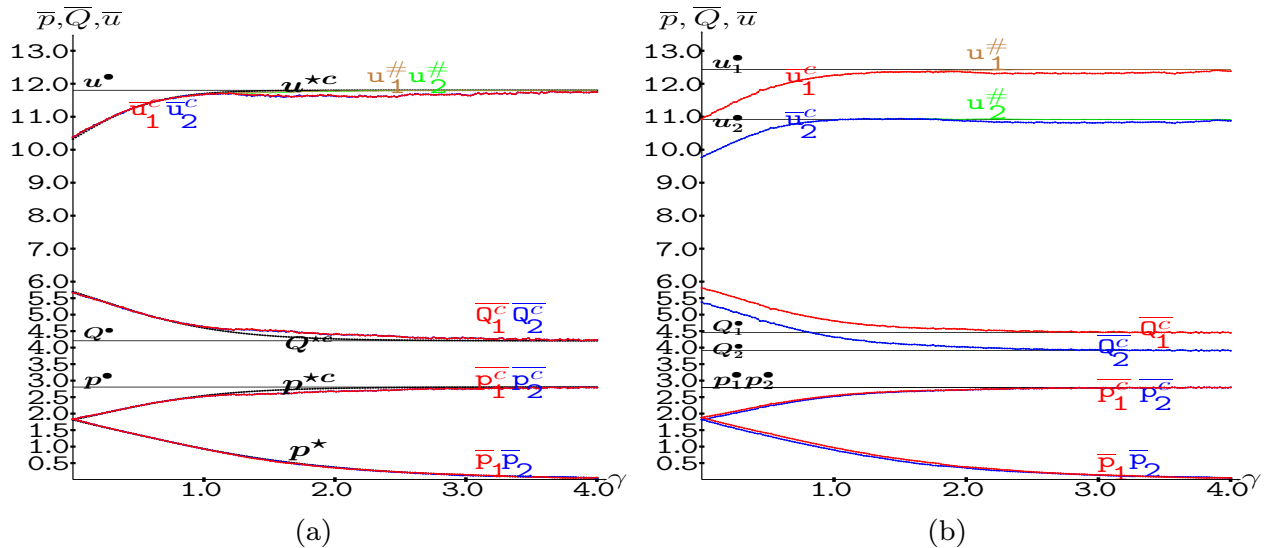
La fig. 7.2 muestra los patrones en  $T=100$  en una simulación de la fig. 7.1. Una mayor intensidad en el tono del gris se asocia a un valor más elevado, asignando al blanco y al negro los valores mínimo y máximo alcanzados, respectivamente. Pueden observarse intrincadas estructuras similares a mosaicos en los patrones de precio, demanda y beneficio.



**Figura 7.2:** Patrones en  $T=100$  en la simulación del juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=6.0, \gamma=2.0$  y localizaciones fijas  $x_1=0.6, x_2=2.6$ .  $L=3.0, t=1.0$ . (a) Precios. (b) Demandas. (c) Beneficios. Mayor intensidad en el tono del gris indica un valor más elevado.  $p_{min}^c=0.800, p_{max}^c=4.144; Q_{min}^c=2.271, Q_{max}^c=7.674; u_{min}^c=5.085, u_{max}^c=12.683$ .

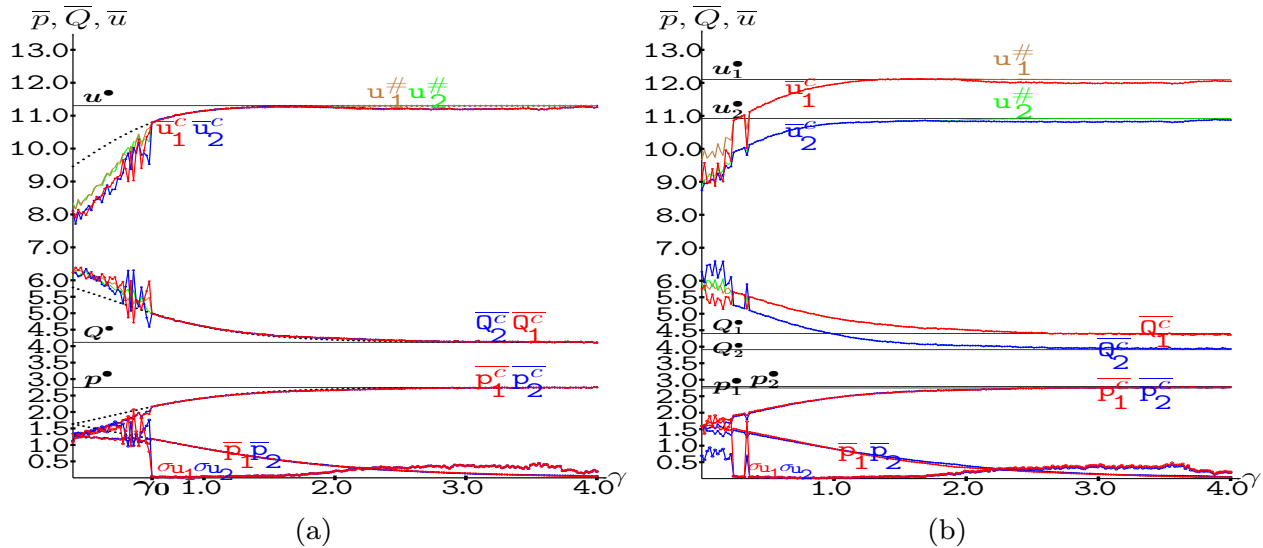
La fig. 7.3 muestra la simulación del juego cuántico de 6.0-HS con grado de entrelazamiento  $\gamma$  variable y localización fija del jugador-1,  $x_1=0.6$ , en  $T=100$ . En la fig. 7.3(a), la posición del jugador-2 es  $x_2=2.4$ , mientras que en la fig. 7.3(b) es  $x_2=2.6$  (como en la fig. 7.1). En ambos casos, cuando  $\gamma$  aumenta, *i*) los precios independientes medios de ambos jugadores ( $\bar{p}$ ) disminuyen monótonamente; y *ii*) los precios entrelazados, las demandas y los beneficios

medios de ambos jugadores dados por  $\bar{p}^c$ ,  $\bar{Q}^c$  y  $\bar{u}^c$ , respectivamente, se estabilizan aproximadamente desde  $\gamma=2.0$ . En el escenario  $a = b$  de la fig. 7.3(a), se cumple que  $\bar{u}_1^c = \bar{u}_2^c$ , mientras que en el escenario  $a > b$  de la fig. 7.3(b) se observa que  $\bar{u}_1^c > \bar{u}_2^c$ . En la fig. 7.3(a), se representan los precios independientes en EN según la ec. (7.3), luego  $p^{c*} = p^* e^\gamma$  (de modo que la disminución en  $p^*$  sea *compensada* por la exponencial en  $\gamma$ ),  $Q^{c*} = (\alpha - p^{c*})L/2 - c$ , y finalmente  $u^{c*} = p^{c*}Q^{c*}$ . La representación de los precios independientes en EN es apenas perceptible en la gráfica debido a su coincidencia con el resultado de la simulación.



**Figura 7.3:** Simulación en precios del juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=6.0$  y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=100$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ . Precios independientes y entrelazados medios ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ), demanda media ( $\bar{Q}^c$ ), beneficio medio ( $\bar{u}^c$ ), beneficio de campo medio ( $u^\#$ ). Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  representan la solución del óptimo de Pareto. Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan la solución en equilibrio de Nash.

La fig. 7.4 considera el mismo juego de la fig. 7.3 pero con  $a=1.2$  en lugar de con  $a=0.6$ , es decir, con una ubicación tan cerca del centro del mercado que el EN no existe en el juego clásico. Aunque las características generales de los gráficos de la fig. 7.4 son similares a las de la fig. 7.3, cabe señalar que el aumento inicial de  $\gamma$  induce valores promedio que ahora muestran una apariencia *ruidosa*, en contraste con la fig. 7.3. En la fig. 7.4(a), con  $b=1.2$  (juego simétrico), esto sucede hasta el valor de entrelazamiento crítico,  $\gamma_0=0.604$ , donde los precios independientes y entrelazados, así como los beneficios alcanzados en la simulación, resultan ser menores que los del EN obtenidos en la ec. (7.3) (representados en líneas negras discontinuas). Esto va acompañado de la falta inicial de coincidencia de los beneficios de campo medios y los obtenidos a partir de la simulación y del alto valor de la desviación estándar de los beneficios ( $\sigma$ ). Sorprendentemente, esta separación desaparece a partir de  $\gamma_0$  (donde  $\bar{p}(\gamma_0) \simeq \bar{p}(\gamma=0)$ ), de modo que para  $\gamma \geq \gamma_0$ , la simulación en la fig. 7.4(a) sigue la ec. (7.3), alcanzándose la solución del OP desde aproximadamente  $\gamma=2.0$ . Para otras localizaciones simétricas de los jugadores más cercanas al centro del segmento de mercado, tenemos que  $\gamma_0(a=b=1.3)=0.880$ ,  $\gamma_0(a=b=1.4)=1.288$ . En la fig. 7.4(b), con  $b=1.0$ , se observa un comportamiento similar, existiendo una zona *ruidosa* para valores bajos de  $\gamma$ , que desaparece a medida que aumenta su valor y se estabiliza la simulación.



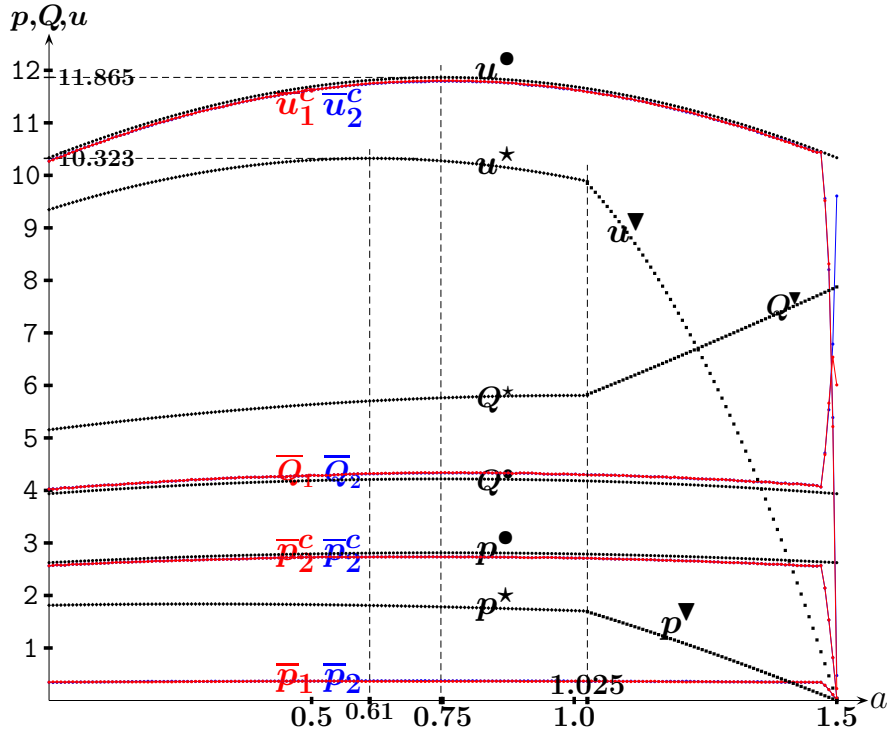
**Figura 7.4:** Simulación en precios del juego cuántico de Hotelling-Smithies con  $\alpha=6.0$  y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=100$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=1.2$ . (b)  $a=1.2$ ,  $b=1.0$ . Precios independientes y entrelazados medios ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ), demanda media ( $\bar{Q}^c$ ), beneficio medio ( $\bar{u}^c$ ), beneficio de campo medio ( $u^\#$ ). Los gráficos de ( $p^\bullet$ ,  $Q^\bullet$ ,  $u^\bullet$ ) representan el óptimo de Pareto.

## Representación del juego en función de la localización

Los precios, demandas y beneficios entrelazados alcanzados en el régimen estacionario del juego simétrico  $a = b$ , representado en la fig. 7.3(a) y la fig. 7.4(a), se aproximan mucho a los alcanzados en la correspondiente solución del OP. La fig. 7.5 muestra que este hallazgo resulta ser cierto independientemente del valor de  $a = b$ . Las cantidades promedio simuladas en la fig. 7.5 se ajustan casi perfectamente a las de la solución del OP, es decir, las líneas ( $p^\bullet$ ,  $Q^\bullet$ ,  $u^\bullet$ ) se trazan de acuerdo con la ec. (6.4). El beneficio máximo (11.865) se alcanza en  $a=L/4=0.75$  [7.4], sin destacarse excesivamente del resto de valores del beneficio. De hecho, los precios (tanto independientes como entrelazados) y las demandas no son fuertemente dependientes de  $a$ . Así, los precios independientes se mantienen alrededor de 0.36, los precios entrelazados en valores próximos a 2.73 y las demandas en torno a 4.1.

Los gráficos de ( $p^\bullet$ ,  $Q^\bullet$ ,  $u^\bullet$ ) en la fig. 7.5 representan la solución del EN en el juego clásico inducida por los precios dados por la ec. (6.5) hasta la ubicación crítica  $a^\nabla=1.025$ , a partir de la cual no existe EN. Sorprendentemente,  $a^\nabla > L/4$ , es decir, en el juego de HS con  $a = b$  el EN sigue existiendo más allá del primer cuartil. A partir de  $a^\nabla$ , los jugadores tienden a adoptar una estrategia que viene dada por la ec. (7.5) en el escenario clásico (Grau-Climent *et al.*, 2022) y da lugar a la SCC. Esta solución coincide con el *equilibrio en estrategias seguras* (EinSS) obtenido para el juego convencional de Hotelling en Iskakov e Iskakov (2012).

$$p^\nabla = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 32t(L - 2a)[\lambda + t(24a - 11L - 4a^2/L)]}}{8}, \quad \lambda = 4\alpha - t(28a - 13L). \quad (7.5)$$



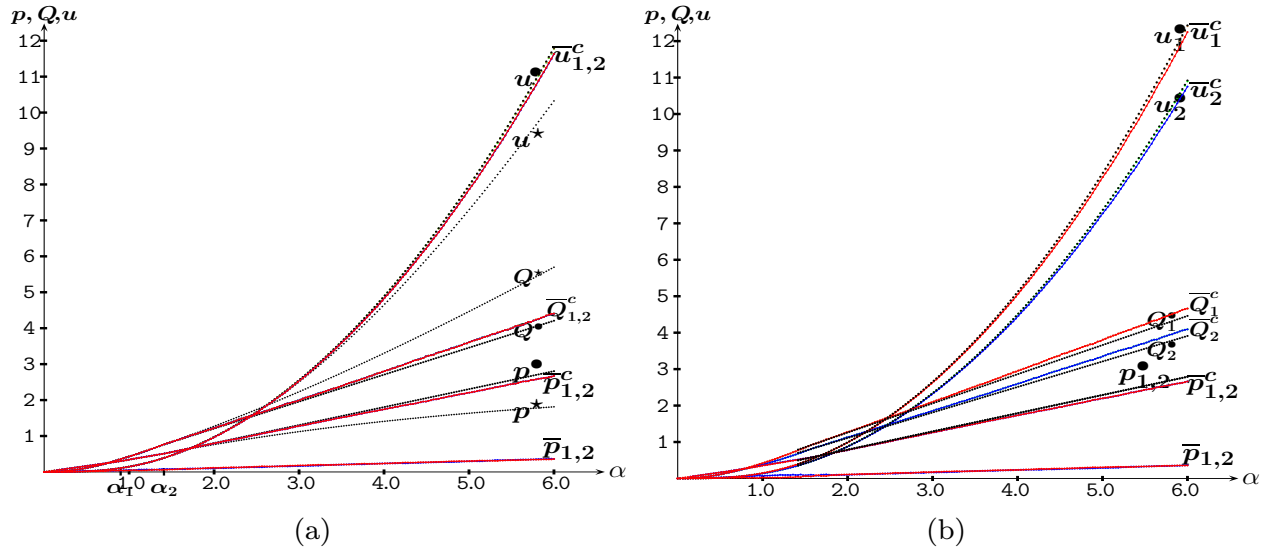
**Figura 7.5:** El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=6.0$ ,  $\gamma=2.0$  y  $a=b$  variable.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores medios en la simulación para  $T=100$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  representan el óptimo de Pareto. Los gráficos en color rojo y azul de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan el equilibrio de Nash en el juego clásico hasta  $a=a^\nabla=1.025$  y los de  $(p^\nabla, Q^\nabla, u^\nabla)$  muestran la *solución de consenso colectiva* en el juego clásico a partir de  $a=a^\nabla$ .

## Representación del juego en función del límite de coste

La fig. 7.6 representa el juego de HS con factor de entrelazamiento  $\gamma=2.0$  y límite de coste  $\alpha$  variable. En la fig. 7.6(a) se muestra el caso simétrico con  $a=b=0.6$ , de modo que los precios, demandas y beneficios entrelazados en la simulación con  $T=100$  son los mismos para ambos jugadores. A su vez, los valores medios simulados están muy cerca de los valores correspondientes a la solución del OP con un límite de coste  $\alpha$  elevado y prácticamente coinciden con valores bajos. Los valores críticos  $\alpha_1 = (3/2) \cdot 0.6 \cdot 1.0 = 0.90$ ,  $\alpha_2 = (3.0 - 2 \cdot 0.6)1.0 - 2 \frac{0.585}{3.0} = 1.41$  en la fig. 7.6(a) delimitan los dos regímenes del OP con valores de  $\alpha$  pequeños, donde los jugadores no interactúan. Con  $\alpha$  muy bajo, el OP viene dado por la ec. (7.6), pero, por su complejidad, no se ha podido llegar a ecuaciones analíticas explícitas para el caso  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$  (Grau-Climent *et al.*, 2022).

$$(p_{1,2}^\bullet, Q_{1,2}^\bullet) = \left( \frac{\alpha}{3}, \left( \frac{2\alpha}{3} \right)^2 \frac{1}{t} \right), \quad \alpha \leq \alpha_1 = \frac{3}{2}. \quad (7.6)$$

En la fig. 7.6(b), tenemos que  $a = 0.6 > b = 0.4$ , por lo que el jugador-1 obtiene mayores beneficios que el jugador-2. Esto se debe principalmente a que la demanda del jugador-1 es mayor que la demanda del jugador-2. En contraste con ello, tanto los precios independientes como los precios entrelazados de ambos jugadores son prácticamente coincidentes en dicha



**Figura 7.6:** El juego cuántico de HS con  $\gamma=2.0$  y  $\alpha$  variable.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ . Los gráficos en color rojo y azul de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores medios en la simulación para  $T=100$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  representan la solución del OP. Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan la solución en el juego clásico.

figura. Si los jugadores coluden y se ponen de acuerdo para compartir el mercado, se cumple que  $\bar{s}^\bullet = (x_1 + x_2)/2 = a + (d_x/2) = 1.6$  y, como resultado de ello, los precios y las demandas de la solución del OP en un juego con un valor de  $\alpha$  elevado se pueden obtener como una generalización de la ec. (6.4). De este modo,

$$p_1^\bullet = \frac{\alpha}{2} - \frac{c_1}{2\bar{s}^\bullet} \simeq \frac{\alpha}{2} - \frac{c_2}{2(L - \bar{s}^\bullet)} = p_2^\bullet, \quad c_1 = \frac{1}{2} \left( a^2 + (\bar{s}^\bullet - a)^2 \right) t, \quad c_2 = \frac{1}{2} \left( b^2 + (x_2 - \bar{s}^\bullet)^2 \right) t. \quad (7.7)$$

$$Q_1^\bullet = p_1^\bullet \bar{s}^\bullet, \quad Q_2^\bullet = p_2^\bullet (L - \bar{s}^\bullet). \quad (7.8)$$

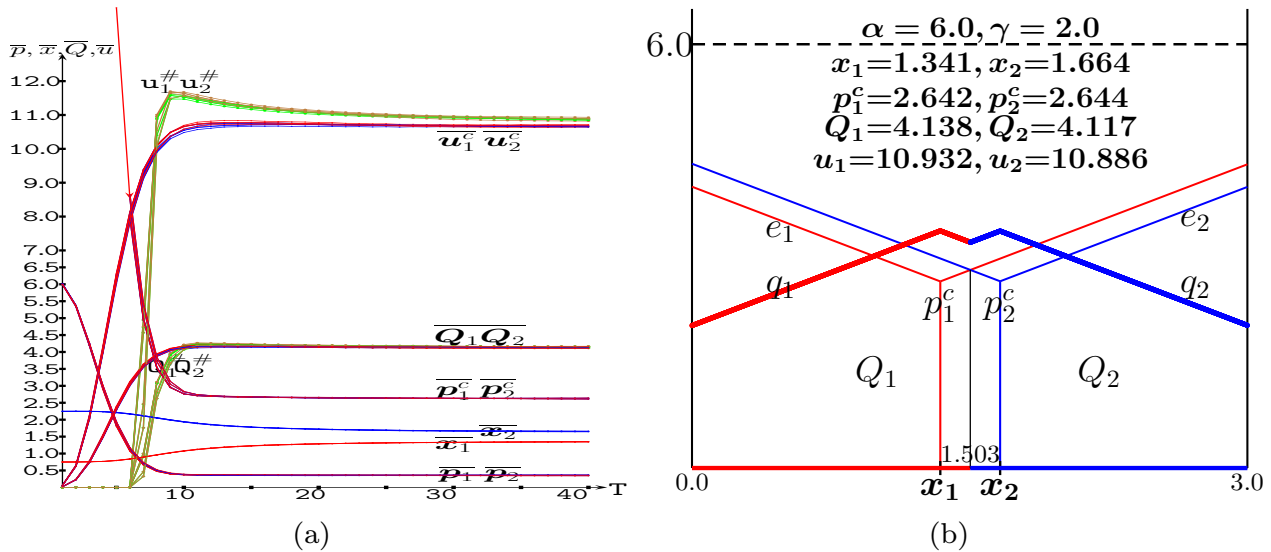
Se demuestra que los precios en la ec. (7.7) son muy similares. Se cumple que  $\bar{s}^\bullet - a = x_2 - \bar{s}^\bullet = \frac{1}{2}d_x$ , de donde:  $dp^\bullet = |p_2^\bullet - p_1^\bullet| = \frac{1}{2} \left| \frac{a^2 + (d_x/2)^2}{a + (d_x/2)} - \frac{b^2 + (d_x/2)^2}{b + (d_x/2)} \right| t$ . Con el caso  $a = b$  de la fig. 7.6(a), se cumple que  $dp^\bullet = 0$ , mientras que con los valores de la fig. 7.6(b) tenemos que  $dp^\bullet = \frac{1}{2} \left( \frac{0.6^2 + (2/2)^2}{1.6} - \frac{0.4^2 + (2/2)^2}{1.4} \right) = 0.0107$ .

## Simulación con localización y precio variables

La fig. 7.7 y la fig. 7.8 muestran el juego de HS con elección simultánea del precio y la localización, un escenario en el que el EN no existe (J. Gabszewicz, 2013).

La fig. 7.7 es análoga a la fig. 7.1 pero con localizaciones variables de los jugadores. Las dinámicas de la fig. 7.7(a) y de la fig. 7.1(a) comparten dos características importantes: *i*) el resultado de las cinco configuraciones aleatorias iniciales es prácticamente indistinguible, *ii*) el régimen estacionario se alcanza después de un tiempo de transición bastante corto. Esto también se aplica a las localizaciones promedio en la fig. 7.7(a) que tienden a acercarse,

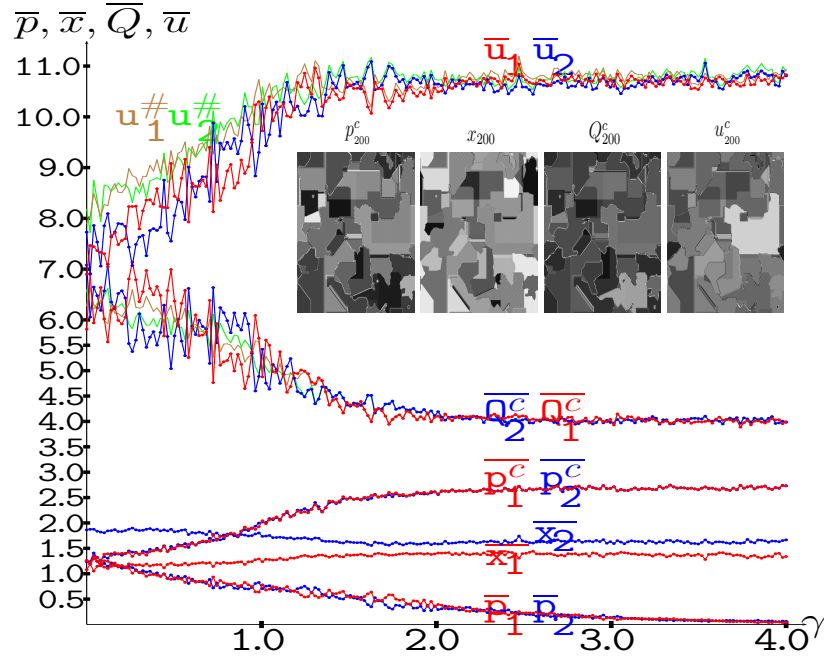
desde sus valores iniciales  $\bar{x}_1 \simeq 0.75$ ,  $\bar{x}_2 \simeq 2.25$ , a los estacionarios tan pronto como se alcanza aproximadamente  $T=20$ . La fig. 7.7(b) muestra el juego con las localizaciones y precios medios estacionarios de una simulación con los valores de (a) en la iteración  $T=40$ , donde tenemos que  $\bar{x}_1 = \bar{a} = 1.341 \simeq 1.336 = \bar{b} = 3.0 - (\bar{x}_2 = 1.664)$  y  $\bar{p}_1^c \simeq \bar{p}_2^c$ . Ello induce que  $\bar{u}_1^c = \bar{u}_2^c \simeq 10.9$ , por debajo del máximo factible  $u=11.9$  en  $a=b=0.75$ . A diferencia de lo que sucede en la fig. 7.1(b), la localización del consumidor indiferente  $\bar{s}$  resulta estar muy próxima a  $L/2=1.500$  en la fig. 7.7(b) debido a la simetría en las entradas de la simulación del juego.



**Figura 7.7:** El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=6.0$  y  $\gamma=2.0$  en una simulación de localización-precio.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=40$  en cinco simulaciones. (b) El juego con los precios y localizaciones promedio estacionarios de una de las simulaciones en  $T=40$ .

La fig. 7.8 trata el juego de 6.0-HS y localizaciones y precios variables en una simulación en  $T=200$ . Los precios independientes y entrelazados medios en la fig. 7.8 evolucionan con  $\gamma$  cualitativamente como en la fig. 7.3, es decir, los precios independientes promedio de ambos jugadores disminuyen monótonamente hacia cero a medida que  $\gamma$  aumenta, mientras que los precios y beneficios entrelazados promedio de ambos jugadores aumentan a medida que lo hace  $\gamma$ , volviéndose bastante estables a partir de aproximadamente  $\gamma=2.0$ . Como resultado, tenemos el mismo carácter estacionario de la demanda en las proximidades de  $\gamma=2.0$ . Los gráficos de la fig. 7.8 muestran un aspecto *ruidoso* en comparación con los de la fig. 7.3. Esto es así porque la convergencia es más difícil de alcanzar con un parámetro adicional a fijar, como es la localización. Por eso, la simulación en la fig. 7.8 se ejecuta hasta la iteración  $T=200$  en lugar de hasta  $T=100$ , como es habitual en las simulaciones con localizaciones fijas.

La localización promedio se estabiliza virtualmente en la simulación de la fig. 7.8 incluso antes de  $\gamma=2.0$ , alcanzando unos valores aproximados de  $\bar{a} \simeq \bar{b} \simeq 1.34$ . Como resultado,  $c(a=b=1.34) = \left( (1.34)^2 + (1.5 - 1.34)^2 \right) / 2 = 0.683$ , de modo que la solución del OP en la ec. (6.4) da como resultado unos precios  $p_{1,2}^{\bullet} = \frac{6.0}{2} - \frac{0.683}{3.0} = 2.77$ , que inducen unas demandas  $Q_{1,2}^{\bullet} = 2.772 \cdot 1.5 = 4.16$ . Estas cifras están muy próximas a los valores promedio alcanzados en la simulación:  $\bar{p}_{1,2}^c \simeq 2.64$ ,  $\bar{Q}_{1,2}^c \simeq 4.13$ .



**Figura 7.8:** El juego cuántico de Hotelling-Smithies con  $\alpha=6.0$  y entrelazamiento  $\gamma$  variable en una simulación en localización-precio en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Se representan los valores medios de las localizaciones de los jugadores ( $\bar{x}$ ), de los precios independientes y entrelazados ( $\bar{p}, \bar{p}^c$ ), de las demandas ( $\bar{Q}$ ) y de los beneficios ( $\bar{u}$ ), así como los valores de campo medios ( $u^\#$ ). El recuadro muestra los patrones en  $\gamma=2.0$ .

### 7.3. Coste de desplazamiento cuadrático

En lugar de considerar el coste de desplazamiento lineal, se puede suponer que este coste es cuadrático con respecto a la distancia, de modo que  $e_i = p + t(s - x_i)^2$ ,  $i = 1, 2$  (d'Aspremont *et al.*, 1979). Como analizamos en la sec. 6.2, en el juego de Hotelling original con coste de desplazamiento cuadrático, el consumidor indiferente se ubica en  $\bar{s}$ , dado por la ec. (7.9), y las funciones de beneficio ( $u$ ) vienen dadas por las ecs. (7.10). Como resultado, los precios en EN y sus beneficios vienen dados por las ecs. (7.11), donde,  $\bar{s}^* = (L + k)/2$  como en el modelo con coste lineal. En el juego de Hotelling con coste de desplazamiento cuadrático, se observa que  $\frac{\partial u_1^*}{\partial a} < 0$  y  $\frac{\partial u_2^*}{\partial b} < 0$ , al contrario de lo que ocurre en el juego convencional con coste de desplazamiento lineal.

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{p_2 - p_1}{td_x} \right), \quad d_x = x_2 - x_1 \quad (7.9)$$

$$u_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{s} < 0 \\ \bar{s}p_1 & \text{si } 0 \leq \bar{s} \leq L \\ Lp_1 & \text{si } \bar{s} > L \end{cases}, \quad u_2 = \begin{cases} Lp_2 & \text{si } \bar{s} < 0 \\ (L - \bar{s})p_2 & \text{si } 0 \leq \bar{s} \leq L \\ 0 & \text{si } \bar{s} > L \end{cases}. \quad (7.10)$$

$$(p_1^*, p_2^*) = td_x \left[ L + k, L - k \right], \quad (u_1^*, u_2^*) = \frac{1}{2} \left[ p_1^*(L + k), p_2^*(L - k) \right], \quad k = \frac{a - b}{3}. \quad (7.11)$$

La función de demanda en el juego de  $\alpha$ -HS2 viene dada por la ec. (7.12) (un ejemplo de representación de las demandas totales se muestra en la fig. 7.9(b)).

$$q_i(s) = \text{máx}(\alpha - p_i - t(s - x_i)^2, 0), \quad i = 1, 2. \quad (7.12)$$

Los límites del mercado de ambos jugadores en el juego de  $\alpha$ -HS2 se calculan de acuerdo con las ecs. (3.11), pero en este caso  $r_i = \sqrt{(\alpha - p_i)/t}$ ,  $i=1, 2$ .

El OP en el escenario  $a = b$  de un juego de  $\alpha$ -HS2 es el que resulta de la ec. (7.13).

$$p_{1,2}^\bullet = \frac{1}{2}\alpha - \frac{c}{L}, \quad Q_{1,2}^\bullet = p_{1,2}^\bullet \frac{L}{2}, \quad c = \frac{1}{3} \left( \left( \frac{L}{2} - a \right)^3 + a^3 \right) t, \quad \alpha \geq \alpha_2 = 2 \left( \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 t - \frac{c}{L} \right). \quad (7.13)$$

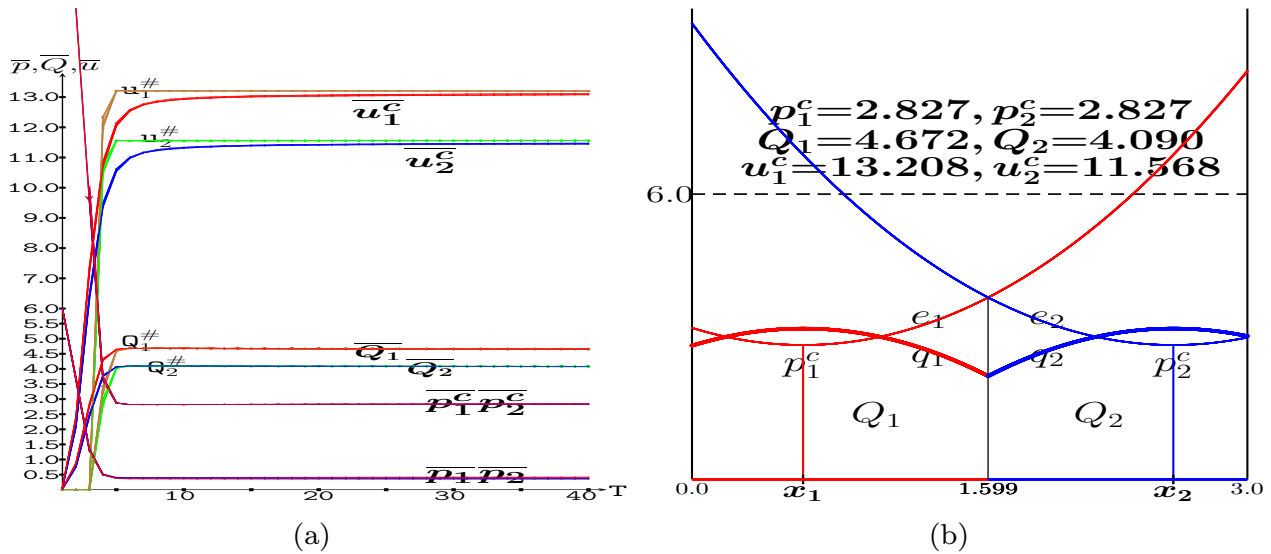
En el enfoque cuántico del juego de  $\alpha$ -HS2, los precios independientes  $p_1$  y  $p_2$  en las ecs. (7.10) deben ser reemplazados por los entrelazados  $p_1^c$  y  $p_2^c$ , y la ec. (7.9) se convierte en la ec. (7.14).

$$\bar{s}(\gamma) = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{p_2 - p_1}{t(x_2 - x_1)} e^{-\gamma} \right). \quad (7.14)$$

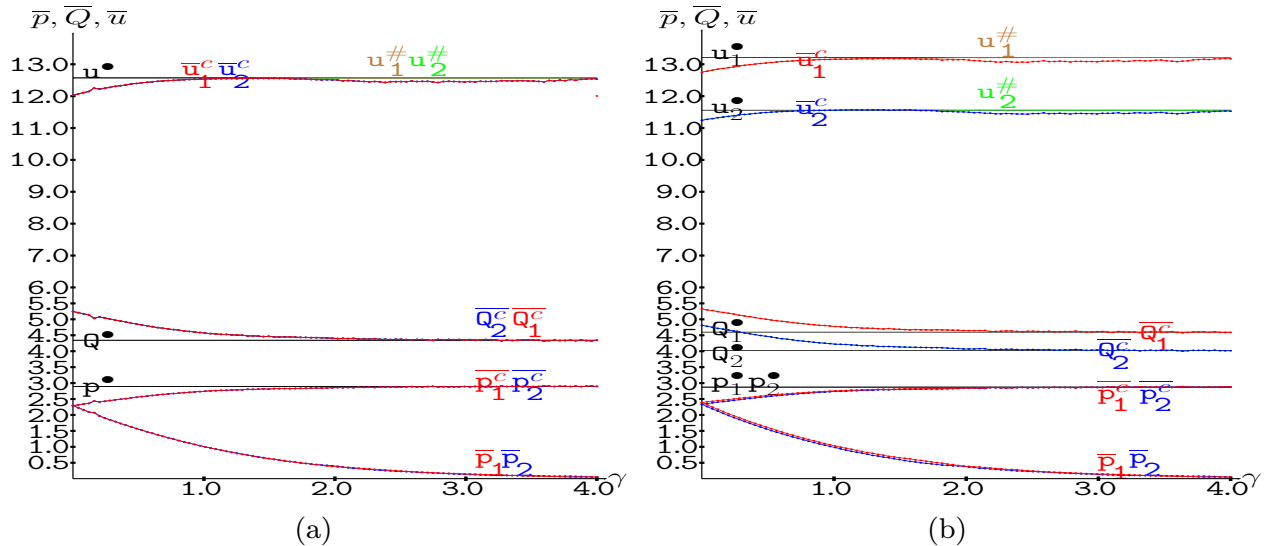
## Simulación con localización fija

La fig. 7.9 es análoga a la fig. 7.1, pero con coste de desplazamiento cuadrático. De nuevo, como en el modelo con coste lineal, las cinco simulaciones de sendas configuraciones iniciales de precios aleatorios que se muestran en la fig. 7.9(a) son indistinguibles. Los beneficios en el juego particular de la fig. 7.9(b) son mayores que los de la fig. 7.1(b), lo que puede resultar sorprendente a primera vista. Ello es así porque  $|x - x_i|^2$  es menor que  $|x - x_i|$  cuando  $|x - x_i| < 1.0$ , como sucede en el ejemplo examinado, por lo que los precios y las demandas aumentan con coste de desplazamiento cuadrático.

La fig. 7.10 es análoga a la fig. 7.3, pero con coste de desplazamiento cuadrático. Las principales características de los gráficos en ambas figuras son semejantes, en particular, el aumento de  $\gamma$  continúa dando lugar a que los precios independientes promedio de ambos jugadores ( $\bar{p}$ ) disminuyan monótonamente hacia cero y que los precios entrelazados promedio de ambos jugadores ( $\bar{p}^c$ ) se estabilicen muy pronto. A diferencia de lo que sucede en la fig. 7.3, en la fig. 7.10 el incremento inicial de  $\gamma$  no induce un notable aumento inicial de los precios entrelazados (y en consecuencia de los beneficios entrelazados). Ello es así porque los precios entrelazados (y los beneficios) ya alcanzan un valor alto en el modelo clásico, que no se ve afectado notablemente por el aumento de  $\gamma$ , razón por la cual los gráficos de las demandas también se muestran bastante planos en la fig. 7.10.



**Figura 7.9:** El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=6.0$ , coste de desplazamiento cuadrático y  $\gamma=2.0$  en localizaciones fijas  $x_1=0.6, x_2=2.6$ .  $L=3.0, t=1.0$ . (a) Dinámica hasta  $T=40$  en cinco simulaciones de precios. (b) El juego de con los precios promedio estacionarios de una de las simulaciones en  $T=40$ .

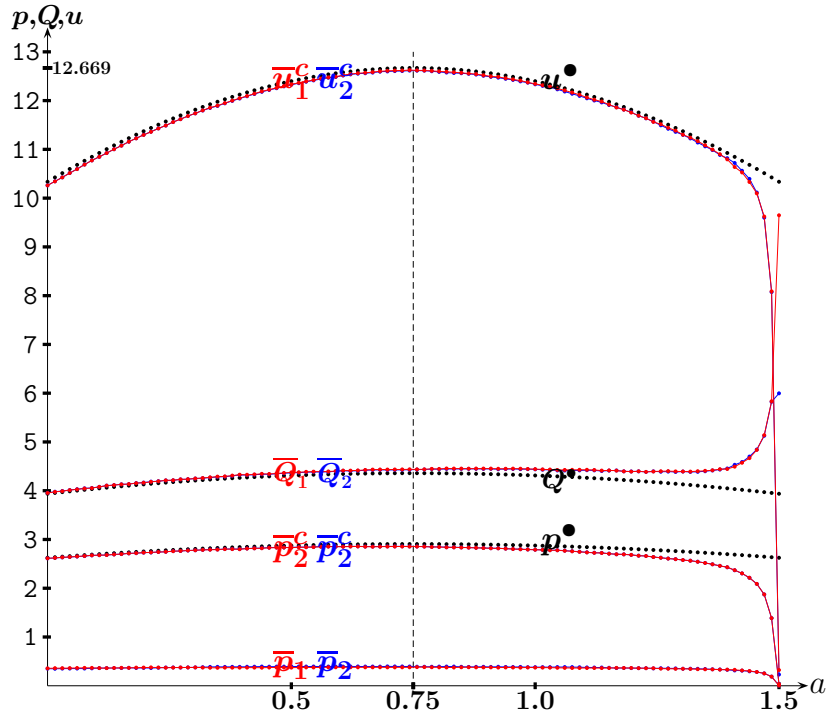


**Figura 7.10:** El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=6.0$ , coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento  $\gamma$  variable en una simulación en precios para  $T=100$ .  $L=3.0, t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=0.6, b=0.4$ . Se representan los valores medios de las localizaciones de los jugadores ( $\bar{x}$ ), de los precios independientes y entrelazados ( $\bar{p}, \bar{p}^c$ ), de las demandas ( $\bar{Q}$ ) y de los beneficios ( $\bar{u}$ ), así como los valores de campo medios ( $u^{\#}$ ).

## Representación del juego en función de la localización

La fig. 7.11 es análoga a la fig. 7.5, pero con coste de desplazamiento cuadrático. Los valores del precio entrelazado, la demanda y los beneficio medios alcanzados en la simulación de la fig. 7.11 se ajustan muy bien a los de la solución del OP, es decir, a las líneas  $(p^{\bullet}, Q^{\bullet}, u^{\bullet})$  que se trazan de acuerdo con la ec. (7.13), cuando el valor de  $a$  no es muy elevado. En el caso

contrario, cuando los jugadores están muy próximos al centro del segmento de mercado, los valores de la simulación subestiman el beneficio del OP, cayendo de modo abrupto tanto el precio como el beneficio hasta ser cero en el punto central del mercado ( $a = L/2$ ).



**Figura 7.11:** El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=6.0$ , coste de desplazamiento cuadrático,  $\gamma=2.0$  y localización  $a=b$  variable.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  representan la solución del OP. Los gráficos en color rojo y azul de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio en la simulación en  $T=100$ .

## Representación del juego en función del límite de coste

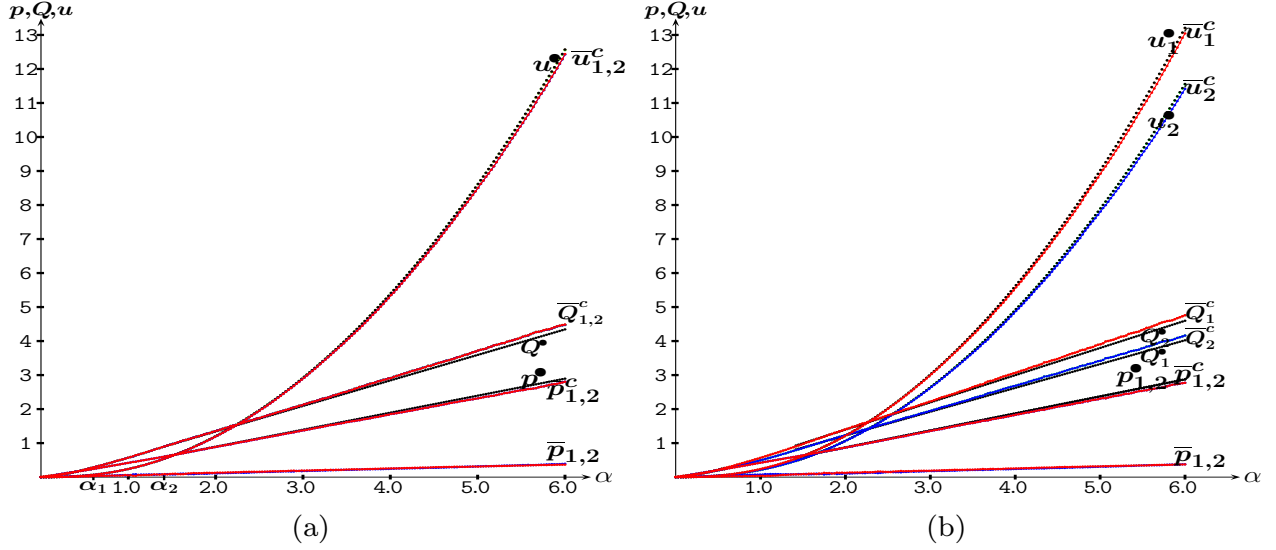
La fig. 7.12 es análoga a la fig. 7.6, pero con coste de desplazamiento cuadrático. En la fig. 7.12(a), tenemos que  $a=b=0.6$ , de modo que los precios, demandas y beneficios entrelazados en la simulación en  $T=100$  son los mismos para ambos jugadores. A su vez, los valores medios simulados están muy cerca de los valores correspondientes de la solución del OP con valores del límite de coste  $\alpha$  elevados (ec. (7.15b)) y prácticamente coinciden con un límite de coste bajo (ec. (7.15a)). Es decir: *i*)  $p_{1,2}^\bullet = 2\alpha/5$  si  $\alpha \leq \alpha_1 = \frac{5}{3}0.6^2 = 0.6$ , y *ii*)  $c = ((\frac{3}{2} - 0.6)^3 + 0.6^3)/3 = 0.315$ , por lo tanto,  $p_{1,2}^\bullet = \alpha/2 - 0.315/3$  cuando  $\alpha \geq \alpha_2 = 2(0.9^2 - 0.315/3) = 1.410$ . Casualmente, se cumple que  $\alpha_2=1.410$  tanto en la fig. 7.6(a) como en la fig. 7.12(a). Este no es un resultado general, sino solo el resultado no buscado de los valores elegidos para los parámetros  $L=3$ ,  $a=b=0.6$ . Por ejemplo, con  $a=b=L/4=0.75$  sería  $\alpha_2=5 \cdot 9/16 \cdot 3=0.938$  en la fig. 7.6(a) y  $\alpha_2=3 \cdot 3/4 \cdot 2 = 1.125$  en la fig. 7.12(a).

$$(p_{1,2}^\bullet, Q_{1,2}^\bullet) = \left( \frac{2}{5}\alpha, \frac{4}{3} \left( \frac{3}{5}\alpha \right)^{3/2} \right), \quad \alpha \leq \alpha_1, \quad (7.15a)$$

$$(p_{1,2}^\bullet, Q_{1,2}^\bullet) = \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{c}{L}, \frac{\alpha L}{4} - \frac{c}{2} \right), \quad \alpha \geq \alpha_2, \quad (7.15b)$$

donde

$$c = \frac{1}{3} \left( a^3 + \left( \frac{L}{2} - a \right)^3 \right) t, \quad \alpha_1 = \frac{5}{3} a^2, \quad \alpha_2 = 2 \left( \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 - \frac{c}{L} \right). \quad (7.16)$$



**Figura 7.12:** El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha$  variable, coste de desplazamiento cuadrático y  $\gamma=2.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ . Los gráficos de  $(p^\bullet, Q^\bullet, u^\bullet)$  representan la solución del OP. Los gráficos en color rojo y azul de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio en la simulación en  $T=100$ .

La fig. 7.12(b) es análoga a la fig. 7.6(b), pero con coste de desplazamiento cuadrático. Ambas figuras comparten las mismas características: i) el jugador-1 obtiene un beneficio mayor que el jugador-2, principalmente porque la demanda del jugador-1 es mayor que la del jugador-2, mientras que tanto el precio independiente como el precio entrelazado de ambos jugadores son prácticamente coincidentes, y ii) los precios y demandas en la solución del OP en un juego con  $\alpha$  alto se pueden obtener como una generalización de las expresiones de la ec. (7.13) considerando que  $\bar{s}^\bullet = (x_1 + x_2)/2$ . De este modo,

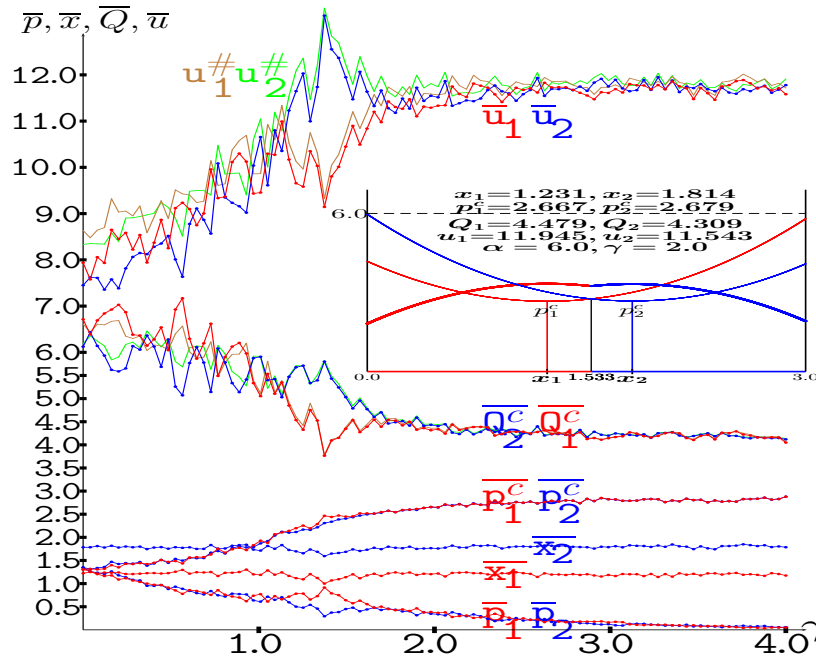
$$p_1^\bullet = \frac{\alpha}{2} - \frac{c_1}{2\bar{s}^\bullet} \simeq \frac{\alpha}{2} - \frac{c_2}{2(L - \bar{s}^\bullet)} = p_2^\bullet, \quad c_1 = \frac{1}{3} \left( a^3 + (\bar{s}^\bullet)^3 \right) t, \quad c_2 = \frac{1}{3} \left( b^3 + (x_2 - \bar{s}^\bullet)^3 \right) t. \quad (7.17)$$

$$Q_1^\bullet = p_1^\bullet \bar{s}^\bullet, \quad Q_2^\bullet = p_2^\bullet (L - \bar{s}^\bullet). \quad (7.18)$$

Al igual que en el modelo con coste de desplazamiento lineal, los precios en la ec. (7.17) son muy similares. Se cumple que  $dp^\bullet = |p_2^\bullet - p_1^\bullet| = \frac{1}{2} \left| \frac{a^3 + (d_x/2)^3}{a + (d_x/2)} - \frac{b^3 + (d_x/2)^3}{b + (d_x/2)} \right| t$ . Como resultado de ello, en la fig. 7.12(a),  $dp^\bullet(a = b) = 0$ , y en la fig. 7.12(b) se cumple que  $dp^\bullet = \frac{1}{2} \left( \frac{0.6^3 + (2/2)^3}{1.6} - \frac{0.4^3 + (2/2)^3}{1.4} \right) \simeq 0.0$ .

La fig. 7.13 es análoga a la fig. 7.8, pero con coste de desplazamiento cuadrático y el añadido del recuadro que representa los valores medios de la simulación en  $\gamma=2.0$ . Los valores de las localizaciones medias parecen no verse influenciados por el aumento de  $\gamma$  en la fig. 7.13, por

lo que los jugadores se acercan en menor medida en comparación con lo que sucede en la fig. 7.8. En la simulación particular en  $\gamma=2.0$ , que se muestra en el recuadro de la fig. 7.13, se cumple que  $\bar{a}=1.231$  y  $\bar{b}=1.186$  (recordemos que en la fig. 7.8 se cumplía que  $\bar{a} \simeq \bar{b} \simeq 1.34$ ).



**Figura 7.13:** El juego cuántico de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha = 6.0$ , coste de desplazamiento cuadrático y entrelazamiento  $\gamma$  variable en  $T=200$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Se representan los valores medios de las localizaciones de los jugadores ( $\bar{x}$ ), de los precios independientes y entrelazados ( $\bar{p}, \bar{p}^c$ ), de las demandas ( $\bar{Q}$ ) y de los beneficios ( $\bar{u}$ ), así como los valores de campo medios ( $u^\#$ ). El recuadro muestra una simulación en  $\gamma=2.0$ .

## 7.4. Entrelazamiento trigonométrico

### Simulación con localización fija

Se pueden proponer otros pesos ( $w_1, w_2$ ) basados en sistemas cuánticos, como los pesos trigonométricos siguientes:  $w_1 = \cos \gamma$ ,  $w_2 = \sin \gamma$ ,  $\gamma \in [0, \pi/2]$ . En la fig. 7.14 se muestra la forma en que actúa este tipo de entrelazamiento en el caso particular del juego de HS con localizaciones fijas de los jugadores.

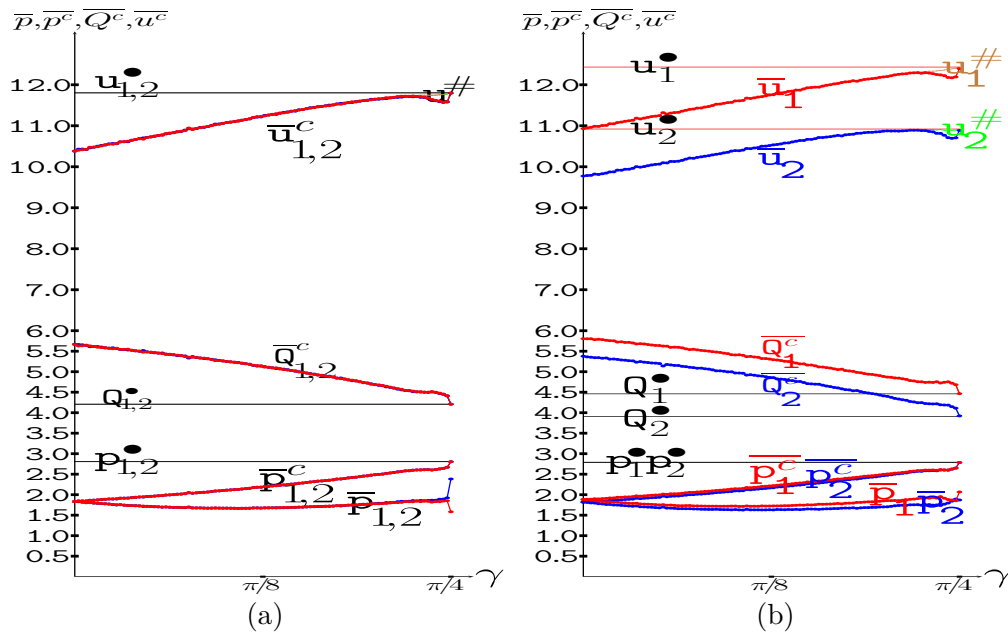
La fig. 7.14 es análoga a la fig. 7.3, pero con entrelazamiento trigonométrico, de modo que la localización del consumidor indiferente viene dada por  $\bar{s}(\gamma) = (x_1 + x_2 + \frac{(p_2 - p_1)}{t}(\cos \gamma - \sin \gamma))/2$  y los precios independientes en EN en este modelo trigonométrico cuando  $a = b$  vienen dados por la ec. (7.19) <sup>[7.5]</sup> (análoga a la ec. (7.3)). La ec. (7.19) se reduce a la ec. (6.5) en  $\gamma=0$ , ya que  $\Sigma(\gamma=0) = \cos(2 \cdot 0) = 1$ , de modo que  $\lambda'(0) = \alpha + t(2L + (a - \frac{L}{2})) = \alpha + t(a + 3\frac{L}{2})$ . Como se podía esperar, el entrelazamiento induce la tendencia hacia la solución del OP en la fig. 7.14, aunque esto sucede de una manera menos nítida en comparación con la fig. 7.3. Por lo tanto, con un entrelazamiento muy alto, es decir,  $\gamma$  alrededor de  $\pi/4$ , la simulación produce

cantidades promedio cercanas, pero distinguibles, a las de la solución del OP. A diferencia de lo que sucede en la fig. 7.3, en la fig. 7.14 los precios independientes medios no tienden a cero cuando  $\gamma$  crece, sino que únicamente disminuyen en pequeña medida. Esto es así porque la suma de los pesos,  $w_1 + w_2 = \Sigma$  solo crece hasta  $\Sigma(\pi/4) = \sqrt{2}$ . Como debe ocurrir, los precios entrelazados  $p_{1,2}^{c*}(\gamma) = p_{1,2}^*(\gamma)\Sigma$  convergen a los precios en la solución del OP, dada por la ec. (6.4), cuando  $\gamma$  crece hasta  $\pi/4$ <sup>[7.6]</sup>.

$$p_{1,2}^*(\gamma) = \frac{\lambda' - \sqrt{\lambda'^2 - 4t\Sigma \frac{\cos \gamma}{\cos 2\gamma} (\alpha L - 2c)}}{2\Sigma}, \quad (7.19)$$

donde

$$\lambda' = \alpha + t \left( 2L\Sigma \frac{\cos \gamma}{\cos 2\gamma} + a - \frac{L}{2} \right), \quad \Sigma = \cos \gamma + \sin \gamma. \quad (7.20)$$



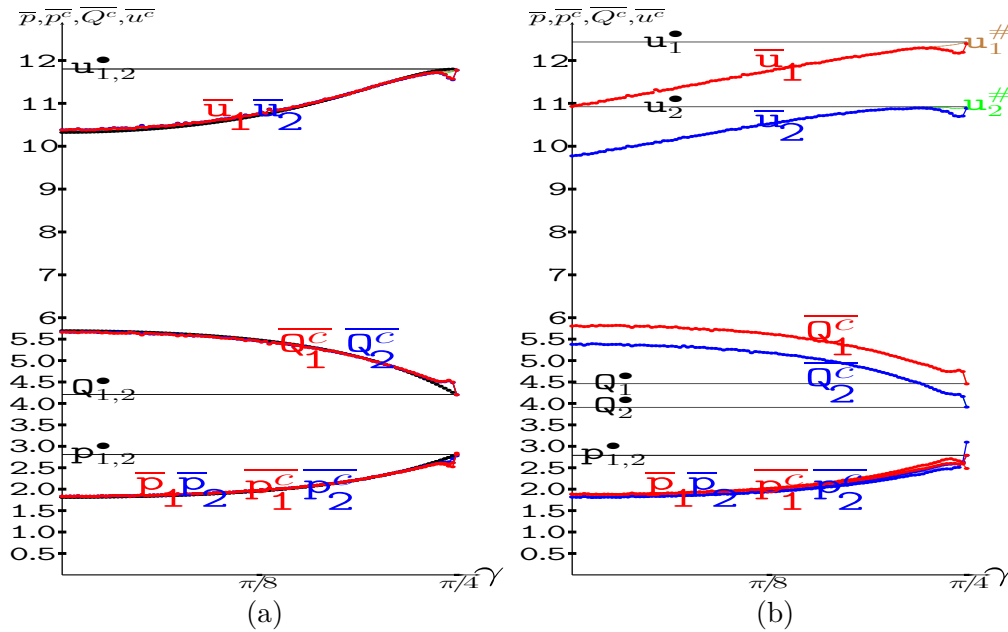
**Figura 7.14:** Simulación en precios del juego cuántico de Hotelling-Smithies con  $\alpha=6.0$  y entrelazamiento  $\gamma$  trigonométrico variable en  $T=100$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ . Precios independientes y entrelazados medios ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ), demanda media ( $\bar{Q}^c$ ), beneficio medio ( $\bar{u}^c$ ), beneficio de campo medio ( $u^\#$ )

La fig. 7.15 es análoga a la fig. 7.14, pero con los pesos trigonométricos:  $w_1 = \cos^2 \gamma$ ,  $w_2 = \sin^2 \gamma$ ,  $\gamma \in [0, \pi/2]$  (Frackiewicz, 2016), de modo que  $\bar{s}(\gamma) = (x_1 + x_2 + \frac{p_2 - p_1}{t} \cos 2\gamma) / 2$ . Los precios independientes en EN en este modelo se corresponden, cuando  $a = b$ , con la ec. (7.21)<sup>[7.7]</sup> (análoga a la ec. (7.19)). El aumento del factor de entrelazamiento induce la convergencia hacia la solución del OP en la fig. 7.15<sup>[7.8]</sup>, como ocurre en la fig. 7.14. Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en la fig. 7.14, en la fig. 7.15 los valores promedio de los precios independiente y entrelazado son indistinguibles. Esto es así porque, si  $p_1 = p_2 = p$ , se cumple que  $p_1^c = p_2^c = p(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = p$ .

$$p_{1,2}^*(\gamma) = \frac{\lambda' - \sqrt{\lambda'^2 - 4t\Sigma \frac{\cos \gamma}{\cos 2\gamma} (\alpha L - 2c)}}{2}, \quad (7.21)$$

donde

$$\lambda' = \alpha + t \left( 2L\Sigma \frac{\cos \gamma}{\cos 2\gamma} + a - \frac{L}{2} \right), \quad \Sigma = \cos \gamma. \quad (7.22)$$



**Figura 7.15:** Simulación en precios del juego cuántico de Hotelling-Smithies con  $\alpha=6.0$  y entrelazamiento trigonométrico  $\gamma$  variable, según el modelo de Frackiewicz, en  $T=100$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=0.6$ ,  $b=0.4$ . Precios independientes y entrelazados medios ( $\bar{p}$ ,  $\bar{p}^c$ ), demanda media ( $\bar{Q}^c$ ), beneficio medio ( $\bar{u}^c$ ), beneficio de campo medio ( $u^\#$ ).

## 7.5. Conclusiones

La simulación numérica con interacción local permite analizar el comportamiento del juego cuántico de Hotelling con demanda elástica, es decir, el juego cuántico de HS. De acuerdo con ello, se muestra cómo el entrelazamiento induce que la solución del OP emerja con bastante rapidez en el EN, incluso si el EN no existe en el juego clásico, como es el caso de jugadores muy cercanos en el modelo con coste de desplazamiento lineal.

En el juego con coste de desplazamiento cuadrático, el OP también es inducido por el entrelazamiento independientemente de la proximidad de los jugadores. Dada la dificultad matemática en manejar el juego con coste de desplazamiento cuadrático por la complejidad de los cálculos, la simulación tiene un papel más relevante en este escenario.

Por último, en el caso analizado más ocasionalmente del juego con variación simultánea de localizaciones y precios, donde la simulación se vuelve especialmente necesaria, se ha descubierto que el entrelazamiento induce una proximidad notable en la posición de los jugadores en el juego con coste de desplazamiento lineal, en contraste con lo que sucede en el juego con coste de desplazamiento cuadrático.

# Notas

[7.1] La diferencia entre los precios efectivos o entrelazados se puede expresar en función de los precios independientes:  $p_2^c - p_1^c = p_2 w_1(\gamma) + p_1 w_2(\gamma) - (p_1 w_1(\gamma) + p_2 w_2(\gamma)) = p_2(w_1(\gamma) - w_2(\gamma)) - p_1(w_1(\gamma) - w_2(\gamma)) = (p_2 - p_1)(w_1(\gamma) - w_2(\gamma))$ ,  $w_1(\gamma) - w_2(\gamma) = (p_2 - p_1)e^{-\gamma}$

[7.2] El EN en el juego simétrico de  $\alpha$ -HS se obtiene como sigue:

$$u_1 = p_1^c Q_1, Q_1 = (\alpha - p_1^c) \bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2). u_2 = p_2^c Q_2, Q_2 = (\alpha - p_2^c)(L - \bar{s}) + t(b(L - \bar{s}) - (L - \bar{s})^2/2 - b^2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = \cosh \gamma [(\alpha - p_1^c) \bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2)] + p_1^c [-\cosh \gamma \bar{s} - \frac{e^{-\gamma}}{2t}(\alpha - p_1^c) + t(-a \frac{e^{-\gamma}}{2t} - \bar{s} \frac{e^{-\gamma}}{2t})].$$

En el juego simétrico, se cumple que  $a = b \rightarrow p_1 = p_2 = p \rightarrow p_1^c = p_2^c = pe^\gamma \rightarrow \bar{s} = L/2$ .

Obligando a que se cumpla la condición  $\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = \frac{\partial u_2}{\partial p_2} = 0$  y sustituyendo los valores anteriores, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\cosh \gamma [\alpha L + t(aL - (L/2)^2 - 2a^2)] + pe^\gamma [-2L \cosh \gamma + e^{-\gamma}(L/2 - a) - \frac{e^{-\gamma}}{t}(\alpha - pe^\gamma)] = 0 \rightarrow$$

$$e^\gamma p^2 - [\alpha + t(a + 2L \cosh \gamma e^\gamma - L/2)]p + t \cosh \gamma [\alpha L + t(aL - L^2/4 - 2a^2)] = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene la ec. (7.3).

[7.3] Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del numerador, se obtiene la expresión siguiente:

$$p_{1,2}^{c*}(\gamma) = \frac{\lambda' - \sqrt{\lambda'^2 - 4te^\gamma \cosh \gamma(\alpha L - 2c)}(\lambda' + \sqrt{\lambda'^2 - 4te^\gamma \cosh \gamma(\alpha L - 2c)})}{2(\lambda' + \sqrt{\lambda'^2 - 4te^\gamma \cosh \gamma(\alpha L - 2c)})} = \frac{2te^\gamma \cosh \gamma(\alpha L - 2c)}{\lambda' + \sqrt{\lambda'^2 - 4te^\gamma \cosh \gamma(\alpha L - 2c)}} =$$

$$= \frac{2t(\alpha L - 2c)}{\frac{\lambda'}{e^\gamma \cosh \gamma} + \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{e^\gamma \cosh \gamma}\right)^2 - 4t \frac{1}{e^\gamma \cosh \gamma}(\alpha L - 2c)}}.$$

Como se cumple que  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\lambda'}{e^\gamma \cosh \gamma} = 2Lt$ , hallando el límite cuando  $\gamma \rightarrow \infty$  de la expresión obtenida anteriormente  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} p_{1,2}^{c*}(\gamma) = \frac{2t(\alpha L - 2c)}{2Lt + \sqrt{4t^2 L^2}} = \frac{2t(\alpha L - 2c)}{4tL} = \frac{\alpha}{2} - \frac{c}{L} = p^\bullet$ .

[7.4] A partir de la ec. (6.4),  $u^\bullet = (p_{1,2}^\bullet)^2 \frac{L}{2}$  se maximiza cuando  $p_{1,2}^\bullet = \alpha/2 - c/L$  se maximiza, es decir, cuando  $c$  se minimiza, lo que ocurre en  $a = L/4$ . En tal caso,  $c = L^2/16$ ,  $\max(p^\bullet) = \alpha/2 - L/16 = 2.812$ ,  $\max(Q^\bullet) = 2.812(L/2) = 4.219$ ,  $\max(u^\bullet) = 2.812 \cdot 4.219 = 11.865$ .

[7.5] El EN para el juego simétrico de  $\alpha$ -HS con entrelazamiento trigonométrico se obtiene del modo siguiente:

$$u_1 = p_1^c Q_1, Q_1 = (\alpha - p_1^c) \bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2). \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial p_1} = -\frac{1}{2t}(\cos \gamma - \sen \gamma) \equiv -\frac{1}{2t} \Delta, \Delta = (\cos \gamma - \sen \gamma).$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = \cos \gamma [(\alpha - p_1^c) \bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2)] + p_1^c [-\bar{s} \cos \gamma - \frac{\Delta}{2t}(\alpha - p_1^c) + t(-a \frac{\Delta}{2t} + \bar{s} \frac{\Delta}{2t})].$$

En el juego simétrico, se cumple que  $a = b \rightarrow p_1 = p_2 = p \rightarrow p_1^c = p_2^c = p(\sen \gamma + \cos \gamma) = p\Sigma \rightarrow \bar{s} = \frac{L}{2}$ . Obligando a que se cumpla la condición  $\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = 0$  y sustituyendo los valores anteriores, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \cos \gamma [(\alpha - p\Sigma)\frac{L}{2} + t(a\frac{L}{2} - (\frac{L}{2})^2/2 - a^2)] + p\Sigma[-\cos \gamma \frac{L}{2} - \frac{\Delta}{2t}(\alpha - p\Sigma + t(a - \frac{L}{2}))] &= 0 \rightarrow \\ p^2\Sigma^2\Delta + \Sigma[-Lt \cos \gamma - Lt \cos \gamma - \Delta(\alpha + t(a - \frac{L}{2}))]p + t \cos \gamma [L\alpha + t(aL - \frac{L^2}{4} - 2a^2)] &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, sabiendo que  $\Sigma\Delta = \cos^2 \gamma - \text{sen}^2 \gamma = \cos 2\gamma$ , se obtiene la ec. (7.19).

[7.6] Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del numerador, se obtiene la expresión siguiente:

$$p_{1,2}^{c*}(\gamma) = \frac{2t\Sigma \frac{\cos \gamma}{\cos 2\gamma} (\alpha L - 2c)}{\lambda' + \sqrt{\lambda'^2 - 4t\Sigma \frac{\cos \gamma}{\cos 2\gamma} (\alpha L - 2c)}} = \frac{2t\Sigma(\alpha L - 2c)}{(\lambda' \frac{\cos 2\gamma}{\cos \gamma}) + \sqrt{(\lambda' \frac{\cos 2\gamma}{\cos \gamma})^2 - 4t\Sigma \frac{\cos 2\gamma}{\cos \gamma} (\alpha L - 2c)}}.$$

Como se cumple que  $\lim_{\gamma \rightarrow \pi/4} \lambda' \frac{\cos 2\gamma}{\cos \gamma} = 2L\Sigma t$ , hallando el límite cuando  $\gamma \rightarrow \pi/4$  de la expresión obtenida anteriormente  $\lim_{\gamma \rightarrow \pi/4} p_{1,2}^{c*}(\gamma) = \frac{\alpha L - 2c}{2L} = \frac{\alpha}{2} - \frac{c}{L} = p^\bullet$ .

[7.7] El EN para el juego simétrico de  $\alpha$ -HS con el modelo de entrelazamiento de Frackiewicz se obtiene del modo siguiente:

$$\begin{aligned} u_1 = p_1^c Q_1, \quad Q_1 = (\alpha - p_1^c)\bar{s} + t(a\bar{s} - \bar{s}^2/2 - a^2). \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial p_1} = -\frac{\cos 2\gamma}{2t}. \\ \frac{\partial u_1}{\partial p_1} = \cos^2 \gamma [(\alpha - p_1^c)\bar{s} + t(as - \bar{s}^2/2 - a^2)] + p_1^c [-\cos^2 \gamma \bar{s} - \frac{\cos 2\gamma}{2t}(\alpha - p_1^c) + t(-a\frac{\cos 2\gamma}{2t} + \bar{s}\frac{\cos 2\gamma}{2t})]. \end{aligned}$$

En el juego simétrico, se cumple que  $a = b \rightarrow p_1 = p_2 = p \rightarrow p_1^c = p_2^c = p \rightarrow \bar{s} = \frac{L}{2}$ .

Obligando a que se cumpla la condición  $\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = 0$  y sustituyendo los valores anteriores, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma [(\alpha - p)L + t(aL - (\frac{L}{2})^2 - 2a^2)] + p[-\cos^2 \gamma L - \frac{\cos 2\gamma}{t}[(\alpha - p) + t(a - \frac{L}{2})]] &= 0 \rightarrow \\ \cos 2\gamma p^2 + [-2t \cos^2 \gamma L - \cos 2\gamma[\alpha + t(a - \frac{L}{2})]]p + t \cos^2 \gamma [\alpha L + t(aL - (\frac{L}{2})^2 - 2a^2)] &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene la ec. (7.21).

[7.8] Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del numerador, se obtiene la expresión siguiente:

$$p_{1,2}^{c*}(\gamma) = \frac{2t \frac{\cos^2 \gamma}{\cos 2\gamma} (\alpha L - 2c)}{\lambda' + \sqrt{\lambda'^2 - 4t \frac{\cos^2 \gamma}{\cos 2\gamma} (\alpha L - 2c)}} = \frac{2t(\alpha L - 2c)}{(\lambda' \frac{\cos 2\gamma}{\cos^2 \gamma}) + \sqrt{(\lambda' \frac{\cos 2\gamma}{\cos^2 \gamma})^2 - 4t \frac{\cos 2\gamma}{\cos^2 \gamma} (\alpha L - 2c)}}.$$

Como se cumple que  $\lim_{\gamma \rightarrow \pi/4} \lambda' \frac{\cos 2\gamma}{\cos \gamma} = 2Lt$ , hallando el límite cuando  $\gamma \rightarrow \pi/4$  de la expresión obtenida anteriormente  $\lim_{\gamma \rightarrow \pi/4} p_{1,2}^{c*}(\gamma) = \frac{2(\alpha L - 2c)}{2L + 2L} = \frac{\alpha}{2} - \frac{c}{L} = p^\bullet$ .

# Capítulo 8

## El juego clásico de Hotelling con jugadores próximos

Como se ha comentado anteriormente, en el artículo inicial de Hotelling (1929), el autor estableció lo que se denomina *principio de mínima diferenciación*, según el cual los jugadores tienden a intentar asemejarse unos a otros, lo cual, en el modelo inicial, se traduce en que buscan localizaciones similares para sus comercios. Fue necesario que transcurrieran cincuenta años hasta que se pudo demostrar que este principio no es válido a nivel general, ya que el EN en el juego sólo existe bajo unas determinadas condiciones (d'Aspremont *et al.*, 1979). Esta cuestión ha sido estudiada por Garcia-Perez *et al.* (2024b), en cuyos resultados está basado este capítulo.

Esta sección analiza el juego de Hotelling original y sus variantes (modelo original, con límite de coste y el juego de HS) en la región donde no existe EN, en la línea de otros autores como Graitson (1982). El análisis de esta casuística del juego ha sido descartada frecuentemente en gran parte de la literatura anterior. En lugar de ello, para superar el problema de la inexistencia de EN, se han considerado varias modificaciones sobre el juego original. Entre ellas destacan las siguientes: *i*) se implementa el juego con coste de desplazamiento cuadrático, en cuyo caso el EN emerge en todo el mercado potencial (d'Aspremont *et al.*, 1979); *ii*) se consideran estrategias mixtas (Dasgupta y Maskin, 1986); *iii*) la bajada indiscriminada de precios (*undercutting*), que impide el equilibrio en el juego original, está prohibida (Eaton y Lipsey, 1978); *iv*) el concepto de EN se generaliza, por ejemplo, a *equilibrio en estrategias seguras* (EinSS) (Iskakov e Iskakov, 2012). En este apartado se estudia únicamente el caso del juego simétrico,  $a = b$ .

### 8.1. El juego de Hotelling original

Con anterioridad, se han obtenido las ecuaciones en el EN para el modelo original del juego, que vienen dadas por las siguientes expresiones (donde se cumple que  $\bar{s}^* = (L + k)/2$ ):

$$(p_1^*, p_2^*) = t(L + k, L - k), \quad (u_1^*, u_2^*) = \frac{t}{2} \left( (L + k)^2, (L - k)^2 \right), \quad k = \frac{a - b}{3}. \quad (8.1)$$

Debido a que los beneficios aumentan a medida que la posición de los jugadores se aproxima al centro del mercado ( $u_1^*$  aumenta con  $a$  y  $u_2^*$  con  $b$ ), ambos jugadores tenderían a coincidir en su localización, de acuerdo con el *principio de mínima diferenciación*. Sin embargo, d'Aspremont *et al.* (1979) demostraron que el EN sólo existe bajo ciertas restricciones, lo cual impide que se cumpla esta tendencia en la posición de los jugadores. Las condiciones que deben cumplirse para que exista equilibrio son las siguientes:

$$1) (L + k)^2 \geq 4L(a + 2b)/3, \quad 2) (L - k)^2 \geq 4L(b + 2a)/3, \quad k = (a - b)/3. \quad (8.2)$$

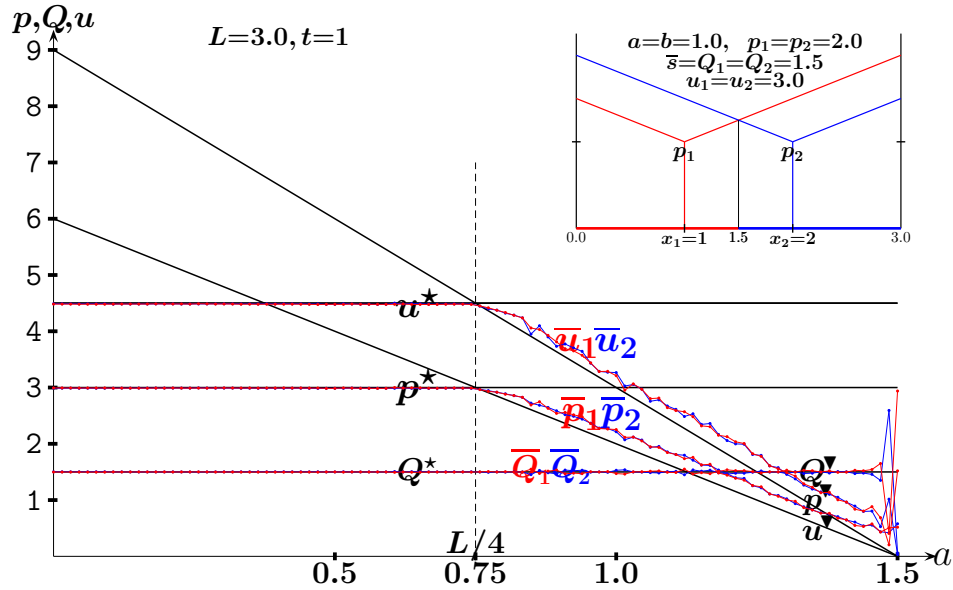
Dado que sólo vamos a considerar el juego simétrico ( $a = b$ ), entonces se cumple que  $k=0$ ,  $x_1 + x_2 = L$  y  $d_x = x_2 - x_1 = L - 2a$  y, por tanto, las restricciones de las ecs. (8.2) se reducen a  $a = b \leq L/4$ . Análogamente, las ecs. (8.1) se convierten en las siguientes:

$$p_1^* = p_2^* = tL, \quad u_1^* = u_2^* = tL^2/2. \quad (8.3)$$

El juego con  $L=3$ ,  $t=1$ , donde el EN viene dado por  $p_{1,2}^*=3.0$ , dando lugar a  $u_{1,2}^*=4.5$  con la condición  $a \leq L/4$ , se representa en la fig. 8.1. En ella se muestran el precio, la demanda y el beneficio en función de la localización de los jugadores en el juego simétrico ( $a = b$ ). La disminución de los precios (y beneficios) en la simulación que se observa en la figura con  $a > L/4$  está de alguna manera asociada a la disminución de la importancia del componente de ubicación del juego cuando los jugadores están lo suficientemente próximos. De hecho, en  $a=b=L/2=1.5$  la localización no juega ningún papel, por lo que el juego se establece sólo en precios y, en consecuencia, el único EN *solución* del juego es aquél en que ambos precios son cero (juego de Bertrand).

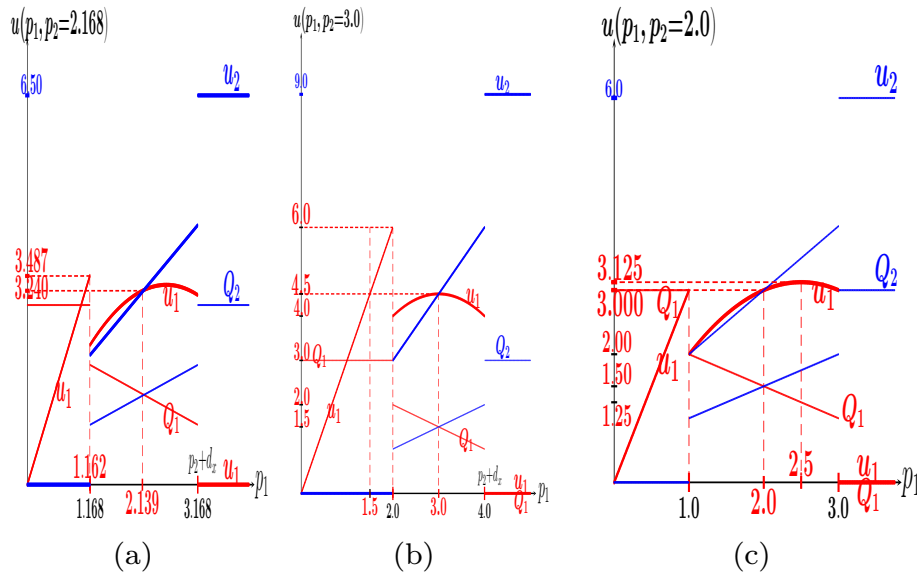
En la zona donde no hay equilibrio ( $a > L/4$ ), si el jugador- $i$  carga el precio  $p^* - d_x t$ , siendo  $d_x = L - 2a$ , mientras que el jugador- $j$  pone el precio de equilibrio,  $p^*$ , el primero capturaría todo el mercado y, en consecuencia, su beneficio resultaría ser  $(p^* - (L - 2a)t)L$ , en lugar de  $p^*L/2$ . El precio en dicha región viene dado por la ec. (8.4) y es aquel que verifica  $pL/2 = (p - (L - 2a)t)L$ . Tanto  $p^\nabla$  como  $p^*$  se cruzan en  $a = L/4$  independientemente de  $t$ , como se muestra en la fig. 8.1 en el caso particular  $t=1$ . La solución inducida por  $p^\nabla$  es lo que se ha denominado SCC. Los precios simulados promedio y sus beneficios correspondientes tienden a estar por encima de los inducidos por la SCC en la fig. 8.1 a partir de  $a=L/4=0.75$ , particularmente cuando  $a$  se acerca al valor  $a=L/2=1.5$  donde  $p^\nabla=0.0$ . A pesar de este inconveniente, la simulación proporciona información inestimable sobre lo que se debe esperar en el caso en que los jugadores estén cerca. En el caso particular  $a = b$ , la solución dada en la ec. (8.4) coincide con el *equilibrio en estrategias seguras* (EinSS) dado por Iskakov e Iskakov (2012), al igual que es el doble del precio de la solución maximin introducida por Graitson (1982)<sup>[8.1]</sup>.

$$p^\nabla = 2(L - 2a)t. \quad (8.4)$$



**Figura 8.1:** El modelo original del juego de Hotelling con localización  $a=b$  variable.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan el equilibrio de Nash hasta alcanzar  $a=0.75$ . Los gráficos de  $(p^\nabla, Q^\nabla, u^\nabla)$  representan la *solución de consenso colectiva* a partir de  $a^\nabla$ . Los gráficos coloreados de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación en  $T=200$ . El recuadro representa el modelo con  $a=1.0$ .

La fig. 8.2 representa el juego de Hotelling convencional en  $a=b=1.0$  en el contexto de la fig. 8.1, es decir,  $L=3.0$ , por lo que  $d_x=1.0$ .



**Figura 8.2:** Funciones de respuesta en el modelo original del juego de Hotelling con  $a=b=1.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=2.168$ . (b)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=3.000$ . (c)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=2.000$ .

Se observa que la simulación de la fig. 8.2 converge en  $\bar{p}_1=2.139$ ,  $\bar{p}_2=2.168$ . Como se mues-

tra en la fig. 8.2(a), estos precios no están en EN, dado que la mejor respuesta de  $p_1$  a  $p_2=2.168$  no es  $p_1=2.139$ , ya que los valores de  $p_1$  cercanos a  $p_2-d_x=1.168$  (por ejemplo,  $p_1=1.162$ ) proporcionarían mayor beneficio para el jugador-1. En la fig. 8.2(b) se muestra que el supuesto EN,  $p_1=p_1^*=3.0$ , no lo es tal. Esto es así ya que, para  $p_2=3.0$ , los valores de  $p_1$  algo por debajo de 2.0 ( $p_1 \in (1.5, 2.0)$ ) proporcionarían un beneficio mayor al jugador-1 que  $p_1=3.0$ . De hecho, ésta es la razón que permite llegar a la conclusión de que no existe EN cuando  $a=b > L/4$ . En la fig. 8.2(c), se observa que la mejor respuesta a  $p_2=p^\nabla(a=1.0)=2.0$  no es  $p_1=2.0$ , cuyo beneficio asociado es  $u^\nabla = 2.0 \cdot 1.5 = 3.0$ . Otros valores de  $p_1$  proporcionan un mayor beneficio como, por ejemplo,  $p_1=2.5$  con  $u_1 = 2.5 \cdot 1.25 = 3.125$ <sup>[8.2]</sup>.

## 8.2. El juego de Hotelling con límite de coste

En el juego de  $\alpha$ -HOT, para evitar que los jugadores se pongan de acuerdo y puedan subir los precios sin límite, se establece un umbral  $\alpha$ , por encima del cual la demanda cae de uno a cero. Como hemos visto, ello puede dar lugar a monopolios locales, donde los límites del mercado que abarca cada jugador vienen dados por

$$\left(x_1^i = \max(l_1^i, 0), x_1^s = \min(l_1^s, \bar{s})\right), \quad \left(x_2^i = \max(l_2^i, \bar{s}), x_2^s = \min(l_2^s, L)\right), \quad (8.5)$$

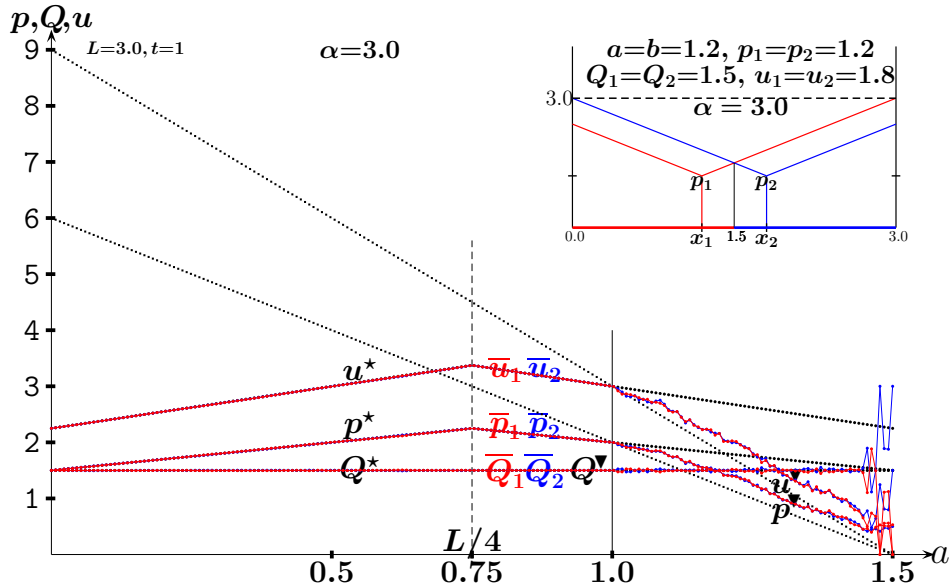
donde los valores de  $l_i$  vienen dados por las expresiones siguientes:  $l_i^i = x_i - r_i$ ,  $l_i^s = x_i + r_i$ ,  $r_i = (\alpha - p_i)/t$ ,  $i = 1, 2$ .

Si el valor de  $\alpha$  es lo suficientemente alto como para inducir a todos los consumidores a comprar una unidad del producto, se recupera el juego de Hotelling convencional. En cambio, para un valor de  $\alpha$  pequeño, variará el equilibrio. Continuando con el ejemplo del apartado anterior ( $L=3$ ,  $t=1$ ) y considerando un límite de coste  $\alpha=3.0$  para el juego simétrico con  $a = b$  variable, tenemos que los precios en EN vienen dados por la ec. (8.6) hasta  $a^\nabla = \frac{2L-\alpha}{3} = 1.0$ , donde  $\alpha - a = 2(L - 2a)$ .

$$p_{1,2}^* = \begin{cases} \alpha - (L/2 - a) & 0 \leq a \leq L/4, \\ \alpha - a & L/4 \leq a \leq a^\nabla. \end{cases} \quad (8.6)$$

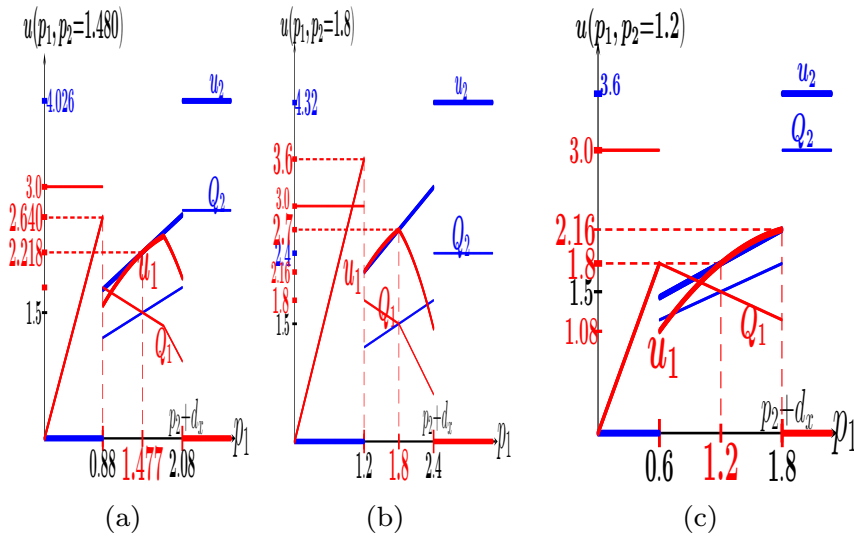
Así, si se aplica un umbral de coste  $\alpha=3.0$  al caso del juego sin restricciones mencionado en el apartado anterior, donde  $p_{1,2}^*=3.0$ , ningún consumidor compraría el producto a ese precio. La fig. 8.3 representa este mismo escenario de ejemplo ( $L=3$ ,  $t=1$ ,  $\alpha=3.0$ ) con localización variable  $a = b$ . En la región donde no existe equilibrio,  $a > a^\nabla$ , el precio viene dado por la expresión de la ec. (8.4).

La fig. 8.4 representa el juego de 3.0-HOT y  $a=b=1.2$  en el contexto de la fig. 8.3, es decir,  $L=3.0$ , de tal modo que  $d_x=0.6$ . El análisis de la fig. 8.4 es similar al correspondiente a la fig. 8.2. En la fig. 8.4(a) se muestra que los precios resultantes de la simulación,  $\bar{p}_1=1.477$ ,  $\bar{p}_2=1.480$ , no están en EN. Dado  $\bar{p}_2=1.480$ , existen valores de  $p_1$  ligeramente por debajo de  $p_2-d_x=0.88$  que proporcionarían mayor beneficio al jugador-1. La fig. 8.4(b) demuestra que los precios  $p_1=p_2=\alpha-a=1.80$  no están en EN. Esto es así ya que, para  $p_2=1.8$ , el precio  $p_1=1.2$  proporciona un beneficio mayor al jugador-1 que  $p_1=1.8$ , puesto que



**Figura 8.3:** El juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=3.0$  y localización  $a=b$  variable.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan el equilibrio de Nash hasta  $a^v=1.0$ . Los gráficos de  $(p^v, Q^v, u^v)$  representan la *solución de consenso colectiva* a partir de  $a^v$ . Los gráficos coloreados de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación en  $T=200$ . El recuadro representa el modelo con  $a=1.2$ .

$u_1 = 1.2 \cdot 3.0 = 3.6 > 2.7 = 1.8 \cdot 1.5$ . En la fig. 8.4(c) se observa que el precio de la SCC, dado por  $p^v = 2(3 - 2 \cdot 1.2) = 1.2$ , tiene un beneficio asociado  $u^v = 1.8 = 1.2 \cdot 1.5 = 0.6 \cdot 3.0$ , pero está no es la mejor respuesta de  $p_1$  a  $p_2=1.2$ . Se puede apreciar que los precios  $p_1 \in (1.2, 1.8)$  proporcionarían un mayor beneficio al jugador-1.



**Figura 8.4:** Funciones de respuesta en el juego de Hotelling con límite de coste  $\alpha=3.0$  y  $a=b=1.2$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=1.48$ . (b)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=1.8$ . (c)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=1.2$ .

### 8.3. El juego de Hotelling-Smithies

En el juego de  $\alpha$ -HS, además de existir el límite de coste, la demanda del consumidor ( $q$ ) es una función decreciente del coste total ( $e$ ), típicamente de la forma  $q_i(s) = \max(\alpha - e_i(s), 0)$ ,  $i=1,2$  (García-Pérez *et al.*, 2023; Grau-Climent *et al.*, 2022; Puu, 2002; Smithies, 1941b).

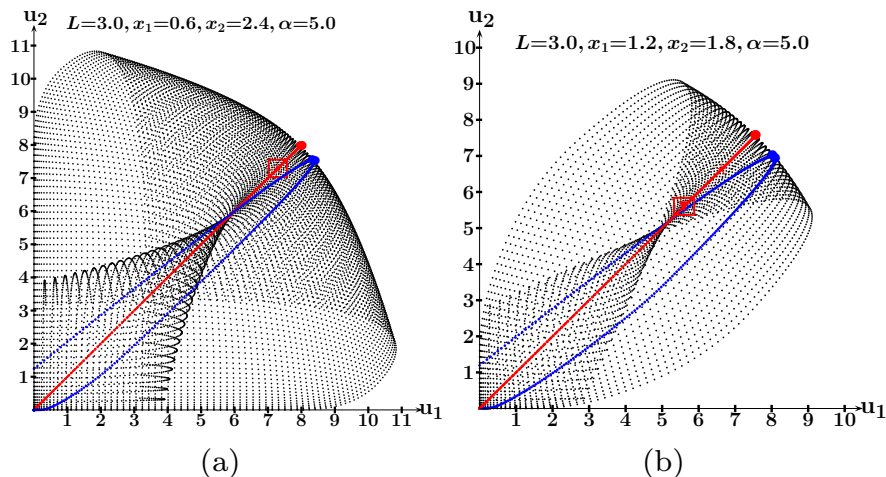
Como consecuencia de ello, la demanda total de cada jugador- $i$  viene dada por la ec. 8.7, de modo que los beneficios en el juego de  $\alpha$ -HS son  $u_i = Q_i p_i$ ,  $i = 1, 2$  (en el recuadro en la fig. 8.6 se muestra un ejemplo del juego de  $\alpha$ -HS). Con un valor de  $\alpha$  lo suficientemente grande como para que los jugadores interactúen, si  $p_1 = p_2 = p$ , la ec. 8.7 se reduce a la ec. 8.8, y el EN se corresponde con la ec. 8.9 para  $a = b \leq a^\nabla$ , es decir, cuando los jugadores no están muy próximos.

$$Q_i = \int_{x_i^i}^{x_i^s} (\alpha - (p_i + t|s - x_i|)) ds, \quad i = 1, 2. \quad (8.7)$$

$$Q_{1,2} = Q = (\alpha - p) \frac{L}{2} - c, \quad c = \frac{1}{2} \left( a^2 + \left( \frac{L}{2} - a \right)^2 \right) t. \quad (8.8)$$

$$p_{1,2}^* = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4t(\alpha L - 2c)}}{2}, \quad \lambda = \alpha + t \left( a + 3\frac{L}{2} \right), \quad \alpha \geq \alpha_2 = t(L - 2a) - 2\frac{c}{L}. \quad (8.9)$$

La fig. 8.5 trata la región de beneficios positivos en el juego de 5.0-HS ( $L=3.0, t=1.0$ ). Los valores de los precios que inducen los beneficios de la figura han sido muestreados en 200 puntos desde el valor 0 a 8 con un incremento de  $8/200$ , que explica el aspecto *moteado* de las regiones de beneficios. Las soluciones marcadas en rojo representan los beneficios cuando  $p_1 = p_2$ , mientras que las marcadas en azul muestran los correspondientes a  $p_2 = p_1 + 0.2$ .

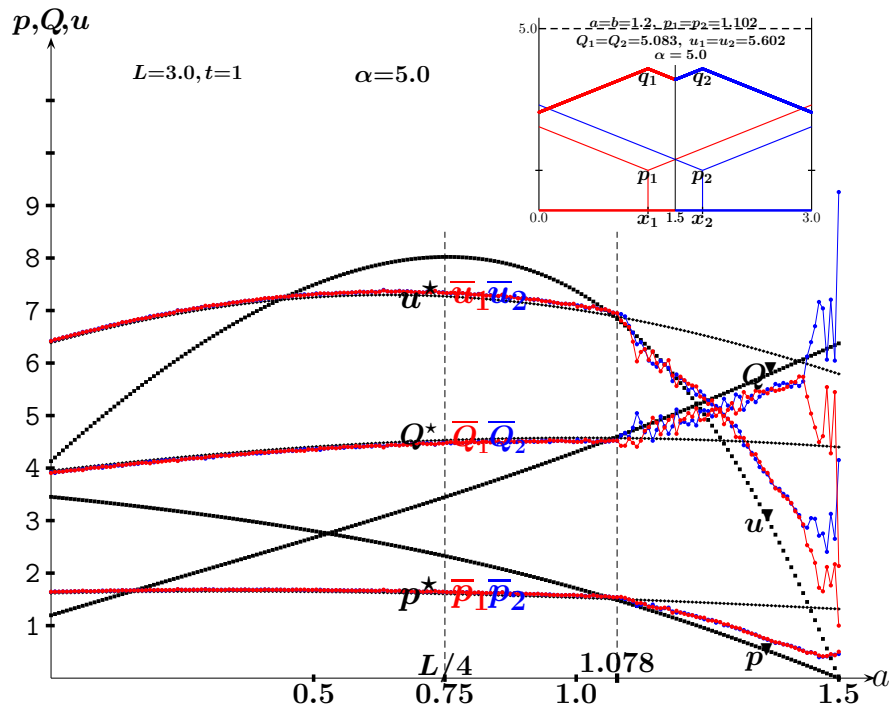


**Figura 8.5:** Región de beneficios positivos en el juego de Hotelling-Smithies con  $\alpha=5.0$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $a=b=0.6$ . (b)  $a=b=1.2$ . Las soluciones marcadas en rojo indican los resultados cuando  $p_1=p_2$ . Las soluciones marcadas en azul indican los resultados cuando  $p_2=p_1+0.2$ .

En la fig. 8.5(a), tenemos que  $a=b=0.6$ , de modo que el EN (encuadrado en forma de caja) se localiza en  $u_1^* = u_2^* = 7.293$ , inducido por  $p_1^* = p_2^* = 1.633$ . La solución marcada con un

punto ubica el OP simétrico en  $u_1^\bullet = u_2^\bullet = 7.970$ , inducida por  $p_1^\bullet = p_2^\bullet = 2.305$ . Se puede llegar a una solución OP o colusiva a través del entrelazamiento entre las estrategias de los jugadores (García-Pérez *et al.*, 2023). En la fig. 8.5(b), donde  $a=b=1.2$ , la proximidad entre los jugadores hace que no exista EN, por lo que la solución marcada con  $\blacktriangledown$  (encuadrado en forma de caja) no corresponde a dicho equilibrio sino a la SCC.

La fig.8.6 trata el juego de 5.0-HS y variable  $a = b$ . Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  corresponden al EN según la ec. (8.9). A su vez, los gráficos de  $(p^\blacktriangledown, Q^\blacktriangledown, u^\blacktriangledown)$  corresponden a la solución según el precio dado por la ec. (8.10), que es la SCC. El precio de esta SCC se calcula en base a la expresión correspondiente a la ec. (8.11), teniendo en cuenta para su cálculo la ec.(8.8). En la fig. 8.6, se observa que las líneas que representan el EN dejan de coincidir con los valores promedio simulados en  $a^\blacktriangledown = 1.078$ , desde donde la disminución de los precios (y de los beneficios) se intensifica. El valor crítico  $a^\blacktriangledown = 1.078$  proviene de la intersección de  $p^*$  y de  $p^\blacktriangledown$ . Se verifica que  $a^\blacktriangledown = 1.078$  es mayor que  $L/4 = 0.75$  y próximo a  $3L/8 = 1.125$ . Estas características de  $a^\blacktriangledown$  resultan ser generales en el juego de  $\alpha$ -HS con un  $\alpha$  elevado, de modo que, por ejemplo, con  $\alpha = 6.0$  tenemos que  $a^\blacktriangledown = 1.023$ . Desde  $a^\blacktriangledown$ , los precios y beneficios promedio de la simulación,  $(\bar{p}, \bar{u})$  sobrepasan cada vez en mayor medida a los precios y beneficios de la SCC  $(p^\blacktriangledown, u^\blacktriangledown)$  en la fig. 8.6, de manera más significativa que en las figs. 8.1 y 8.3. Al igual que en los modelos anteriores del juego, la ec.(8.10) también verifica  $p^\blacktriangledown(L/2) = 0.0$ , apuntando nuevamente a la *paradójica* solución del juego de Bertrand donde únicamente se compite en precios.

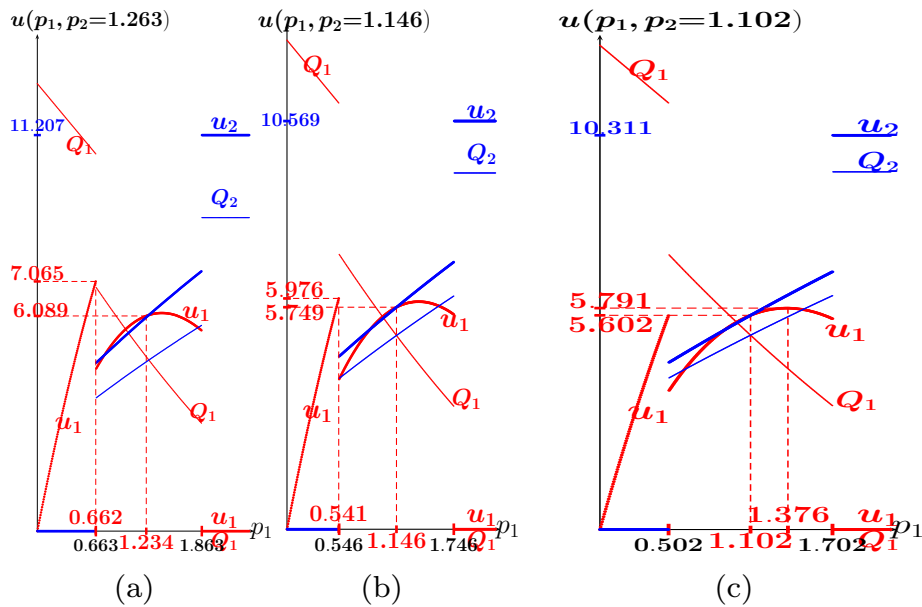


**Figura 8.6:** El juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=5.0$  y  $a=b$  variable.  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . Los gráficos de  $(p^*, Q^*, u^*)$  representan el equilibrio de Nash hasta  $a^\blacktriangledown = 1.078$ . Los gráficos de  $(p^\blacktriangledown, Q^\blacktriangledown, u^\blacktriangledown)$  representan la *solución de consenso colectiva* a partir de  $a^\blacktriangledown$ . Los gráficos coloreados de  $(\bar{p}, \bar{Q}, \bar{u})$  representan los valores promedio de la simulación en  $T=200$ . El recuadro representa el modelo con  $a=1.2$ .

$$p^\nabla = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 32t(L-2a)[\lambda + t(24a - 11L - 4a^2/L)]}}{8}, \quad \lambda = 4\alpha - t(28a - 13L). \quad (8.10)$$

$$p\left[(\alpha-p)\frac{L}{2}-c\right]=p'\left[(\alpha-p')L-c'\right], \quad p' = p-(L-2a), \quad c' = \frac{t}{2}(a^2+(L-a)^2), \quad c = \frac{t}{2}\left(a^2+\left(\frac{L}{2}-a\right)^2\right). \quad (8.11)$$

La fig.8.7 muestra el juego 5.0-HS para  $a=b=1.2 > a^\nabla$  en el contexto de la fig. 8.6, de tal modo que  $d_x=0.6$ . Se observa que la simulación en  $a=b=1.2$  converge a los valores  $\bar{p}_1=1.234$ ,  $\bar{p}_2=1.263$ . En la fig. 8.7(a), se muestra que la mejor respuesta  $p_1$  a  $p_2=1.263$  no es  $p_1=1.234$ , ya que los valores de  $p_1$  inmediatamente inferiores a 0.663 (como  $p_1=0.662$ ) proporcionarían mayores ganancias al jugador-1. La fig. 8.7(b) muestra que el posible EN,  $p_1=p_2=1.146$ , no lo es tal. Existen valores de  $p_1$  cercanos a 0.546 (por ejemplo,  $p_1 = 0.541$ ) que proporcionarían mayores ganancias al jugador-1. En la fig. 8.7(c) se observa que la SCC,  $p_{1,2}=p^\nabla(a=1.2)=1.102$ , que induce unos beneficios  $u_{1,2}^\nabla=5.602$ , no está en EN. Esto es así debido a que la mejor respuesta a  $p_2=1.102$  es  $p_1=1.376$ , que proporciona un beneficio  $u_1=5.791$ .



**Figura 8.7:** Funciones de respuesta en el juego de Hotelling-Smithies con límite de coste  $\alpha=5.0$  y  $a=b=1.2$ .  $L=3.0$ ,  $t=1.0$ . (a)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=1.263$ . (b)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=1.146$ . (c)  $p_1$ -respuesta para  $p_2=1.102$ .

## 8.4. Conclusiones

En este capítulo se analiza la casuística del juego de Hotelling en el que los jugadores están tan próximos que no existe EN y se demuestra que, en este escenario, se comportan según la denominada SCC, que proporciona a ambos la recompensa del mejor escenario monopolístico, pero estableciendo precios que no sean tan bajos como para dejar al competidor sin

mercado. El precio en tal consenso disminuye a medida que aumenta la proximidad de los jugadores, llegando a ser cero cuando ambos jugadores se ubican en el centro del segmento de mercado. La citada SCC se obtiene en las tres casuísticas del juego de Hotelling analizadas con  $a = b$  (juego simétrico) y se puede observar que la región en la que no hay EN va disminuyendo progresivamente en los tres escenarios considerados en el artículo: modelo de Hotelling convencional, juego de  $\alpha$ -HOT y juego de  $\alpha$ -HS.

Todos los resultados están apoyados por la simulación numérica confirmando la utilidad de esta herramienta para monitorizar el comportamiento de los jugadores y verificar los resultados analíticos, al igual que en capítulos anteriores.



# Notas

[8.1] El precio de la solución maximin viene dado por  $p_i^\star = \arg \max_{p_i} (u_i(p_i, p_j = 0.0))$ , que para el juego simétrico viene dado por

$$p_1^\star(a = b) = \begin{cases} tL/2 \rightarrow \bar{s}_1^\star = L/4, & u_1^\star = tL^2/8 = u^\star/4 & \text{si } a \leq L/4, \\ t(L - 2a) \rightarrow \bar{s}_1^\star = a, & u_1^\star = t(L - 2a)a & \text{si } a \geq L/4. \end{cases}$$

[8.2] La mejor respuesta a  $p_2=2.0$  se puede obtener del siguiente modo:

$$Q_1 = \frac{1}{2}(1 + 2 + (2 - p_1)), \quad u_1 = p_1(2.5 - \frac{1}{2}p_1), \quad \frac{du_1}{dp_1} = 0 \rightarrow p_1 = 2.5 \rightarrow Q_1 = 1.25 \rightarrow u = p_1 Q_1 = 3.125.$$



# Capítulo 9

## Conclusiones finales y líneas futuras

Este trabajo de investigación sobre el juego de Hotelling nos ha permitido conocer en detalle ciertos aspectos del juego apenas explorados y que nos dan una visión más completa de este modelo. Los objetivos planteados al inicio de este estudio han sido cubiertos utilizando una metodología, basada en un riguroso y metódico análisis del juego y en la utilización de técnicas de simulación numérica, para determinar el comportamiento del juego en diferentes casuísticas. Las principales conclusiones a las que se ha llegado en esta tesis doctoral se describen a continuación.

- La técnica de simulación numérica utilizada en esta tesis doctoral es una eficaz herramienta en el estudio del juego de Hotelling. Dicha técnica permite reproducir con un grado muy elevado de fidelidad los resultados obtenidos analíticamente, si bien excepcionalmente cierto ruido residual impide una aproximación más exacta al resultado teórico. El hecho de verificar la fiabilidad de la simulación para reproducir el comportamiento del juego nos ha permitido utilizarla en aquellos casos donde los cálculos matemáticos que permiten obtener las ecuaciones analíticas teóricas son extremadamente complejos, e.g., el juego cuántico de Hotelling-Smithies en modelos como el de localizaciones y precios variables o la casuística con coste cuadrático.
- La cuantización del juego de Hotelling permite optimizar los resultados con respecto al juego clásico. En la aproximación cuántica se comprueba que un nivel alto de entrelazamiento induce que el óptimo de Pareto emerja en equilibrio de Nash, mejorando el beneficio alcanzado con respecto al juego clásico. Esta forma de colusión indirecta en el juego favorece a los jugadores, si bien perjudica a los consumidores dado el incremento de precios asociado. Este resultado es común a los distintos esquemas de entrelazamiento estudiados, Li-Du-Massar y Frackiewicz, aplicados tanto al modelo original del juego como a sus variantes con límite de coste o demanda elástica o variable (el juego de Hotelling-Smithies), en las casuísticas con coste lineal y coste cuadrático.
- El caso de la simulación con localización y precio variables presenta comportamientos distintos en algunos casos, en función de la variante del juego analizada. En el caso del juego clásico, tanto en el juego de Hotelling con límite de coste como en el de Hotelling-Smithies, las localizaciones de los jugadores tienden a acercarse al aumentar el límite  $\alpha$

hasta estabilizarse. En ambos casos, los beneficios aumentan al incrementarse el valor de  $\alpha$ , al hacerlo también los precios. Si consideramos el juego cuántico de Hotelling con límite de coste, la localización de los jugadores tiende a alejarse al aumentar el entrelazamiento. En cambio, en el juego cuántico de Hotelling-Smithies, los jugadores tienden a acercarse al aumentar el entrelazamiento, si consideramos la casuística con coste lineal, mientras que no varían apenas su posición para coste cuadrático. En cuanto a los beneficios, en todas las variantes se observa un incremento de su valor al aumentar el entrelazamiento, al incrementarse también los precios efectivos.

- La observación del equilibrio de Nash a lo largo del segmento de mercado ha hecho posible determinar el límite a partir del cual no existe equilibrio, apoyándose en la simulación. En el estudio del juego simétrico, se ha comprobado que la región de equilibrio va aumentando de modo progresivo en los tres modelos del juego analizados, siendo menor en el modelo convencional, con valores intermedios en el juego de Hotelling con límite de coste y alcanzando la cota más elevada en el juego de Hotelling-Smithies. Por tanto, desde la perspectiva del juego de Hotelling-Smithies, la teoría de Hotelling sobre la tendencia de los jugadores a aproximarse al centro del mercado para aumentar su beneficio cobra más sentido. Además, se ha podido caracterizar la evolución del juego en la región en la que no existe equilibrio de Nash, obteniendo la estrategia a la que tienden los jugadores en esta casuística, que se ha denominado *solución de consenso colectiva*. Esta solución proporciona a ambos jugadores la recompensa del mejor escenario monopolístico, pero estableciendo precios que no sean tan bajos como para dejar al competidor sin mercado. Los precios en la *solución de consenso colectiva* disminuyen a medida que aumenta la proximidad de los jugadores, llegando a ser cero cuando ambos se ubican en el centro del segmento de mercado.

Como líneas de trabajo futuras, se tiene en el horizonte estudiar analíticamente y aplicar la técnica de simulación implementada en esta tesis doctoral para estudiar el juego de Hotelling con más de dos jugadores (Brenner, 2005), en mercados circulares (Kats, 1995; Salop, 1979), con jugadores discretos (Abudaldah *et al.*, 2015), en redes bidimensionales (Eaton y Lipsey, 1975; Veendorp y Majeed, 1995), en redes (Pinto y Parreira, 2014), con distribución no uniforme de consumidores (Benassi *et al.*, 2019), con estrategias mixtas (Anderson, 1988). Del mismo modo, se pretende conectar este trabajo con enfoques más generales del problema acerca de cómo las dinámicas de aprendizaje conducen (o no) al equilibrio de Nash (Babichenko y Rubinstein, 2017; Vainer y Kukacka, 2021).

Poco antes de finalizar esta tesis, se ha comenzado a explorar una nueva línea de investigación basada en la formulación secuencial (o dinámica) líder/seguidor del juego de Hotelling (Anderson, 1987). De acuerdo con este modelo, los jugadores fijan su estrategia de modo secuencial, decidiendo en primer lugar el jugador que actúa como líder y, a continuación, el que lo hace como seguidor, conociendo la elección del líder. En este tipo de juego la estrategia del líder es el principal reto, puesto que debe tener en cuenta la estrategia que va a tomar el seguidor como respuesta a la suya propia (*backward induction*). Con el apoyo de la simulación, se ha analizado el equilibrio perfecto en subjuegos en esta aproximación secuencial concluyéndose que, a nivel general, el seguidor tiene ventaja sobre el líder, lo cual no es la norma en juegos secuenciales (García-Pérez *et al.*, 2024c).

# Referencias

- Abudaldah, N., Heijman, W., Heringa, P., Mouche, P. v. (2015). Return of the ice cream men. A discrete Hotelling game. *Romanian Journal of Regional Science*, 9(2), 39-48.
- Alonso-Sanz, R. (2019a). *Quantum game simulation* (Vol. 36). Springer.
- Alonso-Sanz, R. (2019b). Simulation of the quantum Cournot duopoly game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 534, 122116.
- Alonso-Sanz, R., Adamatzky, A. (2020a). Cellular automaton simulation of the quantum war of attrition game. *Quantum Information Processing*, 19, 1-20.
- Alonso-Sanz, R., Adamatzky, A. (2020b). Spatial simulation of the quantum Bertrand duopoly game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 557, 124867.
- Alonso-Sanz, R., Martin-Gutierrez, S. (2020). The free-rider in the quantum Stackelberg duopoly game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 553, 124271.
- Anderson, S. P. (1987). Spatial competition and price leadership. *International Journal of Industrial Organization*, 5(4), 369-398.
- Anderson, S. P. (1988). Equilibrium existence in the linear model of spatial competition. *Economica*, 479-491.
- Arrow, K. J., Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 265-290.
- Aumann, R. J. (1959). Acceptable points in general cooperative n-person games. *Contributions to the Theory of Games*, 4(40), 287-324.
- Aumann, R. J. (1974). Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of mathematical Economics*, 1(1), 67-96.
- Aumann, R. J., Maschler, M., Stearns, R. E. (1995). *Repeated games with incomplete information*. MIT Press.
- Aumann, R. J., Shapley, L. S. (1994). Long-term competition—a game-theoretic analysis. En *Essays in Game Theory: In Honor of Michael Maschler* (pp. 1-15). Springer.
- Aydinonat, N. E., Köksal, E. (2019). Explanatory value in context: the curious case of Hotelling's location model. *The European Journal of the History of Economic Thought*, 26(5), 879-910.
- Babichenko, Y., Rubinstein, A. (2017). Communication complexity of approximate Nash equilibria. *Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, 878-889.
- Ballentine, L. E. (2014). *Quantum mechanics: a modern development*. World Scientific Publishing Company.

- Benassi, C., Chirco, A., Colombo, C. (2019). Vertical differentiation beyond the uniform distribution. *Journal of Economics*, 126, 221-248.
- Benjamin, S. C., Hayden, P. M. (2001). Comment on “Quantum games and quantum strategies”. *Physical Review Letters*, 87(6), 069801.
- Bertrand, J. (1883). Review of “Theorie mathématique de la richesse sociale” and of “Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses.” *Journal de savants*, 67, 499.
- Borda, J. d. (1781). Mémoire sur les élections au scrutin. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences*, 102, 657-665.
- Borel, É. (1921). La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences*, 173(1304-1308), 58.
- Borel, É. (1924a). *Elements de la Theorie des Probabilités*. Librairie scientifique, J. Hermann.
- Borel, É. (1924b). Sur les jeux où interviennent l’hasard et l’habileté des joueurs. *Théorie des probabilités*, 101-15.
- Borel, É. (1926). Un théorème sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche. *Compte rendu de l’Académie des Sciences*, 183.
- Borel, É. (1927a). Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences*, 184, 52-3.
- Borel, É. (1927b). *Traité du calcul des probabilités et de ses applications* (Vol. 3). Gautier-Villars et cie.
- Brenner, S. (2005). Hotelling games with three, four, and more players. *Journal of Regional Science*, 45(4), 851-864.
- Brenner, S. (2011). Location (Hotelling) Games and Applications. En *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Chen, Y., Qin, G., Wang, A. M. (2014). Quantization of the location stage of Hotelling model. *arXiv:1410.2779*.
- Conway, J. (1970). Conway’s game of life. *Scientific American*.
- Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (Vol. 48). L. Hachette.
- Darwin, C. (1871). *The descent of man: and selection in relation to sex* (Vol. 1). John Murray.
- Dasgupta, P., Maskin, E. (1986). The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory. *The Review of economic studies*, 53(1), 1-26.
- d’Aspremont, C., Gabszewicz, J. J., Thisse, J.-F. (1979). On Hotelling’s “Stability in competition”. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1145-1150.
- De Condorcet, N. (1785). *Essai sur l’application de l’analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Imprinta Real.
- Debreu, G. (1952). A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the national academy of sciences*, 38(10), 886-893.
- de Montmort, P. R. (1713). *Essay d’analyse sur les jeux de hazard*. J. Quillau.
- Dresher, M. (1961). *Games of strategy: theory and applications* (Vol. 360). Prentice-Hall Englewood Cliffs.
- Du, J., Ju, C., Li, H. (2005). Quantum entanglement helps in improving economic efficiency. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(7), 1559.

- Eaton, B. C., Lipsey, R. G. (1975). The principle of minimum differentiation reconsidered: Some new developments in the theory of spatial competition. *The Review of Economic Studies*, 42(1), 27-49.
- Eaton, B. C., Lipsey, R. G. (1978). Freedom of entry and the existence of pure profit. *The Economic Journal*, 88(351), 455-469.
- Economides, N. (1993). Hotelling's "Main Street" with more than two competitors. *Journal of Regional Science*, 33(3), 303-319.
- Edgeworth, F. Y. (1881). *Mathematical psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences*. CK Paul.
- Edgeworth, F. Y. (1897). La teoría pura del monopolio. *Giornale degli economisti*, 13-31.
- Eisert, J., Wilkens, M., Lewenstein, M. (1999). Quantum games and quantum strategies. *Physical Review Letters*, 83(15), 3077.
- Fisher, R. A. (1930). *The genetical theory of natural selection: a complete variorum edition*. Clarendon Press.
- Flood, M. M. (1958). Some experimental games. *Management Science*, 5(1), 5-26.
- Frackiewicz, P. (2016). Remarks on quantum duopoly schemes. *Quantum Information Processing*, 15, 121-136.
- Frackiewicz, P. (2018). On subgame perfect equilibria in quantum Stackelberg duopoly with incomplete information. *Physics Letters A*, 382(48), 3463-3469.
- Frackiewicz, P., Sładkowski, J. (2016). Quantum approach to Bertrand duopoly. *Quantum Information Processing*, 15, 3637-3650.
- Gabszewicz, J. (2013). *Location theory*. Taylor & Francis.
- Gabszewicz, J. J., Thisse, J.-F. (1992). Location. *Handbook of game theory with economic applications*, 1, 281-304.
- Gale, D., Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1), 9-15.
- Garcia-Perez, L., Grau-Climent, J., Losada, J. C., Alonso-Sanz, R. (2021). Cellular automaton simulation of the quantum Hotelling game with reservation cost. *Quantum Information Processing*, 20(7), 227.
- Garcia-Perez, L., Grau-Climent, J., Losada, J. C., Alonso-Sanz, R. (2022). Complex dynamics of a Cournot quantum duopoly game with memory and heterogeneous players. *Entropy*, 24(10), 1333.
- Garcia-Perez, L., Grau-Climent, J., Losada, J. C., Alonso-Sanz, R. (2023). The quantum Hotelling-Smithies game. *Quantum Information Processing*, 22(1), 38.
- Garcia-Perez, L., Grau-Climent, J., Losada, J. C., Alonso-Sanz, R. (2024a). A quantum Stackelberg common-pool resource game. *APL Quantum*, 1(3), 036111.
- Garcia-Perez, L., Grau-Climent, J., Losada, J. C., Alonso-Sanz, R. (2024b). On the Hotelling Game with Close Players. *International Game Theory Review*, 26(03), 2450002.
- Garcia-Perez, L., Grau-Climent, J., Losada, J. C., Alonso-Sanz, R. (2024c). Simulation of the Stackelberg-Hotelling game [en revisión]. *Games*.
- Gillies, D. B. (1959). Solutions to general non-zero-sum games. *Contributions to the Theory of Games*, 4(40), 47-85.
- Gillies, D. B. (1953). *Some theorems on n-person games*. Princeton University.
- Graitson, D. (1982). Spatial Competition à la Hotelling: A Selective Survey. *The Journal of Industrial Economics*, 31(1/2), 11-25.

- Grau-Climent, J., Garcia-Perez, L., Alonso-Sanz, R., Losada, J. C. (2023a). Dynamics of a Quantum Common-Pool Resource Game with Homogeneous Players' Expectations. *Entropy*, 25(12), 1585.
- Grau-Climent, J., Garcia-Perez, L., Alonso-Sanz, R., Losada, J. C. (2023b). Effect of players' expectations and memory in a quantum Cournot game. *Chaos, Solitons & Fractals*, 175, 113950.
- Grau-Climent, J., Garcia-Perez, L., Alonso-Sanz, R., Losada, J. C. (2023c). Simulation of the quantum Bertrand–Edgeworth game. *Quantum Information Processing*, 22(11), 411.
- Grau-Climent, J., Garcia-Perez, L., Alonso-Sanz, R., Losada, J. C. (2024). Cellular Automaton Simulation of a Public Goods Game. *Journal of Cellular Automata*, 18(1), 59-85.
- Grau-Climent, J., Garcia-Perez, L., Losada, J. C., Alonso-Sanz, R. (2022). Simulation of the Hotelling-Smithies game: Hotelling was not so wrong. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 112, 106513.
- Harsanyi, J. C. (1967). Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I-III Part I. The basic model. *Management science*, 14(3), 159-182.
- Harsanyi, J. C. (1968a). Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I-III Part II. Bayesian equilibrium points. *Management science*, 14(5), 320-334.
- Harsanyi, J. C. (1968b). Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I-III Part III. Bayesian equilibrium points. *Management science*, 14(7), 487-502.
- Hinloopen, J., Van Marrewijk, C. (1999). On the limits and possibilities of the principle of minimum differentiation. *International Journal of Industrial Organization*, 17(5), 735-750.
- Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *The economic journal*, 39(153), 41-57.
- Huizinga, J. (2008). *Homo ludens: proeve eener bepaling van het spel-element der cultuur*. Amsterdam University Press.
- Hurwicz, L. (1972). On informationally decentralized systems. En R. Radner C. B. McGuire (Eds.), *Decision and organization: A volume in Honor of J. Marschak* (pp. 297-336). North-Holland.
- Hurwicz, L. (1973). The design of mechanisms for resource allocation. *The American Economic Review*, 63(2), 1-30.
- Irmen, A., Thisse, J.-F. (1998). Competition in multi-characteristics spaces: Hotelling was almost right. *Journal of economic theory*, 78(1), 76-102.
- Iskakov, M., Iskakov, A. (2012). Solution of the Hotelling's game in secure strategies. *Economics Letters*, 117(1), 115-118.
- Kalmár, L. (1928). Zur Theorie der abstrakten Spiele. *Acta Sci. Math. Univ. Szeged*, 4, 65-85.
- Kameshwari, A., Balakrishnan, S. (2021). Cournot and Stackelberg duopoly games in the purview of modified EWL scheme. *Quantum Information Processing*, 20, 1-15.
- Kats, A. (1995). More on Hotelling's stability in competition. *International Journal of Industrial Organization*, 13(1), 89-93.
- Khan, F. S., Solmeyer, N., Balu, R., Humble, T. S. (2018). Quantum games: a review of the history, current state, and interpretation. *Quantum Information Processing*, 17, 1-42.
- Kilkenny, M., Thisse, J.-F. (1999). Economics of location: a selective survey. *Computers & Operations Research*, 26(14), 1369-1394.

- König, D. (1927). Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 3(2-3), 121-130.
- Kuhn, H. W. (1950). Extensive games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(10), 570-576.
- Kuhn, H. W. (1953). Extensive games and the problem of information. *Contributions to the Theory of Games*, 2(28), 193-216.
- Leibniz, G. (1765). Nouveaux essais sur l'entendement humain, edition originale dans, oeuvres philosophiques de Mr. de Leibnitz, Amsterdam et Leipzig 1765. *Nouveaux Essais*.
- Lerner, A. P., Singer, H. W. (1937). Some Notes on Duopoly and Spatial Competition. *Journal of Political Economy*, 45(2), 145-186.
- Lewontin, R. C. (1961). Evolution and the theory of games. *Journal of theoretical biology*, 1(3), 382-403.
- Li, H., Du, J., Massar, S. (2002). Continuous-variable quantum games. *Physics Letters A*, 306(2-3), 73-78.
- Luce, R. D., Raiffa, H. (1957). *Games and decisions: Introduction and Critical Survey*. John Wiley & Sons.
- Luce, R. D., Rogow, A. A. (1956). A game theoretic analysis of congressional power distributions for a stable two-party system. *Behavioral Science*, 1(2), 83-95.
- Maskin, E. (1999). Nash equilibrium and welfare optimality. *The Review of Economic Studies*, 66(1), 23-38.
- Maskin, E., Sjöström, T. (2002). Implementation theory. *Handbook of social Choice and Welfare*, 1, 237-288.
- Mayberry, J. P., Nash, J. F., Shubik, M. (1953). A comparison of treatments of a duopoly situation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 141-154.
- Merzbacher, E. (1998). *Quantum mechanics*. John Wiley & Sons.
- Meyer, D. A. (1999). Quantum strategies. *Physical Review Letters*, 82(5), 1052.
- Milgrom, P. R. (2004). *Putting auction theory to work*. Cambridge University Press.
- Milgrom, P. R., Weber, R. J. (1982). A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1089-1122.
- Myerson, R. B. (1979). Incentive compatibility and the bargaining problem. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 61-73.
- Myerson, R. B. (1981). Optimal auction design. *Mathematics of operations research*, 6(1), 58-73.
- Nash, J. (1951). Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics*, 54(2), 286-295.
- Neubert, F.-X., Mars, R. B., Thomas, A. G., Sallet, J., Rushworth, M. F. (2014). Comparison of human ventral frontal cortex areas for cognitive control and language with areas in monkey frontal cortex. *Neuron*, 81(3), 700-713.
- Nielsen, M. A., Chuang, I. L. (2010). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press.
- Ostrom, E. (1990). *Governing the commons: The evolution of institutions for collective action*. Cambridge University Press.
- Ostrom, E., Burger, J., Field, C. B., Norgaard, R. B., Policansky, D. (1999). Revisiting the commons: local lessons, global challenges. *Science*, 284(5412), 278-282.
- Pareto, V. (1919). *Manuale di economia politica con una introduzione alla scienza sociale* (Vol. 13). Società editrice libraria.

- Pinto, A. A., Parreira, T. (2014). Optimal localization of firms in Hotelling networks. *Modeling, Dynamics, Optimization and Bioeconomics I: Contributions from ICMOD 2010 and the 5th Bioeconomy Conference 2012*, 17-22.
- Planck, M. (1901). On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Annalen der Physik*, 4(553), 1.
- Puu, T. (2002). Hotelling's "Ice cream dealers" with elastic demand. *The Annals of Regional Science*, 36, 1-17.
- Puu, T., Sushko, I. (2002). *Oligopoly dynamics: Models and tools*. Springer-Verlag.
- Rahaman, R., Majumdar, P., Basu, B. (2012). Quantum Cournot equilibrium for the Hotelling-Smithies model of product choice. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(45), 455301.
- Riker, W. H. (1959). A test of the adequacy of the power index. *Behavioral Science*, 4(2), 120-131.
- Roth, A. E., Sotomayor, M. (1992). Two-sided matching. *Handbook of game theory with economic applications*, 1, 485-541.
- Rubinstein, A. (1979). Equilibrium in supergames with the overtaking criterion. *Journal of economic theory*, 21(1), 1-9.
- Rubinstein, A. (1994). Equilibrium in supergames. En *Essays in game theory: in honor of Michael Maschler* (pp. 17-27). Springer.
- Salop, S. C. (1979). Monopolistic competition with outside goods. *The Bell Journal of Economics*, 141-156.
- Schelling, T. C. (1960). *The strategy of conflict*. Harvard University Press.
- Sekiguchi, Y., Sakahara, K., Sato, T. (2010). Uniqueness of Nash equilibria in a quantum Cournot duopoly game. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(14), 145303.
- Selten, R. (1965a). Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetraegheit. Teil I: Eigenschaften des dynamischen Preisgleichgewichts. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft/Journal of Institutional and Theoretical Economics*, (H. 2), 301-324.
- Selten, R. (1965b). Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetraegheit. Teil II: Eigenschaften des dynamischen Preisgleichgewichts. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft/Journal of Institutional and Theoretical Economics*, (H. 4), 667-689.
- Shapley, L. S. (1952). *Notes on the N-Person Game, III: Some Variants of the Von Neumann-Morgenstern Definition of Solution*. RAND Corporation.
- Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. En H. Kuhn A. Tucker (Eds.), *Contributions to the Theory of Games II* (pp. 307-317). Princeton University Press.
- Shapley, L. S., Shubik, M. (1954). A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American Political Science Review*, 48(3), 787-792.
- Shubik, M. (1959). Edgeworth market games. *Contributions to the Theory of Games*, 4, 267-278.
- Smith, J. M. (1982). Evolution and the Theory of Games. En *Did Darwin get it right? Essays on games, sex and evolution* (pp. 202-215). Springer.
- Smith, J. M., Price, G. R. (1973). The logic of animal conflict. *Nature*, 246(5427), 15-18.

- Smithies, A. (1941a). Monopolistic Price Policy in a Spatial Market. *Econometrica*, 9(1), 63-73.
- Smithies, A. (1941b). Optimum location in spatial competition. *Journal of Political Economy*, 49(3), 423-439.
- Tucker, A. W. (1980). On jargon: The prisoner's dilemma. *UMAP journal*, 1(101).
- Vainer, J., Kukacka, J. (2021). Nash Q-learning agents in Hotelling's model: Reestablishing equilibrium. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 99, 105805.
- van Enk, S. J., Pike, R. (2002). Classical rules in quantum games. *Physical Review A*, 66(2), 024306.
- Veendorp, E. C. H., Majeed, A. (1995). Differentiation in a two-dimensional market. *Regional Science and Urban Economics*, 25(1), 75-83.
- Villalón, Á. F. T., Caraballo, A. M. M. (2015). Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos. *Boletín de Matemáticas*, 22(1), 77-95.
- von Neumann, J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische annalen*, 100(1), 295-320.
- von Neumann, J. (2017). The general and logical theory of automata. En W. Buckley (Ed.), *Systems research for behavioral science* (pp. 97-107). Routledge.
- von Neumann, J., Burks, A. W. (1966). *Theory of self-reproducing automata*. University of Illinois Press.
- von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944). Theory of games and economic behavior.
- von Stackelberg, H. (1934). *Marktform und Gleichgewicht*. J. Springer.
- Wang, N., Yang, Z. (2022). Nonlinear quantum Cournot duopoly games. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 55(42), 425306.
- Wang, S. F. (2022). Dynamics, synchronization control of a class of discrete quantum game chaotic map. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 600, 127596.
- Williamson, O. (1975). *Markets and Hierarchies, Analysis and Antitrust Implications: A Study in the Economics of Internal Organization*. Free Press.
- Williamson, O. E. (1985). *The Economic Institutions of Capitalism*. Free Press.
- Wilson, R. (1979). Auctions of shares. *The Quarterly Journal of Economics*, 93(4), 675-689.
- Wilson, R. (1985). *Game-theoretic analyses of trading processes*. Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University.
- Wolfram, S. (1986). Theory and applications of cellular automata. *World Scientific*.
- Wolfram, S. (2002). A new kind of science. *Champaign, IL: Wolfram media*.
- Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, 2, 501-504.
- Zhang, X., Sun, D., Jiang, W. (2020). Dynamics of a heterogeneous quantum Cournot duopoly with adjusting players and quadratic costs. *Quantum Information Processing*, 19, 1-15.
- Zhang, X., Sun, D., Ma, S., Zhang, S. (2020). The dynamics of a quantum Bertrand duopoly with differentiated products and heterogeneous expectations. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 557, 124878.
- Zhang, Y., Yuan, J., Zhang, Y. (2023). Chaotic dynamics of a quantum Cournot duopoly game with heterogeneous expectations. *International Journal of Quantum Information*, 21(03), 2350013.



# Anexo A

## El esquema de cuantización de Li-Du-Massar

Como hemos visto en la sec. 4.2, las magnitudes entrelazadas, de acuerdo con el método de cuantización de Li-Du-Massar, vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$q_1 \equiv \langle \psi_f | \hat{X}_1 | \psi_f \rangle = x_1 \cosh \gamma + x_2 \sinh \gamma, \quad (\text{A.1})$$

$$q_2 \equiv \langle \psi_f | \hat{X}_2 | \psi_f \rangle = x_2 \cosh \gamma + x_1 \sinh \gamma, \quad (\text{A.2})$$

donde  $|\psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger(\gamma) (\hat{D}_1(x_1) \otimes \hat{D}_2(x_2)) \hat{J}(\gamma) |0\rangle_1 |0\rangle_2$  y  $\hat{X}_i = \frac{\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i}{\sqrt{2}}$ , con  $i = 1, 2$ . Por su parte,  $x_i$  con  $i = 1, 2$  se corresponden con las estrategias independientes de cada jugador y  $\gamma$  es el grado de entrelazamiento.

Para realizar los cálculos necesarios para llegar a las ecs. (A.1),(A.2), se utiliza la propiedad de los operadores dada por la ec. (A.3) (Merzbacher, 1998), como proponen Frackiewicz y Sładkowski (2016):

$$e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}} = \hat{B} \cosh \lambda \sqrt{\beta} + \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{\sqrt{\beta}} \sinh \lambda \sqrt{\beta}, \quad (\text{A.3})$$

que se cumple para dos operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  para los que se satisfaga la expresión  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = \beta \hat{B}$ , donde  $\beta$  es una constante. Para el caso particular en que se cumple que  $[\hat{A}, \hat{B}] = \mu \mathbb{1}$ , donde  $\mu$  es una constante, la ec. (A.3) se convierte en:

$$e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{\lambda \hat{A}} = \hat{B} + \lambda \mu \hat{\mathbb{1}}. \quad (\text{A.4})$$

Además, para llegar al resultado, hay que considerar las siguientes propiedades de los operadores creación,  $\hat{a}_i^\dagger$ , y destrucción,  $\hat{a}_i$ :

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0. \quad (\text{A.6})$$

A continuación, se detallan los cálculos para obtener la ec. (A.1), pudiéndose llegar de modo análogo a la ec. (A.2).

Estos son los cálculos paso a paso, abordando la ec. (A.1) por partes:

1. Se obtiene que:

$$\hat{J}(\gamma)\hat{a}_1\hat{J}^\dagger(\gamma) = \hat{a}_1 \cosh \gamma + \hat{a}_2^\dagger \sinh \gamma, \quad (\text{A.7})$$

a partir de las ecs. (A.3),(A.5),(A.6) sabiendo que  $[\hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_1] = \hat{a}_2^\dagger$  y  $[\hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2^\dagger] = \hat{a}_1$ .

Análogamente, se obtiene que  $\hat{J}(\gamma)\hat{a}_1^\dagger\hat{J}^\dagger(\gamma) = \hat{a}_1^\dagger \cosh \gamma + \hat{a}_2 \sinh \gamma$ .

Por tanto:

$$\hat{O}_1 \equiv \hat{J}(\gamma)\hat{X}_1\hat{J}^\dagger(\gamma) = \hat{X}_1 \cosh \gamma + \hat{X}_2 \sinh \gamma. \quad (\text{A.8})$$

2. Se cumple que:

$$\hat{D}_i(x_i)^\dagger \hat{a}_j \hat{D}_i(x_i) = \begin{cases} \hat{a}_i + \frac{x_i}{\sqrt{2}} & i = j, \\ \hat{a}_j & i \neq j, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

a partir de las ecs. (A.4),(A.5),(A.6) teniendo en cuenta que:

$$[\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i, \hat{a}_j] = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Por tanto, se llega a la expresión:

$$\hat{O}_2 \equiv \hat{D}_2(x_2)^\dagger \hat{D}_1(x_1)^\dagger \hat{O}_1 \hat{D}_1(x_1) \hat{D}_2(x_2) = (\hat{X}_1 + x_1) \cosh \gamma + (\hat{X}_2 + x_2) \sinh \gamma, \quad (\text{A.11})$$

sabiendo que  $\hat{D}_i(x_i)^\dagger \hat{X}_i \hat{D}_i(x_i) = \hat{X}_i + x_i$  y  $\hat{D}_i(x_i)^\dagger \hat{X}_j \hat{D}_i(x_i) = \hat{X}_j$ .

3. Se obtiene que:

$$\hat{J}^\dagger(\gamma)\hat{a}_i\hat{J}(\gamma) = \hat{a}_i \cosh \gamma - \hat{a}_j^\dagger \sinh \gamma \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j, \quad (\text{A.12})$$

a partir de las ecs. (A.3),(A.5),(A.6) sabiendo que  $[\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_i\hat{a}_j, \hat{a}_i] = -\hat{a}_j^\dagger$  y  $[\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_i\hat{a}_j, -\hat{a}_j^\dagger] = \hat{a}_i$ . De este modo, se llega a que:

$$\hat{O}_3 \equiv \hat{J}^\dagger(\gamma)\hat{O}_2\hat{J}(\gamma) = \hat{X}_1 + x_1 \cosh \gamma + x_2 \sinh \gamma. \quad (\text{A.13})$$

4. Finalmente, obtiene a la expresión:

$$q_1 = \langle 0|_1 O_3 |0\rangle_1 = x_1 \cosh \gamma + x_2 \sinh \gamma, \quad (\text{A.14})$$

teniendo en cuenta las propiedades del operador creación y destrucción  $\hat{a}_i|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$  y  $\hat{a}_i^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ .

## Anexo B

# El esquema de cuantización de Frackiewicz

En el método de cuantización de Frackiewicz, las cantidades entrelazadas vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{tr}(\hat{M}_1 \rho_1) = x_1 \cos^2 \gamma + x_2 \sin^2 \gamma, \\ q_2 &= \text{tr}(\hat{M}_2 \rho_2) = x_2 \cos^2 \gamma + x_1 \sin^2 \gamma, \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde  $\hat{M}_i(x_1, x_2)$  con  $i = 1, 2$  se corresponden con los dos operadores positivos definidos previamente en la ec. (4.8) dentro de la sec. 4.2, y  $\hat{\rho}_1 = \text{tr}_2(|\psi_f\rangle\langle\psi_f|)$  y  $\hat{\rho}_2 = \text{tr}_1(|\psi_f\rangle\langle\psi_f|)$  representan los operadores densidad reducidos del qubit 1 y del qubit 2, respectivamente. Por su parte,  $x_i$  con  $i = 1, 2$  se corresponden con las estrategias independientes de cada jugador y  $\gamma$  es el grado de entrelazamiento.

El operador de entrelazamiento se define como  $\hat{I}(\gamma) = \hat{\mathbb{1}}^{\otimes 2} \cos \gamma + i \hat{\sigma}_x^{\otimes 2} \sin \gamma$  con  $\gamma \in [0, \pi/4]$ , donde:

- $\hat{\mathbb{1}}$  representa el operador identidad, que se caracteriza por conservar el estado básico del sistema de tal modo que,  $\mathbb{1}|0\rangle = |0\rangle$  y  $\mathbb{1}|1\rangle = |1\rangle$ .
- $\hat{\sigma}_x$  representa el operador de Pauli, que actúa como una puerta NOT cambiando el estado básico del sistema de tal modo que,  $\hat{\sigma}_x|0\rangle = |1\rangle$  y  $\hat{\sigma}_x|1\rangle = |0\rangle$ .

A partir de ello, se puede obtener el estado final del sistema a partir de la acción del operador de entrelazamiento sobre ambos qubits en estado cero,  $|0\rangle_i$  con  $i = 1, 2$ :

$$|\psi_f\rangle = \hat{I}(\gamma)|00\rangle = \cos \gamma|00\rangle + i \sin \gamma|11\rangle. \tag{B.2}$$

Por su parte, los operadores  $\hat{M}_1(x_1, x_2)$  y  $\hat{M}_2(x_1, x_2)$  se pueden expresar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \hat{M}_1(x_1, x_2) &= x_1|0\rangle\langle 0| + x_2|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}, \\ \hat{M}_2(x_1, x_2) &= x_2|0\rangle\langle 0| + x_1|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{B.3}$$

ya que  $|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

El cálculo del operador o matriz densidad  $\hat{\rho}$  da como resultado:

$$\hat{\rho} = |\psi_f\rangle\langle\psi_f| = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 \\ 0 & i \operatorname{sen} \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 \\ 0 & -i \operatorname{sen} \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \gamma & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2 \gamma \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

que cumple las propiedades que debe tener un operador densidad, que son tener traza unidad ( $\operatorname{tr}(\hat{\rho})=1$ ), ser hermítico ( $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ ) y ser semidefinido positivo ( $\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle \geq 0$  para cualquier estado  $\psi$  del espacio de Hilbert donde está definido).

A partir de todo lo anterior y sabiendo que, como consecuencia de como se ha definido el sistema, en este caso se cumple que  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$ , se obtienen las expresiones del modelo de Frackiewicz dadas por la ec. (B.1):

$$\begin{aligned} q_1 &= \operatorname{tr}(\hat{M}_1 \hat{\rho}_1) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} x_1 \cos^2 \gamma & 0 \\ 0 & x_2 \operatorname{sen}^2 \gamma \end{pmatrix} = x_1 \cos^2 \gamma + x_2 \operatorname{sen}^2 \gamma, \\ q_2 &= \operatorname{tr}(\hat{M}_2 \hat{\rho}_2) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} x_2 \cos^2 \gamma & 0 \\ 0 & x_1 \operatorname{sen}^2 \gamma \end{pmatrix} = x_2 \cos^2 \gamma + x_1 \operatorname{sen}^2 \gamma. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$