

Fundamentos de las  
teorías de estructuras y de su  
análisis numérico

Jaime Cervera Bravo





Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons. Algunos derechos reservados.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es>

# Fundamentos de las teorías de estructuras y de su análisis numérico

Jaime Cervera Bravo

10 de enero de 2025. v. 1.1

## Agradecimientos

Este texto no habría sido posible sin el aprendizaje de años en la Cátedra que dirigió Ricardo Aroca en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura (1973-2010), y en el Seminario de Diseño de Estructuras asociado a esta, pareja de entidades en las que colaboraban profesionales y profesores de inmensa talla, de entre los que debo citar, al menos a José Luis de Miguel, José Miguel Avila o Ignacio Jaenicke. Su mayor aportación correspondió a haber situado la excelencia de la Arquitectura como parte nuclear de la reflexión sobre las estructuras que la sustentan. Poniendo con ello en primera línea la exploración sobre la relación entre forma y eficacia estructural.

Por otro lado debo agradecer la oportunidad abierta, el curso 2015-16, en la transformación del Máster Universitario en Estructuras de Edificación, y la colaboración de Jesús Ortiz en favor del necesario rigor en las lecciones y anotaciones de las que surge este texto.

Buena parte de lo que aquí se expone, y de la forma en que se hace, se debe también en gran medida al enorme incentivo de las y los estudiantes que me han hecho cuestionar permanentemente la validez o la oportunidad de nuestras enseñanzas a todo lo largo de mi trayectoria docente, en ese máster, en los cursos de cálculo o proyecto de estructuras de la ETSAM, en las tutelas de los proyectos de fin de carrera o de fin de máster, o en las direcciones de tesis doctorales.

Finalmente agradezco a Mariano Vázquez, entre muchas otras cosas, su cuidadosa lectura y revisión de alguna de las versiones avanzadas del manuscrito original.

# Índice general

<b>1. Teoría Básica de estructuras</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.1.1. Las teorías para el análisis y simulación de fenómenos complejos . . . . .	1
1.1.2. El contenido sistémico de las teorías . . . . .	2
1.1.3. Los modelos en las teorías del análisis de estructuras . . . . .	4
1.1.4. Los objetivos profesionales: el análisis y la concepción, el peritaje y el proyecto . . . . .	5
1.2. Modelos y ecuaciones fundamentales . . . . .	8
1.2.1. Parámetros básicos del modelo . . . . .	8
1.2.2. Ecuaciones fundamentales . . . . .	13
1.2.3. Trabajo y energía . . . . .	15
1.2.4. Teoremas del trabajo . . . . .	18
1.2.5. Dualidad estático–cinemática . . . . .	19
1.3. Análisis y proyecto elástico . . . . .	21
1.3.1. Relaciones materiales . . . . .	21

1.3.2.	Resumen de las variables y ecuaciones fundamentales y su solución . . . . .	22
1.3.3.	El modelo elástico en un vistazo . . . . .	26
1.3.4.	El análisis elástico . . . . .	28
1.3.5.	El proyecto elástico . . . . .	29
1.3.6.	Supuestos, valores y limitaciones del modelo elástico . . . . .	31
1.3.7.	Ejemplos de aplicación . . . . .	33
1.3.7.1.	Equilibrio . . . . .	33
1.3.7.2.	Compatibilidad . . . . .	36
1.3.7.3.	Relaciones materiales (o de constitución del material) elásticas . . . . .	38
1.3.7.4.	Masa indeformable sustentada en varias barras articuladas . . . . .	38
1.4.	Análisis y proyecto plástico . . . . .	49
1.4.1.	Modos de colapso: cinemática y equilibrio . . . . .	50
1.4.2.	Relaciones materiales: condiciones de resistencia. . . . .	53
1.4.3.	Condición de colapso . . . . .	57
1.4.4.	Trabajo y energía . . . . .	58
1.4.5.	Teoremas fundamentales del análisis límite en plasticidad asociada . . . . .	60
1.4.6.	Variables y ecuaciones fundamentales . . . . .	67
1.4.7.	El análisis plástico . . . . .	68
1.4.7.1.	El enfoque estático . . . . .	69
1.4.7.2.	El enfoque cinemático . . . . .	71
1.4.8.	El proyecto plástico . . . . .	73
1.4.9.	Generalización a otros problemas . . . . .	75

1.4.10. Resumen de las variables fundamentales y sus relaciones . . . . .	77
1.4.11. El modelo plástico en un vistazo . . . . .	81
1.4.12. Supuestos, valores y limitaciones del modelo plástico límite . . . . .	81
1.4.13. Ejemplos de aplicación . . . . .	83
1.4.13.1. Esfuerzos y deformaciones límite . . . . .	83
1.4.13.2. Relaciones materiales límite: condiciones de resistencia . . . . .	86
1.4.13.3. Masa indeformable sustentada en varias barras articuladas . . . . .	90
<b>2. Análisis</b>	<b>99</b>
2.1. El enfoque elástico . . . . .	100
2.1.1. Modelado de piezas . . . . .	100
2.1.1.1. Sección: tensiones normales . . . . .	100
2.1.1.2. Sección: tensiones tangenciales . . . . .	104
2.1.1.3. Pieza: variables y ecuaciones . . . . .	110
2.1.1.4. Barra: ecuaciones diferenciales . . . . .	117
2.1.1.5. Pieza: descomposición . . . . .	118
2.1.1.6. Pieza: funciones de forma . . . . .	119
2.1.1.7. Modelos: carga y rigidez . . . . .	123
2.1.2. Análisis de la estructura completa . . . . .	135
2.1.2.1. Subestructuras . . . . .	135
2.1.2.2. Ensamblaje de cargas y rigideces . . . . .	143
2.1.2.3. Solución de problemas lineales . . . . .	151
2.1.2.4. Solución de problemas no lineales . . . . .	152
2.1.3. Ejemplo de aplicación: pórtico de cinco plantas . . . . .	157

2.1.3.1.	Rigidez de la viga acartelada . . .	159
2.1.3.2.	Momentos de empotramiento de la viga acartelada . . . . .	169
2.1.3.3.	Comportamiento del pórtico . . .	175
2.2.	El enfoque plástico . . . . .	180
2.2.1.	Modelado . . . . .	180
2.2.1.1.	Resistencia o “límite” de sección	181
2.2.1.2.	Barras: resistencias de sección .	183
2.2.1.3.	Barras: modelado de piezas . . .	189
2.2.1.4.	Bloques indeformables . . . . .	192
2.2.1.5.	Resistencia de fábricas . . . . .	201
2.2.2.	Verificación de la estructura completa . .	208
2.2.2.1.	Factores de carga límite . . . . .	209
2.2.2.2.	Soluciones: carga límite . . . . .	212
2.2.2.3.	Dualidad . . . . .	214
2.2.2.4.	Empujes límite . . . . .	217
2.2.3.	Ejemplo de aplicación: arco de bloques in- deformables . . . . .	221
2.2.3.1.	Formulación disponible . . . . .	222
2.2.3.2.	Modelo y soluciones . . . . .	225
<b>3.</b>	<b>Estabilidad elástica</b>	<b>227</b>
3.1.	Conceptos básicos . . . . .	228
3.1.1.	Estabilidad lateral de pórticos articulados	229
3.1.1.1.	Estabilidad lateral . . . . .	229
3.1.1.2.	Arriostramiento diagonal . . . . .	232
3.1.2.	Pandeo de Euler . . . . .	234
3.1.2.1.	Modelo clásico de equilibrio en segundo orden . . . . .	236

3.1.2.2.	Mínima energía potencial . . . . .	238
3.1.3.	Condiciones límite en piezas comprimidas . . . . .	242
3.2.	Imperfecciones, factor de pandeo . . . . .	245
3.2.1.	Ampliación de imperfecciones . . . . .	245
3.2.1.1.	Resistencia lateral y efecto $P, \Delta$ . . . . .	248
3.2.2.	Factor de pandeo. . . . .	251
3.2.2.1.	Geometrías inicial y de equilibrio . . . . .	251
3.2.2.2.	Pérdida de rigidez en soporte comprimido . . . . .	253
3.2.2.3.	Factor de reducción por pandeo . . . . .	255
3.2.2.4.	Interpretaciones . . . . .	260
3.3.	Dimensionado en pandeo . . . . .	261
3.3.1.	Proporcionalidad en pandeo . . . . .	263
3.3.2.	Estimación del efecto de pandeo . . . . .	264
3.4.	Problemas locales de estabilidad elástica . . . . .	266
3.4.1.	En piezas: flexotorsión, pandeo lateral . . . . .	266
3.4.2.	En chapas de piezas: abolladura. . . . .	268
3.5.	Pandeo global de pórticos . . . . .	269
3.5.1.	Desplomes y efecto $P\Delta$ . . . . .	269
3.5.1.1.	Carga lateral equivalente . . . . .	271
3.5.1.2.	Equilibrio horizontal . . . . .	273
3.5.2.	Rigidez material y rigidez geométrica . . . . .	276
3.5.2.1.	Barras articuladas . . . . .	277
3.5.2.2.	Barras en flexión . . . . .	280
3.5.3.	Factor de carga crítica, autovalores . . . . .	284
3.5.3.1.	Rigidez global con cargas axiales . . . . .	285
3.5.3.2.	Factor de carga crítica . . . . .	286
3.5.3.3.	Inestabilidad como problema de autovalores . . . . .	287

3.5.3.4.	Factor de carga crítica como co- ciente de Rayleigh . . . . .	288
3.6.	Algunas conclusiones en estabilidad . . . . .	289
3.6.1.	No linealidad geométrica por grandes des- plazamientos . . . . .	290
3.6.2.	No linealidad geométrica añadiendo gran- des deformaciones . . . . .	292
3.7.	Ejemplos . . . . .	292
3.7.1.	Pórtico de cinco plantas . . . . .	292
3.7.1.1.	Planificación del análisis . . . . .	293
3.7.1.2.	Análisis lineal . . . . .	294
3.7.1.3.	Análisis de la estabilidad . . . . .	297
<b>4.</b>	<b>Proyecto</b> . . . . .	<b>299</b>
4.1.	Teoría de proyecto . . . . .	301
4.1.1.	Definiciones . . . . .	301
4.1.2.	Objetivos del proyecto . . . . .	301
4.1.3.	Premisas: convencionalidad frente a realidad	302
4.1.4.	Algunos medios disponibles para la teoría	305
4.1.4.1.	Optimización . . . . .	305
4.1.4.2.	Precedentes históricos: el análi- sis frente a las reglas de proporción	308
4.1.5.	Método . . . . .	311
4.2.	Estructuras adinteladas . . . . .	314
4.2.1.	Comprobaciones clásicas en estructuras adin- teladas . . . . .	314
4.2.1.1.	Formato clásico . . . . .	315
4.2.1.2.	Formato geométrico . . . . .	317

4.2.1.3.	Reglas de proporción y rangos de comprobación . . . . .	318
4.2.1.4.	Costes unitarios: influencia de los parámetros de proporción . . . . .	322
4.2.2.	Variantes en las comprobaciones clásicas . . . . .	324
4.2.2.1.	El caso del hormigón armado . . . . .	325
4.2.2.2.	El caso del acero laminado . . . . .	330
4.2.3.	Los problemas derivados del peso propio . . . . .	331
4.2.3.1.	Tamaño límite . . . . .	333
4.2.3.2.	La inclusión del efecto del peso propio en las comprobaciones . . . . .	334
4.2.4.	Parámetros básicos de la forma . . . . .	335
4.3.	Cantidad de estructura y eficiencia . . . . .	337
4.3.1.	Cantidad de estructura . . . . .	337
4.3.1.1.	Relación con otras magnitudes . . . . .	343
4.3.1.2.	Componentes de la cantidad de estructura . . . . .	344
4.3.2.	Teoremas de la cantidad de estructura . . . . .	345
4.3.3.	Expresión general para la cantidad de estructura . . . . .	357
4.3.4.	Cantidad de estructura y peso propio . . . . .	360
4.3.5.	Estructura y forma . . . . .	364
4.4.	estructuras de cubierta . . . . .	365
4.4.1.	Problema y geometrías en flexión . . . . .	365
4.4.1.1.	Problema y soluciones tipo . . . . .	365
4.4.1.2.	Costes en vigas . . . . .	368
4.4.1.3.	Costes en arcos . . . . .	372
4.4.1.4.	Costes en cerchas . . . . .	375
4.4.1.5.	Soluciones para contorno circular . . . . .	379

4.4.2. Estructuras equivalentes: soluciones tridi- mensionales . . . . .	382
<b>5. Métodos de discretización</b>	<b>393</b>
5.1. Discretización del continuo . . . . .	395
5.1.1. Ecuaciones de campo en mecánica de sólidos	396
5.1.1.1. Teoría clásica de barras . . . . .	396
5.1.1.2. Teoría de la elasticidad . . . . .	397
5.1.1.3. Placas delgadas en flexión . . . . .	403
5.1.1.4. Condiciones de contorno . . . . .	406
5.1.1.5. Ecuaciones de campo y diferencial	408
5.1.1.6. Forma débil de las ecuaciones de campo . . . . .	409
5.1.2. Técnicas de discretización . . . . .	411
5.1.2.1. Diferencias finitas . . . . .	412
5.1.2.2. Aproximaciones nodales . . . . .	413
5.2. Las ecuaciones base del MEF . . . . .	415
5.2.1. La interpolación por elementos de las ecua- ciones de campo . . . . .	415
5.2.2. Puntos libres y de sustentación: reaccio- nes y coacciones . . . . .	418
5.2.3. Otras formas de coacción . . . . .	420
5.2.4. La discretización del comportamiento del elemento . . . . .	422
5.2.4.1. Ecuaciones en el elemento . . . . .	422
5.2.4.2. Funciones Nodales (de forma) . . . . .	424
5.2.4.3. Cargas y rigidez del elemento . . . . .	425
5.3. Procedimientos numéricos . . . . .	426
5.3.1. Integración numérica . . . . .	426

5.3.1.1.	Integración de funciones polinómicas . . . . .	427
5.3.1.2.	Integración de Gauss . . . . .	428
5.3.2.	Problemas no lineales . . . . .	430
5.3.2.1.	No linealidad material . . . . .	431
5.3.2.2.	No linealidad geométrica . . . . .	433
5.3.2.3.	Métodos de resolución . . . . .	435
5.3.3.	Organización de un programa de ordenador	437
<b>6.</b>	<b>método: elementos finitos</b>	<b>439</b>
6.1.	Bases de uso . . . . .	440
6.1.1.	Fases del análisis . . . . .	440
6.1.1.1.	Modelado, o preproceso . . . . .	442
6.1.1.2.	Análisis, o proceso . . . . .	446
6.1.1.3.	Evaluación, o postproceso . . . . .	450
6.1.2.	Metodología, precisión y control de error .	452
6.1.2.1.	Fuentes de error . . . . .	453
6.1.2.2.	Discretización, funciones empleadas y cómputo de integrales . .	453
6.1.2.3.	Errores numéricos en el cálculo de la solución al sistema de ecuaciones . . . . .	464
6.1.2.4.	Otros errores de modelado . . . . .	466
6.1.3.	Funciones de forma y elemento . . . . .	470
6.1.3.1.	Tipología y expresiones para las funciones de forma . . . . .	471
6.1.3.2.	Propiedades del elemento con funciones isoparamétricas . . . . .	474
6.2.	Problemas axiales . . . . .	478

6.2.1.	Modelo lineal . . . . .	480
6.2.2.	Discretización . . . . .	481
6.2.3.	Modelo superficial . . . . .	484
6.2.4.	Discretización . . . . .	486
6.2.5.	Alternativas de discretización . . . . .	487
6.2.6.	Soluciones y evaluación . . . . .	492
	6.2.6.1. Elementos de barra . . . . .	492
	6.2.6.2. Elementos de membrana . . . . .	496
	6.2.6.3. Resultados comparados . . . . .	505
6.3.	Problemas de flexión . . . . .	510
6.3.1.	Flexión de vigas . . . . .	511
	6.3.1.1. Navier . . . . .	513
	6.3.1.2. Timoshenko . . . . .	516
6.3.2.	Flexión de placas . . . . .	522
	6.3.2.1. Modelado de la flexión de placas . . . . .	523
	6.3.2.2. Kirchoff versus Reissner–Mindlin . . . . .	525
6.3.3.	Láminas . . . . .	534
	6.3.3.1. Condiciones del equilibrio local en láminas . . . . .	536
	6.3.3.2. Parámetros para un modelo de elemento laminar . . . . .	538
	6.3.3.3. Variantes en las formulaciones de elementos de lámina . . . . .	539
6.4.	Convergencia y control . . . . .	541
6.4.1.	Refinamiento, extrapolación y alisado de tensiones . . . . .	541
	6.4.1.1. Extrapolación de Richardson . . . . .	543
	6.4.1.2. Alisado de tensiones . . . . .	544
6.4.2.	Medidas del “error” . . . . .	546

<b>7. Fiabilidad</b>	<b>549</b>
7.1. Fuentes y factores de incertidumbre . . . . .	550
7.1.1. Variables aleatorias. Tipos y distribuciones	555
7.1.1.1. Variables básicas y derivadas . . .	556
7.1.1.2. Variables por su efecto en rela- ción a la condición de fallo . . . .	557
7.1.1.3. Distribuciones . . . . .	557
7.1.1.4. Parámetros o indicadores bási- cos de una distribución . . . . .	564
7.1.1.5. Problemas de dos o más varia- bles aleatorias. . . . .	569
7.2. Modelos de seguridad . . . . .	577
7.2.1. Modelos deterministas y semiprobabilis- tas de seguridad . . . . .	578
7.2.1.1. Modelo semiprobabilista de la se- guridad . . . . .	581
7.2.1.2. Tipos de fallo e índice de fiabilidad	584
7.2.1.3. ¿Que probabilidad de fallo se con- sidera admisible? . . . . .	587
7.2.2. Modelos probabilistas de seguridad . . . .	591
7.3. Métodos para determinarla . . . . .	594
7.3.1. El problema básico de fiabilidad y su ge- neralización . . . . .	595
7.3.2. Coeficientes parciales de seguridad . . . .	599
7.3.2.1. Acciones y resistencias . . . . .	600
7.3.2.2. Condición de fallo . . . . .	602
7.4. Ejemplo: Fiabilidad de pórtico . . . . .	604
7.4.1. Variables básicas . . . . .	604
7.4.2. Variables derivadas . . . . .	607

7.4.3. Probabilidad de fallo . . . . .	609
7.5. Conclusiones . . . . .	611
7.5.1. Variabilidad y fallos . . . . .	611
7.5.2. Valores nominales y coeficientes . . . . .	612
7.5.3. Terminología . . . . .	613
<b>A. Planos de estados límite</b>	<b>615</b>
A.1. Plano por tres puntos . . . . .	615
A.2. Casos de criterios de seguridad . . . . .	617
A.2.1. Coeficiente clásico de seguridad . . . . .	617
A.2.2. Coeficiente robusto de seguridad . . . . .	618
<b>B. Hormigón armado</b>	<b>621</b>
B.1. Introducción y advertencia . . . . .	621
B.2. Rigidez equivalente . . . . .	622
B.2.1. Sección . . . . .	622
B.2.2. Viga . . . . .	627
B.3. Flechas de vigas . . . . .	629
B.3.1. Flecha activa . . . . .	630
B.4. Condiciones de comprobación . . . . .	631
<b>Bibliografía</b>	<b>633</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>639</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>647</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>649</b>

# Presentación

El presente volumen busca servir de apoyo a parte de las presentaciones correspondientes al curso de “Fundamentos de las teorías de estructuras y de su cálculo numérico” del máster universitario en estructuras de edificación (MUEE) impartido en la ETSAM, en su versión actualizada desde el curso 2020-2021, actualización que, tras considerar la experiencia de los cursos precedentes, aportó una apreciable reforma a la trayectoria acumulada desde el arranque del máster, en el curso 2007-2008, bajo la dirección de Ricardo Aroca.

El objetivo del curso es presentar, en un formato que trata de combinar la compacidad con la claridad, los fundamentos de los métodos deterministas y probabilistas del análisis estructural, con especial énfasis en los dos enfoques más habituales del análisis estructural estático determinista: el análisis elástico y el análisis límite, mostrando los paralelismos y diferencias entre ambos, así como las técnicas utilizadas para discretizar un problema que, en general, está definido en el continuo. Dada su relevancia en el marco profesional, se exploran con especial

interés las técnicas empleadas en el método de los elementos finitos (MEF).

El curso contiene una breve introducción a los métodos probabilistas, si bien se centra fundamentalmente en la aproximación determinista.

El texto incluye las bases teóricas y el desarrollo de algunos ejemplos numéricos, así como, ocasionalmente, el enunciado de grupos de cuestiones cuya respuesta debiera resultar evidente para quienes hayan asimilado el contenido de los apartados precedentes.

El curso, y este texto, presuponen una formación previa básica en matemáticas (cálculo diferencial e integral, así como álgebra y cálculo matricial), física (estática y cinemática), resistencia de materiales (flexión de vigas), y elementos de elasticidad (estados de tensión y deformación), que son habituales en los currícula formativos de las titulaciones que tienen acceso al máster.

# Capítulo 1

## Teoría Básica de estructuras

### 1.1. Introducción

#### 1.1.1. Las teorías para el análisis y simulación de fenómenos complejos

Todo objeto o fenómeno complejo manifiesta comportamientos observables (medibles) que, en general, no resultan inmediatos o sencillos de predecir. Ejemplos en el campo de las estructuras podrían ser la probabilidad de rotura de una pieza en una edificación, o la “usabilidad” de una pasarela de diseño novedoso en una garganta sometida a nieves y fuertes vientos. Y aunque,

para muchas cuestiones y durante mucho tiempo, la humanidad ha empleado como método la combinación de emular y modificar objetos preexistentes junto con la prueba y corrección de errores, es decir, el método de prototipado y su ensayo, tanto la curiosidad como la eficiencia en el uso de recursos ha supuesto la creación progresiva de teorías que pretenden facilitar la explicación y la predicción del comportamiento del mundo real a partir de su simulación teórica, reduciendo por ello el número de prototipos necesarios para llegar a un correcto resultado final.

Más aún, desde el momento en que se dispone de teorías que permiten relacionar observaciones sencillas de obtener con comportamientos mucho más complejos, la realización de prototipos con realidad física deja de tener sentido, siendo estos sustituidos por su modelado teórico. Es de este modelado o “prototipado” teórico del que tratamos en este texto.

### **1.1.2. El contenido sistémico de las teorías**

Toda teoría es una construcción mental, abstracta y libre, cuyo objeto es emular el comportamiento observado de elementos o sistemas del mundo real. En tanto teoría, no es ni más ni menos que un sistema autónomo, construido libremente desde las mentes de sus autores, y radicalmente separado y diferente del sistema real que pretende simular.

Entre sistemas que interactúan, se llama *acoplamiento estructural* (Luhmann 1996) al proceso por el que estos configuran su comportamiento de tal modo que los cambios en uno de los sistemas apareja cambios predecibles, o paralelos, en el otro (u otros). Ese acoplamiento o adaptación se produce en su proceso

de interacción a largo plazo. Desde esta perspectiva, una buena teoría no es otra que aquella que ha alcanzado un apreciable grado de acoplamiento estructural con el sistema del mundo real que pretende emular. Y para ello, en su proceso de construcción, se ha buscado poner en relación elementos de la teoría con los elementos observables del sistema real, y se ha ido adaptando progresivamente la relación mutua, de tal modo que la respuesta de ambos sistemas puede ponerse en paralelo, y con ello puede llegar a predecirse la respuesta futura real a una acción dada a partir de la respuesta en su emulación teórica. Pasos de este acoplamiento pueden ser, tanto las alteraciones en la teoría para acercarse mejor a su objetivo de emulación, como las alteraciones en la realidad que tratan de que los objetos producidos se asemejen mejor a sus paralelos teóricos: un caso ejemplar de este segundo paso es el de las cerchas o vigas trianguladas que, en algunos casos a lo largo de la historia se han realizado con articulaciones físicas en sus uniones reales a fin de asegurar un comportamiento real semejante al de su emulación articulada teórica.

Toda teoría contiene elementos directamente relacionados con elementos observables reales, pero contiene asimismo elementos teóricos de carácter más “oscuro”, no directamente observables en la realidad, para los que cabría la tentación de atribuirles una realidad física. Aunque tales elementos sean solo inteligibles desde la propia teoría, pueden tener un valor crucial en la interpretación de esta y por tanto en su capacidad explicativa, tanto si existen o no paralelos reales a dichos elementos. Aquí no nos preocuparemos de estas cuestiones pese a su indudable interés en la física teórica.

Igualmente toda teoría “ignora” elementos del mundo real que considera no relevantes para sus objetivos, pero que, no obstante, podrían ser de importancia en situaciones particulares. Un ejemplo puede ser el del “color” en la teoría de estructuras: no es un elemento de la misma. Pero, sin embargo puede llegar a ser una cuestión relevante para el caso de una estructura localizada en una situación expuesta a una radiación solar intensa.

Es por ello que nunca deben confundirse los dos sistemas: el real y el construido por la teoría, debiendo quedar siempre la duda, o la pregunta, de si estamos representando adecuadamente el problema que se trataba de abordar.

### **1.1.3. Los modelos en las teorías del análisis de estructuras**

Los modelos en teorías de estructuras son, como en cualquier otra teoría, modelos de información. Presentan, en formato analítico (funciones, etc. . . ) o numérico (listas de variables y sus valores), cualidades asociadas a las descripciones geométricas que representan el objeto emulado. Dichos modelos contienen, como elementos cruciales, las siguientes componentes, ordenadas desde las más a las menos fácilmente relacionables con elementos observables reales:

- *Geometría*: define la configuración en el espacio de la estructura identificando la posición de todo punto de la estructura mediante un sistema de *coordenadas* cartesianas.
- *Cinemática*: describe el movimiento que ha realizado la es-

estructura por efecto de la acción de las cargas, dada por los *desplazamientos* o movimientos derivados de las *deformaciones internas*. En esta descripción están incluidas explícita o implícitamente las coacciones a los movimientos en las regiones de sustentación de la estructura.

- *Estática*: describe las distintas *cargas*, y *fuerzas externas* (incluyendo las *reacciones*) que se ejercen sobre la estructura, así como los *esfuerzos internos* con los que la estructura pone en relación y equilibra unas y otros.
- *Relaciones materiales*: las que establecen algún tipo de relación entre las componentes estáticas y las cinemáticas del modelo mediante hipótesis sobre el comportamiento de los materiales de la estructura, como puede ser la ley de Hooke en modelos elásticos.

Para cada tipo estructural se eligen los elementos adecuados a esta representación, que detallaremos con más precisión en apartados sucesivos. Antes de entrar en materia interesa identificar los dos áreas de actividad profesional soportadas sobre esta representación teórica del campo estructural.

#### 1.1.4. Los objetivos profesionales: el análisis y la concepción, el peritaje y el proyecto

En las tareas de ingeniería y arquitectura se abordan habitualmente dos tipos de objetivos: por un lado el de evaluar la idoneidad de un objeto concreto para su uso (en el caso de las estructuras, la fiabilidad o grado de confianza con que se mantendrá su seguridad de uso, su resistencia y estabilidad, etc...)

y por otro lado la definición y propuesta de objetos nuevos suficientemente fiables para su producción. Estamos por tanto hablando de dos áreas de actividad diferentes, aunque ligadas:

- el *análisis*, o el peritaje de un objeto ya concebido o preexistente,
- la concepción, o el *proyecto* de un objeto nuevo, aún inexistente.

Se trata de dos objetivos completamente diferenciados: en el primer caso el objeto existe en alguna medida, y se trata de evaluar su validez o idoneidad, su capacidad para ser usado sin daño, la fiabilidad de su comportamiento futuro. En el segundo caso se trata de proponer (especificar) un objeto nuevo que vaya a resultar suficientemente fiable en su futuro uso.

Es evidente que en el proceso de proyecto pueden estar intercalados episodios de análisis de las diferentes versiones o prototipos del objeto a proponer, a fin de validar su idoneidad, pero el objetivo no es el análisis en sí, sino la propuesta que se derivará de toda la actividad.

En la medida en que el *análisis* es capaz de sustituir la evaluación de prototipos físicos por modelos matemáticos (geométricos y numéricos) buena parte del proceso de *proyecto* emplea el análisis como herramienta auxiliar, pero esto no debe ocultar el objetivo radicalmente diferenciado en ambas actividades. Y ello se pone de manifiesto si consideramos la muy diferente perspectiva desde la que se está empleando el análisis según sea uno u otro el objetivo pretendido. Consideremos por ejemplo esa diferencia según estemos tratando de proponer una estructura nueva para una pasarela, o la evaluación de la idoneidad de la estruc-

tura de una pasarela preexistente: en el primer caso el modelo tratará de representar la estructura prevista, y se buscará que la fiabilidad del resultado supere, o al menos iguale, la requerida socialmente de acuerdo a la normativa de aplicación. En este caso bastaría con que alguno de los modelos aceptables para representar el objeto proyectado aporte la justificación de dicha fiabilidad. Tal vez el modelo emplee simplificaciones que aporten una sobreseguridad añadida, pero esto no será relevante: podría suponer sobrecostes en el proyecto respecto a los resultados que pudiesen ser validados por modelos más sofisticados, pero el objetivo quedaría cubierto: simplificando, bastaría un modelo para justificar la propuesta.

Sin embargo en el segundo caso estamos tratando de justificar la idoneidad de un objeto preexistente. También ahora podemos estar analizando ese objeto mediante el método simplificado, e igualmente en el caso de resultar verificado de acuerdo al mismo podríamos validar ese objeto. Nos habría bastado ese modelo único. Pero si dicho modelo no alcanza la validación pretendida, no por ello se deduce la consecuencia ineludible de que el objeto no sea válido: tal vez ese segundo modelo más sofisticado sí pueda asegurar tal validez: el primer modelo puede dar pistas relevantes sobre la validez del objeto, pero puede no ser suficiente para decretar su invalidez.

Por lo tanto, aunque el *análisis* es parte del flujo de trabajo en ambos tipos de actividad, la forma de interpretar sus informaciones no necesariamente es equivalente. No sólo eso, veremos igualmente más adelante que la forma en que se manejan las distintas variables involucradas en el modelado teórico puede ser muy diferente dependiendo de que el objetivo del trabajo sea de

*análisis* o sea de *proyecto*.

## 1.2. Modelos y ecuaciones fundamentales

### 1.2.1. Parámetros básicos del modelo

Como ya hemos visto en 1.1.3, consideramos los siguientes elementos en un modelo estructural: (figura 1.1, página 9)

- *Geometría*: define la configuración en el espacio de la estructura y, por tanto, identifica la posición de todo punto de la estructura mediante un sistema de *coordenadas* cartesianas, que representamos simbólicamente<sup>1</sup> con  $\mathbf{X} = \vec{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$ . Esta configuración ocupa un *volumen*  $\Omega$ ;  $\mathbf{X} \in \Omega$ , cuyo *contorno* o superficie exterior se representa con  $\Gamma$ , superficie que cabe separar en dos partes,  $\Gamma = \Gamma_l \cup \Gamma_s$ , donde  $\Gamma_l$  recoge la parte *libre*, tal vez cargada, pero no impedida en su movimiento, y  $\Gamma_s$  identifica la parte *sustentada*, situada en contacto con elementos ajenos a la estructura que coarctan o impiden su movimiento (cimentación). Sobre la base de esta geometría se definen además

---

1. Los símbolos en tipografía normal corresponden a variables o funciones univaluadas, de una dimensión, en tanto que los símbolos en negrita se emplean para identificar elementos multidimensionales, ya sean vectores o matrices. Además, los símbolos en mayúsculas se usarán para elementos descritos en coordenadas generales o globales, en tanto que los símbolos en minúsculas se refieren a elementos descritos en coordenadas locales, vistos por tanto desde una perspectiva local.

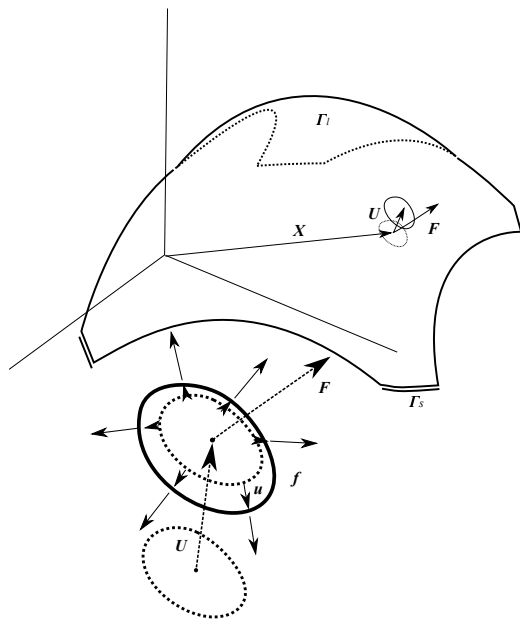


Figura 1.1: Modelos estructurales: geometría, y parámetros globales o locales para la cinemática y la estática. Vista global y ampliación de una vista local.

- *Cinemática*: describe el movimiento que ha realizado la estructura por efecto de la acción de las cargas, y se identifica por los *desplazamientos* o movimientos  $U$  de cada uno de los puntos de interés de la estructura –en el seno

del volumen  $\Omega$ , o de su superficie  $\Gamma^-$ . Estos son potencialmente *libres* (solo coaccionados por el resto de la estructura) en la región  $\Gamma_l$ , pero están *impedidos* o coaccionados en la *sustentación*,  $\Gamma_s$ . Son movimientos que responden a *deformaciones internas*  $\mathbf{u}$ : alargamientos o acortamientos, rotaciones relativas de unas secciones a otras próximas, etc.

- *Estática*: describe por un lado las distintas *fuerzas externas* aplicadas sobre la estructura,  $\mathbf{F}$ , sea como *cargas* en las regiones libres  $\Gamma_l$ :  $\mathbf{F}_l$ , o como *reacciones*  $\mathbf{F}_s$  en las regiones de sustentación  $\Gamma_s$ ; por otro lado considera los *esfuerzos internos*  $\mathbf{f}$  mediante los que la estructura pone en relación y equilibra cargas y reacciones.
- *Relaciones materiales*, también llamadas relaciones de “constitución” de los materiales o relaciones “constitutivas”: las que establecen algún tipo de ligadura entre los valores de las componentes estáticas y las cinemáticas del modelo mediante hipótesis sobre el comportamiento de los materiales de cada región o punto de la estructura. Por ejemplo, en el enfoque elástico estaríamos hablando de las relaciones de esfuerzo–deformación en alguna de las versiones de la ley de Hooke.

En la figura 1.2 se detallan algunos ejemplos de dichos parámetros básicos y sus relaciones para diferentes escalas de observación.

Cabe añadir aquí varias consideraciones de interés.

- Aunque no hemos detallado aún como se deban identificarse las variables cinemáticas  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{u}$  o las estáticas  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{f}$ , en esta

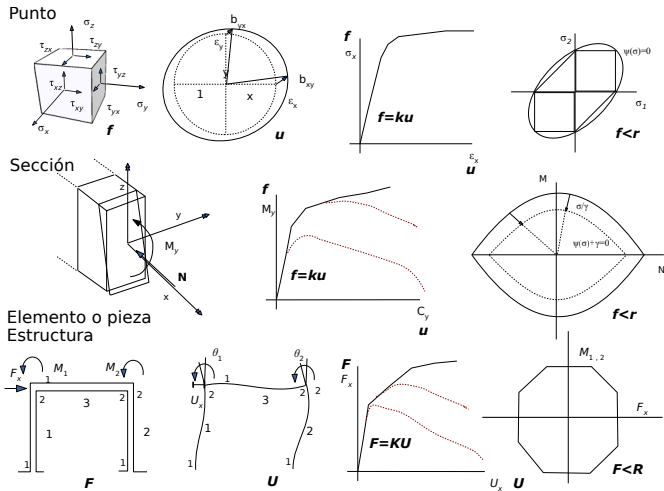


Figura 1.2: Modelos estructurales típicos

notación estamos considerando una descripción *discreta*, es decir, dada por listas de valores, tal vez largas pero finitas, como por ejemplo podrían ser para los  $\mathbf{U}$  los valores de los desplazamientos horizontales y verticales de los  $N$  nudos de una cercha plana:

$$\mathbf{U} = [U_{1x} U_{1y} U_{2x} U_{2y} \dots U_{Nx} U_{Ny}]^T,$$

y los correspondientes “alargamientos” de las  $n$  barras de esta:

$$\mathbf{u} = [u_1 u_2 \dots u_n]^T.$$

El detalle dependerá de como se modele cada tipo estructu-

ral, pero en este detalle resulta crucial lo siguiente:

- El modelado implica una definición en paralelo de las variables estáticas y las cinemáticas, de tal modo que tengan sentido de trabajo los productos escalares  $\mathbf{U}^T \mathbf{F}$  y  $\mathbf{u}^T \mathbf{f}$ , es decir, ordenadas de tal modo que dichas fórmulas expresen respectivamente el *trabajo externo*  $W$  y el *trabajo interno*  $w$  que las *fuerzas* o *esfuerzos*  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{f}$  harían en el *movimiento* y *deformación* descrito por  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{u}$ . O lo que es lo mismo, las variables estáticas y cinemáticas debe ser conjugadas energéticas unas de las otras. Para ello deben hacerse corresponder las variables y su ordenación de forma adecuada, de modo que para la cercha del párrafo precedente tendríamos como “vector” de cargas las aplicadas a los nudos:  $\mathbf{F} = [F_{1x} F_{1y} F_{2x} F_{2y} \dots F_{Nx} F_{Ny}]^T$ , y como “vector” de esfuerzos internos los de tracción de las barras de la cercha,  $\mathbf{f} = [f_1 f_2 \dots f_n]^T$ , usando valores negativos si fuesen compresiones.
- Si pretendemos modelar una distribución continua para las variables cinemáticas o estáticas, estaríamos usando funciones de punto tanto para los movimientos  $\mathbf{v}(\mathbf{X})$  y deformaciones  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{X})$  como para las fuerzas externas, cargas y reacciones,  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{X})$  y los esfuerzos internos  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})$ <sup>2</sup>; en este caso los trabajos se medirían transformando las sumas en integrales, con  $W = \int_{\Gamma} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma$  para el trabajo externo si consideramos que las fuerzas externas se aplican todas ellas a la superficie exterior, y  $w = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$  para el trabajo interno.

---

2. usamos letras griegas para la nomenclatura de tales funciones

- Finalmente, la viabilidad de la estructura exige no superar ciertas condiciones límite, tanto en la componente cinemática como en la estática. Es habitual considerar límites  $\mathbf{Y}$  para los desplazamientos globales  $\mathbf{U}$ , así como restricciones de resistencia  $\mathbf{r}$  para los esfuerzos internos  $\mathbf{f}$ , usando formatos variados para definir tales límites:  $\mathbf{U} < \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{f} < \mathbf{r}$ . En general, las restricciones cinemáticas se plantean sobre los movimientos –globales– en tanto que las estáticas –resistencias– se plantean sobre los esfuerzos –locales– aunque pueden, evidentemente, reescribirse en términos de los demás parámetros: es el caso habitual de reescribir las restricciones de resistencia en términos de carga límite:  $\mathbf{F} \leq \mathbf{R}$ . Veremos algunas de estas condiciones con más detalle más adelante.

Cabe reiterar que la nomenclatura adoptada aplica mayúsculas a las variables externas o globales (cargas, reacciones, desplazamientos de la estructura, o trabajo externo) y minúsculas a las internas o locales (esfuerzos, deformaciones, trabajo interno).

### 1.2.2. Ecuaciones fundamentales

Son las resultantes de establecer las condiciones de correspondencia entre las tres componentes del modelo, si bien las dos primeras pueden establecerse sin necesidad de consideraciones sobre el comportamiento local del material de la estructura, que solo afecta a la tercera.

- *Cinemática*: asegurar la correspondencia entre los desplazamientos  $\mathbf{U}$  y las deformaciones  $\mathbf{u}$  da origen a las *ecuaciones de compatibilidad* (COM) establecidas de modo que las deformaciones de una región puedan obtenerse a partir de las

diferencias entre desplazamientos de puntos próximos. Su formato general es, por tanto, de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (1.1)$$

siendo  $\mathbf{B}$  una matriz de coeficientes que expresa estas “diferencias”. Ver ejemplos en la sección 1.3.7.2.

- *Estática*: asegurar la correspondencia entre las fuerzas  $\mathbf{F}$  y los esfuerzos internos  $\mathbf{f}$  da origen a las *ecuaciones de equilibrio* (EQU), por las que las fuerzas aplicadas sobre una región deben estar en equilibrio con las diferencias de esfuerzo entre las secciones anteriores y posteriores que delimitan dicha región. Se trata, por tanto, de una ecuación en la forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{f} \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{H}$  expresa estas diferencias. Ver ejemplos en la sección 1.3.7.1.

- *Relaciones materiales*: también denominadas relaciones *constitutivas* o de *constitución* de los materiales empleados (MAT), son las que establecen la correspondencia entre los valores de los esfuerzos internos  $\mathbf{f}$  asociados con las deformaciones internas  $\mathbf{u}$  de los puntos o regiones consideradas para el modelo de material adoptado. Una forma general podría ser

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (1.3)$$

aunque es el detalle de esta ecuación y su tratamiento el que va a diferenciar unos modelos de otros. Veremos ejemplos en la sección 1.3.7.3.

Es habitual considerar separadamente las regiones libres de las sustentadas, de tal forma que en las ecuaciones de compatibilidad y de equilibrio pueden identificarse e independizarse las variables de acción o de reacción:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{B}_l \quad \mathbf{B}_s] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_s \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_l \\ \mathbf{H}_s \end{bmatrix} \mathbf{f} \quad (1.5)$$

En general  $\mathbf{F}_l$  y  $\mathbf{U}_s$  son condiciones conocidas, datos, al ser cargas aplicadas en regiones libres y movimientos (impedidos, en general nulos) en la sustentación, mientras que  $\mathbf{F}_s$  y  $\mathbf{U}_l$  son incógnitas: las reacciones en sustentación y los desplazamientos de la estructura. Cada variable en la lista de  $\mathbf{U}_l$  corresponde a lo que se denomina *grado de libertad* pues describe un posible movimiento independiente, de tal forma que el movimiento general es la combinación de todas esas posibilidades, tanto más rico en detalles cuanto mayor sea el número de variables en esa lista.

El número de variables en la lista de  $\mathbf{U}_s$  establece el número de *coacciones* o de condiciones de *sustentación* del modelo.

### 1.2.3. Trabajo y energía

Hemos visto que organizamos las variables estáticas y cinemáticas de forma que sus productos escalares tengan el significado de trabajo, externo o interno, según sean las componentes consideradas. Si consideramos dos estados independientes, de

cinemática  $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{u}}$  el primero y de estática  $\mathbf{F}, \mathbf{f}$  el segundo, tenemos que el trabajo total de las fuerzas del segundo al realizar los movimientos del primero puede medirse, desde las perspectivas externa o interna, con:

$$W = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{F} \quad (1.6)$$

$$w = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} \quad (1.7)$$

donde, en la primera expresión, podemos separar las componentes de cargas y de reacciones con

$$W = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_l^T & \bar{\mathbf{U}}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

En el caso de que  $\mathbf{U}, \mathbf{u}$  y  $\mathbf{F}, \mathbf{f}$  respondan al mismo sistema, podemos considerar ese trabajo total  $W = \mathbf{U}^T \mathbf{F}$  como una medida de la pérdida de *energía potencial* de las cargas desde la posición no deformada de la estructura a su posición deformada, aun cuando la consideración de como se aplica realmente la carga pueda suponer diferencias en el proceso de deformación. Por ejemplo, supongamos que la carga se aplica poco a poco en una estructura de comportamiento elástico lineal, a través de factor de escala  $\gamma$ , variando entre 0 y 1. Siendo la deformación proporcional a la carga, tendremos que la *energía de deformación* elástica acumulada en cada paso del proceso será igual a la pérdida real de energía potencial de la carga ya existente, y considerando la proporcionalidad por la que  $d\mathbf{U} = \mathbf{U}d\gamma$ , dicha energía alcanzaría el valor:

$$W_d = \int_0^{\mathbf{U}} d\mathbf{U}^T \gamma \mathbf{F} = \int_0^1 \mathbf{U}^T \mathbf{F} \gamma d\gamma = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (1.9)$$

o también, visto desde las variables internas en el mismo caso elástico

$$w_d = \int_0^{\mathbf{u}} d\mathbf{u}^T \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (1.10)$$

Se denomina trabajo complementario o *energía complementaria* a la magnitud que, sumada al trabajo de deformación, lleva al trabajo total. Es la integral realizada ahora con las cargas como función independiente. Los diferenciales son ahora

$$dW_c = \mathbf{U}^T(\mathbf{F})d\mathbf{F} \quad (1.11)$$

$$dw_c = \mathbf{u}^T(\mathbf{f})d\mathbf{f} \quad (1.12)$$

El diferencial del trabajo total será la suma de los diferenciales de los trabajos de deformación y complementario. Considerando las expresiones internas, tenemos

$$w = \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (1.13)$$

$$dw = d\mathbf{u}^T \mathbf{f} + \mathbf{u}^T d\mathbf{f} \quad (1.14)$$

$$w = \int_0^{\mathbf{u}} d\mathbf{u}^T \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \int_0^{\mathbf{f}} \mathbf{u}(\mathbf{f})^T d\mathbf{f} \quad (1.15)$$

$$w = w_d + w_c \quad (1.16)$$

Es claro que en sistemas elásticos lineales ambos valores  $w_d$  y  $w_c$  son iguales, siendo cada uno la mitad del total  $w$ , pero esto no será así en sistemas en el que el comportamiento del material no sea lineal.

### 1.2.4. Teoremas del trabajo

Aunque hay una buena cantidad de antecedentes, solo vamos a manejar el principio de los trabajos virtuales (principio, o teorema, dependiendo de cual sea la base teórica elegida como fundamental: es decir, si es un principio del que no se duda y en el que se fundamenta el resto del discurso o si es una deducción obtenida desde principios más elementales). Entre los antecedentes estaría el principio de mínima acción, que lleva a considerar los estados equilibrados como los correspondientes a la mínima energía total, así como los teoremas clásicos, entre los que los teoremas de Castigliano (1873) son tal vez los de más recorrido, con las definiciones:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial w_d}{\partial \mathbf{u}}; \quad \mathbf{u} = \frac{\partial w_c}{\partial \mathbf{f}} \quad (1.17)$$

Estas expresarían,

- 1 si somos capaces de describir el trabajo complementario en función de las variables de deformación interna, cada uno de los esfuerzos puede obtenerse como derivadas parciales de dicho trabajo complementario respecto de dichas variables,
- 2 si somos capaces de describir el trabajo de deformación en función de las variables de esfuerzo interno, cada una de las deformaciones se obtiene de las derivadas parciales de dicho trabajo de deformación respecto de tales esfuerzos.

El *principio de los trabajos virtuales* establece que un sistema equilibrado  $(\tilde{\mathbf{F}}; \tilde{\mathbf{f}})_{EQU}$  está sometido a un movimiento compatible  $(\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\mathbf{u}})_{COM}$  si y solo si el trabajo desarrollado en

dicho movimiento es nulo:

$$-W + w = -\bar{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{f}} = 0; \quad (1.18)$$

$$W = \bar{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{F}} = w = \bar{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{f}}. \quad (1.19)$$

Es decir, salvando cual sea la interpretación de los signos, que se establecen en el sentido de que la energía perdida por las cargas resulte almacenada como energía interna de deformación, el principio postula que el trabajo externo es igual al trabajo interno.

Aquí lo adoptamos como principio, si bien hay demostraciones clásicas como la de Jean Bernoulli en carta a Varignon de 1717: *si un sistema de partículas está en equilibrio, cada partícula lo está, por lo que la fuerza resultante sobre cada una de ellas es nula, y el trabajo realizado al desplazar tales partículas será nulo*. Es clásica también la demostración que se maneja en la teoría clásica de la elasticidad en la que se usa el teorema de Green–Gauss para transformar la integral de volumen del trabajo de deformación interno a la integral de superficie del trabajo de las cargas aplicadas en esta.

Este principio es de máxima utilidad en la formulación de la teoría estructural, como podremos comprobar más adelante.

### 1.2.5. Dualidad estático–cinemática

Si consideramos el cruce de las expresiones del principio del trabajo virtual, 1.19, con las condiciones de COMPatibilidad y

de EQUilibrio expresadas por las ecuaciones 1.1 y 1.2 tenemos

$$\bar{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{f}} \\ \forall (\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{u}})_{\text{COM}}, (\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{f}})_{\text{EQU}} \quad (1.20)$$

de lo que se deduce que, necesariamente,

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}^T \quad (1.21)$$

Esta expresión nos muestra que las versiones de equilibrio o de compatibilidad del comportamiento de un sistema no son más que dos visiones o representaciones alternativas de un mismo fenómeno, un vez que hemos decidido representar ese fenómeno a través de la magnitud escalar que llamamos trabajo. Es esta dualidad la que nos permitirá abordar los problemas del análisis de estructuras desde una u otra de las perspectivas. Y aun cuando la perspectiva del equilibrio es una de las más habituales en la formación, a menudo es la perspectiva de la compatibilidad la más sencilla, en la medida en que involucra magnitudes o fenómenos dibujables, visibles en los objetos físicos, en tanto que fuerzas y esfuerzos resultan habitualmente ser magnitudes interpretadas no tan evidentes de visualizar.

## 1.3. Análisis y proyecto elástico

En esta sección consideraremos la solución a los problemas de *análisis* de *proyecto* en condiciones de comportamiento elástico–lineal, es decir, en los casos en que las leyes del material establecen esfuerzos directamente proporcionales a las deformaciones. Corresponde a los casos en que

- se consideran pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos, de tal modo que, aproximadamente, puede considerarse que el desplazamiento de las cargas en esos movimientos no afecta a las condiciones de equilibrio
- se consideran respuestas del material que siguen estrictamente la ley de Hooke, de modo que los esfuerzos varían en la misma proporción que las deformaciones, y pueden determinarse a partir de estas mediante las constantes elásticas apropiadas.

Esto exige, por tanto, restringir las ecuaciones materiales 1.3 a su forma lineal.

### 1.3.1. Relaciones materiales

Siendo lineal la relación entre esfuerzos internos  $\mathbf{f}$  y deformaciones  $\mathbf{u}$ , puede expresarse en la forma clásica correspondiente a la “ley de Hooke”, para la que la expresión 1.3 adopta la forma lineal

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (1.22)$$

En dicha expresión, los coeficientes de  $\mathbf{k}$  vendrán dados por las características del material y secciones empleadas, en la medida

en que estas aporten la influencia de cada término de  $\mathbf{u}$  a cada término de  $\mathbf{f}$ . En general estaremos considerando como variables para  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$  parámetros de regiones conectadas pero físicamente independientes de la estructura —barras, por ejemplo— de modo que, para la estructura completa,  $\mathbf{k}$  será una matriz de bloques diagonal, con términos no nulos solo en las posiciones que relacionen los parámetros de deformación y esfuerzo de cada una de esas regiones independientes.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{k}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (1.23)$$

En el caso de estructuras trianguladas de barras articuladas, cada término  $f_i$  de  $\mathbf{f}$  sería el esfuerzo axial de la barra  $i$ , y cada término  $u_i$  de  $\mathbf{u}$  sería el alargamiento total de la barra  $i$ , de modo que cada término  $\mathbf{k}_i$  no sería más que el correspondiente coeficiente de rigidez axial de la barra considerada,  $E_i A_i / l_i$ , producto del módulo de elasticidad por el área de dicha barra dividido por su longitud. En la sección 2.1.1 veremos casos de modelado de diferentes tipos de piezas.

### 1.3.2. Resumen de las variables y ecuaciones fundamentales y su solución

Hemos visto que las variables pueden asociarse, bien a los componentes de la estructura considerados aisladamente o localmente (elementos o piezas), con  $\mathbf{u}, \mathbf{f}$  para las variables ci-

nemáticas y estáticas respectivamente, bien al modelo estructural completo, o modelo global, con  $\mathbf{U}, \mathbf{F}$  para tales variables. En nuestro modelo global tenemos como incógnitas los desplazamientos de los puntos “libres”  $\mathbf{U}_l$  y las reacciones —fuerzas—  $\mathbf{F}_s$  de los puntos sustentados. Si por el momento suponemos que los puntos sustentados no se mueven, siendo por tanto el trabajo exterior nulo en esos puntos, podemos prescindir de ellos, identificando  $\mathbf{U}, \mathbf{F}$  con  $\mathbf{U}_l, \mathbf{F}_l$ . Ahora, la lista, o el número de elementos, sea de  $\mathbf{U}$ , o de  $\mathbf{F}$ , identifica los grados de libertad GDL del modelo.

Dicha lista, o ese número de GDL, limitan las diferentes posibilidades de configuración de la geometría deformada, o de las condiciones de equilibrio, en tanto que cada elemento aislado de esta —cada movimiento  $\mathbf{U}_i = [0, 0, \dots, 0, U_i, 0 \dots 0]^T$ — puede considerarse un elemento de la base que describe el espacio (vectorial) de todos los posibles movimientos que el modelo puede representar. Un espacio de GDL dimensiones.

Hemos visto los tres grupos de ecuaciones que relacionan las variables fundamentales del modelo, las locales y las globales para los dos primeros grupos, y las estáticas con las cinemáticas para el tercero, a saber:

- Compatibilidad para las cinemáticas, ecuación 1.1
- Equilibrio para las estáticas, ecuación 1.2
- De constitución material, ecuación 1.3, o su forma lineal, como en 1.22.

Finalmente hemos visto que la formulación energética (el trabajo) vista desde el grupo de variables locales o desde las globales nos permite asegurar la dualidad descrita en la ecuación 1.21.

Con ello tenemos los medios suficientes para el análisis o el proyecto elástico: sólo nos faltaría poder resolver las incógnitas  $\mathbf{U}$  del problema.

Para ello postulamos una relación lineal no singular  $\mathbf{K}$ , aún por determinar, entre desplazamientos  $\mathbf{U}$  y cargas  $\mathbf{F}$ , consideramos conjuntamente las ecuaciones que expresan la dualidad 1.21 junto con las de equilibrio 1.2 y compatibilidad 1.1, y podemos por tanto escribir sucesivamente

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{K}\mathbf{U} & (1.24) \\ \mathbf{F} &= \mathbf{B}^T \mathbf{f} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{B}^T \mathbf{k}\mathbf{u}\end{aligned}$$

por lo que para cualquier movimiento arbitrario  $\bar{\mathbf{U}}$  independiente de  $\mathbf{U}$  debe resultar

$$\bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{F} = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{k}\mathbf{u}$$

Sustituyendo tanto  $\mathbf{F}$  como  $\mathbf{u}$  por sus expresiones en  $\mathbf{U}$  tenemos

$$\bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{k}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (1.25)$$

y como esto tiene que ser válido para cualesquiera condiciones de movimientos  $\bar{\mathbf{U}}$  y  $\mathbf{U}$ , dicha igualdad sólo es posible si, finalmente,

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{k}\mathbf{B} \quad (1.26)$$

$\mathbf{K}$  es la *matriz de rigidez* de la estructura.

Por lo tanto las incógnitas de movimiento  $\mathbf{U}$ , para un modelo con rigideces  $\mathbf{k}$  y geometría conducente a las condiciones de

compatibilidad  $\mathbf{B}$  y equilibrio  $\mathbf{H} = \mathbf{B}^T$ , pueden determinarse con

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (1.27)$$

donde llamamos *matriz de flexibilidad* a la matriz  $\mathbf{K}^{-1}$ , inversa de la de rigidez  $\mathbf{K}$ . Obtenidos los desplazamientos  $\mathbf{U}$ , las deformaciones  $\mathbf{u}$  se determinan por compatibilidad (1.1), los esfuerzos  $\mathbf{f}$  a partir de las condiciones del material para dichas deformaciones (1.22), y las reacciones  $\mathbf{F}_s$  por equilibrio con los esfuerzos de las regiones de sustentación, tal como vemos ahora.

Hay que hacer notar aquí que si considerásemos el total de “nudos” globales, tanto los libres como los sustentados, cabría ordenar la ecuación material global en la forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{ls} \\ \mathbf{K}_{sl} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_s \end{bmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (1.28)$$

En ella los diferentes bloques expresan las relaciones entre cargas (o reacciones) con los movimientos de las regiones libres o de sustentación. Hasta aquí hemos considerado que las sustentaciones no se mueven, con  $\mathbf{U}_s = \mathbf{0}$ , lo que nos ha permitido ignorar las componentes con subíndice  $s$ : hemos resuelto  $\mathbf{U}_l$  a partir de la expresión  $\mathbf{F}_l = \mathbf{K}_{ll}\mathbf{U}_l$ , identificando implícitamente  $\mathbf{K}$  con  $\mathbf{K}_{ll}$  donde la dimensión  $l$  es el número de grados de libertad GDL del modelo. La determinación de los desplazamientos de los nudos libres  $\mathbf{U}_l$  nos permite ahora determinar las reacciones

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{K}_{sl}\mathbf{U}_l + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{U}_s \quad (1.29)$$

donde nuevamente el segundo término se anulará.

Hay que señalar que la matriz  $\mathbf{K}$  completa, incluyendo los términos de la sustentación, NO es invertible puesto que podrían darse, sin deformación: desplazamientos o rotaciones de sólido indeformable que incluirían movimientos en los puntos sustentados y, por tanto, movimientos para situaciones sin carga: la matriz completa sería singular, de determinante nulo: los modelos deben necesariamente incluir condiciones de coacción suficientes al movimiento para que no puedan darse tales movimientos rígidos. Estas coacciones pueden ser, como hemos visto, tales que impidan completamente el movimiento,  $\mathbf{U}_s = \mathbf{0}$ , o pueden establecerse alternativamente mediante lo que podrían llamarse movimientos forzados no nulos  $\mathbf{U}_s \neq \mathbf{0}$ , En este caso esos movimientos son datos del problema, y lo que se hace es reordenar la parte “libre” de la ecuación 1.28 en la forma

$$\mathbf{F}_l - \mathbf{K}_{ls}\mathbf{U}_s = \mathbf{K}_{ll}\mathbf{U}_l \quad (1.30)$$

En términos prácticos, el segundo sumando (negativo) del primer término de la ecuación no es más que el conjunto de fuerzas que sería necesario aplicar localmente a las regiones en contacto con las sustentaciones para que, sin deformación ninguna adicional en el resto de la estructura, puedan acumular la deformación que exigen los desplazamientos forzados previstos  $\mathbf{U}_s$ . De tal modo que se tratan como “cargas equivalentes” sin necesidad de alterar el modelo.

### 1.3.3. El modelo elástico en un vistazo

Con todo lo anterior, el conjunto de consideraciones realizadas hasta aquí puede condensarse en un esquema que permite poner

todas ellas en relación.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{u} & \longleftarrow & \text{COM}(\mathbf{B}) & \longleftarrow & \mathbf{U} \langle (\Phi, \mathbf{P}) \mathbf{\Upsilon} \\
 & \searrow & \updownarrow & \swarrow & \\
 \text{MAT } \mathbf{k} \downarrow & & \text{Internal work} = \text{External work} & & \downarrow \mathbf{K} \text{ GLOB\_MAT} \\
 & \nearrow & \updownarrow & \nwarrow & \\
 \mathbf{r} \rangle (\mathbf{d}, \psi) \mathbf{f} & \longrightarrow & \text{EQU}(\mathbf{H} = \mathbf{B}^T) & \longrightarrow & \mathbf{F}
 \end{array} \tag{1.31}$$

esquema al que se han añadido las posibles restricciones de movimiento global  $\mathbf{\Upsilon}$  así como las restricciones de resistencia local  $\mathbf{r}$  que se emplean para comparar con los movimientos o los esfuerzos mediante expresiones lineales de la forma

$$\Phi \mathbf{U} \leq \mathbf{P} \mathbf{\Upsilon} \tag{1.32}$$

$$\psi \mathbf{f} \leq \mathbf{d} \mathbf{r} \tag{1.33}$$

Las restricciones se establecen para los desplazamientos  $\mathbf{U}$  o los esfuerzos internos  $\mathbf{f}$  seleccionados individualmente o en algunas de sus combinaciones  $(\Phi, \psi)$  y acotados por valores límite prefijados  $(\mathbf{\Upsilon}, \mathbf{r})$ , que se asignan individual o combinadamente a cada comparación (a cada ecuación) mediante coeficientes de atribución  $\mathbf{P}, \mathbf{d}$ .

En el esquema deben interpretarse los símbolos de acuerdo a las equivalencias siguientes:

$$\mathbf{x} \langle (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mathbf{y} \equiv \mathbf{f} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{g} \cdot \mathbf{y}; \tag{s.1}$$

que expresa las restricciones para  $\mathbf{x}$  desde las constantes  $\mathbf{y}$ ,

$$\mathbf{x} \longrightarrow \text{TAG}(\mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{z} \equiv \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \text{TAG}(\mathbf{y}) \downarrow \\ \mathbf{z} \end{array} \equiv \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z}, \text{ (TAG)}; \tag{s.2}$$

que expresa la deducción de  $\mathbf{z}$  a partir de  $\mathbf{x}$  mediante  $\mathbf{y}$ , y donde  $\text{TAG} \in [\text{EQU}, \text{COM}, \text{MAT}]$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{x} & \searrow & \\
 & & z \equiv \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = z; \\
 & \nearrow & \\
 \mathbf{y} & & 
 \end{array} \quad (\text{s.3})$$

donde  $z$  es el producto escalar de los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 \text{COM}(\mathbf{x}) & & \\
 \updownarrow & & \\
 w = W & \equiv & \left\{ \begin{array}{l} \text{COM} \ \& \ w = W \implies \text{EQU} \\ \text{EQU} \ \& \ w = W \implies \text{COM} \\ \text{COM} \ \& \ \text{EQU} \implies w = W \end{array} \right. \\
 \updownarrow & & \\
 \text{EQU}(\mathbf{y}) & & 
 \end{array} \quad (\text{s.4})$$

expresión en la que la validez de dos de las relaciones asegura la validez de la tercera.

### 1.3.4. El análisis elástico

Un problema de análisis no es más que determinar, para una estructura dada  $(\mathbf{k}, \mathbf{B})$ , sometida a unas cargas  $\mathbf{F}_l$  y unas condiciones de sustentación  $\mathbf{U}_s$  conocidas, los desplazamientos de los puntos libres  $\mathbf{U}_l$ , y las deformaciones  $\mathbf{u}$  y esfuerzos  $\mathbf{f}$  de sus elementos, y verificar que cumplen los requisitos establecidos, lo que puede hacerse de acuerdo a la secuencia ya vista en 1.3.2, que revisamos aquí:

- construir  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{k}$ .

- determinar la matriz de rigidez global, ecuación 1.26
- determinar los desplazamientos libres  $\mathbf{U}$  a partir de de las cargas  $\mathbf{F}$  que pueden incluir las equivalentes por movimientos forzados de la sustentación, ecuaciones 1.27 (y tal vez 1.30)
- determinar las deformaciones  $\mathbf{u}$ , ecuación 1.1
- determinar los esfuerzos  $\mathbf{f}$ , ecuación 1.22
- determinar las reacciones  $\mathbf{F}_s$ , ecuación 1.29
- comprobar (verificar) que se cumplen las restricciones de resistencia 1.33 y rigidez 1.32.

El resultado del análisis se usará posteriormente para validar o invalidar la solución.

Cabe añadir que esta secuencia puede resumirse en una “matriz solución”  $\mathbf{S}$  en la forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{S}\mathbf{F} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{k}\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{k}\mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (1.35)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{k}\mathbf{B} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{k}\mathbf{B} \right)^{-1} \quad (1.36)$$

Cabe añadir que, en un problema isostático, o de igual número de incógnitas que de ecuaciones, al ser  $\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{f}$  y por tener solución  $\mathbf{f} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}$ , resulta ser  $\mathbf{S} = \mathbf{H}^{-1}$ .

### 1.3.5. El proyecto elástico

Un problema de proyecto, desde la perspectiva elástica, es el de determinar con el modelo elástico las dimensiones requeridas

para resolver el problema correspondiente a una geometría y unas cargas y condiciones de sustentación ya dadas. Por tanto podría construirse  $\mathbf{B}$  y serían conocidos tanto  $\mathbf{F}_l$  como  $\mathbf{U}_s$ . En muchos casos puede abordarse ahora el problema con el procedimiento siguiente:

- construir  $\mathbf{B}$
- decidir simultáneamente
  - un conjunto de esfuerzos  $\mathbf{f}$  que resuelvan el equilibrio 1.2.
  - una configuración deformada  $\mathbf{U}$  que cumpla las restricciones 1.32, y cuyas deformaciones compatibles  $\mathbf{u}$  (ecuación 1.1) sean coherentes con los anteriores esfuerzos (tengan signos equivalentes).
- determinar las secciones necesarias para que las resistencias  $\mathbf{r}$  y las rigideces  $\mathbf{k}$  queden respectivamente satisfechas y sean concordantes con las condiciones materiales aplicables, ecuaciones 1.22 y 1.33.

El resultado será válido al cumplirse los tres grupos de ecuaciones relevantes así como las restricciones al problema. Un ejemplo puede ser el de la distribución en planta de las acciones de viento en un sistema arriostrado con múltiples planos (y por tanto hiperestático en planta): bastará

- distribuir (casi) arbitrariamente las cargas entre ellos, siempre que su resultante esté en planta en equilibrio con la resultante de la acción
- suponer el mismo desplome para todos los arriostramientos y determinar las deformaciones resultantes en las diagonales.
- determinar las secciones necesarias para que haya acuerdo

entre los esfuerzos resultantes de la distribución de cargas entre los diferentes planos y las deformaciones derivadas del desplome previsto.

### 1.3.6. Supuestos, valores y limitaciones del modelo elástico

La aproximación elástica, formulada con desplazamientos y deformaciones de pequeña magnitud resulta en una formulación lineal, soluble por tanto con recursos reducidos, y en la que es de aplicación el principio de superposición: *la solución a la combinación lineal de varios problemas es la combinación lineal de las soluciones para cada uno de los problemas por separado.*

Entre los supuestos necesarios para su validez cabe señalar

- la geometría deformada no influye en el equilibrio, que no tiene en cuenta ni el posible desplazamiento de las cargas respecto de su posición inicial, ni la influencia de la deformación en la configuración de equilibrio.
- el comportamiento de los materiales se reduce a relaciones lineales, sin capacidad de modelar ni el endurecimiento ni la relajación.

Es importante considerar que las soluciones dependen localmente de

- las condiciones concretas con las que se materializan las restricciones a los movimientos de la sustentación
- la forma concreta de aplicación de las cargas
- la forma en que se materializan los cambios de geometría (nudos, etc. . .)

En relación con ello es de interés considerar el *principio de Saint-Venant* que señala que la solución elástica en regiones alejadas de los puntos singulares –de aplicación de cargas, apoyos, o cambios de geometría– no dependen de la forma de aplicación de las cargas o de la geometría local de estos puntos sino solo de las cargas o reacciones mismas. Estas regiones “alejadas” son aquellas situadas a distancias superiores a algo más de un canto de dichos puntos singulares. Para las regiones cercanas a estos deben sin embargo tenerse en cuenta cuidadosamente la formas de aplicar la carga o los cambios en la geometría –los nudos, por tanto, siempre estarán incluidos en esta reserva–

Por otra parte es un modelo muy sensible a las condiciones iniciales adoptadas para el modelo. Deben considerarse entre estas

- los estados de tensión derivados de la existencia o la eliminación forzada de holguras,
- las cualidades de los materiales en el caso de coexistencia de varios de estos

Es por todo lo anterior una aproximación relativamente limitada en el manejo de condiciones de incertidumbre.

La apariencia de precisión y rigor del modelo numérico no debería por ello hacer que se pierda de vista la parte de imprecisión del modelo asociada a las fuentes de incertidumbre señaladas.

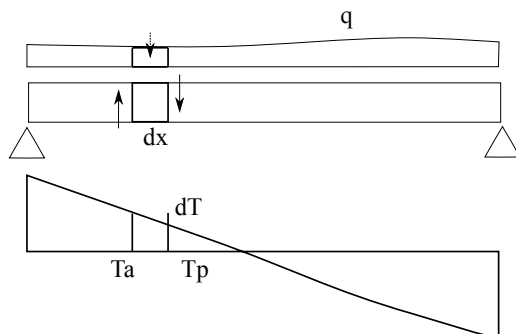


Figura 1.3: Equilibrio de cortantes y cargas en un tramo de viga

## 1.3.7. Ejemplos de aplicación

### 1.3.7.1. Equilibrio

Si entre las ecuaciones de equilibrio en una viga consideramos las de cortante, figura 1.3, tenemos la ecuación diferencial clásica para cualquiera de los tramos de longitud unidad, donde  $q$  es la densidad de carga (carga por unidad de longitud),  $T$  el cortante, y  $x$  la posición en la barra:

$$q = -\frac{\partial T}{\partial x}$$

Esa expresión, para tramos de longitud arbitraria entre cortes  $a$  (anterior) y  $p$  (posterior) es de la forma siguiente, en la que  $F_{ap}$

es toda la carga contenida entre los cortes  $a$  y  $p$ :

$$F_{ap} = \int_a^p q \, dx = -(T_p - T_a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ T_p \end{bmatrix}$$

De este modo, podemos expresar estas condiciones de equilibrio en la forma  $\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ , donde  $\mathbf{F}$  contiene las cargas aplicadas a cada una de las regiones elegidas para el modelo,  $\mathbf{f}$  los esfuerzos correspondientes a los cortes con los que se aíslan dichas regiones, y  $\mathbf{H}$  los coeficientes que permiten expresar el equilibrio de unas y otros en cada una de tales regiones. Se trata de coeficientes que expresan las diferencias entre esfuerzos “antes” de la región con los de “después” de la región, pues efectivamente, dependiendo de si el corte considerado corresponde a la cara “decreciente” o negativa, o a la cara “creciente” o positiva, el mismo esfuerzo (por ejemplo una tracción, o el cortante del ejemplo) resta o suma, al tener efecto direccional opuesto cuando lo referimos a los ejes globales para la región. En el caso de que la región sea “unitaria” tenemos que la ecuación toma la forma  $\mathbf{F}_* = \partial\mathbf{f}$  donde ahora  $\mathbf{F}_*$  (que hemos denotado con  $\boldsymbol{\tau}$  en 1.2.1) expresa la *densidad de carga*, es decir, la carga unitaria considerada, y  $\mathbf{f}$  (que allí denotábamos con  $\boldsymbol{\sigma}$ ) sigue conteniendo los esfuerzos en los cortes, siendo  $\partial$  el operador diferencial con el que escribimos las condiciones de equilibrio.

Para una cercha, como la de la figura 1.4, las ecuaciones de equilibrio de cualquiera de sus nudos expresarán, en los ejes elegidos para ese propósito en el nudo, el equilibrio de la carga  $\mathbf{F}$  sobre el nudo con las proyecciones  $\mathbf{H}$  de los esfuerzos de las barras  $\mathbf{f}$  sobre dichos ejes. Si se trata de un modelo de cerchas

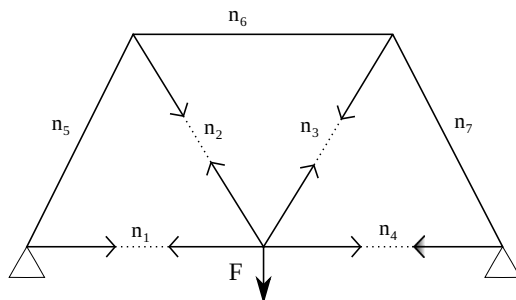


Figura 1.4: Equilibrio de esfuerzos de barras y cargas en un nudo de una cercha

articuladas, cada barra solo tendrá un esfuerzo axial, y cada nudo una carga puntual con tantas componentes como dimensiones tenga el modelo (2D o 3D).

Cabe señalar que los ejes elegidos para las regiones (ejes locales) pueden ser propios de cada región, pero que eso también puede aplicarse para los movimientos globales, que pueden identificarse por direcciones o ejes específicos para cada región, nudo o movimiento considerado en la base de los movimientos  $\mathbf{U}$  a describir: podríamos elegir por ejemplo, en una cercha, ejes propios para cada nudo sin que esto afecte a la descripción hecha: sólo afectaría a como se miden cargas y desplazamientos, y a sus relaciones con los esfuerzos y deformaciones, tal como vienen dadas por las matrices  $\mathbf{H} = \mathbf{B}^T$ .

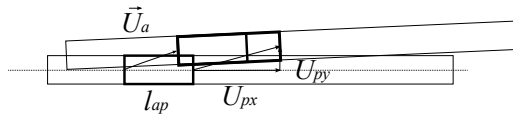


Figura 1.5: Compatibilidad entre desplazamientos y alargamiento longitudinal de una barra.

### 1.3.7.2. Compatibilidad

Para movimientos pequeños, las relaciones son lineales. Si consideramos deformaciones unitarias o densidades de deformación (deformación por unidad de longitud para cada punto de regiones infinitesimales) tal como las reflejadas en la figura 1.5 tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_* &= \partial \mathbf{U} \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{aligned}$$

mientras que si abarcamos las deformaciones acumuladas en regiones finitas tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{B} \mathbf{U} \\ \varepsilon_x &= \frac{U_{px} - U_{ax}}{l_{ap}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}_{ap} \begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{px} \end{bmatrix} \\ u_{ap} &= l_{ap} \varepsilon_x = U_{px} - U_{ax} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{px} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

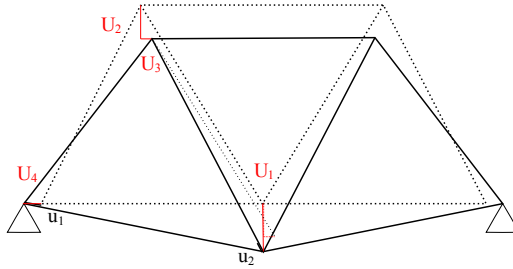


Figura 1.6: Deformaciones de las barras compatibles con los desplazamientos de nudos de una cercha.

Ahora  $\mathbf{B}$  expresa como obtener esas deformaciones  $\mathbf{u}$  de las regiones en las que dividimos la estructura ( $u_{ap}$  en el dibujo, correspondiente a la región entre los cortes  $a$  y  $p$ ) a partir de los movimientos  $\mathbf{U}$  relevantes de dichos cortes, extremos, o *nodos* de referencia globales de la estructura, (en este caso los desplazamientos longitudinales de tales cortes a saber,  $U_{ax}$  y  $U_{px}$ ).

En estructuras de barras articuladas (figura 1.6) los movimientos de los extremos se proyectarán sobre las direcciones relevantes para cada barra, obteniendo las deformaciones como diferencias entre estos. La matriz  $\mathbf{B}$  expresará, para cada fila  $i$  correspondiente a la deformación considera  $u_i$  en cada columna  $j$  el efecto de un desplazamiento unitario para  $U_j$ . Es decir,  $B_{ij}$  sería la deformación  $u_i$  derivada del movimiento<sup>3</sup>  $\mathbf{U}_{j,u} =$

3.  $\mathbf{U}_{j,u}$  señala un vector de desplazamiento para toda la estructura en el que, sin embargo, sólo hay un movimiento unitario ( $u$ ) en el grado de



Figura 1.7: Relaciones de rigidez momento–giro en una barra.

$$[U_1 \ U_2 \ \dots \ U_{j-1} \ U_j \ U_{j+1} \ \dots \ U_n]^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots]$$

### 1.3.7.3. Relaciones materiales (o de constitución del material) elásticas

Si consideramos como parámetros para una barra en flexión las rotaciones de extremo para las deformaciones, y por tanto los momentos de extremo para los esfuerzos, tal como en la figura 1.7, las correspondientes relaciones de rigidez condensadas en la matriz de rigidez serán las conocidas

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

### 1.3.7.4. Masa indeformable sustentada en varias barras articuladas

Se trata del problema de sostener una masa **indeformable**  $m$ , de dimensiones (en proyección bidimensional)  $2a \times a/2$  a una altura  $a$  sobre cuatro soportes biarticulados inclinados, de sección  $A$ , y realizados con material de módulo de elasticidad

---

libertad  $j$ .

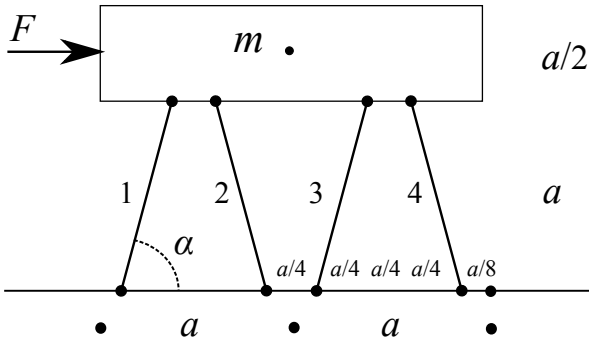


Figura 1.8: Masa sustentada en cuatro pilas articuladas

(módulo de Young)  $E$ . La masa puede estar sometida a fuerzas horizontales  $F$ , además de a la acción gravitatoria o carga vertical usual,

La respuesta elástica sin considerar pandeo exige un modelo global:  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{F}$  y modelos locales  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$  para las piezas deformables elásticamente. La decisión para el modelo es libre.

- Como la masa se considera indeformable, el comportamiento global solo tiene tres posibles movimientos (grados de libertad), y dado que los puntos de unión al suelo no pueden moverse, bastará elegir tres movimientos independientes para representarlo. Elegimos los movimientos que cabe referenciar en torno al centro de gravedad: desplazamientos y rotación  $\mathbf{U} = [U_x \ U_y \ \Theta]^T$ . Podríamos haber elegido tres parámetros diferentes, como por ejemplo el desplazamiento

to horizontal y vertical de la esquina inferior derecha de la masa más el desplazamiento vertical de la esquina inferior izquierda (el horizontal coincidirá para pequeños movimientos, y el resto puede derivarse de estos). Consecuentemente con la elección de  $\mathbf{U}$ , las fuerzas  $\mathbf{F}$  son las acciones aplicadas a la masa referidas a su centro de gravedad, fuerzas y momento  $\mathbf{F} = [F_x \quad F_y \quad M]^T$ , que son las que ejercen trabajo para cada movimiento unitario aislado, es decir, para cada elemento de la base que describe los posibles movimientos de la masa:  $\mathbf{U}_{1,u} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ ,  $\mathbf{U}_{2,u} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ ,  $\mathbf{U}_{3,u} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ .

- Siendo deformables solo los pilares, y dado que los extremos articulados exigen que solo haya fuerzas axiales en ellos, no momentos flectores, el modelo local debe representar solo dichas fuerzas axiales y los alargamientos o acortamientos de las correspondientes barras. Nuevamente podemos elegir libremente los parámetros relevantes, siempre que sean concordantes desde la perspectiva del trabajo: es usual (y así lo haremos aquí) considerar como parámetros de esfuerzo las fuerzas de cada barra, considerando positivas las de tracción:  $\mathbf{f} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4]^T$ . En dicho caso, los parámetros de deformación  $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T$  deben necesariamente ser los alargamientos totales de cada una de las barras (la diferencia entre los desplazamientos longitudinales de ambos extremos), a fin de poder medir el trabajo en la barra con el producto  $\mathbf{u}^T \mathbf{f}$ . Una alternativa de interés sería establecer como parámetros de deformación las deformaciones uni-

tarias de cada una de las barras:  $\mathbf{u} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4]^T$ . En este caso, como el trabajo para una barra  $i$  con una fuerza axial  $f_i$  que se alarga en todas sus secciones  $\varepsilon_i$  es  $w_i = \int_l f_i \varepsilon_i dx = \varepsilon_i f_i l$ , los parámetros apropiados de esfuerzo serían  $\mathbf{f} = [f_1 l_1 \ f_2 l_2 \ f_3 l_3 \ f_4 l_4]^T$ . Es decir, se usarían como parámetros de esfuerzo, no las fuerzas sino el volumen de tensiones de cada barra :  $f_i l_i = \sigma_i A_i l_i = \sigma_i V_i$ . Otra alternativa usada en los inicios del análisis matricial de barras articuladas es considerar como parámetro de esfuerzo el llamado coeficiente de tensión en (Parkes 1974, citado por Pellegrino y Calladine 1985), llamado *densidad de fuerza* en problemas de redes de cables tensados, en los problemas de *form finding*<sup>4</sup>, y definido como el cociente  $f_i/l_i$ . Esta definición permite usar en las matrices de compatibilidad las diferencias entre coordenadas de los nudos en lugar de los cosenos directores de las barras, pero a cambio implicará que en caso de necesitar los parámetros de deformación estos deban ser el producto del alargamiento total por la longitud de la barra.

- decididos los parámetros estáticos y cinemáticos de pieza, las relaciones de rigidez  $\mathbf{k}$  son las que relacionan para cada pieza  $i$  los términos estáticos con los cinemáticos. Aquí solo hay uno de cada por pieza de modo que escribimos

---

4. La alineación entre fuerza y barra hace que la densidad de fuerza coincida con cualquiera de sus proyecciones. Si se adoptan a priori valores para las densidades de fuerza –usualmente en su proyección horizontal– por pretensado, la no linealidad de las ecuaciones de equilibrio para cambios de forma no infinitesimales se transforma en un conjunto de relaciones lineales que permiten determinar rápidamente la forma de equilibrio.

$f_i = E_i A_i u_i / l_i$  siendo por tanto  $\mathbf{k}_i = [E_i A_i / l_i]$  un “bloque” de solo 1x1 filas y columnas. En el caso de haber usado  $\varepsilon_i$  como parámetro de deformación, y  $f_i l_i$  como el correspondiente parámetro de esfuerzo, ahora tendríamos  $f_i l_i = E_i A_i \varepsilon_i l_i$  y deberíamos usar para la rigidez la forma  $\mathbf{k}_i = [E_i A_i l_i] = [E_i V_i]$ . Hay que señalar que esta última aproximación reviste un interés teórico apreciable, en tanto que las tres medidas resultantes, la deformación  $\varepsilon_i$ , el “esfuerzo”  $f_i l_i$  y la rigidez  $E_i V_i$  emplean variables de mucho calado teórico: la deformación unitaria, la *cantidad de estructura* definida en el capítulo 5, y el producto del volumen de la pieza por su módulo de Hooke.

- establecidos los parámetros globales y locales, las relaciones de equilibrio o compatibilidad estarán dadas por las matrices  $\mathbf{H} = \mathbf{B}^T$ . Pueden construirse estas desde la perspectiva de la compatibilidad o la del equilibrio, dependerá del modelo y de preferencias particulares. Dado que los movimientos y deformaciones son dibujables, es usualmente más sencilla la aproximación cinemática (compatibilidad) aunque no sea obligatoria y aunque en muchos casos la formación previa del analista haga que parezca más sencilla la aproximación estática. En la aproximación cinemática, cada columna  $j$  de  $\mathbf{B}$  se obtiene determinando sucesivamente las deformaciones que resultarían para cada desplazamiento global unitario aislado  $\mathbf{U}_j$ . Es decir,  $B_{ij}$  es la deformación  $u_i$  que se produce si solo se da el movimiento unitario  $\mathbf{U}_j$ . Alternativamente, en la aproximación estática (equilibrio), cada fila  $i$  de la matriz  $\mathbf{H}$  expresa la aportación de todos los esfuerzos  $\mathbf{f}$  para el

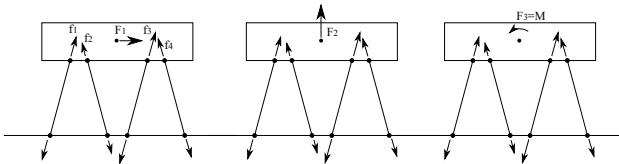


Figura 1.9: Geometrías del equilibrio.

equilibrio de la fuerza global  $F_i$  de modo que cada término  $H_{ij}$  es la componente (proyección) aportada a  $F_i$  por un esfuerzo unitario en  $f_j$ .

Se incluyen a continuación las ecuaciones consideradas y los resultados de la construcción de las matrices de equilibrio y compatibilidad, con referencias a los dibujos usados para ello.

Equilibrio: figura 1.9.

Las ecuaciones para cada grado de libertad (filas de  $\mathbf{H}$ ) son

$$F_1 = f_1 \cos \alpha - f_2 \cos \alpha + f_3 \cos \alpha - f_4 \cos \alpha$$

$$F_2 = f_1 \sin \alpha + f_2 \sin \alpha + f_3 \sin \alpha + f_4 \sin \alpha$$

$$F_3 = M = \cos \alpha (f_1 - f_2 + f_3 - f_4) \frac{a}{4} + \sin \alpha \left( -f_1 \frac{5a}{8} - f_2 \frac{3a}{8} + f_3 \frac{3a}{8} + f_4 \frac{5a}{8} \right)$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha & -c\alpha & c\alpha & -c\alpha \\ s\alpha & s\alpha & s\alpha & s\alpha \\ \frac{a}{4}c\alpha - \frac{5a}{8}s\alpha & -\frac{a}{4}c\alpha - \frac{3a}{8}s\alpha & \frac{a}{4}c\alpha + \frac{3a}{8}s\alpha & -\frac{a}{4}c\alpha + \frac{5a}{8}s\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

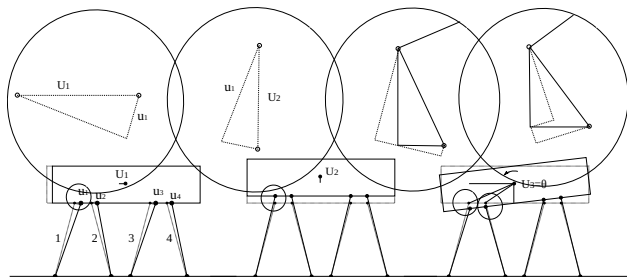


Figura 1.10: Geometrías de la compatibilidad.

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}$$

donde se ha usado  $s\alpha = \sin \alpha$  y  $c\alpha = \cos \alpha$ .

Compatibilidad; figura 1.10

Las deformaciones activadas por la composición de los desplazamiento (suma de los efectos de todos ellos) son

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos \alpha U_1 + \sin \alpha U_2 + \left( -\frac{5a}{8} \sin \alpha + \frac{a}{4} \cos \alpha \right) U_3 \\ u_2 &= -\cos \alpha U_1 + \sin \alpha U_2 + \left( -\frac{3a}{8} \sin \alpha - \frac{a}{4} \cos \alpha \right) U_3 \\ u_3 &= \cos \alpha U_1 + \sin \alpha U_2 + \left( +\frac{3a}{8} \sin \alpha + \frac{a}{4} \cos \alpha \right) U_3 \\ u_4 &= -\cos \alpha U_1 + \sin \alpha U_2 + \left( +\frac{5a}{8} \sin \alpha - \frac{a}{4} \cos \alpha \right) U_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & -\frac{5a}{8}s\alpha + \frac{a}{4}c\alpha \\ -c\alpha & s\alpha & -\frac{3a}{8}s\alpha - \frac{a}{4}c\alpha \\ c\alpha & s\alpha & \frac{3a}{8}s\alpha + \frac{a}{4}c\alpha \\ -c\alpha & s\alpha & \frac{5a}{8}s\alpha - \frac{a}{4}c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$$

Rigidez: El conjunto de las relaciones elásticas puede expresarse como

$$f_i = \frac{E_i A_i}{l_i} u_i$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3 A_3}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_4 A_4}{l_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez global  $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B}$  resultante para esta formulación del problema sería:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 4c^2 & 0 & -ac^2 \left( \frac{s}{2c} - 1 \right) \\ 0 & 4s^2 & 0 \\ -ac^2 \left( \frac{s}{2c} - 1 \right) & 0 & a^2 c^2 \left( \frac{17s^2}{16c^2} - \frac{s}{4c} + \frac{1}{4} \right) \end{bmatrix}$$

donde se usa  $c = \cos \alpha$  y  $s = \sin \alpha$ .

En el caso de haberse empleado una formulación diferente, ahora con deformaciones unitarias para determinar las deformaciones “locales” de barras, y por tanto empleando el volumen

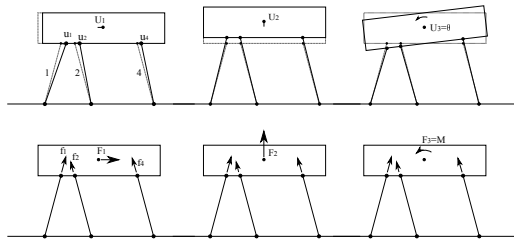


Figura 1.11: Holgura en un pilar, que no llega a entrar en carga

de tensiones para los esfuerzos, las matrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  incluirían la división por las longitudes de las barras

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{c\alpha}{l_1} & \frac{s\alpha}{l_1} & -\frac{1}{l_1} \left( \frac{5a}{8} s\alpha + \frac{a}{4} c\alpha \right) \\ -\frac{c\alpha}{l_2} & \frac{s\alpha}{l_2} & -\frac{1}{l_2} \left( \frac{3a}{8} s\alpha - \frac{a}{4} c\alpha \right) \\ \frac{c\alpha}{l_3} & \frac{s\alpha}{l_3} & \frac{1}{l_3} \left( \frac{3a}{8} s\alpha + \frac{a}{4} c\alpha \right) \\ -\frac{c\alpha}{l_4} & \frac{s\alpha}{l_4} & \frac{1}{l_4} \left( \frac{5a}{8} s\alpha - \frac{a}{4} c\alpha \right) \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez local  $\mathbf{k}$  cambiaría a

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} E_1 A_1 l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 A_2 l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 A_3 l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 A_4 l_4 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  resultaría idéntica, al no haberse modificado la representación global.

Ahora bien si consideramos potenciales fuentes de incertidumbre, deja de ser evidente la unicidad del modelo: por ejemplo, si consideramos la existencia de una holgura en el tercer

pilar, de modo que no llega a iniciar su puesta en carga cuando los otros está ya cargados (figura 1.11), tanto el modelo necesario como los resultados cambian: ahora la rigidez y la compatibilidad solo tendrán en cuenta deformaciones en las piezas que están en carga, de modo que tenemos un sistema diferente, que dará origen a una matriz de rigidez y una solución diferentes:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & -\frac{5a}{8}s\alpha + \frac{a}{4}c\alpha \\ -c\alpha & s\alpha & -\frac{3a}{8}s\alpha - \frac{a}{4}c\alpha \\ -c\alpha & s\alpha & \frac{5a}{8}s\alpha - \frac{a}{4}c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^* = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c\alpha^2 & -c\alpha s\alpha & -a c\alpha \left(-\frac{5s\alpha}{8} + \frac{c\alpha}{4}\right) \\ -c\alpha s\alpha & s\alpha^2 & a s\alpha \left(-\frac{3s\alpha}{8} - \frac{c\alpha}{4}\right) \\ -a c\alpha \left(-\frac{5s\alpha}{8} + \frac{c\alpha}{4}\right) & a s\alpha \left(-\frac{3s\alpha}{8} - \frac{c\alpha}{4}\right) & a^2 \left(\frac{5s\alpha}{8} - \frac{c\alpha}{4}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Cabe añadir que en este caso particular, al tratarse de una condición isostática, podría obtenerse la matriz solución simplemente invirtiendo la matriz  $\mathbf{H}$ .

Queda para el lector el ejercicio de determinar numéricamente e interpretar resultados para condiciones varias en las relaciones de rigidez de pilar interior a exterior, o de cargas aplicadas, de entre los que las figuras siguientes son una muestra para solo carga horizontal e igual rigidez en todos los pilares, con o sin

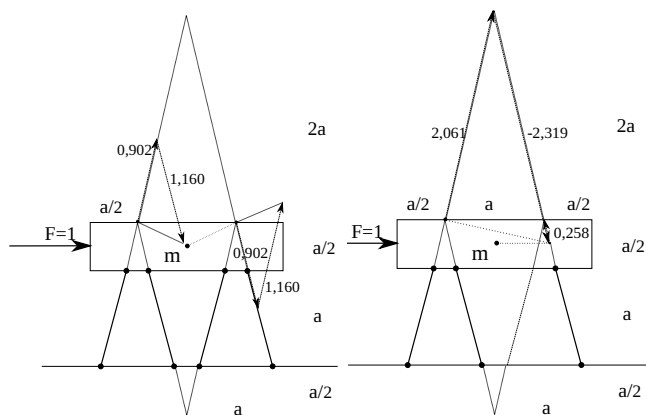


Figura 1.12: Respuesta elástica para carga horizontal, pilares iguales y condiciones iniciales sin holguras o con holgura en el tercer pilar.

holguras en el tercero. Las prolongaciones de las líneas de pilares marcan los puntos de paso de las resultantes de combinaciones de cada pareja de esfuerzos en estos, que se dibujan en algunos casos como suma de vectores a partir de dichos puntos.

## 1.4. Análisis y proyecto plástico

El análisis plástico, o análisis límite, se basa en la hipótesis de ductilidad suficiente de la estructura, es decir, en el supuesto de que, una vez alcanzada la deformación correspondiente al límite de resistencia en alguna sección, dicha sección continúa deformándose sin pérdida (ni ganancia) de resistencia. En los diagramas carga-resistencia de los considerados en la figura 1.2 tal supuesto correspondería a tener ramas horizontales en las regiones en las que se alcanza ese límite de resistencia. En una versión más general del modelo, la resistencia evoluciona en el proceso de plastificación creciendo o decreciendo levemente en un proceso rígido por un parámetro de endurecimiento que permite considerar ramas inclinadas en dichos diagramas. Aquí nos ceñiremos de todos modos al modelo plástico sin endurecimiento.

Dicha hipótesis permite, como vamos a ver a continuación, un abordaje muy diferente al de los problemas estáticos. En esta nueva aproximación, se considera el incremento progresivo de la carga, que por redistribución en los esfuerzos va generando sucesivas regiones en régimen plástico, hasta que la estructura se transforma en un mecanismo y colapsa. El modelo se basa en el análisis del mecanismo de colapso, de su cinemática y del equilibrio entre los esfuerzos de plastificación con la carga que lo provoca.

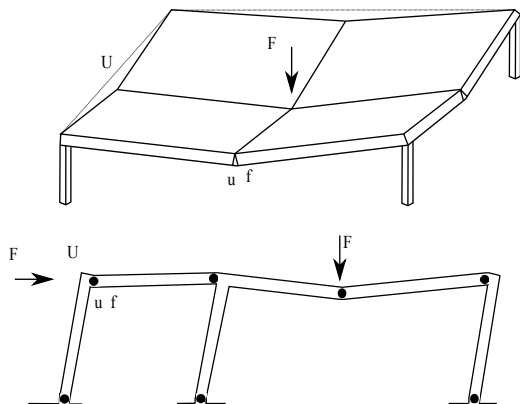


Figura 1.13: Modos de colapso

### 1.4.1. Modos de colapso: cinemática y equilibrio

Para abordar un análisis límite deben considerarse las características de las geometrías y resistencias movilizadas en las condiciones de colapso. En la figura 1.13 se ejemplifican un par de modos típicos, que corresponden a las roturas de placas o de barras flectadas. En el caso de las barras en flexión o flexo-compresión, el modelo adoptado es el de formación de rótulas plásticas en las secciones de máximo momento —que a menudo se sitúan en los extremos de las barras, en su unión a los nudos—. En el caso de las placas, la hipótesis más habitual es la de la formación de líneas de rotura rectas que separan tramos (casi)

planos de la placa, y en las que se han alcanzado los límites de resistencia a momento flector.

En ambos casos lo que resulta ser fundamental es:

- la deformación se concentra en el elemento que plastifica, línea o rótula,
- dicho elemento mantiene la resistencia límite en todo el (inicio del) proceso de colapso.

De tal modo que consideramos en el modelado las regiones relevantes, susceptibles (o no) de romper en los posibles movimientos de colapso estructural, y sus cinemáticas y esfuerzos, y tenemos que

- al igual que en el modelo elástico, podemos establecer un conjunto de parámetros de desplazamiento global  $\mathbf{U}$  y de deformación de colapso posible  $\mathbf{u}$  asociados a un conjunto de parámetros de carga externa  $\mathbf{F}$  y de esfuerzos internos  $\mathbf{f}$  que pueden cada una de ellos haber llegado al límite de rotura o no, pero que deberán, en la situación de colapso, cumplir las ecuaciones de compatibilidad cinemática para ese movimiento de colapso, ecuación 1.1, y las del equilibrio alcanzado hasta ese mismo instante del inicio del colapso, ecuación 1.2.
- pero a diferencia del modelo elástico, ahora las relaciones materiales consisten en establecer si se ha llegado o no al límite de resistencia, de tal modo que las regiones en el límite de resistencia tendrán deformaciones  $\mathbf{u}$  no nulas, mientras que, como explicamos en el apartado 1.4.5, se asumirán deformaciones nulas para las regiones que no hayan llegado a dicho límite de resistencia

El núcleo, por tanto, del modelado apropiado al método estará en la definición de las condiciones que expresan el límite de resistencia, junto con la diferente interpretación del significado de los parámetros cinemáticos: aun pudiendo usarse los mismos que para el modelo elástico, ahora se tratará de deformaciones concentradas en las regiones que plastifican, ligadas al movimiento de colapso.

De este modo, en estructuras de barras los modelos se asociarán a las formas de rotura consideradas:

- si se trata de rotura por momento, estaremos hablando de “rótulas” (líneas de rotura en placas) en los puntos de interés (extremos de barras en su unión al nudo, en el centro, o bajo las cargas en vigas, etc...) y de la rotación en la rótula asociada al momento plástico de la sección considerada.
- si se trata de rotura por esfuerzo axial sin flexión estaremos considerando el alargamiento de fluencia en alguna de las secciones de la barra (ahora resultaría indiferente cual sea esa y nos basta un parámetro de esfuerzo y otro para la deformación, como si se tratase de un amortiguador telescópico en la barra que solo se activa al llegar a la plastificación)
- es habitual construir modelos más sofisticados, que veremos en 1.4.2, para condiciones de rotura en situaciones de posibles esfuerzos combinados.

Aunque las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio son idénticas a las consideradas en el caso elástico, hay que repetir que corresponden a la condición de rotura. En general tendremos una estructura con sus posibles dimensiones, y unas cargas iniciales  $\mathbf{F}_I$  pero desconocemos las cargas necesarias para rom-

per la estructura, por lo que consideraremos que las *cargas de rotura*  $\mathbf{F}$  son las cargas iniciales  $\mathbf{F}_I$  afectadas por el factor de carga  $\gamma$  necesario para llevarlas hasta las de rotura. La ecuación de equilibrio en el límite de rotura, por tanto, adopta la forma

$$\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I = \mathbf{H} \mathbf{f}. \quad (1.37)$$

Por otro lado, la situación de rotura hace que la “cinemática” sea realmente la de un movimiento continuado, en el que los desplazamientos  $\mathbf{U}$  estarán asociados a las deformaciones plásticas  $\mathbf{u}$ , cambiantes con el tiempo aunque manteniendo la proporción. Estaremos realmente hablando de velocidades de desplazamiento o de deformación  $\dot{\mathbf{U}}$  y  $\dot{\mathbf{u}}$ , es decir, de los desplazamientos o deformaciones acumulados en un plazo dado de tiempo, si bien es indiferente este plazo al ser geometrías proporcionales las de plazos diferentes. Podemos hablar, pues, tanto de desplazamientos y deformaciones plásticas, como de “velocidades” de desplazamiento o de deformación, y aunque esta última forma resulta más rigurosa, no debiera resultar confusa ninguna de las dos formas:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{U}}. \quad (1.38)$$

### 1.4.2. Relaciones materiales: condiciones de resistencia.

Las condiciones materiales en análisis límite se definen estableciendo la capacidad resistente que acota los límites que pueden alcanzar, aislada o combinadamente, los esfuerzos internos definidos en el modelo,  $\mathbf{f}$ . Los parámetros de  $\mathbf{f}$  pueden

interaccionar o no en las situaciones de rotura: por ejemplo, si se refieren a esfuerzos en secciones independientes resulta obvio que los valores de esfuerzo de una sección no influyen en si en otra se han alcanzado los límites de capacidad, pero en los casos en que los parámetros se refieren a componentes del esfuerzo de una misma sección, momento y normal, por ejemplo, la rotura depende de la interacción entre ambos. De cara a la solución del problema que veremos más adelante resulta útil definir estos *diagramas de interacción* para las capacidades resistentes mediante relaciones lineales, de modo que en general estableceremos los términos de comparación mediante combinaciones lineales de los esfuerzos  $\psi \mathbf{f}$  que se compararán con los límites de resistencia correspondientes  $\mathbf{r}$ , de modo que las expresiones de si se alcanza o no el límite de resistencia tendrán la forma

$$\psi \mathbf{f} \leq \mathbf{r} \quad (1.39)$$

donde cada una de las ecuaciones de esta lista corresponde a cada una de las condiciones límite que hayan podido establecerse para los esfuerzos o sus combinaciones.

A menudo sucede que, aunque cada pieza  $p$  tiene unos parámetros de resistencia propios  $\mathbf{r}_p$ , la racionalización constructiva hace que se seleccionen los mismos perfiles para piezas diferentes, de modo que el catálogo de capacidades límite se repite. En este caso es mejor considerar que usamos una lista de capacidades límite de referencia  $\mathbf{r}$  y que su atribución a cada una de las ecuaciones del sistema anterior se realiza mediante su asignación a través de una expresión  $\mathbf{dr}$  que sencillamente atribuye a cada ecuación la capacidad resistente relevante a los criterios de diseño aplicados: por ejemplo en un pórtico con todas las vigas

iguales y todos los pilares iguales tendríamos en  $\mathbf{r}$  las referencias de capacidad resistente de la viga tipo y del pilar tipo, y  $\mathbf{d}$  no sería más que una matriz de ceros y unos que aplicaría a cada ecuación la resistencia de viga o de pilar, según el caso. De este modo la condición de resistencia se expresará en general como

$$\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} \leq \mathbf{d} \mathbf{r} \quad (1.40)$$

Es muy corriente considerar separadamente los límites a los esfuerzos de secciones diferentes en expresiones  $\boldsymbol{\psi}_i \mathbf{f}_i \leq \mathbf{d}_i \mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{r}$  contiene todas las cualidades resistentes disponibles,  $\mathbf{d}_i$  la selección para la correspondiente sección  $i$  y donde los esfuerzos  $\mathbf{f}_i$  de estas se combinan con  $\boldsymbol{\psi}_i$  en las ecuaciones adecuadas a tales secciones. En ese caso, las restricciones para toda la estructura son, dada la independencia en las comprobaciones de sección, sencillamente las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\psi}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\psi}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \end{bmatrix} \mathbf{r} \quad (1.41)$$

En cualquier caso, podemos usar indistintamente cualquiera de las ecuaciones 1.39 o 1.40, de las que presentamos ejemplos en 1.4.13.2.

La ecuación 1.40 no es más que un conjunto de límites a no alcanzar si se desea evitar el colapso: la  $i$ ésima expresión o condición sería la expresión  $\boldsymbol{\psi}_i \mathbf{f} \leq \mathbf{d}_i \mathbf{r} \equiv \sum_j \psi_{ij} f_j \leq \sum_k d_{ik} r_k$ , o en la notación de Einstein, de suma implícita si se repiten los

índices:  $\psi_{ij}f_j \leq d_{ik}r_k$ . Cada una de dichas expresiones representa un (hiper)plano en el espacio de los esfuerzos  $\mathbf{f}$ , definido por los coeficientes  $\boldsymbol{\psi}_i$  y el límite que no puede superarse  $\mathbf{d}_i\mathbf{r}$ . La expresión sigue siendo válida si se multiplican ambos términos por el mismo factor, y puede, por tanto, ponerse en “forma canónica” si dividimos ambos términos por el módulo de dichos coeficientes  $\|\boldsymbol{\psi}_i\| = \sqrt{\sum_j \psi_{ij}^2}$  es decir, si usamos cada “fila”  $i$  en la forma

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{\psi}_i\|} \boldsymbol{\psi}_i \mathbf{f} \leq \frac{1}{\|\boldsymbol{\psi}_i\|} \mathbf{d}_i \mathbf{r} \quad (1.42)$$

En este caso, los coeficientes pasan a ser el *versor* del plano, es decir, un vector unitario perpendicular a ese plano; el producto del primer término es, por tanto el producto escalar del estado de esfuerzos por dicho versor, por tanto la proyección del esfuerzo sobre la perpendicular al plano; y el término de la derecha pasa a ser la distancia del plano al origen (el punto de esfuerzo nulo); de tal modo que el límite se alcanza si la proyección del esfuerzo sobre la perpendicular al plano es igual a la distancia de este al origen, y no se alcanza si dicha proyección es menor. Esto será válido para todas y cada una de las expresiones que, por tanto, envuelven el espacio o conjunto de esfuerzos admisibles por un hiperpoliedro convexo cuyas caras coinciden con cada uno de los planos límite. Dicha superficie es la *superficie límite* o superficie de rotura. En dicho hiperpoliedro, los puntos de las caras representarán posibles esfuerzos de un modo de colapso regido por una sola condición, mientras que las aristas representarán formas de colapso en los que se alcanzan simultáneamente los límites de dos de tales condiciones, etc. . .

En el primer caso el modo de colapso es idéntico para todos los puntos del plano, y su cinemática está descrita por el versor del plano, común a todos. Para el segundo, la rotura combinará de algún modo la geometría del colapso correspondiente a los diferentes planos concernidos.

### 1.4.3. Condición de colapso

Cualquiera de las expresiones contenidas en 1.40 expresa un *modo de colapso* diferente, que no se alcanza si se cumple estrictamente la desigualdad, pero que se alcanza si se cumple la igualdad. Es decir,

- Si  $\psi_{ij}f_j < d_{ik}r_k \equiv \psi_{ij}f_j - d_{ik}r_k < 0$  hay *holgura*, o margen de resistencia, y no se alcanza la plastificación; por tanto no hay deformación para ese modo.
- Si  $\psi_{ij}f_j = d_{ik}r_k \equiv \psi_{ij}f_j - d_{ik}r_k = 0$  no hay holgura, se ha alcanzado la plastificación, y pueden producirse deformaciones plásticas asociadas al proceso de colapso correspondiente a ese modo.

De esta forma podemos concebir un *multiplicador*  $\lambda_i$  para cada condición o comprobación, positivo o nulo, dependiendo de que se haya alcanzado, o no, el colapso. Es decir, el multiplicador será un indicador de si el correspondiente modo está activo en el colapso o no. Veremos que podemos interpretar este multiplicador como una medida de la velocidad de plastificación de ese modo.

En todo caso tendremos que el producto  $(\psi_{ij}f_j - d_{ik}r_k)\lambda_i$  es siempre nulo: si hay plastificación por ser nula la holgura, si no

la hay, por ser nulo el multiplicador. Por tanto, una expresión clave del modelo de colapso es ahora

$$(\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{d}\mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (1.43)$$

#### 1.4.4. Trabajo y energía

Si consideramos ahora el proceso de colapso en términos de energías, tenemos que las medidas de trabajo realizado por unidad de tiempo son

$$W = \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F} \quad (1.44)$$

$$w = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} \quad (1.45)$$

donde  $W$  es la pérdida de energía de las cargas en el colapso (energía “externa”) y  $w$  es la energía disipada en el flujo plástico de las secciones en el límite de resistencia y que, por tanto, están plastificando (energía “interna”)

Para caracterizar la condición de rotura usaremos la *regla de flujo* de Von Mises que establece que *los esfuerzos plásticos en el colapso son los que maximizan la energía disipada en la deformación.*

Vamos a considerar esa condición en un proceso de colapso en el que esté definido el modo y su cinemática por los valores de  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{U}$ . En dos instantes sucesivos del proceso de colapso los esfuerzos pueden estar variando, llevando  $\mathbf{f}$  hasta  $\mathbf{f} + \partial\mathbf{f}$ .

Ahora bien, si la energía disipada por unidad de tiempo es la máxima posible, las variaciones en ese entorno de comporta-

miento deben ser nulas, o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{f}} \partial \mathbf{f} = \mathbf{u}^T \partial \mathbf{f} = 0. \quad (1.46)$$

Además de esto, al tratarse de un proceso de colapso, los esfuerzos se mantendrán en alguna región de la superficie límite (en el límite de resistencia) y por lo tanto las diferencias entre esfuerzos entre dos instantes sucesivos  $\partial \mathbf{f}$  deben ser tangentes al plano activo,  $a$ , correspondiente y por tanto ortogonales al versor que corresponde a dicho plano activo, representado por la fila de coeficientes  $\psi_a$  de la expresión límite correspondiente.

Tenemos, pues que

$$\psi_a \partial \mathbf{f} = 0 \quad (1.47)$$

Si comparamos las expresiones 1.46 y 1.47 vemos que  $\mathbf{u}$  y  $\psi_a^T$  deben ser proporcionales, es decir, el versor del plano de rotura activo es paralelo al vector que representa la velocidad de deformación en el proceso de colapso, o lo que es igual, el vector de deformación es ortogonal al plano que representa la condición límite alcanzada.

Podemos por ello expresar una relación entre las velocidades de deformación en rotura y las condiciones de resistencia usando los multiplicadores plásticos definidos en el apartado anterior:

$$\mathbf{u} = \psi^T \boldsymbol{\lambda} \quad (1.48)$$

Efectivamente si solo hay un plano activo, el correspondiente multiplicador  $\lambda_a$  es el único no nulo, y selecciona por tanto la

columna de  $\psi^T$  o la fila de  $\psi$  correspondiente a los coeficientes que determinan dicho plano. Si hay varios planos activos, corresponde a un encuentro o vértice entre planos. El vector que expresa la deformación puede estar contenido en el ángulo o cono formado entre los versores de los planos concernidos, lo que se representa adecuadamente si se usan valores de  $\lambda$  positivos para los correspondientes planos: la expresión aportará una combinación lineal de sus versores contenida por tanto en dicho cono.

Se trata de *plasticidad asociada*: el gradiente de la función de *disipación* de energía plástica coincide con (está asociada a) la función de rotura o superficie límite:

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{f}} = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\psi} \quad (1.49)$$

Una condición de plasticidad *no asociada* será aquella en la que la función de potencial de disipación y la función de rotura no estén relacionadas, y es habitual en problemas de rozamiento, como en suelos:

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{f}} = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\phi}; \quad \boldsymbol{\phi} \neq \boldsymbol{\psi}. \quad (1.50)$$

### 1.4.5. Teoremas fundamentales del análisis límite en plasticidad asociada

**En el colapso solo varía la deformación plástica**

Establecemos como herramienta auxiliar un teorema que permite validar el modelo rígido-plástico para el análisis, en

presencia de ductilidad suficiente y, por tanto, en tanto no se reduce la resistencia en el proceso de deformación plástica.

En el proceso de deformación los parámetros que expresan la velocidad de deformación  $\dot{\mathbf{u}}$  pueden considerarse compuestos por la suma de las partes elástica  $\dot{\mathbf{u}}_e$  y plástica  $\dot{\mathbf{u}}_p$ . Si consideramos dos instantes sucesivos del proceso de colapso y las variaciones en los esfuerzos y cargas entre ambos, con  $\dot{\mathbf{F}} = \partial \mathbf{F}$ ,  $\dot{\mathbf{f}} = \partial \mathbf{f}$  tendremos que las variaciones de energía serán

$$\dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{f}} = 0 \quad (1.51)$$

pero como las cargas no varían,  $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$ .

Descomponiendo las deformaciones entre las componentes elástica y plástica tendremos

$$(\dot{\mathbf{u}}_e + \dot{\mathbf{u}}_p)^T \dot{\mathbf{f}} = 0 \quad (1.52)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_e^T \dot{\mathbf{f}} + \dot{\mathbf{u}}_p^T \dot{\mathbf{f}} = 0 \quad (1.53)$$

Pero al ser plasticidad asociada, el segundo sumando debe ser nulo, lo que implica que el primero también lo es. Dado que las tensiones podrían estar variando —en el marco de la “superficie límite”— esto implica que las deformaciones elásticas no pueden variar.

Por tanto, en el colapso solo varía la deformación plástica y, por tanto, las deformaciones elásticas que pudieran preexistir no son relevantes en el análisis.

### **Teorema del límite inferior, o teorema estático**

Si en una estructura, y para un sistema de cargas dadas, que denominaremos  $\mathbf{F}_{\text{equ}}$ ,

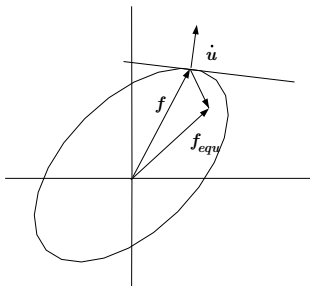


Figura 1.14: Teorema estático. Se representa el límite de resistencias locales  $\mathbf{f}$  y uno de los casos imaginables para la carga de rotura, así como el caso de esfuerzos en equilibrio con las cargas  $\mathbf{f}_{\text{equ}}$ .

- puede establecerse un sistema de esfuerzos  $\mathbf{f}_{\text{equ}}$  en equilibrio con las cargas, y
- para dichos esfuerzos no se alcanza la condición de rotura, o plastificación completa

puede asegurarse que la estructura no colapsa bajo dichas cargas, o lo que es lo mismo, las cargas  $\mathbf{F}_{\text{equ}}$  son un límite inferior a las cargas de rotura  $\mathbf{F}$  de dicha estructura.

La demostración es por reducción al absurdo: suponemos que el teorema es incorrecto y comprobamos que de dicha suposición se deduce una conclusión manifiestamente errónea.

Supondremos, por tanto, que sí hay un colapso bajo las cargas  $\mathbf{F}_{\text{equ}}$ , colapso descrito por una cinemática compatible dada

por  $[\mathbf{u}, \mathbf{U}]$  para la que los esfuerzos asociados  $\mathbf{f}$  solo serían capaces de equilibrar una carga menor,  $\gamma \mathbf{F}_{\text{equ}}$ , con  $\gamma < 1$ .

Tenemos ahora una cinemática compatible  $[\mathbf{u}, \mathbf{U}]$  y dos posibles estados equilibrados  $[\mathbf{f}, \gamma \mathbf{F}_{\text{equ}}]$  y  $[\mathbf{f}_{\text{equ}}, \mathbf{F}_{\text{equ}}]$  para los que, por el principio de los trabajos virtuales podemos escribir

$$\mathbf{u}^T \mathbf{f} = \gamma \mathbf{U}^T \mathbf{F}_{\text{equ}} \quad (1.54)$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{equ}} = \mathbf{U}^T \mathbf{F}_{\text{equ}} \quad (1.55)$$

por lo que

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{f} - \gamma \mathbf{f}_{\text{equ}}) = 0 \quad (1.56)$$

Pero, dado que el vector  $(\mathbf{f} - \gamma \mathbf{f}_{\text{equ}})$  tiene que estar orientado hacia el interior de la superficie límite, ver figura 1.14, no es tangente a esta y, por tanto, no puede ser ortogonal al vector  $\mathbf{u}^T$  correspondiente al colapso. Esto implica que la conclusión es incorrecta y, por tanto, el supuesto es incorrecto.

En conclusión

$$\mathbf{F}_{\text{equ}} \leq \mathbf{F} \quad (1.57)$$

Como corolarios, podemos señalar

- Bastará establecer un conjunto de esfuerzos en equilibrio con las cargas, y asegurar resistencia para dichos esfuerzos para asegurar que las cargas no superan las cargas de rotura de la estructura, siempre que haya ductilidad suficiente.
- Las soluciones basadas en el análisis elástico son seguras, pese a las incertidumbres relativas al desconocimiento de las imperfecciones en la geometría o en los estados iniciales de autotensión.

El teorema se califica en muchos textos como *teorema de la seguridad*.

### **Teorema del límite superior, o cinemático**

Si en una estructura,

- para un sistema de colapso compatible  $[\mathbf{u}_{\text{com}}, \mathbf{U}_{\text{com}}]$  elegido arbitrariamente
- se determinan cargas, que denotaremos con  $\mathbf{F}_{\text{com}}$ , que pierden en ese colapso tanta energía potencial como la disipada en la deformación plástica,

puede entonces afirmarse que la estructura colapsará bajo dichas cargas, o lo que es lo mismo, que las cargas  $\mathbf{F}_{\text{com}}$  son un límite superior a la carga de rotura de la estructura,  $\mathbf{F}$ .

Se demuestra igualmente por reducción al absurdo.

Si suponemos que no hay colapso, existiría un estado de esfuerzos internos  $\mathbf{f}_s$  diferentes de los asociados a la cinemática de colapso. Podemos denotar a estos últimos con  $\mathbf{f}_{\text{com}}$ . Para los esfuerzos  $\mathbf{f}_s$  aún no se habría alcanzado la superficie de rotura, y estarían en equilibrio con las cargas  $\mathbf{F}_{\text{com}}$ .

Tenemos por tanto que se cumplen simultáneamente las expresiones

$$\mathbf{u}_{\text{com}}^T \mathbf{f}_{\text{com}} = \mathbf{U}_{\text{com}}^T \mathbf{F}_{\text{com}} \quad (1.58)$$

$$\mathbf{u}_{\text{com}}^T \mathbf{f}_s = \mathbf{U}_{\text{com}}^T \mathbf{F}_{\text{com}} \quad (1.59)$$

La primera se deduce de la igualdad de energías interna y externa derivada de la forma en que determinamos las cargas  $\mathbf{F}_{\text{com}}$ .

La segunda se cumplirá por el teorema del trabajo virtual, considerando la situación equilibrada supuesta, en la que los esfuerzos no alcanzan la rotura, junto con la deformación compatible de colapso elegida arbitrariamente al inicio.

Si restamos la segunda expresión de la primera tendremos

$$\mathbf{u}_{\text{com}}^T (\mathbf{f}_{\text{com}} - \mathbf{f}_s) = 0 \quad (1.60)$$

Pero esto no es posible pues el vector diferencia de esfuerzos no puede ser ortogonal al vector de deformación (paralelo a la superficie de rotura) al ser  $\mathbf{f}_s$  interior a la superficie de rotura. De este modo el supuesto es incorrecto y, por tanto,

$$\mathbf{F}_{\text{com}} \geq \mathbf{F}. \quad (1.61)$$

El corolario inmediato es que si determinamos la carga de rotura a partir de una cinemática cualquiera igualando energías disipadas entre el mecanismo y las cargas obtenemos una situación insegura. Hay que hacer notar que en este proceso sólo se consideran en la práctica los esfuerzos de los puntos que se supone plastifican, al considerar que los demás no plastifican ni por tanto disipan energía localmente, lo que supone que se les atribuye esfuerzos menores a las resistencias disponibles en dichas posiciones. Pero el mecanismo puede ser erróneo, por lo que habrá puntos o posiciones no consideradas en el mecanismo supuesto en el que los esfuerzos correspondientes (no considerados en la deformación plástica) habrán superado los de rotura antes que los de los puntos considerados. Resolver el problema correctamente por esta vía exigiría la enumeración de todos los mecanismos posibles y la determinación de la menor carga de rotura de entre todos los mecanismos.

En todo caso se podría también, a partir de la solución obtenida, reconstruir la situación de equilibrio completa, determinar con ello las posiciones en las que se viola la condición de resistencia, y redimensionar tales puntos para evitarlo. Esto sería recurrir al teorema estático como medio de obtener seguridad.

### **Teorema de unicidad**

Hemos visto dos límites que acotan la carga de rotura: un límite inferior y uno superior:  $\mathbf{F}_{\text{equ}} \leq \mathbf{F} \leq \mathbf{F}_{\text{com}}$ , de modo que si enlazamos el conjunto de condiciones consideradas podríamos eliminar el espacio entre ambos límites. Esto es lo que hace el teorema de unicidad. Ahora consideramos que

- establecemos un estado de esfuerzos  $\mathbf{f}$  en equilibrio con las cargas  $\mathbf{F}$
- en todas las regiones de la estructura los esfuerzos son menores o iguales a los de plastificación, o lo que es lo mismo, se cumplen las condiciones de resistencia  $\psi \mathbf{f} \leq \mathbf{dr}$
- existe un estado de colapso cinemáticamente compatible  $[\mathbf{u}, \mathbf{U}]$  en el que las regiones de flujo plástico se corresponden con las regiones en las que el esfuerzo es igual al de la plastificación.

En ese caso puede afirmarse que la carga considerada es la carga de rotura de la estructura.

Pues efectivamente, por la primera y segunda condición, y el teorema estático, resultará que  $\mathbf{F}$  es límite inferior de la carga de rotura, pero también, por las condiciones segunda y tercera, y el principio del trabajo virtual, la energía disipada coincidirá con el trabajo realizado por las cargas exteriores, cumpliéndose así,

por el teorema cinemático, que  $\mathbf{F}$  es también límite superior a la carga de rotura, por lo que, al coincidir ambos límites, resulta ser la carga de rotura misma.

### 1.4.6. Variables y ecuaciones fundamentales

Tenemos por todo lo anterior un conjunto de ecuaciones para abordar los problemas con esta aproximación, en la que consideramos un conjunto de cargas prescritas inicialmente  $\mathbf{F}_I$ : en primer lugar el trío general de condiciones estáticas, cinemáticas, y de relaciones materiales, ecuaciones 1.37, 1.21, 1.38 y 1.40:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \gamma \mathbf{F}_I = \mathbf{H} \mathbf{f}, \quad \text{con } \mathbf{H} = \mathbf{B}^T \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{U}} \\ \psi \mathbf{f} &\leq d\mathbf{r}\end{aligned}$$

En segundo lugar las expresiones derivadas de la regla de flujo de Von Mises y de las condiciones de colapso, caracterizadas por los indicadores o multiplicadores  $\boldsymbol{\lambda}$ , ecuaciones 1.48 y 1.43:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \psi^T \boldsymbol{\lambda} \\ (\psi \mathbf{f} - d\mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda} &= 0\end{aligned}$$

Y en último lugar, las condiciones límite para la carga de rotura que se derivan de los teoremas fundamentales del análisis límite:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{equ}} \left( \mathbf{f} | \mathbf{F}_{\text{equ}} = \mathbf{B}^T \mathbf{f} \ \& \ \psi \mathbf{f} \leq d\mathbf{r} \right) \leq \mathbf{F} \quad (1.62) \\ \mathbf{F}_{\text{com}} \left( \mathbf{f}_{\mathbf{u}} | \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{U}} \ \& \ \mathbf{f}_{\mathbf{u}} = \mathbf{r}_{\mathbf{u}} \ \& \ \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_{\text{com}} \right) \geq \mathbf{F} \quad (1.63)\end{aligned}$$

ecuaciones que pueden leerse ambas como que “la carga obtenida a partir de esfuerzos que cumplen las condiciones indicadas es un límite de la carga de rotura” (La primera: la carga  $F_{\text{equ}}$ , obtenida de esfuerzos  $f$  en equilibrio con las cargas y cumplen la condición de resistencia es un límite inferior de la carga de rotura  $F$ . La segunda: la carga  $F_{\text{com}}$  obtenida partiendo de un mecanismo compatible, en el que se establecen las capacidades resistentes de las piezas por el procedimiento de igualar la energía disipada por los esfuerzos de plastificación en dicho mecanismo con la energía perdida por las cargas, es un límite superior de la carga de rotura)

Con estos recursos podemos ya proceder tanto al análisis como al proyecto de estructuras desde la perspectiva plástica o límite.

#### **1.4.7. El análisis plástico**

Dada la dualidad de los problemas estructurales (las perspectivas conjugadas “estática” y “cinemática”) podemos acometer los problemas independientemente desde cada una de ellas, lo que hacemos en los siguientes apartados.

En ambos casos se trata de una estructura ya definida y dimensionada, que está sometida a unas ciertas cargas conocidas, y para la que queremos determinar si se ha alcanzado o no la carga de rotura, así como los esfuerzos de todas las piezas.

### 1.4.7.1. El enfoque estático

Consideramos unas cargas aplicadas (inicialmente) a la estructura  $\mathbf{F}_I$ , así como un dimensionado para el que se han elegido secciones  $\mathbf{r}$  que buscan asegurar para la estructura unas condiciones de resistencia definidas por la expresión  $\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} \leq \mathbf{d}\mathbf{r}$ , donde los símbolos  $\boldsymbol{\psi}$  y  $\mathbf{d}$  son matrices conocidas aunque se desconozcan (aún) los esfuerzos  $\mathbf{f}$  en la estructura.

No sabemos cual es la carga de rotura para ese dimensionado, por lo que formulamos el problema como el de hallar el factor de carga  $\Gamma$  capaz de llevar las cargas iniciales  $\mathbf{F}_I$  hasta la rotura, junto con los esfuerzos  $\mathbf{f}$  correspondientes al equilibrio alcanzado en la condición de colapso.

Deben, por tanto, cumplirse para la carga límite  $\mathbf{F} = \Gamma \mathbf{F}_I$  las condiciones de equilibrio junto con las de resistencia.

Dado que es de aplicación el teorema estático, el problema puede formularse formalmente como *hallar la situación para la que se obtiene el mayor valor positivo para el factor de carga  $\Gamma$  empleando las variables de decisión  $\mathbf{f}$  y  $\Gamma$  y asegurando que se cumplen las condiciones de resistencia y de equilibrio*. Esto puede establecerse formalmente:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{f}, \Gamma}{\text{máx}}(\Gamma) \\ & \boldsymbol{\psi} \mathbf{f} \leq \mathbf{d}\mathbf{r} \\ & -\mathbf{B}^T \mathbf{f} + \Gamma \mathbf{F}_I = 0 \\ & \Gamma > 0 \end{aligned} \tag{1.64}$$

Se trata de un problema de “programación lineal”: obtener los valores para ciertas variables que

- aseguran un máximo para una combinación lineal de tales variables
- cumpliendo un conjunto de restricciones lineales de desigualdad o de igualdad para dichas variables

En este caso la “combinación lineal” que se maximiza involucra a solo una de las variables, aunque las restricciones ponen en juego todo el conjunto de estas:  $\mathbf{f}$  y  $\Gamma$ .

Desde las soluciones desarrolladas por Dantzig (ver Dantzig 1963) y ya empleadas en tareas lógicas en la segunda guerra mundial, este tipo de problemas tiene soluciones estándares entre las que el *simplex* es la más habitual, estando por tanto disponible en bibliotecas algebraicas, o en las hojas de cálculo de uso corriente.

La ecuación escrita en formato matricial adopta la forma siguiente<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{f}, \Gamma}(\Gamma) &= \max_{\mathbf{f}, \Gamma} \left( [\mathbf{0}^T \quad 1] \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} d\mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Gamma &> 0 \end{aligned} \tag{1.65}$$

---

5. En la notación, y a efectos de simplificar, se identifican separadamente las filas correspondientes a los dos conjuntos de expresiones, sea de desigualdades (ecuaciones de resistencia), sea de igualdades (ecuaciones de equilibrio).

### 1.4.7.2. El enfoque cinemático

Se trataría ahora de determinar la configuración de movimientos-deformaciones compatibles  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  que corresponde al colapso, así como la correspondiente carga de rotura  $\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I$ , asegurando que se cumplen los criterios para la condición de colapso, junto con los de la regla de flujo. En este caso, como un proceso de colapso puede describirse igualmente con cualquier solución proporcional a alguna de las soluciones compatibles (podemos multiplicar los  $\dot{\mathbf{U}}$  y  $\dot{\mathbf{u}}$  de una solución para tener valores que son también solución) debemos añadir una condición de *normalización* de los valores para obtener una única solución.

Establecemos como condición de normalización la siguiente:

$$\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F}_I = \mathbf{F}_I^T \dot{\mathbf{U}} = 1 \quad (1.66)$$

Así mismo, usamos la condición de compatibilidad (1.1) en la que incluimos la restricción que supone la regla de flujo (1.48), considerando que nuestras *variables de decisión* (las incógnitas cuyos valores hay que determinar) van a ser, tanto los desplazamientos  $\dot{\mathbf{U}}$  como los multiplicadores plásticos  $\lambda$ .

Al estar considerando cinemáticas de colapso es de aplicación el teorema cinemático, por lo que deberemos encontrar el mínimo factor de carga para el que la energía perdida por las cargas en el colapso sea igual a la disipada por las secciones que plastifican.

La condición de colapso 1.43 y la regla de flujo 1.48 permiten

escribir

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{d} \mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda} &= 0 \\ \mathbf{f}^T \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{r}^T \mathbf{d}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{f}^T \mathbf{u} &= \mathbf{r}^T \mathbf{d}^T \boldsymbol{\lambda}\end{aligned}\tag{1.67}$$

y por el teorema cinemático (disipación externa menor o igual que la interna para el mecanismo elegido)

$$\mathbf{F}^T \mathbf{U} = \gamma \mathbf{F}_I^T \mathbf{U} \leq \mathbf{f}^T \mathbf{u} = \mathbf{r}^T \mathbf{d}^T \boldsymbol{\lambda}\tag{1.68}$$

ecuación de la que resulta, si usamos la normalización 1.66, la siguiente

$$\gamma \leq \mathbf{r}^T \mathbf{d}^T \boldsymbol{\lambda}\tag{1.69}$$

De este modo el problema se puede plantear como el de hallar el factor de carga, junto con la geometría de colapso y los correspondientes multiplicadores de colapso positivos, que corresponden al mínimo valor del producto  $\mathbf{r}^T \mathbf{d}^T \boldsymbol{\lambda}$  para las condiciones que imponen la combinación de la compatibilidad y la regla de flujo y la normalización:

$$\begin{aligned}\gamma &= \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}} ((\mathbf{d} \mathbf{r})^T \cdot \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}} \gamma(\boldsymbol{\lambda}) \\ \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{B} \mathbf{U} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_I^T \mathbf{U} &= 1 \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}\tag{1.70}$$

Nuevamente se trata del problema de hallar un extremo (ahora mínimo) en una combinación lineal de las variables de decisión,

manteniendo restricciones lineales de igualdad o desigualdad para esas mismas variables, es decir, de un problema de programación lineal soluble con herramientas estándar, como “simplex”.

El formato matricial para esta ecuación sería el siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma &= \min_{\lambda, U} \left( [(d\mathbf{r})^T \quad \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \lambda \\ U \end{bmatrix} \right) = \min_{\lambda, U} \gamma(\lambda) \\ \begin{bmatrix} \psi^T & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_I^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ U \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.71)$$

Es de gran interés, tal como veremos en el apartado 2.2.2.3, la versión traspuesta de dicha ecuación, que tiene el formato siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma &= \min_{\lambda, U} \left( [\lambda^T \quad U^T] \begin{bmatrix} (d\mathbf{r}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \min_{\lambda, U} \gamma(\lambda) \\ [\lambda^T \quad U^T] \begin{bmatrix} \psi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_I \end{bmatrix} &= [\mathbf{0}^T \quad 1] \\ \lambda &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Vemos aquí una relación evidente con la ecuación precedente del enfoque estático, 1.65, relación que se deriva de la dualidad descrita más adelante, en el apartado 2.2.2.3.

### 1.4.8. El proyecto plástico

El teorema estático aporta una poderosísima herramienta para el proyecto: *si hay ductilidad y estabilidad suficiente, cualquier distribución de esfuerzos en equilibrio con las cargas para*

*los que haya resistencia suficiente es segura.* Es decir, que cabe seleccionar arbitrariamente la distribución equilibrada de esfuerzos, y dimensionar para asegurar resistencia suficiente para tal distribución en todas las regiones de la estructura.

Ya hemos visto que ese teorema validaba las distribuciones elásticas de esfuerzos, pero aún más, valida el dimensionado de las piezas para esta o cualquier otra distribución equilibrada si hay resistencia suficiente.

Desde esta perspectiva cabe plantearse el problema de dimensionar de tal modo que el coste de la solución sea el mínimo posible, manteniendo la capacidad de carga, es decir, el problema de obtener la distribución de esfuerzos y de resistencias que, soportando la carga, es decir manteniendo el equilibrio con la carga máxima prevista en condiciones que no violen la condición de resistencia, resulta ser de coste mínimo.

La solución resulta sencilla e inmediata si fuese posible establecer unos índices de coste por unidad de capacidad resistente, es decir si puede establecerse el coste de la estructura mediante leyes lineales asociadas a las capacidades resistentes  $\mathbf{r}$  susceptibles de empleo en el proyecto.

Es decir, se buscan leyes de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{r}$  que cumplan equilibrio y resistencia considerando que el coste de la estructura que se pretende minimizar pueda computarse mediante la expresión  $C = \mathbf{c}_u^T \mathbf{r}$ , para unos coeficientes de coste  $\mathbf{c}_u$  conocidos.

El problema resulta ser de nuevo el siguiente problema de

programación lineal:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{f}, \mathbf{r}} C(\mathbf{r}) &= \min_{\mathbf{f}, \mathbf{r}} \mathbf{c}_u^T \mathbf{r} \\
 \psi \mathbf{f} - \mathbf{d} \mathbf{r} &\leq \mathbf{0} \\
 \mathbf{B}^T \mathbf{f} &= \mathbf{F} \\
 \mathbf{r} &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

o, en formato matricial

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{f}, \mathbf{r}} C(\mathbf{r}) &= \min_{\mathbf{f}, \mathbf{r}} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{c}_u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \right) \\
 \begin{bmatrix} \psi & -\mathbf{d} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{r} &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Se trata de un problema resoluble, nuevamente, mediante simplex.

### 1.4.9. Generalización a otros problemas

Las soluciones 1.65, 1.71 en problemas de análisis, o la 1.74 para problemas de proyecto pueden generalizarse con facilidad a problemas diferentes empleando los mismos medios.

Un caso típico es considerar que la carga se compone de dos partes, una invariante, y otra que es la que se incrementa hasta alcanzar la rotura —por ejemplo en sismo la carga gravitatoria frente a la carga horizontal—

La carga de rotura  $\mathbf{F}$  es ahora la suma de dos partes, de las que sólo una se ve afectada por el factor de carga. Las “variables de decisión” siguen siendo las mismas, de modo que basta reordenar las dos partes de la carga en las ecuaciones de equilibrio.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Gamma \mathbf{F}_1 \implies -\mathbf{B}^T \mathbf{f} + \Gamma \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_0. \quad (1.75)$$

La solución por “Simplex” al máximo factor de carga  $\Gamma$  se formula por tanto como sigue:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{f}, \Gamma} & \left( \Gamma = [\mathbf{0}^T \quad 1] \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} & \leq \begin{bmatrix} \mathbf{d}\mathbf{r} \\ -\mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \\ \Gamma & \geq 0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

usando en  $\mathbf{F}_0$  la parte de carga constante y en  $\mathbf{F}_1$ , la parte de carga que se amplía.

En el caso de problemas de dimensionado puede darse la condición de que parte de las secciones estén prefijadas, buscándose sólo las óptimas para la parte de la estructura pendiente. Si las resistencias prefijadas son las  $\mathbf{r}_f$  y las que se trata de determinar las  $\mathbf{r}_d$  puede establecerse

$$\mathbf{d}\mathbf{r} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{d}_f \cdot \mathbf{r}_f + \mathbf{d}_d \cdot \mathbf{r}_d \quad (1.77)$$

de modo que las restricciones de resistencia pueden formularse como

$$\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{f} - \mathbf{d}_d \cdot \mathbf{r}_d \leq \mathbf{d}_f \cdot \mathbf{r}_f \quad (1.78)$$

y la solución por “Simplex” para el coste mínimo en la región pendiente de decisión será

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{f}, \mathbf{r}_d} \left( C = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{c}_{r_d}^T] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r}_d \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} & -\mathbf{d}_d \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r}_d \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{d}_f \cdot \mathbf{r}_f \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \\ \mathbf{r} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.79)$$

usando  $\mathbf{c}_{r_d}$  para los costes unitarios asociados a las leyes de resistencias de las piezas a diseñar.

#### 1.4.10. Resumen y generalización de las variables fundamentales y sus relaciones

Podemos resumir el conjunto de variables que se manejan en el modelo para definir la estructura y para determinar soluciones de análisis:

La estructura se define:

- Globalmente, por la caracterización estática y cinemática de los grados de libertad:  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{U}$ .
- Localmente
  - por la caracterización estática y cinemática de las piezas:  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}$
  - por la caracterización de las condiciones de rotura local de acuerdo a las capacidades resistentes:  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\mathbf{r}$
- En su geometría y conectividad:  $\mathbf{B}$ .

Cada condición de carga impone un “vector” inicial  $\mathbf{F}_I$

El análisis determina para cada “dirección de carga” inicial  $\mathbf{F}_I$

- el factor de carga  $\gamma = \Gamma$  que le lleva a la rotura  $\mathbf{F}$  para esa “dirección”
- la correspondiente configuración de colapso  $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}$
- los esfuerzos  $\mathbf{f}$  y la componente plástica  $\mathbf{u}$  de la deformación para la misma.

Cada “dirección de carga<sup>6</sup>” activaría algún mecanismo  $i$  de los  $n$  mecanismos de colapso que cupiese enumerar en la estructura. Cabría representar ese mecanismo por su correspondiente cinemática:  $\mathbf{U}_i$ , a la que correspondería una configuración de “rótulas” y unas geometrías de plastificación dadas por  $\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{u}_i$ . En algunas regiones  $p$ , identificadas por los valores no nulos de  $\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{u}_i$ , el esfuerzo sería igual a la capacidad resistente, siendo menor que esta en las restantes (regiones  $s$ ).

Si consideramos las diferentes combinaciones de esfuerzos, y por tanto de cargas de rotura, capaces de activar el mecanismo considerado, vemos que a cada mecanismo le corresponde no una sola carga sino toda una una región del “espacio” algebraico de las cargas, espacio cuya dimensión es el número de grados de libertad. Cada conjunto de cargas de colapso será un vector, definido para el espacio completo, que alcanza algún punto en el subespacio correspondiente al hiperplano límite. Una forma de colapso alcanzable por cualquiera de las combinaciones de carga posibles para ese hiperplano.

---

6. por ejemplo en un pórtico con carga gravitatoria y de viento, serían “direcciones” diferentes las correspondientes a combinaciones variables de las diferentes cargas gravitatorias y de viento.

Teniendo en cuenta la linealidad del problema, a cada plano límite descrito por  $\psi_i$  en el espacio de los esfuerzos  $\mathbf{f}$ , cabría asociar el correspondiente plano límite  $\Psi_i$  en el espacio de las cargas  $\mathbf{F}$  de modo que el conjunto de dichas “regiones” límite no sería otra cosa que un hiperpoliedro proyección en  $\mathbf{F}$  de la superficie límite  $\phi$  considerada para los  $\mathbf{f}$ . O lo que es lo mismo, las restricciones de resistencia podrían declararse en el espacio de las cargas en un formato semejante al 1.40:

$$\Psi \mathbf{F} \leq \mathbf{R} \quad (1.80)$$

Si la velocidad de plastificación  $\dot{\mathbf{u}}$  para cada mecanismo local de colapso está ligada a los multiplicadores  $\lambda$ , en virtud de la regla de flujo 1.48, cabría asociar multiplicadores  $\Lambda$  a la velocidad de colapso de cada mecanismo global considerado, positivos si se da ese mecanismo, nulos en caso contrario, de tal modo que el espacio de posibles combinaciones de  $\Lambda$  describiría todos los mecanismos posibles, y cada posible dirección en ese espacio uno de dichos mecanismos o combinación.

Podemos imaginar fácilmente que puedan construirse los multiplicadores locales  $\lambda$  a partir de los  $\Lambda$  globales, mediante expresiones lineales, de modo que tendríamos:

$$\lambda = \mathbf{L} \Lambda \quad (1.81)$$

Para la condición de colapso en el espacio global podríamos escribir, considerando 1.43

$$(\Psi \mathbf{F} - \mathbf{R})^T \Lambda = 0 \quad (1.82)$$

Si además usamos 1.81 en una variante de 1.43 en la que usemos  $\mathbf{d} = \mathbf{I}$  tenemos

$$(\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{L} \boldsymbol{\Lambda} = 0 \quad (1.83)$$

donde, introduciendo  $\mathbf{L}$  en el término entre paréntesis, resulta

$$(\mathbf{L}^T \boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{L}^T \mathbf{r})^T \boldsymbol{\Lambda} = 0 \quad (1.84)$$

Comparando esta última expresión con la 1.82 resulta posible sugerir las identificaciones siguientes:

$$\boldsymbol{\Psi} \mathbf{B}^T \equiv \mathbf{L}^T \boldsymbol{\psi} \quad (1.85)$$

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{L}^T \mathbf{r} \quad (1.86)$$

Finalmente podemos afirmar, en analogía con 1.48 que:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Lambda} \quad (1.87)$$

pues efectivamente, si multiplicamos ambos términos por  $\mathbf{B}$ , obtenemos esa misma expresión:

$$\mathbf{B} \mathbf{U} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Lambda}$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\Lambda}$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}$$

En ellas es interesante ver (ecuación 1.84) que la matriz producto  $\boldsymbol{\Psi} \mathbf{B}^T \equiv \mathbf{L}^T \boldsymbol{\psi}$  permite determinar, partiendo de los esfuerzos  $\mathbf{f}$ , su efecto de comparación con la capacidad de carga global frente al colapso,  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{L}^T \mathbf{r}$ , en tanto que su traspuesta

$B\Psi^T \equiv \psi^T L$  determina las deformaciones  $u$  correspondientes a la configuración de colapso  $\Lambda$ .

Con todas estas expresiones podemos finalmente condensar el modelo en su conjunto tal como hicimos con el modelo elástico, y como hacemos en el apartado siguiente.

### 1.4.11. El modelo plástico en un vistazo

El conjunto de variables y relaciones del modelo plástico, considerando sus versiones local o global, así como sus componentes estáticas y cinemáticas, queda resumido en el esquema simbólico siguiente, que se realiza con criterios análogos a los usados para el esquema que resume el análisis elástico, 1.31

$$\begin{array}{ccccccc}
 u & & \longleftarrow & \text{COMPATIBILIDAD}(B) & \longleftarrow & & U \\
 & \swarrow & \psi^T & \psi^T L = B\Psi^T & \Psi^T & \searrow & \\
 \downarrow & & \lambda & \longleftarrow L \longleftarrow & \Lambda & & \downarrow \\
 \text{T. int.} & = & \text{Disipación interna} & \geq & \text{Disipación externa} & = & \text{T. ext.} \\
 \uparrow & & r & \longrightarrow L^T \longrightarrow & R & & \uparrow \\
 & \swarrow & \psi & L^T \psi = \Psi B^T & \Psi & \searrow & \\
 f & \longrightarrow & & \text{EQUILIBRIO}(H = B^T) & \longrightarrow & & F
 \end{array} \tag{1.88}$$

### 1.4.12. Supuestos, valores y limitaciones del modelo plástico límite

La aproximación plástica resulta, en virtud del teorema estático, de utilidad excepcional pues permite validar soluciones a partir de sencillas condiciones de equilibrio a las que se dote de

resistencia suficiente, incluyendo las condiciones de equilibrio obtenidas por métodos elásticos.

Los supuestos básicos manejados son

- se trata de *plasticidad asociada*, es decir, se cumple la condición de ortogonalidad entre las velocidades de deformación plástica y el plano (tangente) que representa la superficie límite, el que contiene las variaciones de los esfuerzos desde el inicio del colapso, al contener todos los esfuerzos posibles para una misma forma de colapso.
- considera que existe ductilidad suficiente en todas las secciones para asegurar que se mantiene la resistencia a lo largo de toda la deformación necesaria para alcanzar el estado de colapso,

El primer supuesto no es de aplicación en situaciones de plasticidad no asociada, como es el caso en todos los problemas en que en el colapso entra en juego el fenómeno de rozamiento: suelos, deslizamientos en fábricas, etc. . . Sí se cumple, sin embargo, en los problemas de piezas lineales en fábricas (arcos) cuando la rotura responde a rotaciones sin deslizamiento. Veremos el caso en el apartado **2.2.1.4**.

El segundo supuesto exige considerar cuidadosamente la relación entre la demanda y la capacidad de ductilidad en los problemas considerados, considerando tanto el material como la geometría. En tanto que la demanda está ligada a la deformación global, es potencialmente mayor en estructuras esbeltas. Así mismo, dicha demanda será tanto mayor cuanto más alejado esté el esquema de equilibrio alcanzado en rotura del esquema elástico probable para la estructura, considerando condiciones

de sustentación realistas para esta.

El enfoque plástico, en lo visto hasta aquí, tampoco considera las cuestiones de estabilidad asociadas a las consecuencias de la deformación de la estructura (desplazamientos de las cargas, etc. . . ) por lo que es inaplicable en los casos en los que la estabilidad sea la condición crítica: pandeo, etc. . .

Al ser una aproximación no lineal, no es de aplicación el principio de superposición.

Es por todo ello una herramienta que permite validar dimensionados, y una buena referencia para las últimas fases de la deformación si hay ductilidad suficiente y no hay fenómenos de inestabilidad.

### 1.4.13. Ejemplos de aplicación

#### 1.4.13.1. Establecimiento de los parámetros para esfuerzos y deformaciones límite

El ejemplo que se presenta corresponde al de un pórtico que cabría analizar tanto mediante la aproximación elástica como la de rotura.

En la figura 1.15 se representan los parámetros para las cinemáticas de colapso independientes posibles que se consideran, y los correspondientes parámetros de carga, conjugados energéticos de los anteriores: 1: colapso del pórtico por desplazamiento lateral; 2: colapso del tablero; 3, 4, 5 y 6: rotaciones incontroladas de los nudos. Pueden darse condiciones de colapso combinadas: por ejemplo la combinación de 1 y 2 implicaría que se produce simultáneamente el desplazamiento lateral y el

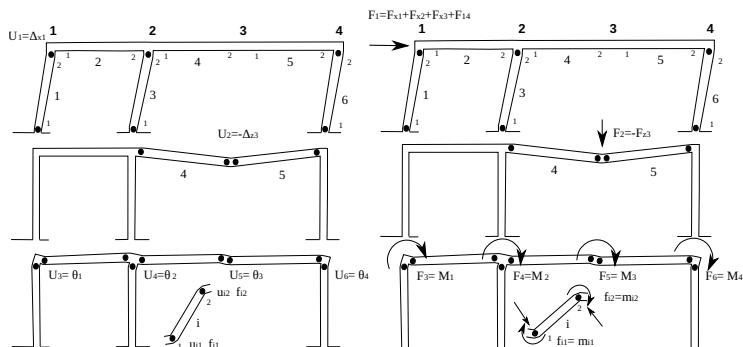


Figura 1.15: Modelado plástico de un pórtico de dos crujeas y una planta: cinemática (izquierda) y estática (derecha). La barra aislada corresponde a una barra  $i$  cualquiera, y representa los criterios para la numeración de extremos y para los valores positivos de rotación y de esfuerzos de extremo.

hundimiento del tablero, y la rótula en torno al nudo derecho se produciría en uno de los extremos, 2 de la viga 5, o 2 del pilar 6, en el de menor resistencia para un momento flector idéntico en ambos. El hecho de que el modelo permita considerar ambas posibilidades para la posición de la rótula permite (exige) independizar como parámetro la rotación del nudo, lo que permite, que desde el punto de vista de las ecuaciones resumidas en  $\mathbf{B}^T = \mathbf{H}$ , el modelo coincida con el empleado en la aproximación elástica

Para este modelo, tendremos (algunas de) las condiciones de

compatibilidad de acuerdo a la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ \dots \\ u_{51} \\ u_{52} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{l_5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ \dots \end{bmatrix}$$

y análogamente para las condiciones de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{l_5} & \frac{1}{l_5} & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ \dots \\ f_{51} \\ f_{52} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Si bien ahora tendremos que la carga de colapso  $\mathbf{F}$  debe determinarse en el límite mediante un factor  $\gamma$  de incremento sobre el vector de carga inicial conocido  $\mathbf{F}_I$ : el equilibrio que se considera es el de los esfuerzos de rotura con la carga  $\mathbf{F}_I$  amplificada hasta llegar a la de rotura:  $\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I = \mathbf{H} \mathbf{f}$ .

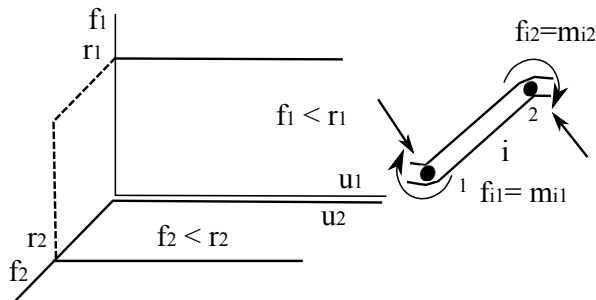


Figura 1.16: Relaciones momento–giro plástico y resistencias límite de barra con momentos flectores en ambos extremos.

#### 1.4.13.2. Relaciones materiales límite: condiciones de resistencia

La figura 1.16 muestra una barra sometida a momentos de extremo, donde pueden formarse rótulas en caso de alcanzarse el momento de plastificación, con tres posibles gráficas para un modelo rígido–plástico, es decir un modelo sin deformación hasta la plastificación, y deformación indefinida en ese caso. Cada gráfica está descrita sobre ejes diferentes:

- la que relaciona el momento al giro en el extremo 1. Para una barra  $i$ :  $f_{i1}(u_{i1})$
- la que relaciona el momento al giro en el extremo 2:  $f_{i2}(u_{i2})$  o sencillamente  $f_2(u_2)$  si nos referimos a una sola barra.
- la que establece los límites de resistencia al momento plástico apropiado a cada extremo:  $f_1 = m_1 \leq r_1$ ;  $f_2 = m_2 \leq r_2$

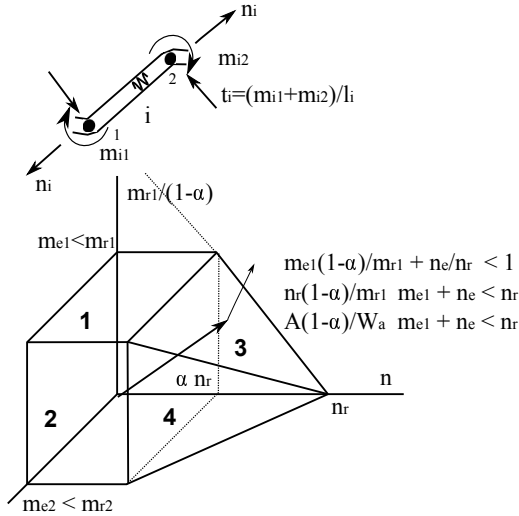


Figura 1.17: Resistencias límite de barra con esfuerzo axial y momentos flectores en ambos extremos.

Esta última figura está definida sobre la pareja de ejes  $f_1$  y  $f_2$  en los que se identifican los momentos de extremo, si bien no hay interacción entre ambos esfuerzos para la condición de límite de resistencia, dado que las de cada extremo son independientes.

Sin embargo, si consideramos la posible interacción del momento de extremo con el esfuerzo axial, la figura que contiene ahora las condiciones de límite de resistencias para esa misma barra debe pasar a incluir los tres ejes (los tres parámetros) con-

siderados, a saber, los dos momentos de extremo y el normal. La figura es la 1.17. Para esa figura, las condiciones para normal nulo siguen siendo las de la figura precedente, pero ahora cambia el resto del panorama.

Si consideramos aisladamente cada extremo, tenemos que el límite de resistencia dependerá de las proporciones entre el flector y el normal. Una aproximación habitual en secciones laminadas es considerar que la resistencia en flexión es la aportada por las alas y que, en tanto el normal no supera la capacidad el alma, la resistencia en flexión no cambia, reduciéndose linealmente a partir de ahí hasta anularse según el normal se acerca al límite resistido por la sección. Esto da pie a gráficas límite bilineales para cada uno de los extremos,  $m_1, n$  y  $m_2, n$ , que podemos extender a los planos límite perpendiculares al ser independientes las resistencias de ambos extremos. De este modo tenemos como ecuaciones para el límite de resistencia las siguientes (considerando en el subíndice la diferencia entre los valores de esfuerzo efecto  $e$  de las cargas, o los valores de capacidad resistente  $r$ , y usando  $W_a$  para el módulo resistente de las alas,  $A$  para el área de la sección,  $\alpha A$  para la parte del área correspondiente al alma, y  $f_y$  para la resistencia del acero en el límite elástico):

$$\begin{aligned} m_{e1} &\leq m_{r1} = W_a f_y \\ m_{e2} &\leq m_{r2} = W_a f_y \\ \frac{m_{e1}(1 - \alpha)}{m_{r1}} + \frac{n_e}{n_r} &\leq 1 \\ \frac{m_{e2}(1 - \alpha)}{m_{r2}} + \frac{n_e}{n_r} &\leq 1 \end{aligned}$$

Las dos primeras reflejan el límite para normal pequeño, y las dos últimas para normal superior al que puede resistirse con solo el alma.

Si nos fijamos en cualquiera de las dos últimas, podemos reescribirlas sucesivamente

$$n_r \frac{m_{ei}(1-\alpha)}{m_{ri}} + n_e \leq n_r$$

$$\frac{A(1-\alpha)}{W_a} m_{ei} + n_e \leq n_r$$

y por lo tanto, sustituyendo  $n_r$  por  $Af_y$  y  $m_r$  por  $W_a f_y$  el conjunto completo puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{(1-\alpha)A}{W_a} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(1-\alpha)A}{W_a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a f_y \\ Af_y \end{bmatrix}$$

Expresión en la que podemos identificar el formato general de la ecuación 1.40, en la que la primera matriz  $\psi$  expresa las interacciones consideradas en cada comprobación,  $\mathbf{f}$  los parámetros de esfuerzo considerados,  $\mathbf{r}$  las capacidades resistentes definidas para las piezas, y  $\mathbf{d}$  la forma de atribuir dichas capacidades a cada comprobación.

Es importante ahora observar que cada fila de la matriz  $\psi$  contiene los coeficientes del plano límite de la correspondiente comprobación (aquí un plano en 3D, aunque para más parámetros de esfuerzos se trataría de un hiperplano con tantas dimensiones como parámetros). Una propiedad de tales coeficientes

es que en ese espacio (aquí en 3D) definen vectores ortogonales a dicho plano límite, de modo que si se escalan las ecuaciones para que esos coeficientes tengan un módulo unidad, serían los *versores* de dichos planos límite.

En la figura están identificados y numerados dichos 4 planos límite de acuerdo a la ecuación de límite de resistencia que representan.

#### **1.4.13.3. Masa indeformable sustentada en varias barras articuladas**

Continuamos aquí con la versión límite del problema resuelto en clave elástica en el apartado 1.3.7.4, de acuerdo a la figura 1.8. Se trata ahora de caracterizar y resolver el problema de la carga y esfuerzos de rotura de esa misma estructura.

Lo más sensato consiste en reinterpretar los parámetros empleados en el análisis elástico en clave plástica, considerando para la visión local los mismos esfuerzos, y las deformaciones como acumuladas de alguna forma en la región plástica adecuada: en el caso de que hubiésemos considerado esfuerzos de flexión, tendríamos rótulas en las uniones a los nudos, que seguirían permitiendo localizar las variables globales de desplazamiento y carga. Como sólo tenemos esfuerzos axiales, la deformación se interpretará como alargamiento plástico en alguna parte de cada barra —no importa su posición precisa— de modo que continúa siendo la conjugada energética del esfuerzo axial.

El equilibrio en la condición límite sigue pudiendo representarse como en la figura 1.9, y lo mismo cabe decir en relación con la compatibilidad de desplazamientos y deformaciones, des-

crita en la figura 1.10, de modo que las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad son las mismas que allí usábamos para la aproximación elástica, aunque ahora se interpretarán como parte de las cualidades de la configuración de colapso.

En cualquier caso resulta de interés recalcar nuevamente la forma de construcción de las ecuaciones y de las correspondientes matrices. Cada uno de los dibujos de los de las figuras del equilibrio corresponde a una de las filas de la matriz  $\mathbf{H} = \mathbf{B}^T$  en tanto que aísla el equilibrio de una sola de las componentes de la carga, mientras que cada uno de los dibujos de las figuras de la compatibilidad corresponde a una de las columnas de la matriz  $\mathbf{B}$ , en tanto que representa la deformación inducida en algunos de los elementos de la estructura por cada una de las componentes del desplazamiento global considerada aisladamente.

Por lo tanto, lo único que cambia ahora en el formato numérico del modelo es el grupo de ecuaciones que define las condiciones materiales: ahora se tratará de condiciones de límite de resistencia. Dado que estamos hablando de esfuerzos axiales en un material de comportamiento semejante en tracción y compresión podemos escribirlas en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} |f_1| &\leq r_1 = r_e \\ |f_2| &\leq r_2 = r_i \\ |f_3| &\leq r_3 = r_i \\ |f_4| &\leq r_4 = r_e \end{aligned}$$

donde  $r_e = A_e f_y$  será la resistencia de pilares exteriores y  $r_i = A_i f_y$  la de pilares interiores, siendo las áreas las eficaces si debe

considerarse la posibilidad de pandeo —plástico en este caso— Dadas las complicaciones que tiene el tratamiento numérico del valor absoluto, es más útil el formato siguiente, en el que se sustituye el límite para tal valor absoluto por las parejas de límites para signo positivo o negativo del esfuerzo, considerando las capacidades resistentes como valores positivos.

$$\begin{aligned}
 f_1 &\leq r_e \\
 -f_1 &\leq r_e \\
 f_2 &\leq r_i \\
 -f_2 &\leq r_i \\
 f_3 &\leq r_i \\
 -f_3 &\leq r_i \\
 f_4 &\leq r_e \\
 -f_4 &\leq r_e
 \end{aligned}$$

Dichas ecuaciones, considerando que solo hay dos variables para el diseño de las resistencias a saber, las resistencias de pilares exteriores e interiores, así como solo cuatro variables de esfuerzo, pueden reescribirse en la forma siguiente:

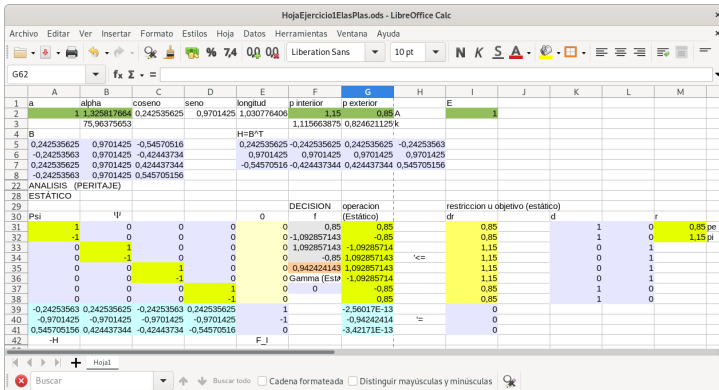
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_e \\ r_i \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

expresión que responde al formato general de 1.40

$$\psi f - dr \leq 0$$

Puesto que tenemos todos los elementos necesarios para la formulación del problema de análisis, sea en la aproximación estática, (ver 1.65), sea en la cinemática (ver 1.71), podemos obtener las soluciones para el factor de carga y los esfuerzos asociados, o para la geometría del colapso con auxilio de cualquiera de los recursos que dispongan del “simplex” entre sus herramientas. Análogamente podría decirse en relación con el problema de proyecto abordado con la solución 1.74.

Las capturas de pantalla siguientes muestran la formulación y soluciones desarrolladas con la hoja de cálculo de LibreOffice, y con recurso al “Solver”, usando Simplex como algoritmo de solución, siendo muy sencillo el proceso paso a paso.





**Análisis elástico.**

- Introducción de datos (geometría, cargas  $\mathbf{F} \dots$ );
- construcción de la matriz  $\mathbf{B}$  y su transpuesta en  $\mathbf{H}$ , o viceversa; los números de filas o columnas responden al número de variables de los espacios local (número de parámetros de esfuerzo) o global (número de grados de libertad).
- construcción de la matriz  $\mathbf{k}$ ;
- matriz  $\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{k}\mathbf{B}$  con la expresión `MMULT(H;MMULT(k;B))` aplicada en la selección de la región que ocupará  $\mathbf{K}$ , donde las matrices se referencian por el rectángulo de sus correspondientes casillas, y donde la instrucción se inserta pulsando simultáneamente `Crtl+Mayúsc+Enter`.
- Construcción de la inversa  $\mathbf{K}^{-1}$
- las soluciones son inmediatas con  $\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$ ;  $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ ;  $\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$ .

**Análisis Plástico, enfoque estático.**

- Construir la matriz de *coeficientes de restricciones* con sus 4 partes  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\mathbf{0}$ ,  $-\mathbf{B}^T$ ,  $\mathbf{F}$ , donde solo es nueva  $\boldsymbol{\psi}$ .
- Espacio para el vector (columna) de variables de decisión  $\mathbf{f}$ ,  $\Gamma$ , que se rellenan con valores arbitrarios
- Producto de las matrices de coeficientes de restricción y variables de decisión: serán los valores “resultado” para comparar, que consta de dos partes:
  - condiciones efecto de los esfuerzos correspondientes a las restricciones de resistencia ( $\leq$ )

- condiciones correspondientes a las restricciones de equilibrio (=)
- Al efecto de construir la columna correspondiente al vector de *objetivos de comparación* para los anteriores:
  - establecer el vector  $\mathbf{r}$  de resistencias a considerar considerando exclusivamente las de decisión independiente (por ejemplo si todas las piezas han de tener la misma resistencia habría un solo valor)
  - construir la matriz  $\mathbf{d}$  que asigna las resistencias a las desigualdades de resistencia en las que son de aplicación,
  - Producto  $\mathbf{d}\mathbf{r}$  para las condiciones de capacidad o resistencia (los valores objetivo de capacidad límite)
  - extender la columna así obtenida con  $-\mathbf{F}_0$ , siendo  $\mathbf{F}_0$  la parte de la carga a la que no se aplica el factor de carga  $\Gamma$ , en este caso nula, y por tanto añadiendo tantos ceros como ecuaciones de equilibrio.
- uso del Solver (Solucionador lineal de la hoja de cálculo)
  - Indicando que la celda objetivo es la casilla con  $\Gamma$
  - Buscando maximizar
  - Variando los valores de las celdas que hemos llamado variables de decisión
  - Con las restricciones de resistencia, comparación ( $\leq$ ) entre valores resultado y objetivo
  - Con las restricciones de equilibrio, comparación (=) entre valores resultado y objetivo
  - Asegurando  $\Gamma > 0$  (comparación con una casilla donde se haya dispuesto un cero)

- Opciones: Solucionador lineal, sin necesidad de más opciones
- SOLUCIONAR.

El resultado de la operación es la actualización por el “Solver” de los valores de las variables de decisión  $f$ ,  $\Gamma$  a los que resuelven el problema.

**Análisis Plástico, enfoque cinemático.** Para la aproximación cinemática se usa la misma técnica, bien para la comparación original, bien para la comparación transpuesta de la ecuación 1.72.

En la primera opción se crea una copia transpuesta de la matriz de coeficientes de restricción, usando como columna de variables de decisión los  $\lambda$  y  $U$  y disponiendo en columna los términos de comparación.

En la segunda opción, que requiere menos espacio de almacenamiento, se usa la misma matriz de coeficientes de restricción que en el enfoque estático, empleando filas tanto para las variables de decisión como para los valores correspondientes a cada uno de los dos términos de las restricciones: los resultados derivados de los valores adoptados para las variables de decisión y los valores objetivo para estos.

En este caso, el valor límite, ahora a minimizar, se dispondrá en una casilla conteniendo el resultado del producto escalar  $\lambda^T(dr)$ .



## Capítulo 2

# Fundamentos y técnicas de análisis

Desarrollados los conceptos básicos que se manejan en las teorías usadas para describir, analizar y proyectar estructuras, la teoría estructural, este capítulo desarrolla la relación de estos conceptos con las formulaciones tradicionales para los tipos estructurales más habituales, fundamentalmente estructuras conceptualizadas como colecciones de barras, tal vez piezas más complejas como bloques, conectadas entre sí por nudos o juntas que permiten delimitarlas y describir su interacción con precisión.

La formulación busca conceptualizar el comportamiento interno de tales piezas así como las condiciones de su trabajo con-

junto en la estructura en su interacción a través de sus enlaces, nudos o juntas.

## 2.1. El enfoque elástico

### 2.1.1. Modelado de piezas

Se describe en este apartado la forma de modelar las cualidades mecánicas y cinemáticas de piezas concebidas como una secuencia continua de rebanadas descritas a lo largo de una directriz lineal, usualmente recta. Estamos hablando, por tanto, de estructuras formadas por barras. Buscamos describir con precisión el comportamiento interno de dichas barras y la relación de este con las *condiciones de contorno*, es decir, con las condiciones impuestas en los nudos, usualmente definidos en sus extremos.

#### 2.1.1.1. Propiedades de sección; tensiones normales

Consideramos una rebanada extraída de una barra, en la que se definen tres ejes coordenados  $x, y, z$ , con el origen en la directriz, situada en el centro de gravedad de la sección, el primer eje en la dirección de la directriz, y los otros dos perpendiculares a esta y entre sí. Tenemos dos caras correspondientes a dos secciones consecutivas. Consideramos en general la cara correspondiente a la dirección creciente en el eje  $x$  y los *esfuerzos sobre* esta, así como los *movimientos de* esta en relación con los de la cara en la dirección decreciente.

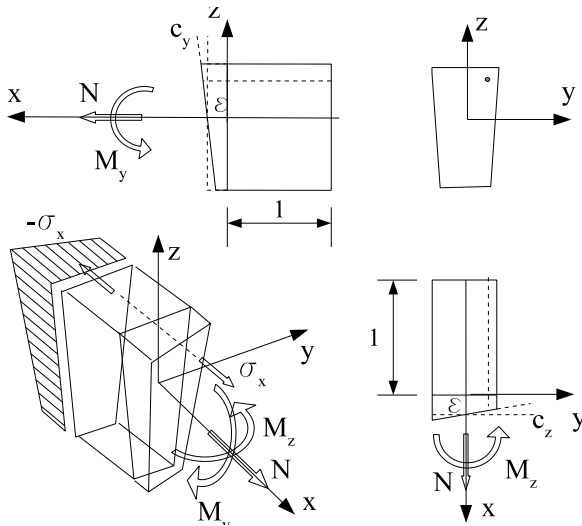


Figura 2.1: Tensiones normales en una sección de una barra y sus correspondientes esfuerzos y deformaciones

La figura 2.1 describe los dos cortes, decreciente y creciente de una rebanada (una sección) con los tres ejes de referencia, y en la que las tensiones normales y los correspondientes esfuerzos —equilibrados y por tanto iguales y contrarios salvo variación leve entre ambos cortes— se representan por la acción sobre la rebanada en su cara creciente, usando signos positivos para las acciones en dirección positiva de los ejes o de sus rotaciones respectivas de acuerdo al criterio dextrógiro: de  $y$  a  $z$  en torno

a  $x$ , de  $z$  a  $x$  en torno a  $y$ , y de  $x$  a  $y$  en torno a  $z$ .

Se representa en la imagen 3D la tensión en un punto genérico  $(y, z)$  y el bloque de tensiones completo, así como sus resultantes referidas a los ejes. Se representan en las imágenes frontal y laterales la sección, así como sus deformaciones, entendidas como los desplazamientos relativos de una cara respecto de la precedente, situada a una distancia unidad. Se considera el modelo de Navier–Bernoulli, por el que la sección plana se mantiene plana tras la deformación y donde la sección normal a la directriz se mantiene normal a la deformada elástica de dicha directriz. Esto hace que la deformación de la rebanada pueda describirse por la deformación longitudinal de la directriz  $\varepsilon$  y sus dos rotaciones en torno a los ejes  $z$  e  $y$  que, para la unidad de longitud, pueden describirse por las curvaturas  $c_z$  y  $c_y$ , que en la figura están dibujadas en el sentido positivo, de acuerdo a los criterios del párrafo anterior. Se representan los correspondientes esfuerzos asociados a tales deformaciones, a saber, el esfuerzo normal  $N_x$  y los momentos flectores sobre la sección,  $M_y, M_z$ .

Los otros tres movimientos posibles si consideramos los seis movimientos rígidos de la cara considerada, es decir, la rotación en torno a  $x$ , y los desplazamientos paralelos a los ejes  $y, z$ , están asociados a tensiones tangenciales, siendo sus esfuerzos resultantes el momento torsor  $M_x$  y el cortante con sus dos componentes paralelas a tales ejes,  $T_y, T_z$ , componentes que no se consideran por ahora en el modelo.

La tensión normal en cualquier punto de la sección  $\sigma_x(y, z)$ , no habiéndola en las caras exteriores de la barra, está asociada elásticamente a la deformación longitudinal de la correspondiente fibra  $\epsilon_x(y, z)$ , de modo que, de acuerdo a la figura 2.1,

tenemos:

$$\sigma_x(y, z) = E \epsilon_x(y, z) = E (\varepsilon + z c_y - y c_z) \quad (2.1)$$

Esta distribución de tensiones supone las resultantes siguientes (o valores agregados), asociadas a las tres deformaciones consideradas en la rebanada  $[\varepsilon \ c_y \ c_z]$ :

$$N_x = \int \sigma_x \, dA = \int E (\varepsilon + z c_y - y c_z) \, dA = A \sigma_0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} My &= \int z \sigma_x \, dA = \int z \epsilon_x E \, dA \\ &= \int z E (\varepsilon + z c_y - y c_z) \, dA = c_y E \int z^2 \, dA \\ &= EI_y c_y = I_y \frac{\sigma_{x, z_{\text{máx}}} - \sigma_o}{z_{\text{máx}}} = W_y (\sigma_{x, z_{\text{máx}}} - \sigma_o) = I_y \frac{\Delta \sigma_{x, z}}{z} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$M_z = - \int y \sigma_x \, dy \, dz = -I_z \frac{\Delta \sigma_{x, y}}{y} = -W_z (\sigma_{x, y_{\text{máx}}} - \sigma_o) \quad (2.4)$$

En las expresiones anteriores se ha usado el hecho de que los momentos estáticos, de orden impar, en alguna de las variables son nulos al corresponder el origen al centro de gravedad. Por otro lado, en las de los momentos aparece el cociente, constante, entre la diferencia de tensión (en algún punto del eje) respecto de la del centro de gravedad y la distancia a dicho centro, que usualmente se traslada en las expresiones a sus máximos, dando lugar al módulo resistente como cociente entre la inercia y la distancia “de la fibra más alejada” al centro de gravedad.

De las expresiones anteriores cabe deducir la tensión normal en cualquier punto a partir de los esfuerzos resultantes, así como las relaciones entre las resultantes de esfuerzo y las deformaciones de la rebanada

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N}{A} + z \frac{M_y}{I_y} - y \frac{M_z}{I_z} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}; \quad c_y = \frac{M_y}{EI_y}; \quad c_z = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (2.6)$$

Estas últimas pueden reescribirse fácilmente en el formato de *esfuerzo* igual a *rigidez* por *deformación*.

Vamos a considerar ahora la formulación de los tres parámetros de movimiento pendientes, asociados al momento torsor y a los cortantes.

### 2.1.1.2. Propiedades de sección; tensiones tangenciales

Las tres componentes de movimiento que faltan por describir para la cara positiva de la rebanada (figura 2.1, proyección  $yz$ ) corresponderían a los desplazamientos en direcciones  $y$ ,  $z$ , asociados a los cortantes  $T_y, T_z$ , y a la rotación en torno al eje  $x$ , asociada al momento torsor  $M_x$ , esfuerzos todos ellos asociados a la distribución de tensiones tangentes a la sección.

En el caso de los desplazamientos laterales y los correspondientes cortantes, consideraciones de equilibrio añadidas a la hipótesis de que la sección se mantiene ortogonal a la deformada de la directriz permiten determinar los cortantes como funciones derivadas de los correspondientes momentos flectores, a la vez que determinar los desplazamientos  $y, z$  como efecto de las

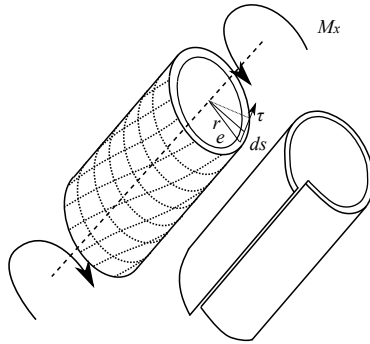


Figura 2.2: Comportamiento en torsión de una sección cerrada hueca.

rotaciones  $\theta_z, \theta_y$ , cuyas derivadas son las curvaturas ya consideradas,  $c_z, c_y$ , de modo que, en este modelo, se puede prescindir de tales componentes de deformación y esfuerzo.

En el caso del momento torsor y la correspondiente rotación de la sección, no cabe tal tipo de simplificación, si bien la formulación es sencilla para el caso de las secciones cerradas huecas y de espesor limitado en relación a las dimensiones de la sección, cuestión que abordamos a continuación.

En la figura 2.2 vemos un tramo de pieza hueca sometida a torsión y su deformación, en la que líneas paralelas a la directriz se deforman helicoidalmente. Vemos igualmente que si cortásemos la pieza longitudinalmente ambos labios del corte se deslizarían para reducir la deformación: dicho deslizamiento no

se produce en la pieza debido a las tensiones tangenciales paralelas a la directriz, conjugadas de las tangenciales contenidas en el plano de corte de la sección. Estas últimas, a su vez, están contenidas en el espesor y son paralelas a la línea media de dicho espesor. Para cada posición en la línea media  $s$  que define la sección, tanto el espesor  $e(s)$  como la tensión media  $\tau(s)$  pueden variar. Para cada posición consideramos que la tensión en todo el espesor es la misma, igual a esa tensión media.

Por equilibrio longitudinal en un tramo de rebanada entre dos secciones al que hiciésemos dos cortes longitudinales, debe cumplirse que el producto  $\tau e$  debe ser constante en todo el trazado de la sección. Esa constancia permite asimilar el estado tensional a un flujo que recorre de forma cerrada toda la sección.

El momento torsor  $M_x$  puede determinarse integrando los momentos aportados por ese flujo a lo largo de todo el trazado, lo que hacemos considerando el producto escalar del radio vector  $\vec{r}$  desde el centro de rotación a la posición en la sección, por el vector de flujo de fuerza  $\vec{\tau}e$  situado en dicha posición, integral que podemos relacionar con la correspondiente al área  $dA_\phi$  del triángulo formado por dos radios vectores sucesivos y el elemento de longitud de sección  $ds$  que los separa, y considerando la constancia  $\tau e$  en toda la sección, lo que relaciona directamente el momento con el área encerrada por la línea media de la sección:

$$M_x = \oint \vec{r} \cdot \vec{\tau}e \, ds = \oint 2\tau e \, dA_\phi = 2\tau e A_\phi \quad (2.7)$$

Para determinar la deformación (unitaria) ligada a dicho momento, es decir la rotación de torsión por unidad de longitud o

“curvatura” de torsión,  $c_x$ , consideramos la identidad entre el trabajo de deformación que se produciría en la rotación  $c_x$  entre dos secciones separadas una distancia unidad visto desde la perspectiva externa, como trabajo realizado por el momento  $M_x$ , o visto desde la perspectiva interna, como trabajo de deformación derivado del producto de las tensiones tangenciales por las distorsiones  $\gamma$  angulares correspondientes a dicha rotación. En el proceso podemos considerar el mismo comportamiento elástico en las dos perspectivas, de modo que, ignorando el factor 1/2 correspondiente a una puesta en carga lenta, tenemos

$$\begin{aligned} M_x c_x &= \iiint \tau \gamma \, dV = \int dh \oint \tau \gamma e \, ds \\ &= \int_0^1 dh \frac{\tau^2}{G} e^2 \oint \frac{ds}{e} = \frac{M_x^2}{4G A_\phi^2} \oint \frac{ds}{e} \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde hemos usado la constancia de  $\tau e$ , la relación elástica  $\gamma = \tau/G$ , y la ecuación 2.7. Podemos, por tanto determinar la relación momento a curvatura como

$$\frac{M_x}{c_x} = G \frac{4 A_\phi^2}{\oint ds/e} = G I_t \quad (2.9)$$

Un modelo así no es apropiado para describir el comportamiento de una sección abierta, en la que el “flujo” de tensiones, paralelas a los bordes de la sección, ya no puede ser considerado constante en el espesor, y donde además las deformaciones implican alabeo: piénsese en una pieza biempotrada de sección en H sometida a un momento torsor en el centro: en este caso lo relevante es más bien que los desplazamientos laterales opuestos

de las alas imponen una flexión opuesta en esta, y el cortante asociado a esa flexión, paralelo al ala y de sentido opuesto entre ambas es el que, en su producto por el brazo o distancia entre alas, equilibra el momento torsor correspondiente.

En este caso estamos hablando del torsor como *bicortante* y, en la medida en que el cortante del ala  $T_f$  puede entenderse como derivada del momento flector local al ala, opuesto entre ambas alas, podemos hablar del bicortante como derivada de ese *bimomento*, asociado a las tensiones normales correspondientes. Esas tensiones normales curvan en planta las alas en sentido opuesto, lo que supone un alabeo de la sección, que puede medirse por el giro entre las alas  $\alpha$  relativo a su distancia  $a = h - t_f$  (el canto menos el espesor de ala) para dos secciones sucesivas distantes la unidad. De este modo los parámetros de esfuerzo y de deformación pasan a ser el bimomento  $B$  cuya derivada longitudinal es el bicortante  $T_f a = M_x = \partial B / \partial x$  y el coeficiente de alabeo  $\omega = \alpha / a = 2\theta_{f,z} / a$ , donde  $\theta_{f,z}$  es la rotación de un ala en torno a la vertical, por tanto derivada del desplazamiento lateral del ala  $\delta_{f,y}$ , que puede analizarse a partir de la flexión en esta impuesta por el bimomento, y donde la rotación de torsión  $\theta_x$  puede asimismo determinarse a partir de ese desplazamiento lateral  $\delta_{f,y}$ , tal como podría deducirse de figuras como la 2.3. Las relaciones existentes entre estas variables permiten determinar el módulo de alabeo como componente de la relación entre el bimomento y el alabeo, que corresponderían a la pareja de variables conjugadas estática y cinemática del modelo. Se trata de un modelo que no vamos a detallar aquí, pero que conduce a las formulaciones de torsión por alabeo contenidas en la normativa para secciones abiertas.

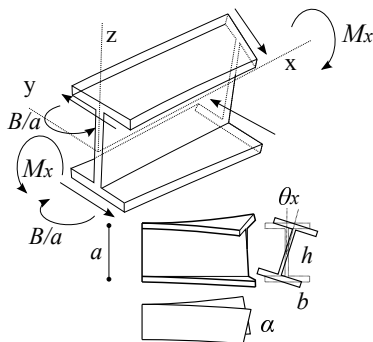


Figura 2.3: Comportamiento en torsión con alabeo de una pieza de sección abierta

En definitiva, estamos representando las condiciones de deformación de la pieza por un conjunto de funciones  $\epsilon$ , los correspondientes esfuerzos internos, conjugados energéticos de aquellas, por otro conjunto de funciones,  $\sigma$ , y las relaciones “constitutivas” o de comportamiento material por las funciones de rigidez  $\kappa$  que relacionan esfuerzos con deformaciones. En la pieza recta de Bernoulli–Navier ese modelo es el siguiente

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}; \quad \kappa = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GI_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \kappa \epsilon. \quad (2.10)$$

En dicho modelo están desacopladas las diferentes rigideces – solo hay términos en la diagonal de  $\kappa$ , aunque esto no es necesariamente así en todos los modelos posibles, como veremos más adelante.

### 2.1.1.3. Propiedades de pieza: variables y ecuaciones

Hemos visto en los apartados anteriores que resumimos los comportamientos de las secciones de la pieza, para cada posición  $x$  en esta, en las variables cinemáticas y estáticas siguientes:

- cinemáticas, de deformación  $\epsilon$ :
  - alargamiento  $\epsilon(x)$ ,
  - curvaturas de flexión vertical  $c_y(x)$  y lateral  $c_z(x)$ ,
  - curvatura de torsión  $c_x(x)$ ,
- estáticas, o de esfuerzo interno  $\sigma$ :
  - esfuerzo axial  $N(x)$ ,
  - momento flector “vertical”  $M_y(x)$  y lateral  $M_z(x)$ ,
  - momento torsor  $M_x(x)$ ,

para las que hemos obtenido las relaciones de “rigidez”  $\kappa$  en las expresiones 2.6 y 2.9, condensadas en 2.10. Se trata ahora de caracterizar el comportamiento de la pieza a partir del de sus secciones.

Para ello consideramos los seis movimientos posibles de cualquier sección, de acuerdo a la figura 2.4, que definirán las variables cinemáticas como funciones descritas sobre la longitud  $x$  de la pieza ( $0 \leq x \leq l$ ), y correspondientes a las componentes de los desplazamientos (incluyendo rotaciones) en tres dimensiones:

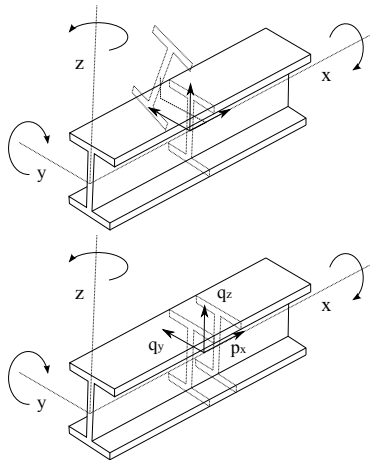


Figura 2.4: Movimientos de la sección, y cargas distribuidas.

- desplazamientos  $u(x), v(x), w(x)$
- rotaciones  $\theta_x(x), \theta_y(x), \theta_z(x)$ .

Asociados a estos movimientos tendríamos las variables estáticas definidas por los correspondientes conjugados energéticos, es decir, las cargas aplicadas, a saber

- la carga distribuida longitudinal  $p_x(x)$  y transversales lateral  $q_y(x)$  y vertical  $q_z(x)$ ,
- los momentos aplicados axialmente (como torsión  $m_x(x)$ ) o aplicados como flexión, lateral  $m_z(x)$  o vertical  $m_y(x)$ , valores todos ellos medidos por unidad de longitud.

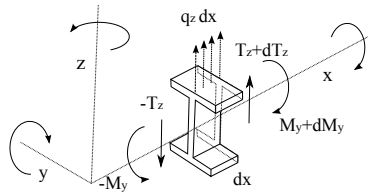


Figura 2.5: Equilibrio de fuerzas verticales y momentos de flexión vertical de una rebanada

Podemos ahora plantear los tres grupos de ecuaciones clásicas entre los correspondientes parámetros, a saber, las de compatibilidad que ligan desplazamientos con deformaciones y las de equilibrio entre esfuerzos con cargas, ecuaciones a las que se añadirán las de comportamiento del material, en este caso elástico, entre esfuerzos y deformaciones.

Cada una de las ecuaciones de equilibrio se establecen para el elemento diferencial en la forma que se observa en la figura 2.5, en la que el equilibrio de fuerzas verticales implica  $q_z dx + dT_z = 0$ , que puede escribirse igualmente como  $q_z + \partial T_z / \partial x = q_z + T'_z = 0$ . Para el equilibrio de momentos resulta en este caso que  $-T_z dx + m_y dx + dM_y = 0$ , donde  $m_y$  sería el momento externo aplicado por unidad de longitud, que habitualmente se supone nulo, como en la figura. En tal caso resulta  $-T_z + dM_y / dx = -T_z + M'_y = 0$ . En la figura, los sentidos positivos de los esfuerzos, de acuerdo a los criterios elegidos, se asignan a la cara de coordenadas  $x$  crecientes.

$$\begin{aligned}
 q_y + T'_y &= 0 \\
 q_z + T'_z &= 0 \\
 T_y + M'_z &= 0 \\
 -T_z + M'_y &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

De entre todas estas ecuaciones, las correspondientes al equilibrio de momentos entre los cortantes y la variación de los momentos flectores se utilizarán en las correspondientes al equilibrio de la carga transversal con los cortantes para eliminar estos del grupo de variables a considerar.

Las ecuaciones de compatibilidad entre desplazamientos fuera del eje y los correspondientes giros y curvaturas en la rebana, siguiendo los criterios de denominación de la figura 2.5, serán:

$$\begin{aligned}
 c_z &= \frac{\partial \theta_z}{\partial x} = \theta'_z \\
 c_y &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \theta'_y \\
 \theta_z &= \frac{\partial v}{\partial x} = v' \\
 \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} = -w'
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

donde las expresiones están ordenadas para considerar primero el movimiento en flexión lateral y luego en vertical.

En estas últimas, el modelo Bernoulli–Navier permite poder derivar la curvatura de flexión de los desplazamientos transver-

sales de la deformada, cuya derivada es la rotación tanto de la directriz como de la sección, al mantenerse la perpendicularidad.

De este modo, las ecuaciones resultantes son las siguientes:

equilibrio

$$\begin{aligned}
 p_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} &= p_x + N'_x = 0 \\
 m_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} &= m_x + M'_x = 0 \\
 q_z + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} &= q_z + M''_y = 0 \\
 q_y - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} &= q_y - M''_z = 0
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

compatibilidad

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} = u' \\
 c_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \theta'_x \\
 c_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -w'' \\
 c_z &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v''
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

material, elástico para el modelo Bernoulli–Navier

$$\begin{aligned}
 N_x &= EA \varepsilon \\
 M_x &= GI_t c_x \\
 M_y &= EI_y c_y \\
 M_z &= EI_z c_z
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

donde ahora el orden de las ecuaciones corresponde sucesivamente a los movimientos axiales, verticales y laterales, y donde rotaciones o momentos están expresados en relación al eje en torno al que actúan. Tenemos, en definitiva, que hemos extendido el modelo descrito en las ecuaciones 2.10 a través de nuevas funciones para desplazamientos  $\mathbf{v}$  y carga distribuida  $\boldsymbol{\tau}$ , cuyas relaciones con las anteriores deformaciones  $\boldsymbol{\epsilon}$  y esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  se obtienen mediante las ecuaciones diferenciales 2.13 y 2.14, que implican aplicar algún tipo de operador diferencial  $\boldsymbol{\partial}$  a unas funciones para determinar otras (las deformaciones como diferencias entre desplazamientos, o las cargas como diferencias entre esfuerzos). En nuestro caso, las funciones de desplazamiento y carga son respectivamente:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_x \\ \theta_x \\ w \\ v \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} p_x \\ m_x \\ q_z \\ q_y \end{bmatrix}; \tag{2.16}$$

y las relaciones diferenciales apuntadas antes, las siguientes:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon \\ c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ \theta_x \\ w \\ v \end{bmatrix} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{v}; \\ \boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} p_x \\ m_x \\ q_z \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Hay que hacer notar que el operador diferencial  $\boldsymbol{\delta}$  aplicable a los esfuerzos para determinar las cargas es el adjunto del aplicado a los desplazamientos para obtener las deformaciones ( $\boldsymbol{\delta}$ ). Esto es así porque, si consideramos el principio de los trabajos virtuales, para cualquier movimiento compatible  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{v}}$  aplicado a un estado de esfuerzos en equilibrio con las cargas  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}$  debe resultar que el trabajo externo, desplazamientos por cargas  $\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma$  sea igual al trabajo interno de deformaciones por esfuerzos,  $\int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$ , de modo que, siendo iguales ambos escalares

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma \\ \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\delta} \bar{\mathbf{v}})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.18) \end{aligned}$$

resulta<sup>1</sup>

$$\delta = \delta^* \quad (2.19)$$

En el caso considerado de la barra ambos dominios  $\Gamma$  y  $\Omega$  contienen la directriz  $x$ , si bien  $\Gamma$  debe incluir los extremos de la región considerada.

En definitiva, el conjunto de ecuaciones de compatibilidad, equilibrio y de comportamiento material o constitutivas son de la forma

$$\epsilon = \partial v; \quad \tau = \delta^* \sigma; \quad \sigma = \kappa \epsilon. \quad (2.20)$$

#### 2.1.1.4. Ecuaciones diferenciales de la barra

Podemos ahora combinar las ecuaciones de los tres grupos, lo que resulta fácil pues, al estar desacopladas unas de otras, permite considerar cada componente por separado. Tras sustituir sucesivamente en las ecuaciones de equilibrio, 2.13, las de condiciones materiales 2.15 y de compatibilidad 2.14 obtenemos el conjunto de ecuaciones que ligán los movimientos de la barra con las cargas aplicadas a esta.

$$\begin{aligned} (EAu')' &= -p_x \\ (GI_t\theta'_x)' &= -m_x \\ (EI_y w'')'' &= q_z \\ (EI_z v'')'' &= q_y \end{aligned} \quad (2.21)$$

---

1. En el contexto de algún tipo de producto escalar, la definición habitual de operadores adjuntos exige la igualdad de los productos escalares  $\langle \bar{u} | \partial v \rangle = \langle \delta \bar{u} | v \rangle$ .

En el formato general usado en 2.20, dicha cadena de sustituciones nos llevaría a la ecuación diferencial

$$\tau = \partial^*(\kappa \partial v). \quad (2.22)$$

### 2.1.1.5. Comportamiento de pieza: descomposición

Dadas las ecuaciones precedentes, y el principio de superposición implícito en el modelo elástico, vamos a emplear un procedimiento de descomposición del problema de la pieza para representar su comportamiento, tanto aisladamente como en su interacción con el conjunto de las que forman la estructura. En ese procedimiento consideramos separadamente la solución de dos problemas

- la situación de *empotramiento perfecto*, en la que la pieza está cargada, con cargas distribuidas  $q$ , y sujeta a coacciones que impiden completamente el movimiento de sus extremos, por lo que aparecerán reacciones  $-\mathbf{f}_q$  aplicadas a dichos extremos. En esta situación la directriz de la barra se mueve y deforma bajo las cargas, y se genera una distribución de esfuerzos equilibrados con cargas y reacciones, de tal modo que se cumplan las ecuaciones de la viga descritas por 2.21.
- la situación de la estructura conectada completa, conteniendo todas las barras sin carga, y donde aplicamos como carga en los nudos o conexiones las acciones  $\mathbf{F}$  obtenidas considerando fuerzas  $\mathbf{f}_q$  externas contrarias a las reacciones anteriores de todas las piezas. En este segundo problema (o segunda parte del problema) la estructura se mueve añadiendo desplazamientos, deformación y esfuerzos adicionales a las

barras, en un movimiento que libera las coacciones del paso anterior en tanto las sumas de  $-\mathbf{f}_q$  y  $\mathbf{f}_q$  de la superposición se anularán en los nudos.

La superposición de ambos problemas resuelve el problema general en dos pasos, donde en el primero no hay consideración ninguna sobre la influencia del resto de la estructura en el comportamiento de la barra, y en el segundo no necesitamos considerar las cargas distribuidas sobre las diferentes piezas, solo sus conexiones en la estructura completa.

Por tanto, para el análisis de la interacción que comporta el movimiento general de la estructura nos será suficiente considerar las barras conectadas pero sin carga.

#### 2.1.1.6. Propiedades de pieza: funciones de forma

Para toda barra no cargada cuyos extremos se ven sometidos a movimientos y esfuerzos forzados por su inclusión en los movimientos de una estructura sometida a cargas en sus nudos, las ecuaciones que describen dicho movimiento serán las 2.21 donde los términos de carga sobre la barra  $(p_x, m_x, q_z, q_y)$  serán nulos. Podemos por tanto considerar que dichos movimientos pueden determinarse mediante funciones que cumplan simultáneamente dichas ecuaciones junto con las condiciones de movimiento correspondientes a sus extremos. Tales funciones para describir el desplazamiento pueden considerarse como *funciones de forma* o *funciones de interpolación* pues, en definitiva, no serán más que funciones que describen el movimiento a lo largo de la barra a partir de los movimientos de sus extremos.

Si consideramos barras de sección constante, el cumplimiento

de dichas ecuaciones es inmediato si seleccionamos como funciones polinomios de grado tal que la derivada del desplazamiento aplicado en la función se anule, es decir polinomios de primer grado —lineales— para las dos primeras, las que describen los movimientos axiales, y polinomios de tercer grado para las dos restantes, que describen los movimientos transversales.

Es decir, tendremos

$$\begin{aligned} u'' &= 0; \quad u = a_1x + a_0 \\ \theta_x'' &= 0; \quad \theta_x = b_1x + b_0 \\ v^{IV} &= 0; \quad v = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \\ w^{IV} &= 0; \quad w = d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde los coeficientes de los polinomios son por el momento desconocidos, si bien pueden determinarse si se plantea el cumplimiento de las condiciones de extremo: deben ser los que aseguren que dichos movimientos son los prescritos para los extremos de la pieza.

De tal modo que para el desplazamiento longitudinal  $u$  de los extremos izquierdo y derecho de una pieza de longitud  $l$  tendremos

$$\begin{aligned} u_i &= u(0) = a_0; \quad u_d = u(l) = a_1l + a_0; \\ a_0 &= u_i; \quad a_1 = \frac{u_d - u_i}{l} \\ u(x) &= u_i + \frac{u_d - u_i}{l}x = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_i + \frac{x}{l}u_d \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde hemos escrito al final la ley de desplazamientos en cada

punto de la barra como la suma de la influencia en este de los desplazamientos de cada extremo.

Análogamente, para los desplazamientos transversales tendremos que establecer cuatro condiciones para fijar los cuatro coeficientes: se trata de que tanto el desplazamiento transversal como la rotación de los dos extremos coincidan en la definición de la función con los prescritos para los extremos izquierdo y derecho de la barra. Para el caso de los movimientos verticales tenemos

$$\begin{aligned} w(0) &= w_i; \quad w'(0) = \theta_y(0) = \theta_{y,i}; \\ w(l) &= w_d; \quad w'(l) = \theta_y(l) = \theta_{y,d}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Una manera de calcular los coeficientes buscados es sustituir en la expresión polinómica escrita en formato matricial las coordenadas de los nudos, e igualar la expresión resultante a los desplazamientos  $w$  o rotaciones  $w' = \theta$  de tales extremos, y dado que  $w' = 3d_3x^2 + 2d_2x + d_1$ , obtenemos

$$\begin{bmatrix} w_i \\ w'_i \\ w_d \\ w'_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ 0 & 1 & 2x_i & 3x_i^2 \\ 1 & x_d & x_d^2 & x_d^3 \\ 0 & 1 & 2x_d & 3x_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ecuación que cabe resolver para el vector de coeficientes buscado haciendo

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ 0 & 1 & 2x_i & 3x_i^2 \\ 1 & x_d & x_d^2 & x_d^3 \\ 0 & 1 & 2x_d & 3x_d^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{y,i} \\ w_d \\ \theta_{y,d} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

de modo que si las coordenadas de extremo izquierdo y derecho son respectivamente 0 y  $l$  tendremos:

$$\begin{aligned} d_0 &= w_i, \quad d_1 = \theta_{y,i}, \\ d_2 &= -\frac{3}{l^2}w_i - \frac{2}{l}\theta_{y,i} + \frac{3}{l^2}w_d - \frac{1}{l}\theta_{y,d}, \\ d_3 &= \frac{2}{l^3}w_i + \frac{1}{l^2}\theta_{y,i} - \frac{2}{l^3}w_d + \frac{1}{l^2}\theta_{y,d} \end{aligned} \quad (2.28)$$

y por lo tanto podemos escribir la función que representa el movimiento transversal en la forma

$$\begin{aligned} w = \left( \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \right) w_i + \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \right) \theta_{y,i} + \\ \left( -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \right) w_d + \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) \theta_{y,d} \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde nuevamente hemos expresado el desplazamiento como suma de los efectos independientes de cada uno de los movimientos de extremo, desplazamiento o rotación, considerados aisladamente. Análogamente resultaría para los movimientos de flexión lateral  $v(x)$ .

Es decir, tenemos que los desplazamientos a lo largo del continuo de la barra pueden describirse en general en un formato en el que empleamos unas funciones de forma o de interpolación conocidas que acumulan el efecto independiente de una colección de parámetros separados,  $\mathbf{a}$ , que, en este caso, corresponden a cada uno de los movimientos de extremo de la pieza considerados aisladamente. La función que describe el movimiento es el

producto escalar de unas funciones de forma conocidas a priori por los coeficientes que representan los movimientos de extremo relevantes. A cada movimiento se le asociará la función apropiada:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}(x) \mathbf{a} = \mathbf{N}(x) \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}. \quad (2.30)$$

### 2.1.1.7. Modelos: Matrices de carga y de rigidez

Hemos visto como describir la deformación de la pieza a partir de los movimientos de extremo.

Si para la pieza tenemos una lista de parámetros cinemáticos que corresponden a dichos movimientos de extremo, lo pertinente será considerar la correspondiente lista de parámetros estáticos y seleccionar para estos los conjugados energéticos correspondientes, es decir, para cada componente de desplazamiento en cada extremo seleccionaremos la correspondiente componente de fuerza aplicada en dicho extremo, y análogamente para cada componente de rotación el correspondiente momento aplicado al extremo.

De este modo podemos considerar que tales movimientos de extremo caracterizan las deformaciones de la pieza y sus fuerzas de extremo por tanto caracterizan los esfuerzos que la estructura impone a tal pieza. Por ello denotamos a los primeros con  $\mathbf{u}$  y a los segundos con  $\mathbf{f}$ , reservando los símbolos  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{F}$  para los movimientos de los nudos que conectan las piezas entre sí y las correspondientes cargas aplicadas en estos en virtud de la descomposición de la que se habla en el apartado 2.1.1.5.

Ahora bien, a fin de que la descripción del comportamiento de la pieza pueda considerarse completa y adecuada a partir de

estos parámetros de extremo, tenemos que asegurar que el trabajo de deformación para cualquier estado de la pieza, medido en la descripción interna, en forma continua a lo largo de toda la directriz, pueda ser reproducido idénticamente mediante el trabajo medido a través de la evolución de los parámetros de extremo. O lo que es lo mismo, aplicando el principio de los trabajos virtuales, que el trabajo interno realizado por los esfuerzos en una deformación virtual arbitraria resulte idéntico al trabajo externo realizado por los esfuerzos de extremo en los movimientos de extremo asociados a esa deformación virtual. Tenemos pues, que podemos describir los movimientos distribuidos  $\mathbf{v}$  a partir de los de los extremos  $\mathbf{u}$ , de modo que para cualquier movimiento compatible así descrito  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}$  esa igualdad de trabajos implica

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} &= \int \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\tau} \, d\Gamma \\
 &= \int \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau} \, d\Gamma = \bar{\mathbf{u}}^T \int \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau} \, d\Gamma, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^T; \\
 \mathbf{f} &= \int \mathbf{N}^T \boldsymbol{\tau} \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

y análogamente,

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} &= \int \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega \\
 &= \int (\boldsymbol{\partial}(\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}))^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial}(\mathbf{N}\mathbf{u}) \, d\Omega \\
 &= \int \bar{\mathbf{u}}^T (\boldsymbol{\partial}\mathbf{N})^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial}(\mathbf{N})\mathbf{u} \, d\Omega \\
 &= \bar{\mathbf{u}}^T \left( \int \mathbf{N}'^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N}' \, d\Omega \right) \mathbf{u}, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^T; \\
 \mathbf{f} &= \mathbf{k}\mathbf{u} \\
 \mathbf{k} &= \int \mathbf{N}'^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N}' \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde se han extraído fuera de las integrales los parámetros  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{u}$  que caracterizan los movimientos del sistema compatible arbitrario o de la deformación real ligada a los esfuerzos y deformaciones  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$ , y donde consecuentemente el operador diferencial relevante se limita en su aplicación a las funciones de forma preestablecidas para el problema considerado, de modo que la determinación de la relación de rigidez relevante resulta inmediata.

Tenemos, por tanto, un método general que podemos usar para determinar las expresiones relevantes al problema de la pieza recta de sección constante.

### Carga: valores de empotramiento

Aplicamos 2.31 a la pieza recta para determinar los esfuerzos

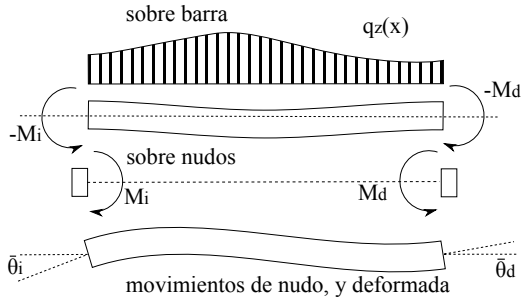


Figura 2.6: Cargas nodales equivalentes a la carga distribuida sobre la pieza

nodales  $M_i, M_d$  equivalentes a la carga distribuida  $q(x)$  sobre esta (figura 2.6) en la que se modelan como parámetros de movimiento de extremo las rotaciones de estos respecto de la línea recta que los une y donde por tanto los parámetros de esfuerzo de extremo son esos dos momentos.

Tendremos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ M_d \end{bmatrix} &= \int \bar{z}(x) q(x) dx \\ &= \int \begin{bmatrix} \bar{\theta}_i & \bar{\theta}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i(x) \\ N_d(x) \end{bmatrix} q(x) dx \end{aligned} \quad (2.33)$$

obteniendo

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int q(x) N_i(x) dx \\ \int q(x) N_d(x) dx \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Podemos de este modo emplear esta expresión para obtener los momentos de empotramiento de la barra usando para las funciones de forma las correspondientes a las rotaciones en el plano vertical (asociadas a las rotaciones de extremo  $\theta_{y,i}, \theta_{y,d}$ ) que se emplean en la ecuación 2.29. Veamos tres casos típicos:

- para carga uniforme,  $q(x) = q$ , constante:

$$\begin{aligned} M_i &= \int_0^l q \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \right) dx = \frac{ql^2}{12} \\ M_d &= \int_0^l q \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) dx = -\frac{ql^2}{12} \end{aligned} \quad (2.35)$$

- para carga triangular,  $q(x) = q_{\text{máx}}x/l$ :

$$\begin{aligned} M_i &= \int_0^l \frac{q_{\text{máx}}x}{l} \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \right) dx = \frac{q_{\text{máx}}l^2}{30} \\ M_d &= \int_0^l \frac{q_{\text{máx}}x}{l} \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) dx = -\frac{q_{\text{máx}}l^2}{20} \end{aligned} \quad (2.36)$$

- para carga puntual centrada,  $q(x) = P\delta(x - l/2)$ , donde se usa la función delta de Dirac  $\delta(x)$  nula en todo el dominio salvo en la coordenada 0, donde se hace indefinida, y de integral unidad al cruzar dicho punto:

$$\begin{aligned} M_i &= \int_0^l P \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \right) dx = \frac{Pl}{8} \\ M_d &= \int_0^l P \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) dx = -\frac{Pl}{8} \end{aligned} \quad (2.37)$$

### Rigidez de la barra

Análogamente aplicamos 2.32 para determinar las rigideces de la pieza recta de sección constante, empleando las funciones de forma ya vistas en 2.24 y 2.29, y considerando como operador diferencial  $\mathcal{D}$  el correspondiente a las relaciones cinemáticas de entre los descritos en 2.17:

- rigidez longitudinal; tracción o torsión:

$$\begin{aligned} [\bar{u}_i \quad \bar{u}_d] \begin{bmatrix} f_{x,i} \\ f_{x,d} \end{bmatrix} &= \int \bar{\varepsilon} N_x dV = \int_0^l \bar{\varepsilon} EA \varepsilon dx \\ &= \int_0^l \left( [\bar{u}_i \quad \bar{u}_d] \begin{bmatrix} N_i(x) \\ N_d(x) \end{bmatrix} \right)' EA \left( [N_i(x) \quad N_d(x)] \begin{bmatrix} u_i \\ u_d \end{bmatrix} \right)' dx \end{aligned}$$

donde podemos extraer fuera de las integrales los parámetros numéricos que corresponden a cada uno de los campos de deformación, virtual o real, de modo que resulta igual a:

$$\begin{aligned} &= [\bar{u}_i \quad \bar{u}_d] \left( \int_0^l \begin{bmatrix} N_i(x)' \\ N_d(x)' \end{bmatrix} EA [N_i(x)' \quad N_d(x)'] dx \right) \begin{bmatrix} u_i \\ u_d \end{bmatrix} \\ &= [\bar{u}_i \quad \bar{u}_d] \int_0^l \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} u_i \\ u_d \end{bmatrix} \\ &= [\bar{u}_i \quad \bar{u}_d] \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_d \end{bmatrix}; \quad \forall [\bar{u}_i \quad \bar{u}_d] \end{aligned} \quad (2.38)$$

lo que implica

$$\begin{bmatrix} f_{x,i} \\ f_{x,d} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_d \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

y como las funciones son semejantes para la torsión, tendremos análogamente

$$\begin{bmatrix} m_{x,i} \\ m_{x,d} \end{bmatrix} = \frac{GI_t}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x,i} \\ \theta_{x,d} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

■ Para las rigideces transversales tenemos:

$$\begin{aligned} [\bar{\theta}_{y,i} \quad \bar{\theta}_{y,d}] \begin{bmatrix} m_{y,i} \\ m_{y,d} \end{bmatrix} &= \int_0^l \bar{c}_y(x) m_y(x) dx = \int_0^l \bar{w}(x)'' EI w(x)'' dx \\ &= \int_0^l [\bar{\theta}_{y,i} \quad \bar{\theta}_{y,d}] \begin{bmatrix} N_i(x)'' \\ N_d(x)'' \end{bmatrix} EI [N_i(x)'' \quad N_d(x)'] \begin{bmatrix} \theta_{y,i} \\ \theta_{y,d} \end{bmatrix} dx \\ &= [\bar{\theta}_{y,i} \quad \bar{\theta}_{y,d}] \int_0^l \begin{bmatrix} N_i(x)'' \\ N_d(x)'' \end{bmatrix} EI [N_i(x)'' \quad N_d(x)'] dx \begin{bmatrix} \theta_{y,i} \\ \theta_{y,d} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{y,i} \\ m_{y,d} \end{bmatrix} &= \int_0^l \begin{bmatrix} N_i(x)'' \\ N_d(x)'' \end{bmatrix} EI [N_i(x)'' \quad N_d(x)'] dx \begin{bmatrix} \theta_{y,i} \\ \theta_{y,d} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{k} &= \int_0^l \begin{bmatrix} N_i(x)'' \\ N_d(x)'' \end{bmatrix} EI [N_i(x)'' \quad N_d(x)'] dx = \\ &= \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} \\ \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} & \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \end{bmatrix} dx = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Cabe señalar que si las funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  empleadas en las expresiones 2.31 y 2.32 para obtener las cargas nodales equivalentes o las rigideces de las piezas son exactas,

es decir, si son solución de la ecuación diferencial relevante, las expresiones obtenidas lo son también. Pero en el caso de que no sean exactas, sino solo aproximadas, las expresiones resultantes aportan también una aproximación que puede ser útil.

Podemos ahora consolidar todos los resultados obtenidos para las rigideces en 2.39, 2.40 y 2.42. Para establecer las rigideces en flexión, hemos considerado en 2.42 solo los dos parámetros asociados a las rotaciones, lo que genera las relaciones de rigidez entre giros-momentos, pero pueden extenderse fácilmente tales relaciones para considerar los parámetros de desplazamientos (y de cortantes de extremo): por un lado los cortantes pueden obtenerse mediante la suma de momentos de extremo divididos por la luz, lo que implica dividir por la luz la suma de las columnas relevantes de las rigideces momento-giro para el caso de solo giro de extremo. Y por otro lado si aislamos un único desplazamiento de extremo, este puede entenderse como la suma de una rotación de la barra sin deformación (por tanto sin flexiones) más las rotaciones en ambos extremos que llevan los nudos a sus direcciones originales (por tanto iguales ambas al cociente desplazamiento-luz), rotaciones asociadas a los momentos que resultan de la rigideces momento-giro ya vistas. Esto implica que la relación momento-desplazamiento es la suma, dividida por la luz, de las rigideces de las filas que contienen las relaciones momento-giro relevantes, al darse rotaciones (relativas a la geometría desplazada sin deformación) en ambos extremos.

Tenemos por lo tanto las relaciones de rigidez de la pieza recta de sección constante siguientes:

$$\begin{bmatrix} N_{x,i} \\ N_{x,d} \\ M_{x,i} \\ M_{x,d} \\ M_{y,i} \\ M_{y,d} \\ T_{z,i} \\ T_{z,d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_t}{l} & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EI_y}{l} & 2\frac{EI_y}{l} & -6\frac{EI_y}{l^2} & 6\frac{EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EI_y}{l} & 4\frac{EI_y}{l} & -6\frac{EI_y}{l^2} & 6\frac{EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EI_y}{l^2} & -6\frac{EI_y}{l^2} & 12\frac{EI_y}{l^3} & -12\frac{EI_y}{l^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_y}{l^2} & 6\frac{EI_y}{l^2} & -12\frac{EI_y}{l^3} & 12\frac{EI_y}{l^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_d \\ \theta_{x,i} \\ \theta_{x,d} \\ \theta_{y,i} \\ \theta_{y,d} \\ w_i \\ w_d \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

relaciones que es habitual encontrar en los textos en el formato equivalente

$$\begin{bmatrix} N_{x,i} \\ M_{x,i} \\ M_{y,i} \\ T_{z,i} \\ N_{x,d} \\ M_{x,d} \\ M_{y,d} \\ T_{z,d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\frac{EI_y}{l} & -6\frac{EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 2\frac{EI_y}{l} & 6\frac{EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & -6\frac{EI_y}{l^2} & 12\frac{EI_y}{l^3} & 0 & 0 & -6\frac{EI_y}{l^2} & -12\frac{EI_y}{l^3} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{EI_y}{l} & -6\frac{EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 4\frac{EI_y}{l} & 6\frac{EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & 6\frac{EI_y}{l^2} & -12\frac{EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 6\frac{EI_y}{l^2} & 12\frac{EI_y}{l^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_{x,i} \\ \theta_{y,i} \\ w_i \\ u_d \\ \theta_{x,d} \\ \theta_{y,d} \\ w_d \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

formato que puede interpretarse como una ordenación y partición de las relaciones de rigidez  $\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$  en la que se agrupan separadamente los efectos de cada nudo, el izquierdo  $i$ , o el derecho  $d$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{id} \\ \mathbf{k}_{di} & \mathbf{k}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Cabría ahora añadir una pequeña digresión en relación con el *acoplamiento* entre parámetros que revela el hecho de que la

matriz  $\mathbf{k}$  tenga elementos fuera de la diagonal. Si consideramos las fuerzas axiales, normal o momento, los términos fuera de la diagonal no revelan más que la redundancia en los parámetros: en efecto el esfuerzo en un extremo es igual y contrario al del otro, con lo que se puede eliminar dicha redundancia sin más que considerar un solo esfuerzo o momento axial y, como desplazamiento, el del movimiento o rotación relativo de un extremo respecto del otro. En el caso de las rigideces transversales, el acoplamiento de los cortantes con los momentos ya ha sido comentado, pueden ignorarse los cortantes junto con los desplazamientos laterales, a cambio de considerar como rotaciones no las rotaciones absolutas de los extremos, sino las relativas a la geometría recta no deformada que enlace las posiciones reales de los nudos, condición con la que obtuvimos las rigideces de flexión de 2.42. En esta última expresión estamos representando la relación entre momentos de extremo y giros (relativos) de extremo, y persiste el acoplamiento entre giros en un extremo y momento en el otro, al no ser diagonal la matriz.

Si nos planteamos el problema de diagonalizar dicha matriz, es decir, de establecer una representación para los esfuerzos (momentos) estrictamente proporcional a los movimientos (giros) estaríamos buscando una expresión tal como  $\mathbf{m} = \mathbf{k}\boldsymbol{\theta} = \lambda\boldsymbol{\theta}$ .

Es un problema clásico de autovalores en álgebra lineal:

$$(\mathbf{k} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0} \implies |\mathbf{k} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (2.46)$$

La solución de ese problema permite una representación alternativa a los momentos y los giros, tal como se hace en la figura 2.7, en la que estos giros o momentos (en ambos extremos) y

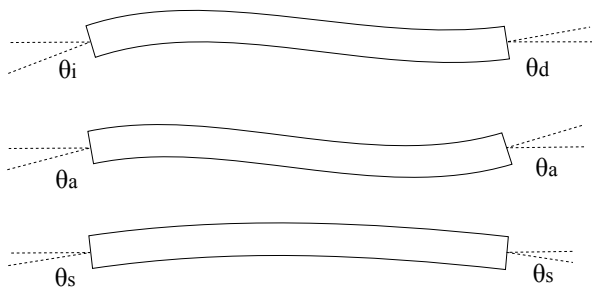


Figura 2.7: Diagonalizando la rigidez en flexión de vigas

su efecto en toda la pieza son la suma de la parte simétrica y la antisimétrica de los mismos, y donde las relaciones de rigidez para dichas partes son

$$\begin{bmatrix} M_{y,s} \\ M_{y,a} \end{bmatrix} = \frac{EI_y}{l} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{y,s} \\ \theta_{y,a} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Se ve ahora que ambas componentes del problema de flexión resultan desacopladas, lo que resulta de extrema utilidad para abordar problemas de forma manual, de tal modo que ha sido habitual a lo largo de la historia formular problemas de estructuras simétricas como la composición del comportamiento de estas para las partes simétrica y antisimétrica de la carga.

Desde esta perspectiva, la forma más reducida y clara de representar las relaciones de rigidez de la pieza recta de sección constante Bernoulli–Navier para todos los movimientos posibles

en el espacio sería

$$\begin{bmatrix} N_{x,id} \\ M_{x,id} \\ M_{y,a} \\ M_{y,s} \\ M_{z,a} \\ M_{z,s} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GI_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2EI_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x,id} \\ \theta_{x,id} \\ \theta_{y,a} \\ \theta_{y,s} \\ \theta_{z,a} \\ \theta_{z,s} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

donde el subíndice  $id$  expresa el movimiento de un nudo  $i$  relativo al otro  $d$ .

Una alteración adicional que permite adoptar idénticas unidades en todos los términos de la matriz  $\kappa$  consiste en usar como parámetros cinemático y estático axiales de la barra los reseñados como posibles en el ejemplo 1.3.7.4: la deformación unitaria  $\varepsilon_{x,id}$  y el correspondiente volumen de tensión  $N_{x,id}l_{id}$ , lo que transforma consecuentemente el término de la diagonal a la forma  $EV = EAl = \frac{1}{l}EAl^2$ . Este formato permite identificar la importancia relativa de los diferentes términos de la rigidez, siendo los términos menores los de mayor relevancia en la respuesta. Lo que justifica la frecuente eliminación de las componentes de elongación axial frente a las de flexión, dado el alto valor del pivote  $EAl^2$  frente al  $6EI = 6EAi^2$  al tener usualmente la esbeltez geométrica  $l/i$  de las piezas un valor de algunas decenas.

## 2.1.2. Análisis de la estructura completa

### 2.1.2.1. Subestructuras

Vamos a considerar la posibilidad de existencia de subestructuras, es decir, de regiones de la estructura que quepa considerar en conjunto, compuestas a partir de elementos de menor dimensión o complejidad que la integren: podría ser el caso de regiones de vigas con cantos variados, que cabe pensar representadas indistintamente,

- bien como la composición de todos y cada uno de sus tramos, conectados entre sí mediante nudos que se consideran en el modelo global
- bien como un elemento único en el que se condensen todas las propiedades del conjunto y conectados solo a través de un conjunto limitado de nudos al modelo global.

Aunque es muy habitual considerar el primer procedimiento como método general, pese a que puede suponer un número adicional de parámetros en el modelo global, es de interés considerar el segundo enfoque, no tanto por la reducción de grados de libertad que pueda suponer, cuanto por la generalidad que aporta. Efectivamente, podría aplicarse el procedimiento a las condiciones de piezas prefabricadas de cualquier formato, o al comportamiento de piezas cuyos extremos deban unirse con uniones de rigidez conocida. En este caso el modelo permitiría incorporar el comportamiento de tales nudos al de la propia pieza. Consideremos una de tales subestructuras, en la figura 2.8, en la que están señalados en trazos los parámetros estáticos correspondientes a la conexión con el resto de la estructura (las

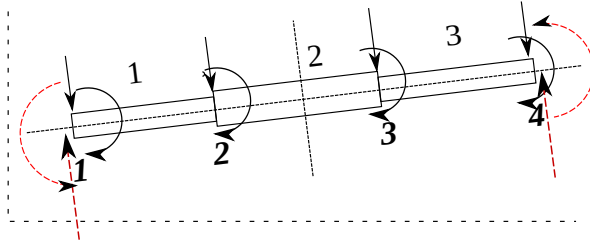


Figura 2.8: Subestructura de tres elementos y cuatro nudos a condensar en dos. Ejes locales y globales no coincidentes.

reacciones de la estructura contra la subestructura, en ejes de esta última), y en línea los parámetros internos ligados a movimientos o cargas de los nudos de la subestructura, tanto los que no conectan más que elementos de la subestructura entre sí como los que conectan con los nudos de la estructura del modelo global. Usaremos el subíndice  $c$  ( $1 \leq c \leq c_{\text{máx}}$ ) para identificar los parámetros correspondientes a la conexión con el resto de la estructura, y el subíndice  $i$  ( $1 \leq i \leq i_{\text{máx}}$ ) para los internos no conectados. Siendo el total de parámetros  $g$  considerados para describir la subestructura el conjunto de todos estos ( $g_{\text{máx}} = c_{\text{máx}} + i_{\text{máx}}$ ). Desde la perspectiva interna, las acciones equivalentes acumuladas de todos los tramos de la subestructura sobre el conjunto de nudos considerada en esta vendrán dadas por parámetros  $\mathbf{F}$  que integran los internos  $i$  y los conectados  $c$ , en equilibrio con los esfuerzos internos  $\mathbf{f}$  relevantes para cada uno de esos tramos, mientras que las reacciones de la estructura

– $\mathcal{F}_c$  contra la subestructura se corresponderían con las necesarias para equilibrar todas las cargas en esta última, teniendo en consideración todos sus movimientos.

Vamos por ello a considerar el problema en tres fases, y su solución mediante la superposición de los estados correspondientes a las tres:

- primero analizamos la subestructura como si ninguno de sus nudos se moviese, de modo que las cargas distribuídas se aplican sobre ella junto con reacciones que impidan los movimientos de todos los nudos de la subestructura, estén o no conectados (empotramiento perfecto); . . .
- en segundo lugar consideramos que los nudos internos se desplazan debido a cargas aplicadas sobre ellos, que serán iguales y contrarias a las reacciones de empotramiento de la fase anterior, pero manteniendo coacciones desde el resto de la estructura capaces de impedir todo movimiento en sus conexiones a la subestructura (por tanto sin movimientos en los nudos o grados de libertad conectados), añadiendo por tanto las reacciones necesarias en tales nudos;
- finalmente consideramos el movimiento e interacción conjunta de subestructura y estructura, por tanto liberando los movimientos en los nudos de conexión entre ambas, movimientos e interacción derivados de las cargas sobre los nudos antes coaccionados, iguales y contrarias a las reacciones previamente acumuladas en ellos.

Para cada fase, podemos considerar sistemas de ejes propios, a saber, los propios de los elementos que componen la subestructura, los de la subestructura en conjunto, o los globales de

la estructura. Por el principio de superposición, en la primera fase se reducen las cargas distribuídas a cargas equivalentes sobre los nudos de la subestructura, en la segunda se reducen las cargas sobre los nudos internos a esta, que son los que pasan a desplazarse, a cargas adicionales sobre los nudos conectados de la estructura completa, y en la tercera las cargas acumuladas actúan sobre la estructura movilizandando el comportamiento completo de esta. La suma —superposición— de cargas y leyes de esfuerzos de las tres fases serán la solución del problema completo pues, como en cada fase las reacciones de la fase anterior son, cambiadas de signo, las cargas de la nueva fase, en la superposición se anulan todas las reacciones (como podrían ser los momentos de empotramiento perfecto ) de todas las fases intermedias.

Las solución del problema original es, pues, la superposición de los tres estados estudiados.

Para una primera fase, las cargas equivalentes (contrarias a las reacciones de empotramiento) que las cargas distribuídas sobre los elementos ejercen sobre los  $g$  nudos de la subestructura son sencillas de determinar, de acuerdo a los procedimientos de la sección 2.1.1.7, ecuación 2.31, y estarán compuestas de las  $\mathbf{F}_{c1}$  y las  $\mathbf{F}_{i1}$  aplicadas sobre todos los nudos, conectados o no, de de la subestructura. Las cargas equivalentes sobre los nudos conectados exigen reacciones opuestas en ellos ( $-\mathbf{F}_{c1}$ ,  $-\mathbf{F}_{i1}$ ).

En una segunda fase, los nudos  $i$  se desplazan debidos a las cargas  $\mathbf{F}_{i1}$  mientras que los nudos  $c$  se mantienen fijos, apareciendo en ellos las reacciones adicionales necesarias para equilibrar las fuerzas  $\mathbf{F}_{i1}$ . En esta segunda fase, los esfuerzos y deformaciones de cada tramo o elemento de la subestructura,  $\mathbf{f}$  y

$\mathbf{u}$ , están ligados por las relaciones materiales de cada elemento,  $\mathbf{k}$ , fáciles de conocer. Las reacciones pueden determinarse: si la relación entre los movimientos de los elementos de la subestructura a los  $g$  movimientos de los nudos de esta es, para los ejes o representación elegida en unos y otra,  $\mathbf{B}_{eg}$  (es decir,  $\mathbf{u} = \mathbf{B}_{eg}\mathbf{U}_g$ ), puede establecerse la relación entre acciones sobre los nudos de la subestructura y los movimientos de esta a partir de las respectivas relaciones en los elementos: es la matriz de rigidez de la subestructura considerada aisladamente, que podemos ordenar y partir de acuerdo a los grados de libertad identificados como  $c$  o  $i$ :

$$\mathbf{K}_g = [\mathbf{B}_{eg}^T \mathbf{k} \mathbf{B}_{eg}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ci} \\ \mathbf{K}_{ic} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

A partir de esta relación de rigidez, las reacciones se determinan considerando nulos los movimientos de los grados de libertad “conectados”.

$$\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{c2} \\ \mathbf{F}_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ci} \\ \mathbf{K}_{ic} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{c2} \\ \mathbf{U}_{i2} \end{bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{U}_{c2} = \mathbf{0}. \quad (2.50)$$

De este modo pueden obtenerse los movimientos  $\mathbf{U}_{i2}$  requeridos para desarrollar los esfuerzos que permiten sostener las cargas  $\mathbf{F}_{i1}$ , y las correspondientes reacciones  $\mathbf{R}_{c2}$  necesarias para mantener los nudos  $c$  sin movimiento:

$$\mathbf{U}_{i2} = (\mathbf{K}_{ii})^{-1} \mathbf{F}_{i1} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{R}_{c2} = \mathbf{K}_{ci} \mathbf{U}_{i2} = \mathbf{K}_{ci} (\mathbf{K}_{ii})^{-1} \mathbf{F}_{i1} \quad (2.52)$$

Y por lo tanto, al ser las acciones equivalentes de las cargas  $\mathbf{F}_{i1}$  sobre los nudos conectados las opuestas a dichas reacciones, las

cargas de la subestructura sobre los nudos conectados, y que serán por tanto las cargas aplicables a la estructura para su movimiento conjunto serán

$$\mathcal{F}_c = \mathbf{F}_{c1} - \mathbf{K}_{ci}(\mathbf{K}_{ii})^{-1}\mathbf{F}_{i1} \quad (2.53)$$

Estas cargas incorporan por tanto las consideradas en la primera fase,  $\mathbf{F}_{c1}$  más las resultantes de la segunda fase,  $-\mathbf{R}_{c2}$ .

En una tercera fase deberán considerarse los movimientos  $\mathbf{U}$  y las cargas  $\mathbf{F}$  de los nudos conectados de la subestructura en su interacción con el resto de la estructura.

En esta fase, el comportamiento de la subestructura se describe como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{c3} \\ \mathbf{F}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ci} \\ \mathbf{K}_{ic} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{c3} \\ \mathbf{U}_{i3} \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

A partir de esta podemos obtener la matriz de rigidez *condensada*, reduciendo los parámetros internos  $i$ .

Efectivamente, en esta tercera fase necesitamos considerar solo el efecto de los movimientos (y esfuerzos) de extremo, los  $\mathbf{U}_c$ , que imponen obviamente movimientos internos  $\mathbf{U}_i$ , pero ahora en condiciones en las que los esfuerzos internos de los elementos de la subestructura ya no exigen cargas en esos nudos interiores:  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ . Las cargas son, pues, nulas para esta fase de movimientos: su efecto se consideró en las fases uno y dos, y ahora solo queda considerar deformaciones adicionales de la subestructura debido a efectos que se producen solo asociados a los parámetros ligados a sus extremos: es decir, estamos en condiciones de condensar los grados de libertad interiores a partir de los grados de libertad conectados al resto de la estructura.

Si en la ecuación 2.54 consideramos que las cargas  $\mathbf{F}_i$  son nulas tendremos que

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0} = \mathbf{K}_{ic}\mathbf{U}_c + \mathbf{K}_{ii}\mathbf{U}_i \quad (2.55)$$

con lo que

$$\mathbf{U}_i = -(\mathbf{K}_{ii})^{-1}\mathbf{K}_{ic}\mathbf{U}_c \quad (2.56)$$

y por tanto

$$\mathbf{F}_c = (\mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{ci}(\mathbf{K}_{ii})^{-1}\mathbf{K}_{ic})\mathbf{U}_c = \mathbf{K}_c\mathbf{U}_c \quad (2.57)$$

que nos permite condensar en  $\mathbf{K}_c$  la rigidez completa de la subestructura para el análisis de su interacción con el resto de la estructura, a partir solo de los movimientos y esfuerzos de extremo conectados.

Ahora bien, como ejes de subestructura y estructura podrían no coincidir, habrá que considerar ese posible cambio de representación (como siempre, vía compatibilidad y equilibrio). Para hacerlo, procedemos a renombrar a partir de aquí los parámetros que se refieren a la subestructura, para mantener las mayúsculas en las denominaciones aplicables a los parámetros con que representamos el estado de la estructura completa con lo que tendríamos para esta la expresión de rigidez ya condensada en 2.57:  $\mathbf{f}_c = \mathbf{k}_c\mathbf{u}_c$ , como si de un elemento cualquiera se tratase, así como unas cargas equivalentes de extremo, iguales y contrarias a los esfuerzos de empotramiento completos de la subestructura considerada en su conjunto, y en ejes propios de esta, dados por la expresión 2.53.

De este modo hemos reducido la *subestructura* a un elemento semejante a una posible barra cualquiera, caracterizada por

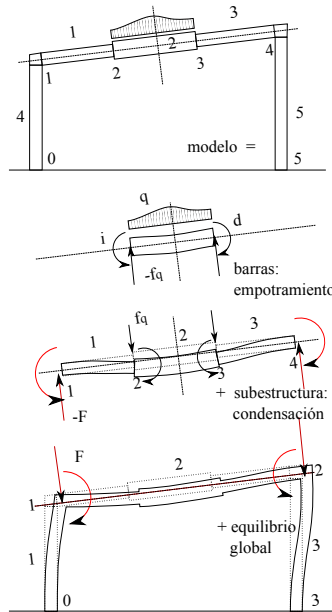


Figura 2.9: La solución elástica: es la del problema de la primera figura, y será la suma de las soluciones de los tres problemas siguientes: *a*) el de empotramiento perfecto de las cargas contra los nudos no conectados de la subestructura, *b*) el del movimiento de la subestructura, empotrada en sus nudos conectados por las cargas en sus nudos no conectados: las contrarias a las reacciones del caso *a*), y *c*) el del desplazamiento general de la estructura para las cargas en sus nudos, procedentes de las reacciones del caso anterior.

sus parámetros de extremo o, mejor expresado, sus parámetros de conexión con el resto de la estructura, de modo que la solución al problema completo (ver fig. 2.9) solo requiere el análisis de la parte correspondiente a la interacción global de todos los elementos que concurren en la estructura, caracterizados por la interacción entre las cargas que aportan a los nudos de esta las diferentes barras o subestructuras en el caso de considerar empotramiento perfecto, y los movimientos que se derivan del hecho de que dicho empotramiento no existe.

#### 2.1.2.2. Ensamblaje de cargas y rigideces

- Hasta aquí hemos visto como hacer para
- a transformar los problemas de cargas distribuidas sobre barras en cargas equivalentes sobre los extremos de estas, es decir sobre los nudos que las conectan con el resto de la estructura: son las fuerzas contrarias a las reacciones que aparecerían en dichos extremos en el caso de considerar que no se moviesen: el caso de empotramiento perfecto
  - b identificar las relaciones entre las cargas aplicadas a dichos extremos y sus respectivos movimientos, es decir, las relaciones de rigidez de dichas barras, e incluso de elementos compuestos que hemos llamado subestructuras (podrían ser barras de sección variable donde cada tramo de la subestructura o barra completa responde a una ley de sección diferente).

Tenemos, por tanto, identificados parámetros “de barra” para fuerzas  $\mathbf{f}$  y movimientos  $\mathbf{u}$  y sus relaciones  $\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$ , así como

valores iniciales  $\mathbf{f}_q, \mathbf{u}_q$ , con  $\mathbf{u}_q = \mathbf{0}$ , si no hubiese movimientos iniciales forzados en la estructura.

Queremos analizar ahora el comportamiento de la estructura ante el efecto de todas las cargas  $\mathbf{f}_q$  aplicadas en todas sus barras, que provocan el movimiento generalizado de todos sus nudos, asegurando que se cumplen en estos las condiciones de equilibrio y compatibilidad, y que igualmente se cumplen las condiciones materiales elásticas del párrafo anterior en todas las barras.

Una cuestión a considerar ahora es la de los ejes de referencia a emplear en el equilibrio y la compatibilidad, pues ya hemos señalado que no necesariamente los habremos elegido coincidentes para cada una de las barras, o para los nudos de la estructura: es usual considerar en las barra ejes alineados con su directriz y las direcciones principales de inercia de su sección, mientras que para los nudos de la estructura es habitual considerar ejes globales asociados a direcciones en un plano horizontal y a la vertical... De este modo resulta necesario asegurar que las ecuaciones relevantes se plantean para una descripción de las variables realizadas en ejes concordantes.

### **Transformaciones de ejes.**

En la figura 2.10 representamos un extremo de una barra (un nudo, o referencia al extremo denominada  $n$ , enlazada a la posición de referencia de un nudo global  $N$ ) y las referencias a los ejes locales considerados en este, —referencias alfabéticas,  $(x, y, z)$ , o numéricas  $(1, 2, 3)$ — así como las referencias a los ejes globales —que también pueden ser alfabéticas,  $(X, Y, Z)$ , o numéricas

(1, 2, 3)— Se indica igualmente que pueden no coincidir las posiciones de dichas referencias (de dichos nudos) en ejes locales ( $n$ ) o globales ( $N$ ), siendo los desplazamientos entre una referencia y otra los dados por las distancias ( $c1, c2, c3$ ) medidas en ejes globales. En la figura se indican igualmente los cosenos directores correspondientes al eje local  $x$ , es decir, las proyecciones del punto a distancia unidad de  $N$  y en la dirección de  $x$  sobre los ejes globales ( $X, Y, Z$ ), a saber, los valores  $(\alpha_{X,x}, \alpha_{Y,x}, \alpha_{Z,x})$ , o también  $(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31})$  si usamos las referencias numéricas en vez de las alfabéticas. Las fuerzas y momentos de extremo  $\mathbf{F}_n$  y  $\mathbf{M}_n$ , descritas en ejes con las orientaciones de los ejes globales, pero situados en las posiciones de los ejes **locales** en  $n$ , y que se derivan de los esfuerzos aplicados a los extremos de la barra, que están descritos en ejes locales  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{m}$ , pueden expresarse de la forma siguiente, puesto que estamos considerando solo las rotaciones:

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \alpha_{X,x} & \alpha_{X,y} & \alpha_{X,z} \\ \alpha_{Y,x} & \alpha_{Y,y} & \alpha_{Y,z} \\ \alpha_{Z,x} & \alpha_{Z,y} & \alpha_{Z,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}_n = \boldsymbol{\alpha}_{Nn} \mathbf{f}_n \quad (2.58)$$

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}_n = \boldsymbol{\alpha}_{Nn} \mathbf{m}_n \quad (2.59)$$

expresiones en las que hemos usado indistintamente ambos criterios de notación, alfabético o numérico para los cosenos directores.

Si, además, consideramos las traslaciones, para llevar las re-

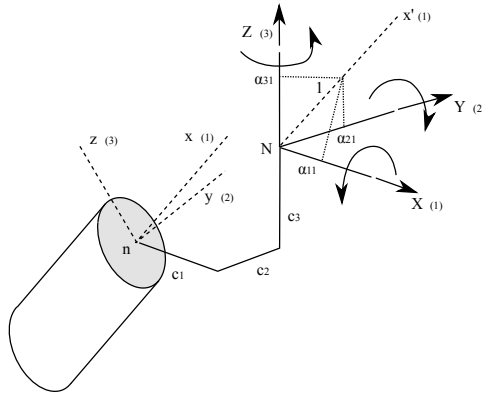


Figura 2.10: Transformación de ejes coordenados: en minúsculas las referencias al nudo y sus ejes locales, en mayúsculas la referencia al nudo y a los ejes en los términos globales de la estructura completa.

referencias a las posiciones de los ejes **globales** en  $N$ , tendremos que, aunque las fuerzas no cambian, sí deben hacerse cambios en los valores de los momentos para que representen las mismas resultantes:

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{F}_n = \boldsymbol{\alpha}_{Nn} \mathbf{f}_n \quad (2.60)$$

$$\mathbf{M}_N = \begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix}_N + \begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}_n \quad (2.61)$$

$$\mathbf{M}_N = \gamma_{Nn} \boldsymbol{\alpha}_{Nn} \mathbf{f}_n + \boldsymbol{\alpha}_{Nn} \mathbf{m}_n \quad (2.62)$$

o, en un formato más compacto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathbf{M}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{Nn} & \mathbf{0} \\ \gamma_{Nn} \boldsymbol{\alpha}_{Nn} & \boldsymbol{\alpha}_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{m}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_N = \mathbf{H}_{Nn} \mathbf{f}_n \quad (2.63)$$

Por razón de la dualidad 1.21 podemos igualmente determinar la relación entre los movimientos descritos en ejes locales, que representaríamos con  $\mathbf{u}$ , y su descripción en ejes globales, que representamos con  $\mathbf{U}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \boldsymbol{\theta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{Nn}^T & \boldsymbol{\alpha}_{Nn}^T \gamma_{Nn}^T \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_{Nn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_N \\ \boldsymbol{\Theta}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{B}_{nN} \mathbf{U}_N \quad \mathbf{H}_{Nn} = \mathbf{B}_{nN}^T \quad (2.64)$$

### Ensamblaje.

Se trata de considerar aquí la forma de abordar el problema de desplazamientos y esfuerzos de la estructura completa sometida a cargas en los nudos, es decir, el último de los problemas de los considerados en la figura 2.9.

Hasta aquí tenemos los vectores de carga aplicados a los “nudos” de enlace de las subestructuras, en el caso de las barras, a sus extremos, correspondiendo en cada una de estas a vectores  $\mathbf{f}$  apropiados, y tenemos igualmente las condiciones de rigidez de estas, dadas por matrices  $\mathbf{k}$ . Dichos vectores y matrices referencian componentes de esfuerzos o rigideces asociadas a los nudos  $\mathbf{n}$  de tales subestructuras (2 nudos en el caso de barras, a los que podemos denominar izquierdo y derecho:  $i, d$ ). Dichos nudos se “insertan” en los correspondientes de entre los  $\mathbf{N}$  de la estructura completa, de modo que para

cada barra podemos identificar los  $N_i, N_d$  en que se conectan los  $i, d$  de la barra, junto con los parámetros de cambio de ejes  $\mathbf{c}_i = [c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}]^T$ ,  $\mathbf{c}_d = [c_{d1}, c_{d2}, c_{d3}]^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_i \dots$  que describen la correspondencia entre las geometrías local y global. Conocemos, por tanto, la forma de describir  $\mathbf{f}, \mathbf{k}$  en ejes globales: siguiendo lo visto en el subapartado precedente podemos hacerlo transformando la expresión en ejes locales

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{id} \\ \mathbf{k}_{di} & \mathbf{k}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{bmatrix} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (2.65)$$

a su forma en ejes globales

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N_i} \\ \mathbf{F}_{N_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{N_i N_i} & \mathbf{K}_{N_i N_d} \\ \mathbf{K}_{N_d N_i} & \mathbf{K}_{N_d N_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{N_i} \\ \mathbf{U}_{N_d} \end{bmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (2.66)$$

y lo hacemos considerando independientes las proyecciones entre ejes para cada extremo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N_i} \\ \mathbf{F}_{N_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{iN_i}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{dN_d}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_d \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{iN_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{dN_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{N_i} \\ \mathbf{U}_{N_d} \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Puesto que por el principio de los trabajos virtuales debe ser

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_{N_i} \\ \bar{\mathbf{U}}_{N_d} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N_i} \\ \mathbf{F}_{N_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i \\ \bar{\mathbf{u}}_d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_d \end{bmatrix} \quad \forall \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_{N_i} \\ \bar{\mathbf{U}}_{N_d} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

tendremos necesariamente para cada barra que

$$\bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{F} = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{f} = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{k}\mathbf{B}\mathbf{U}; \quad \forall \bar{\mathbf{U}}, \mathbf{U} \quad (2.70)$$

y por tanto

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B}, \quad (2.71)$$

ecuación que, como ya hemos visto anteriormente, expresa la proyección de la rigidez en ejes locales a los ejes elegidos para la representación global.

Sólo nos queda acumular los efectos de todas y cada una de las barras en la estructura, lo que resulta sencillo: desde la perspectiva de las cargas, las fuerzas aplicadas a cada extremo de cada barra deben entenderse como fuerzas aplicadas desde el nudo de la estructura, es decir son fuerzas aplicadas al nudo que se transmiten al extremo de la barra. Desde esta perspectiva, lo que se aplica a un nudo es, por tanto, la suma de todas las fuerzas de extremo de todas las barras que concurren en ese nudo: las fuerzas “externas” por tanto suman resultantes nodales de las cargas sobre todos los extremos de barras (“elementos”) que confluyen en el mismo. Para un nudo  $N$ , considerando todas las barras  $e$  de extremos  $n, m$ , conectadas a  $N$  ( $e \rightarrow N$ ), y donde  $n$  confluye en  $N$ , (y donde  $m$  lo hace en  $M$ ) tendremos:

$$\mathbf{F}_N = \sum_{e \rightarrow N} \mathbf{F}_{q,e,N} = \sum_{e \rightarrow N} \mathbf{B}_{e,n}^T \mathbf{f}_{q,e,n} \quad (2.72)$$

Por lo tanto, si recorremos el conjunto de “elementos” del modelo podemos simbolizar el ensamblaje de cargas como

$$\mathbf{F} = \sum_e \begin{array}{c} N \\ \mathbf{B}_{e,n}^T \mathbf{f}_{q,e,n} \\ M \\ \mathbf{B}_{e,m}^T \mathbf{f}_{q,e,m} \end{array} \quad (2.73)$$

donde cada barra acumula sus cargas de extremo en los correspondientes nodos ( $N$  y  $M$ ) del modelo global.

De la misma forma cabe describir el equilibrio en cada nudo como resultante de todos los esfuerzos de extremo de las barras que confluyen en él que se derivan de los desplazamientos de los dos extremos de cada barra. Si contabilizamos todas las barras  $e \rightarrow N$  tendremos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_N &= \sum_{e \rightarrow N} \mathbf{F}_{e,N} = \sum_{e \rightarrow N} \mathbf{B}_{e,n}^T \mathbf{f}_{e,n} = \\
 &\quad \sum_{e \rightarrow N} \mathbf{B}_{e,n}^T (\mathbf{k}_{e,nn} \mathbf{u}_{e,n} + \mathbf{k}_{e,nm} \mathbf{u}_{e,m}) = \\
 &\quad \sum_{e \rightarrow N} \mathbf{B}_{e,n}^T (\mathbf{k}_{e,nn} \mathbf{B}_{e,n} \mathbf{U}_N + \mathbf{k}_{e,nm} \mathbf{B}_{e,m} \mathbf{U}_{e,M}) = \\
 &\quad \sum_{e \rightarrow N} (\mathbf{K}_{e,nn} \mathbf{U}_N + \mathbf{K}_{e,nm} \mathbf{U}_{e,M}) \quad (2.74)
 \end{aligned}$$

de manera que, al igual que antes, podemos simbolizar el proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez global de la forma siguiente:

$$\mathbf{K} = \sum_e \begin{array}{c} N \\ M \end{array} \begin{array}{cc} N & M \\ \hline & \\ \mathbf{K}_{e,nn} & \mathbf{K}_{e,nm} \\ \hline & \\ \mathbf{K}_{e,mn} & \mathbf{K}_{e,mm} \\ \hline & \end{array} \quad (2.75)$$

donde cada barra acumula sus componentes de rigidez en los

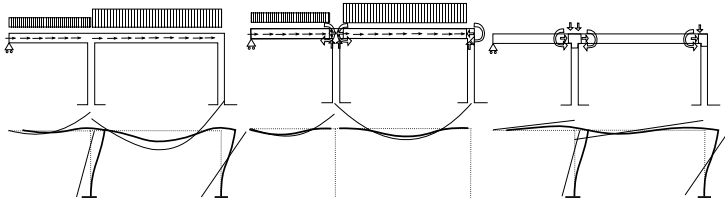


Figura 2.11: Solución elástica (a), como superposición —suma— de las soluciones de empotramiento (b) y de desplazamiento (c).

índices de la matriz global correspondientes a los nudos a los que está conectada.

### 2.1.2.3. Solución de problemas lineales

La solución de los problemas elásticos, por tanto se obtienen, tal como esquematiza la figura 2.11, como superposición de las componentes de empotramiento perfecto y de desplazamiento.

Efectivamente, el estado completo corresponde a un problema de

- cargas distribuidas
- con la estructura desplazada
- con la deformación debida a los dos efectos anteriores
- donde su cumplen las condiciones de EQUilibrio, COMpatibilidad y MATeriales

La primera parte de la descomposición añade cargas (reacciones) a los extremos que impiden los desplazamientos globales,

pero, para el conjunto de las cargas, distribuidas más añadidas, asegura deformaciones y esfuerzos que cumplen los tres grupos de ecuaciones: EQU, COM y MAT.

La segunda parte de la descomposición considera las condiciones de desplazamiento (y de deformación y esfuerzos) derivados de la eliminación de las reacciones de la fase previa (o lo que es igual, del añadido de cargas opuestas a estas) manteniendo el cumplimiento de los tres grupos de ecuaciones.

Dado que en comportamiento elástico es válido el principio de superposición, la suma de valores de cualquier función de los dos casos de la descomposición aporta los valores de dicha función para el caso original, es decir la superposición resuelve el caso original.

#### 2.1.2.4. Solución de problemas no lineales

Recordemos el método de Newton para determinar la raíz (la posición para un valor nulo) de una función de una variable: si el valor de la función puede aproximarse a partir de su desarrollo en serie, la raíz puede aproximarse a partir del valor de la función y su gradiente en un punto próximo:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots = 0$$

$$\Delta x = x - x_0 \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.76)$$

Podemos generalizar a funciones de múltiples variables:  $f(x) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}$  donde el primer término de tal diferencia es la respuesta de la estructura  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  para los desplazamientos  $\mathbf{U}$  de

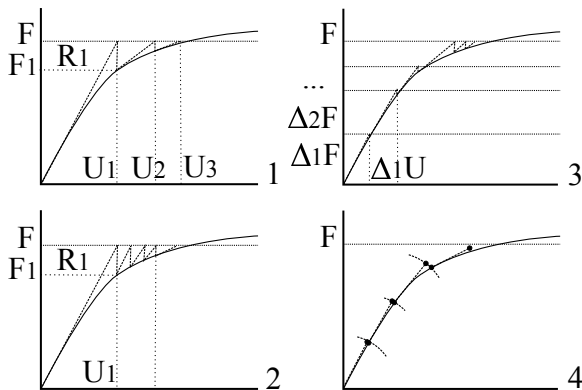


Figura 2.12: Métodos de Newton, Newton–Rapshon, Incremental, o de Longitud de arco

un determinado paso en el tiempo, y el segundo,  $\mathbf{F}$ , es la carga efectiva en ese paso, siendo por tanto la diferencia el *residuo* de carga aún no equilibrado por la respuesta.

En este caso el equilibrio exigirá una modificación  $\Delta \mathbf{U}$  en el desplazamiento ya alcanzado que se aproximará, considerando que  $\mathbf{F}'(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial \mathbf{U} = \mathbf{K}(\mathbf{U})$ , con la siguiente expresión:

$$\Delta \mathbf{U} \approx \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\mathbf{K}(\mathbf{U})} = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\mathbf{K}(\mathbf{U})} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}) \Delta \mathbf{F} \quad (2.77)$$

Las figuras en 2.12 ilustran los posibles procedimientos.

En todos ellos la solución al problema no lineal se alcan-

za mediante una sucesión de problemas lineales en los que, en cada paso, se resuelve el incremento de desplazamiento requerido para alcanzar el residuo de carga aún no equilibrado en el paso anterior. En cada paso de desplazamiento se recalcula la respuesta total alcanzada y, en caso de no equilibrar la carga — en el margen de tolerancia establecido — se recalcula la rigidez correspondiente a las deformaciones asociadas al tal desplazamiento y se determina el incremento necesario para definir el paso siguiente.

Es decir, el objetivo es equilibrar la carga  $\mathbf{F}$ . El desplazamiento inicial es  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$ . En el método de Newton,

- el paso inicial de carga es la carga total. Al ser el desplazamiento inicial nulo esto supone respuesta nula, no equilibrada con  $\mathbf{F}$ , y por tanto  $\Delta_1 \mathbf{F} = \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F}(\mathbf{0})$
- La rigidez inicial es  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\mathbf{U}_0)$
- $\Delta_1 \mathbf{F} = \mathbf{K}_0 \Delta_1 \mathbf{U}$  aporta una primera aproximación al desplazamiento:  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_0 + \Delta_1 \mathbf{U} = \Delta_1 \mathbf{U}$

La recurrencia para los siguientes pasos de carga es sencilla:

- Para el desplazamiento  $\mathbf{U}_i$ , la respuesta es  $\mathbf{F}_i$ , con un *residuo* no equilibrado  $\mathbf{R}_i = \mathbf{F} - \mathbf{F}_i = \mathbf{F} - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i)$ . Falta equilibrar una carga  $\Delta_{i+1} \mathbf{F} = \mathbf{R}_i$ . Si el residuo es suficientemente pequeño, se para el proceso.
- La rigidez a emplear es la correspondiente al desplazamiento:  $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}(\mathbf{U}_i)$
- Se estima el incremento de desplazamiento mediante la aproximación  $\Delta_{i+1} \mathbf{F} = \mathbf{K}_i \Delta_{i+1} \mathbf{U}$ . El desplazamiento alcanzado será  $\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \Delta_{i+1} \mathbf{U}$

Es posible que no se actualice la matriz de rigidez empleada más que en ocasiones, procedimiento que se conoce como método de Newton–Raphson. En este caso, se mantiene la “rigidez”  $\mathbf{K}_0$  durante todo el proceso (o durante un número dado de pasos, tras los que se recalcula de nuevo)

Es posible también realizar el análisis mediante un proceso en el que se incrementa la carga en los sucesivos pasos, o en grupos de estos —procedimiento incremental—, usualmente actualizando la rigidez solo al final de cada paso de carga. Es decir, para una carga final dada, se considera en cada paso la correspondiente a un factor creciente:  $\lambda_i \mathbf{F} = \mathbf{F}_i = \sum_i \Delta_i \mathbf{F}$ , con  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_i \in (0, 1]$ , y para esa carga se determina el incremento de desplazamiento necesario. En este caso, el “residuo” para cada incremento de carga y el paso de desplazamiento necesario son  $\lambda_{i+1} \mathbf{F} - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) = \Delta_{i+1} \mathbf{F} + \lambda_i \mathbf{F} - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) = \mathbf{K}(\mathbf{U}_i) \Delta_{i+1} \mathbf{U}$ .

Finalmente cabe considerar que cada incremento se hace simultáneamente en los dos espacios de desplazamiento  $\mathbf{U}$  y carga  $\mathbf{F}$ , mediante incrementos en longitud de arco equivalentes —para un cierto factor de escala  $\psi$  que permita comparar las de ambos espacios, de modo que la longitud de arco de cada paso  $\delta l$  puede estimarse con

$$(\Delta l)^2 = \Delta_i \mathbf{U}^T \Delta_i \mathbf{U} + \psi^2 \Delta_i \mathbf{F}^T \Delta_i \mathbf{F} \quad (2.78)$$

y puesto que, si se usan los factores de carga  $\lambda$  para describir la carga, tenemos

$$\Delta_i \mathbf{F}^T \Delta_i \mathbf{F} = \Delta \lambda_i^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.79)$$

el problema implicará obtener en cada paso el incremento de desplazamiento y el correspondiente factor de carga que asegu-

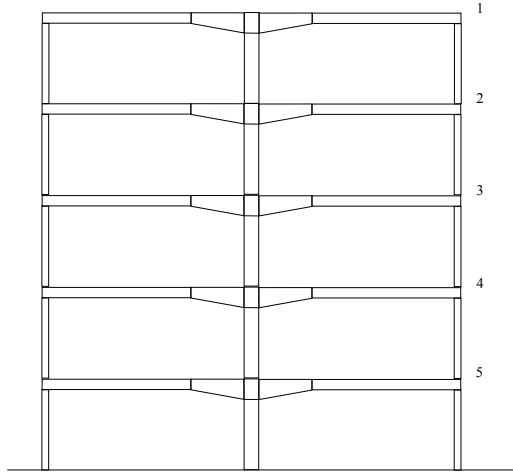


Figura 2.13: Pórtico de cinco plantas con vigas acarteladas

ran que se cumplen simultáneamente

$$(\Delta l)^2 = \Delta_{i+1} \mathbf{U}^T \Delta_{i+1} \mathbf{U} + \psi^2 (\Delta \lambda_{i+1})^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.80)$$

$$\lambda_{i+1} \mathbf{F} - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) = \Delta \lambda_{i+1} \mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{U}_i) \Delta_{i+1} \mathbf{U} \quad (2.81)$$

En esta aproximación es posible la aparición de valores nulos o negativos en  $\Delta_{i+1} \lambda$ , e incluso se puede ajustar la longitud de arco a emplear en cada paso en función del error entre el previsto y el obtenido en el paso previo, lo que permite la captura de procesos de carga–desplazamiento altamente no lineales.

### 2.1.3. Ejemplo de aplicación: pórtico de cinco plantas

Se busca modelar y analizar un pórtico de cinco plantas, con vigas acarteladas y pilares metálicos, figura 2.13, en el que los pilares de fachada, esbeltos, se consideran doblemente articulados. La estabilidad lateral se logra asegurando indeformabilidad en la unión de los pilares centrales (lo que en buena parte de la documentación técnica se denomina *unión rígida, de rigidez completa*). Las luces son de 10 m y las longitudes de cartela de 2 m, con 3 m. de altura de pilares.

Se consideran vigas IPE 330 con cartela hasta aproximadamente 1,8 veces el canto de la viga (y una inercia aproximadamente cuádruple).

Finalmente los pilares son HEB 180 en plantas 1 y 2, y HEB 200, 220, y 240 en plantas 3, 4 y 5, usando una numeración desde arriba.

Se busca

- Determinar las rigideces y momentos de empotramiento de las piezas acarteladas.
- Determinar la rigidez global del pórtico considerando como parámetros del movimiento posible el desplazamiento horizontal y el giro de los nudos centrales.
- Determinar la matriz de rigidez condensada del pórtico a fin de *aislar* el análisis directo de la relación entre las cargas y los desplazamientos horizontales.

El procedimiento va a consistir en

- determinar la rigidez de la viga acartelada completa (subes-

estructura), apartado 2.1.3.1

- determinar la rigidez del tramo de cartela
- condensar la rigidez de los dos tramos de sección constante y acartelado en la viga
- determinar los diagramas de momentos de empotramiento de la viga completa (subestructura), apartado 2.1.3.2
  - determinar las reacciones en todos los nudos supuesto el nudo interno inmóvil
  - determinar las reacciones de empotramiento para los movimientos derivados de la liberación del nudo interno
  - las cargas equivalentes de la viga sobre los nudos del pórtico son las equilibradas por las reacciones en los dos pasos previos y los distintos diagramas derivados de estas y de las cargas distribuídas son los denominados de empotramiento, puesto que responden a deformaciones de la pieza cargada pero sin movimientos de extremo.
- Para las cargas sobre los nudos de la estructura —en cualquiera de las hipótesis de carga posibles— determinar los desplazamientos y diagramas de esfuerzos necesarios para el equilibrio elástico, apartado 2.1.3.3
  - modelado de grados de libertad, y cualidades elásticas
  - solución para el modelo completo
  - condensación de grados de libertad para enfatizar solo las consecuencias de los desplazamientos horizontales

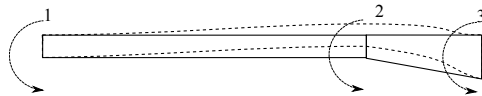


Figura 2.14: Modelo de subestructura de la pieza acartelada, formada por un tramo de sección constante y una cartela.

### 2.1.3.1. Rigidez de la viga acartelada

Vamos a determinar las relaciones de rigidez de esta viga, figura 2.14, condensando (sección 2.1.2.1) como una subestructura única la rigidez de sus dos tramos: el de sección constante y el de la cartela. Conocemos ya la rigidez de un tramo de sección constante, de acuerdo a la expresión 2.42, pero no conocemos aún la de la región de cartela, por lo que vamos a construir esta empleando las expresiones de la sección 2.1.1.7, y en particular la 2.32.

**Rigidez del tramo de cartela.** Vamos a establecer la rigidez empleando las funciones que describen las leyes de esfuerzo y de deformación del tramo de sección variable sin carga con ayuda de *maxima*, Schelter y col. 1982-2022. El procedimiento será semejante al aplicado en la construcción de las matrices de carga y rigidez para piezas de sección constante en 2.1.1.7, con la salvedad de que las funciones de desplazamiento que allí usábamos, de acuerdo a 2.1.1.6, no son ahora de aplicación, al tener que considerar la sección variable.

Por tanto hemos primero de establecer las funciones de for-

ma apropiadas al caso. Para ello suponemos un tramo de cartela de extremos 0, 1 (a izquierda y derecha) para la que deduciremos las sucesivas leyes  $t$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $f$  de cortantes, momentos, (curvaturas), giros y flechas, considerando los valores de extremo  $t_0$ ,  $m_0$ ,  $g_0$ ,  $f_0$ . Vemos enseguida las curvaturas variables  $c=m/k$ , cocientes entre momento y rigidez. Para esta última consideramos definidos sus valores en los extremos con  $k_0$ ,  $k_1$ .

Tenemos la siguiente interacción con *maxima* para las leyes de esfuerzos, considerando que las abscisas varían entre  $x=0$  y  $x=1$ , usando  $l$  para la longitud del tramo de cartela<sup>2</sup>:

```
t: t0;
m: integrate(t,x) + m0;
```

donde los momentos siguen, por tanto, una ley lineal.

Si consideramos como ley de curvaturas la interpolación entre los valores de extremo de la función no lineal más sencilla, es decir, de la parábola<sup>3</sup>, tendremos para curvaturas, giros y flechas la secuencia siguiente, en la que la ley de curvatura depende de tres parámetros, uno conocido,  $m_0/k_0$ , y otros dos desconocidos,  $a$ ,  $b$ , a fijar con dos condiciones para el trazado de esa ley:

```
c: a*x**2+b*x+m0/k0;
g: integrate(c,x)+g0;
f: integrate(g,x)+ f0;
```

---

2. Atención a la diferencia entre la letra  $l$  y el guarismo 1.

3. Podríamos buscar y usar la ley de rigidez de la forma de la cartela deduciendo la curvatura como el cociente entre momento y rigidez, pero esto lleva a complicaciones algebraicas que no justifican la pequeñísima mejora en la precisión obtenida.

Para fijar los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  establecemos dos condiciones:

1. la curvatura será nula en el punto en el que el momento sea nulo
2. la curvatura en el extremo derecho será  $c = c1 = m1/k1 = m(1)/k1$ .

La siguiente expresión resuelve dichas condiciones:

```
solve([ subst([x=1],c=m1/k1),
        subst(solve(m=0,x),c=0) ] , [a,b]);
```

Efectivamente,

- la primera `subst`(itución) construye la primera condición a considerar para obtener los valores de  $a$ ,  $b$  substituyendo  $x$  por  $1$  en la expresión que fija que la curvatura es  $m1/k1$ ,
- el segundo `solve` resuelve la coordenada  $x$  para la condición  $m=0$ , de modo que
- la segunda `subst`(itución) substituye dicha expresión para  $x$  en la que afirma que en dicho punto hay curvatura nula:  $c=0$ , aportando por tanto la segunda condición,
- finalmente, el primer `solve` obtiene las expresiones para  $[a, b]$  exigidos por las dos condiciones establecidas  $[ \dots , \dots ]$ .

El resultado tiene la forma  $[[a=... , b=...]]$  mostrando que solo hay una solución (primer nivel) que contiene dos expresiones, una para cada parámetro. Las siguientes asignaciones buscan simplificar esas expresiones: la primera substituye el momento en el extremo derecho por su expresión dependiente de los valores de extremo en el izquierdo en la solución obtenida

(a la que se refiere el símbolo %), y la segunda usa el término de proporción  $\alpha$  para definir la rigidez derecha en función de la izquierda, con lo que se define la expresión `cf` que contiene los parámetros o coeficientes obtenidos y en el formato algebraico más sencillo posible, con la que se puede definir la deformada de dicho tramo, `fs`, para las condiciones de ajuste de la ley de curvaturas obtenida:

```
cf: ratsimp(part(subst([m1=t0*1+m0],%),1));
cf: ratsimp(subst([k1=alpha*k0],cf));
fs: subst(cf,f);
```

Los valores de esos coeficientes son:

$$\left[ a = -\frac{(\alpha-1)t_0}{\alpha k_0 l}, b = \frac{\alpha l t_0 + (1-\alpha)m_0}{\alpha k_0 l} \right]$$

y con ellos pueden establecerse la ley de rigideces (cociente entre momento y curvatura, siendo esta última la derivada segunda de la deformada):

```
k: ratsimp(m/diff(fs,x,2));
```

Resulta con ello la expresión siguiente para la ley de rigidez local momento–curvatura a lo largo de la pieza:

$$k = \frac{\alpha k_0 l}{\alpha l - (\alpha - 1)x}$$

Hasta aquí las expresiones incluyen condiciones de extremo genéricas, tanto de movimiento —desplazamiento y rotación— como de esfuerzo —los esfuerzos de extremo (momento

y cortante)— de tal modo que permiten describir las leyes correspondientes a cualquier condición de extremo. Nos interesa ahora particularizar para las condiciones que permitan describir la influencia aislada de cada extremo. Consideramos por ello dos casos, ambos de desplazamiento nulo en ambos extremos, pero con giros unitarios en el extremo 0 o en el 1 manteniendo el otro sin girar, buscando las condiciones de momento y cortante de extremo correspondientes.

Las condiciones para ambos casos se determinan con

```
mt0: solve(subst([x=1,f0=0,g0=1],[fs=0,diff(fs,x)=0]),
            [m0,t0]);
mt1: solve(subst([x=1,f0=0,g0=0],[fs=0,diff(fs,x)=1]),
            [m0,t0]);
```

Efectivamente, la primera expresión busca resolver  $[m_0, t_0]$  para las condiciones  $[fs=0, diff(fs, x)=0]$  cuando  $x=1$ , y cuando se usan además las condiciones  $f_0=0, g_0=1$ , es decir el giro  $g_0$  es la unidad, pero son nulas tanto la flecha  $f_0$  (definida para  $x=0$ ) como la flecha y su derivada, el giro, cuando  $x=1$ . La segunda expresión determina el otro caso: solo giro unidad cuando  $x=1$ . En ambas expresiones hay que seleccionar la primera (y única) solución, con los dos valores de momento  $m_0$  y cortante  $t_0$  de extremo apropiados a cada caso.

Por lo tanto las leyes deformadas para ambos casos se obtienen fácilmente a partir de la forma genérica  $fs$  sustituyendo las condiciones de extremo, momento, cortante, flecha y giro:

```
f1: ratsimp(subst(
```

```

[part(mt0,1,1),part(mt0,1,2),f0=0,g0=1],fs));
f2: ratsimp(subst(
[part(mt1,1,1),part(mt1,1,2),f0=0,g0=0],fs));

```

deformadas que pueden dibujarse, en comparación con las empleadas para sección constante, con la expresión siguiente:

```

plot2d(subst([alpha=4,l=1],
[f1,f2,x^3/l^2-2*x^2/l+x,x^3/l^2-x^2/l]),
[x,0,1],[legend,"f1","f2","ni","nd"]);

```

con lo que obtenemos la figura 2.15. Cabe observar en la figura la mayor influencia de la rotación del extremo de mayor rigidez en la deformada inducida por esta que en el caso de la pieza de sección constante, frente a una menor influencia en el caso de la rotación del extremo más débil.

Establecidas las funciones de forma resulta trivial determinar la rigidez  $k$  del tramo acartelado, de acuerdo a la ecuación 2.32, que aplicamos usando `maxima`, como hasta ahora, pero además teniendo en cuenta que la relación diferencial apropiada al problema es la derivada segunda, de la misma manera que en el proceso de 2.41 a 2.42:

```

dfMat: factor(diff(matrix([f1],[f2]),x,2));
kc: factor(integrate((dfMat . transpose(dfMat))*k,x,0,1));
positive; positive;

```

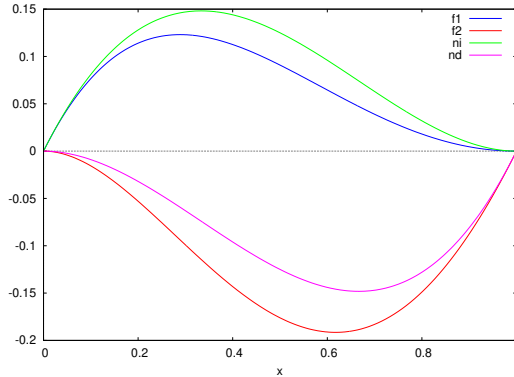


Figura 2.15: Funciones de forma para piezas de sección variable ( $f^*$ , para  $\alpha = 4$ ) o sección constante ( $n^*$ )

En la última expresión, **maxima** preguntará si  $l$  o  $(\alpha - 1)$  es positivo o negativo... y hemos anticipado la respuesta, **positive** para ambos casos.

La rigidez del tramo de cartela es, por tanto,

$$\mathbf{K}_c = \frac{EI_0}{l} \frac{6\alpha}{\alpha^2 + 4\alpha + 1} \begin{bmatrix} \alpha + 3 & \alpha + 1 \\ \alpha + 1 & 3\alpha + 1 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

que puede concretarse para cada relación  $\alpha = k_1/k_0$  sin más que sustituir la variable  $\alpha$ , como por ejemplo, para una relación relativamente probable de 4:

K4: `subst([k0=1,alpha=4],kc );`

$$\mathbf{K}_4 = \frac{EI_0}{11l} \begin{bmatrix} 56 & 40 \\ 40 & 104 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

### Rigidez de la pieza acartelada completa, biempotrada.

Una vez conocidos los efectos para las dos piezas con tres nudos empotrados (el tramo de sección constante y el tramo de cartela) el comportamiento para la pieza completa se obtiene añadiendo la *liberación* del nudo interno, de acuerdo al procedimiento señalado para subestructuras: ese nudo interno será el nudo no conectado capaz de moverse y cuyos efectos se condensan en los otros, tal como se señala en la sección 2.1.2.1.

En la figura 2.14 se considera dicha subestructura, en la que, refiriendo los movimientos capaces de flexionar la viga a las posiciones, fijas, de los nudos extremos, tendríamos tres posibles rotaciones y un desplazamiento.

Vamos a considerar el caso de  $\alpha = 4$ , y de longitud de la cartela de 0,2 veces la longitud de la pieza.

Tenemos entonces la siguiente relación de rigidez, en la que, dado que vamos a “condensar” el movimiento del nudo 2, colocamos los grados de libertad de este al final, y donde aplicamos (sumamos) las rigideces de ambos tramos:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_3 \\ M_2 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{EI_0}{l} \begin{bmatrix} \frac{4}{0,8} & 0 & \frac{2}{0,8} & -\frac{6}{0,8^2l} \\ 0 & \frac{104}{11*0,2} & \frac{40}{11*0,2} & \frac{144}{11*0,2^2l} \\ \frac{2}{0,8} & \frac{40}{11*0,2} & \frac{4}{0,8} + \frac{56}{11*0,2} & -\frac{6}{0,8^2l} + \frac{96}{11*0,2^2l} \\ -\frac{6}{0,8^2l} & \frac{144}{11*0,2^2l} & -\frac{6}{0,8^2l} + \frac{96}{11*0,2^2l} & \frac{12}{0,8^3l^2} + \frac{240}{11*0,2^3l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \theta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Por tanto, salvo el término  $EI_0/l$  las rigideces, de acuerdo

al formato de la expresión 2.54 son

$$\mathbf{k}_{cc} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 47,27 \end{bmatrix}; \mathbf{k}_{ci} = \mathbf{k}_{ic}^T = \begin{bmatrix} 2,5 & -\frac{9,375}{l} \\ 18,18 & \frac{327,27}{l} \end{bmatrix}; \mathbf{k}_{ii} = \begin{bmatrix} 30,45 & \frac{208,81}{l} \\ \frac{208,81}{l} & \frac{2750,7}{l^2} \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

donde usamos minúsculas por tratarse de relaciones locales y donde, por tanto, la rigidez condensada de acuerdo a 2.57 será:

$$\mathbf{k}_c = \frac{EI_0}{l} \begin{bmatrix} 4,26 & 2,58 \\ 2,58 & 5,29 \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Podemos obtener dicha expresión con `maxima` con la secuencia siguiente, en la que no incluimos el factor constante  $EI_0/l = k_0/l$ :

```
kcc: matrix([5,0],[0,520/11]);
kci: matrix([5/2, -6*25/16/1],
            [40*5/11, (12*5)**2/11/1]);
kic: transpose(kci);
kii: matrix([5+5*56/11, -6*25/16/1+25*96/11/1],
            [-6*25/16/1+25*96/11/1,
            12*125/64/1**2+240*125/11/1**2]);
kc: kcc- kci . invert(kii) . kic;
float(%);
```

**Rigidez de la pieza acartelada con un extremo articulado.** Se trata de un nuevo problema de condensación, fácil de entender en el caso de la pieza de sección constante, y de extender por tanto al caso acartelado.

Para la pieza de sección constante, las relaciones de rigidez establecen que

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_d \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_d \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

pero si, por estar articulado el extremo  $i$ , sabemos que es necesario que sea  $M_i = 0$ , tendremos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{EI}{l} (4\theta_i + 2\theta_d) \implies \theta_i = -\frac{2}{4}\theta_d \\ M_d &= \frac{EI}{l} (2\theta_i + 4\theta_d) = \frac{EI}{l} (-\theta_d + 4\theta_d) \\ M_d &= 3\frac{EI}{l}\theta_d \end{aligned} \quad (2.88)$$

cuyo resultado no es más que la aplicación del proceso descrito por la ecuación 2.57, donde ahora, obviando la constante  $EI/l$ , resultan ser  $\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{K}_{cc} = 4$ ;  $\mathbf{K}_{ci} = \mathbf{K}_{ic} = 2$ .

Si aplicamos el mismo procedimiento a la pieza acartelada, considerando la articulación en el extremo de menor canto, tendremos que la rigideces de 2.86 se condensan ahora considerando que los distintos términos son  $\mathbf{K}_{cc} = 5,29$ ;  $\mathbf{K}_{ii} = 4,26$ ;  $\mathbf{K}_{ci} = \mathbf{K}_{ic} = 2,58$ , donde hemos obviado nuevamente la constante  $EI_0/l$ , resultando una relación calculable igualmente con maxima:

```

kac: kc[2,2] - kc[2,1] * kc[1,1]**(-1) * kc[1,2] ;
float(%);

```

$$M = 3,73 \frac{EI_0}{l} \theta \quad (2.89)$$

### 2.1.3.2. Momentos de empotramiento de la viga acartelada

El procedimiento para condensar las reacciones de la barra compuesta de dos tramos, figura 2.14, es decir, el método para obtener los esfuerzos de empotramiento en sus extremos o sus negativos, las cargas sobre dichos extremos, considerando cargas en todos sus tramos, usa, de acuerdo a la sección 2.1.2.1, la superposición de las reacciones de dos partes o fases, a saber:

- los esfuerzos de empotramiento de cada tramo, considerando que el nudo intermedio no se mueve. Esto supone cargas aún no equilibradas en dicho nudo intermedio. De acuerdo a los procedimientos de 2.1.1.7, ecuación 2.31.
- las reacciones de extremo cuando se libera ese nudo intermedio, estando sometido a las cargas del paso precedente, tal como se detalla en las ecuaciones 2.50, 2.51, 2.52,

obteniendo como resultado las cargas equivalentes descritas en la ecuación 2.53.

**Pieza biempotrada: tramo de cartela.** El empotramiento inicial supone que en el nudo 2 (figura 2.14) hay momento y carga aplicada, resultante de las procedentes de ambos tramos. Determinamos los momentos de empotramiento del tramo acartelado con la expresión 2.31, tal como se concreta en la 2.34, usando las funciones de forma ya obtenidas para dicho tramo, y obtenemos sus cortantes sumando las partes isostática e hiper-

estática<sup>4</sup>:

```
fqcart: integrate(matrix([q*f1],[q*f2]),x,0,1);
fqcart: subst([alpha=4],%);
```

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_i \\ m_d \end{bmatrix} &= \frac{ql^2}{20(\alpha^2 + 4\alpha + 1)} \begin{bmatrix} \alpha^2 + 6\alpha + 3 \\ -(3\alpha^2 + 6\alpha + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{43ql^2}{660} \\ -\frac{73ql^2}{660} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} t_i \\ t_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{30ql^2}{660} \\ \frac{30ql^2}{660} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10ql}{22} \\ -\frac{12ql}{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.90)$$

**Pieza biempotrada completa.** A los esfuerzos de empotramiento en los nudos *conectados* en el modelo al resto de la estructura (los  $-\mathbf{F}_c$  del apartado 2.1.2.1, primera fase), es decir, los de los nudos 1 ( $-\mathbf{F}_{q1}$ ) y 3 ( $-\mathbf{F}_{q3}$ ), y que resultarían de la inmovilidad de los tres nudos, 1, 2 y 3, habrá que sumar las reacciones derivadas del desplazamiento del nudo 2 (segunda fase de dicho apartado), por estar cargado con las fuerzas equivalentes de los tramos de sección constante y acartelado que confluyen en él, y que son iguales y contrarias que los esfuerzos de empotramiento en ese nudo, *interior* ( $\mathbf{F}_{q2} = -\sum \mathbf{f}_{i,e}$ ).

Tenemos así en los nudos conectados:

```
fq1: subst(4/5*1,1,matrix([-q*1**2/12],[-q*1/2]));
fq3: subst(1/5,1,matrix(-fqcart[2],
[-q*1/2+(fqcart[1,1]+fqcart[2,1])/1]));
```

---

4. Las reacciones de viga biapoyada más las derivadas de los momentos de extremo.

y en el nudo “interno” las cargas procedentes de la región de sección constante (momento y cortante):

$$\mathbf{f}_{q2c}: \text{subst}(4/5*1,1, \text{matrix}([q*1**2/12], [-q*1/2]));$$

que se sumará a la parte correspondiente al extremo débil de la cartela

$$\mathbf{f}_{q2a}: \text{subst}(1/5*1,1, \text{matrix}([-f_{qcart}[1,1]], [-q*1/2 - (f_{qcart}[1,1] + f_{qcart}[2,1])/1]));$$

$$\mathbf{f}_{q2}: \mathbf{f}_{q2c} + \mathbf{f}_{q2a};$$

Es decir, las cargas equivalente sobre 1 y 3 si no se mueve 2 son:

$$\mathbf{F}_{q1} = \begin{bmatrix} -\frac{q(0,8l)^2}{12} \\ -\frac{q(0,8l)}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_{q3} = \begin{bmatrix} \frac{73q(0,2l)^2}{660} \\ -\frac{6q(0,2l)}{11} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Las cargas que actúan sobre 2 para desplazarlo son:

$$\mathbf{F}_{q2} = \begin{bmatrix} \frac{q(0,8l)^2}{12} \\ -\frac{q(0,8l)}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{43q(0,2l)^2}{660} \\ -\frac{q0,2l}{2} - \frac{43q(0,2l)^2}{660l} + \frac{73q(0,2l)^2}{660l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05072ql^2 \\ -0,4909ql \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Y por tanto los efectos sobre 1 y 3 de estas, derivados de las reacciones para esta segunda fase pueden determinarse de acuerdo a 2.52, de modo que considerando las rotaciones como los grados de libertad de 1 y 3 tendremos como cargas equivalentes de esta fase (ver segundo término de 2.53)

```
m13 = - kci . invert(kii) . fq2;
```

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2, 5 & -\frac{9,375}{l} \\ 18, 18 & \frac{327,27}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30, 45 & \frac{208,81}{l} \\ \frac{208,81}{l} & \frac{2750,7}{l^2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0, 05072ql^2 \\ -0, 4909ql \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0, 0210ql^2 \\ 0, 0985ql^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Resulta interesante considerar un procedimiento “inverso”, que es el usado en una diapositiva correspondiente a cursos entre 2020 y 2022, en la “píldora” correspondiente a las presentaciones del curso, “matricial 03.5.6 ej pág 2”: Si consideramos el estado de equilibrio completo para esa condición de carga–desplazamiento (a la que damos el nombre ‘d2’) tendremos, considerando la flexibilidad  $\mathbf{k}^{-1}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.94)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{c,d2} \\ \mathbf{U}_{i,d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{-1}_{cc} & \mathbf{k}^{-1}_{ci} \\ \mathbf{k}^{-1}_{ic} & \mathbf{k}^{-1}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{c,d2} \\ \mathbf{F}_{i,d2} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

donde los subíndices indican las referencias a grados de libertad de nudos “conectados” o “interiores” a la subestructura, y donde los nudos conectados no se mueven aunque sí los “interiores” de modo que  $\mathbf{U}_{c,d2} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{U}_{i,d2}$  es desconocido, en tanto que  $\mathbf{F}_{i,d2} = \mathbf{F}_{q2}$  es conocido, siendo las reacciones  $\mathbf{R}_{c,d2}$  desconocidas. De este modo una vía alternativa para determinar dichas reacciones consiste en construir la matriz de flexibilidad (inversa de la de rigidez) de la subestructura y operar con ella y, siendo las cargas equivalentes opuestas a tales reacciones, se pueden determinar como sigue:  $-\mathbf{R}_{c,d2} = (\mathbf{k}^{-1}_{cc})^{-1} \mathbf{k}^{-1}_{ci} \mathbf{F}_{q2}$

```
kvcart: mat_unblocker(matrix([kcc,kci],[kic,kii]));
fvcart: invert(kvcart);
fvcart . kvcart;
k1cc: submatrix(3,4,fvcart,3,4);
k1ic: submatrix(1,2,fvcart,3,4);
k1ci: submatrix(3,4,fvcart,1,2);
```

```
k1ii: submatrix(1,2,fcart,1,2);
m13:invert(k1cc) . k1ci . fq2;
```

pudiendo verificarse la identidad de resultados en ambos procedimientos.

Se obtienen, por tanto, como efectos sobre los nudos 1 y 3 a añadir a los de la primera fase, los momentos y cortantes siguientes, donde los cortantes se han determinado considerando en 1 la suma de la parte isostática de la reacción más la hiperestática derivada del necesario equilibrio de momentos, y en 3 el resto necesario para equilibrar toda la carga:

$$\Delta \mathbf{F}_{q1} = \begin{bmatrix} M_1 \\ F_{v1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0210ql^2 \\ -\frac{-0,4909ql}{5} + \frac{(-0,0210-0,0507+0,0985)ql^2}{l} \end{bmatrix};$$

$$\Delta \mathbf{F}_{q1} = \begin{bmatrix} -0,0210ql^2 \\ -0,0714ql \end{bmatrix}; \quad (2.96)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{q3} = \begin{bmatrix} 0,0985ql^2 \\ -0,4195ql \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

En la versión de maxima:

```
dfq1: matrix(m13[1], [fq2[2,1]*0.2+
(m13[1,1]+m13[2,1]-fq2[1,1])/1]);
dfq3: matrix(m13[2], [fq2[2,1]*0.8-
(m13[1,1]+m13[2,1]-fq2[1,1])/1]);
```

De tal modo que las cargas de extremo equivalentes totales en la pieza acartelada completa son:

$$\mathbf{F}_{q1} + \Delta \mathbf{F}_{q1} = \begin{bmatrix} -0,0744ql^2 \\ -0,4714ql \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_{q3} + \Delta \mathbf{F}_{q3} = \begin{bmatrix} 0,103ql^2 \\ -0,5286ql \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned}fq1t: & \text{fq1}+dfq1; \\fq3t: & \text{fq3}+dfq3;\end{aligned}$$

Llegaríamos a los mismos cortantes de extremo considerando solo los momentos de extremo resultantes junto con la carga total distribuída uniformemente por toda la pieza, para la que la parte isostática en ambos extremos aportaría un cortante de  $0,5ql$  al que se restaría o añadiría la parte hiperestática derivada de los momentos de extremo:  $(-0,0744ql^2 + 0,103ql^2)/l$ .

**Pieza articulada en un extremo.** Tenemos la rigidez (eq. 2.86) y las reacciones de extremo (eqs. 2.98) de la pieza acartelada biempotrada completa.

Si el extremo izquierdo está articulado, esto implica que la reacción (momento) en tal extremo no puede materializarse, lo que fuerza la rotación del mismo para anular tal reacción y el consiguiente cambio en los esfuerzos, también en el extremo acartelado, lo que puede analizarse sin dificultad y se deja para el lector, que debiera llegar finalmente a los esfuerzos de extremo equivalentes (momento, cortante) en 1 y 3 siguientes:

$$\mathbf{F}_{q1,a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,352ql \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_{q3,e} = \begin{bmatrix} 0,148ql^2 \\ -0,648ql \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Dichos esfuerzos son por tanto los contrarios a las reacciones de la pieza acartelada articulada–empotrada considerada, sometida a carga uniformemente repartida.

### 2.1.3.3. Comportamiento del pórtico

Conocidas las cualidades elásticas de las piezas acarteladas que constituyen las vigas del pórtico, y considerando sección constante y unión indeformable en los pilares centrales, así como unión biarticulada en los de fachada, es ahora elemental el modelo del pórtico completo: los grados de libertad serían desplazamientos y rotaciones de los nudos pero, dadas las condiciones apuntadas caben las siguientes simplificaciones:

- considerando que la rigidez axial es mucho mayor que la de flexión, cabe despreñar los alargamientos y acortamientos de las piezas, por lo que solo hay un desplazamiento a considerar por planta:
  - los desplazamientos verticales de los nudos están impedidos por los pilares, y
  - los desplazamientos horizontales son idénticos en todos los nudos de la misma planta por la coacción axial que imponen las vigas.
- considerando la articulación en fachadas, las rotaciones de dichos nudos no son necesarias en el modelo al ser conocidos —nulos— los momentos en todas las piezas que concurren en ellos.

Por tanto, solo forman parte del modelo las rotaciones y desplazamientos de los cinco nudos centrales del pórtico.

En la figura 2.16 pueden observarse los movimientos de una de las plantas considerados en el modelo, que se reproducen en la 2.17 para una de las plantas identificando los parámetros de deformación de las piezas de esta.

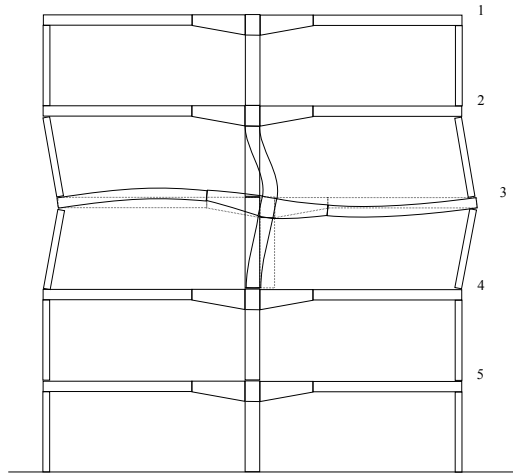


Figura 2.16: Pórtico de cinco plantas: movimientos de planta

Para este modelo tendremos pues, como parámetros para cada planta  $i$  los siguientes:

Parámetros globales: desplazamientos (y cargas)

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} U_{ix} \\ \theta_i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ M_i \end{bmatrix};$$

donde la  $i$  se refiere a la planta y la  $x$  a la dirección del movimiento o carga, siendo por tanto  $F_{ix}$  la fuerza horizontal aplicada y  $M_i$  el momento aplicado al nudo, para los movimientos  $U_{ix}$  (desplazamiento horizontal) y  $\theta_i$  (rotación).

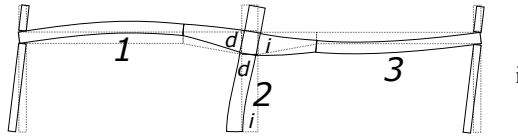


Figura 2.17: Identificación de las deformaciones de las piezas de una planta genérica  $i$

Parámetros locales: deformaciones (y esfuerzos)

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \theta_{i,1d} \\ \theta_{i,2i} \\ \theta_{i,2d} \\ \theta_{i,3i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} m_{i,1d} \\ m_{i,2i} \\ m_{i,2d} \\ m_{i,3i} \end{bmatrix};$$

donde solo se consideran las rotaciones o momentos de extremo de las piezas (numeradas) en los nudos identificados con  $i$  (izquierda) o  $d$  (derecha).

De este modo los parámetros globales de desplazamiento forman una columna de diez parámetros que cabe ordenar en la forma que se prefiera, como pueden ser cualquiera de los formatos  $a$  o  $b$  de las expresiones siguientes, en las que sin embargo debe mantenerse el mismo orden para los parámetros de movimiento

y de carga:

$$\mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} U_{x1} \\ \theta_1 \\ U_{x2} \\ \theta_2 \\ U_{x3} \\ \theta_3 \\ U_{x4} \\ \theta_4 \\ U_{x5} \\ \theta_5 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ M_2 \\ F_{x3} \\ M_3 \\ F_{x4} \\ M_4 \\ F_{x5} \\ M_5 \end{bmatrix}; \mathbf{U}_b = \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{x2} \\ U_{x3} \\ U_{x4} \\ U_{x5} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix}; \mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{x3} \\ F_{x4} \\ F_{x5} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix};$$

Dado que más adelante vamos a tratar de condensar el modelo para analizar su comportamiento sometido solo a las cargas horizontales de viento, en lo que puede denominarse *modelo de cortante* del pórtico, consideraremos el formato de la variante *b*. En este modelo condensaremos más tarde, en los parámetros *c* (o también parámetros conectados), todo lo que pueda representar ese desplazamiento, manteniendo en los parámetros *i* aquellos movimientos que quedan integrados o incluidos en la condensación y que, aunque quedarán ocultos, no quedarán ignorados por quedar embebidos o implícitos en el modelo condensado.

Usamos pues el formato siguiente, en el que *c* se refiere a los desplazamientos de planta e *i* a las rotaciones de los nudos centrales de la planta:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_c \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix}; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \\ \mathbf{F}_i \end{bmatrix}.$$

De este modo el formato de las ecuaciones matriciales del

pórtico puede expresarse tanto en el modelo completo de diez parámetros, como en el condensado de cinco, tal como se detalla a continuación:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_c \\ \mathbf{F}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ci} \\ \mathbf{K}_{ic} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_c \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} \quad (10 \text{ parámetros})$$

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{K}_c \mathbf{U}_c \quad (5 \text{ parámetros})$$

con

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{ci} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ic}$$

de acuerdo a lo que expresa la relación 2.57, y pudiendo deducirse en este modelo las rotaciones de los nudos,  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{U}_i$ , resultantes del desplome del pórtico a partir de los desplazamientos horizontales  $\mathbf{U}_x$ , con  $\mathbf{U}_c = \mathbf{U}_x$  para el caso de cargas internas nulas,  $\mathbf{F}_i = \mathbf{M} = \mathbf{0}$ , en la forma ya vista del apartado 2.1.2.1, ecuación 2.56:

$$\mathbf{U}_i = -(\mathbf{K}_{ii})^{-1} \mathbf{K}_{ic} \mathbf{U}_c$$

De este modo puede construirse, con ayuda de una hoja de cálculo por ejemplo, un modelo en el que desde la perspectiva local, los soportes tienen una rigidez definida por la de la pieza de sección constante biempotrada, ecuación 2.42, también en 2.87, o su formato extendido de 2.44, y las vigas tienen la rigidez de la barra acartelada con articulación, ecuación 2.89.

El ensamblaje de la matriz para el modelo de diez grados de libertad puede hacerse manualmente, tal como se describe en

**2.1.2.2**, y considerando en los pilares, para el caso de cada uno de los desplazamientos horizontales considerados aisladamente, las rotaciones de nudo relativas a lo que sería la geometría desplazada y no deformada del pilar, rotaciones implícitas en la figura deformada que puede verse en **2.16**. Asimismo el modelo, condensado, de cinco grados de libertad podrá construirse en la misma hoja de cálculo a partir del modelo de diez, debiendo aportar, lógicamente, exactamente los mismos resultados.

## **2.2. El enfoque plástico**

### **2.2.1. Modelado**

Vamos ahora a proceder al modelado del comportamiento estructural a partir de la condición de límite plástico, suponiendo que no se produce fallo previo, sea por razones de inestabilidad o pandeo, o por rotura frágil derivada de falta de ductilidad suficiente. Más adelante, en el apartado **3** analizaremos la primera de estas cuestiones. Por otro lado, para la segunda, cabe comparar las necesidades de ductilidad, que pueden estudiarse siguiendo Cervera Bravo y Navas-Sánchez **2021**, con las capacidades disponibles en las piezas, descritas en códigos como ASCE-41 o el Eurocódigo 8, parte 3.

El modelo plástico supone que, además de cumplirse las condiciones de equilibrio en tanto no se alcance el colapso, en toda sección en la que se alcance el límite de resistencia, se produce una plastificación sin rotura en virtud de la cual la deformación local de la sección puede aumentar indefinidamente sin pérdida

de resistencia. Si la estructura es hiperestática esto supone una reconfiguración en la distribución de esfuerzos, incrementándose los de las secciones aún no plastificadas según aumenta la carga hasta que plastifica el número suficiente para transformar la estructura en mecanismo y llevarla por tanto al colapso. De ahí, pues, la denominación de *análisis límite*, y la necesidad por tanto de caracterizar los límites de resistencia de todas y cada una de las secciones relevantes del modelo.

### 2.2.1.1. Resistencia o capacidad límite de sección

Un ejemplo elemental de representación de los límites de resistencia en secciones metálicas sería el de las habituales expresiones de combinación lineal, típicas de la normativa, como la siguiente, en la que los esfuerzos de comprobación serían  $\mathbf{f} = [N_{Ed}, M_{Ed}]^T$ , obviamente susceptibles de tener valores de signos positivo o negativo:

$$\frac{|N_{Ed}|}{N_{Rd}} + \frac{|M_{Ed}|}{M_{Rd}} \leq 1 \quad (2.100)$$

En esta expresión, los coeficientes del *plano límite* de comprobación,  $a_0, b_0$ , son  $1/N_{Rd}, 1/M_{Rd}$ , coeficientes que, para representar al versor del plano debe dividirse por el módulo<sup>5</sup> del

---

5. En el caso de suscitarse dudas por la “mezcla” de variables dimensionalmente diferentes, el momento y el normal, cabría recordar las alternativas de representación señaladas en el caso del ejemplo 1.3.7.4. Una discusión más detallada de esta interesante cuestión requeriría un espacio excesivo aquí.

vector  $[a_0, b_0]^T$ :

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{N_R} \\ \frac{1}{M_R} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{N_R^2} + \frac{1}{M_R^2}} = \frac{\sqrt{N_R^2 + M_R^2}}{N_R M_R} \quad (2.101)$$

de modo que las comprobaciones para cada sección adoptan el formato

$$\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} \leq \mathbf{d} \mathbf{r} \rightarrow m_R |N_E| + n_R |M_E| \leq m_R N_R \quad (2.102)$$

donde

$$n_R = \frac{N_R}{\sqrt{N_R^2 + M_R^2}}; m_R = \frac{M_R}{\sqrt{N_R^2 + M_R^2}} \quad (2.103)$$

y que desarrolladas para eludir el cómputo del valor absoluto pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} m_R N_E + n_R M_E &\leq m_R N_R \\ -m_R N_E + n_R M_E &\leq m_R N_R \\ m_R N_E - n_R M_E &\leq m_R N_R \\ -m_R N_E - n_R M_E &\leq m_R N_R \end{aligned} \quad (2.104)$$

o, en formato matricial:

$$\begin{bmatrix} m_R & n_R \\ -m_R & n_R \\ m_R & -n_R \\ -m_R & -n_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_E \\ M_E \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} m_R N_R; \quad \boldsymbol{\psi} \mathbf{f} \leq \mathbf{d} \mathbf{r}. \quad (2.105)$$

Este abordaje puede generalizarse a cualesquiera otras formas de representar los límites (plásticos), tal como hacemos en los apartados siguientes.

2.2.1.2. Estructuras de barras: propiedades resistentes de sección

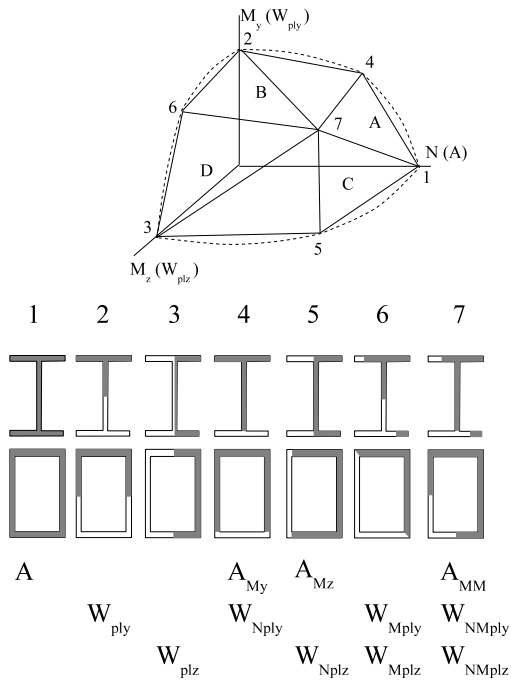


Figura 2.18: Modelado de límites de resistencia en secciones de acero

Si analizamos las posibles condiciones de colapso de una sección sometida a tensiones normales exclusivamente, es decir, sin considerar la posible concurrencia de cortantes, dicha sección podría colapsar por tracción o por compresión exclusivamente, pero también por la combinación de regiones traccionadas mientras otras están comprimidas, en condiciones de flexión, o de esfuerzos axiales combinados con flexión.

**Secciones con resistencia en tracción y compresión.** La figura 2.18 considera algunos casos posibles en secciones en doble T o de tubo rectangular. Los casos 1, 2 y 3, en los que puede considerarse la región oscura como tracciones y la blanca como compresión, corresponderían respectivamente a axial puro, o a flexión pura en las direcciones de mayor y menor inercia. Las resistencias respectivas está fijadas por las condiciones de área y tensión límite  $N = Af_y$  o de módulo plástico y tensión límite  $M_i = W_{pli}f_y$ . Tales resistencias pueden representarse como puntos en un espacio de tres ejes  $N, M_y, M_z$  (o  $N/f_y = A, M_y/f_y = W_{ply}, M_z/f_y = W_{plz}$ ) que permitan identificar situaciones combinadas. Pueden considerarse combinaciones de esfuerzo axial y flexión esviada y, por tanto, infinidad de otros casos de límite, dependiendo de cual sea la situación de la línea neutra que separa tracciones de compresiones. Sin embargo, considerando que toda esa infinidad establece un límite convexo en el espacio  $N, M_y, M_z$ , puede simplificarse ese límite de resistencias estableciendo en él algunos puntos adicionales (los 4 a 7 de la figura), y reduciendo el límite al poliedro de caras planas limitado por esos vértices, cuyas coordenadas correspon-

derán a los valores de área o de módulos plásticos disponibles para el correspondiente valor de esfuerzo normal o momento flector, que cabe determinar por el estado de tensiones dibujado. De tal modo que las coordenadas de colapsos como el 1, el 3, 4 o el 7 serían respectivamente  $[A, 0, 0]$ ,  $[0, 0, W_{plz}]$ ,  $[A_{My}, W_{Nply}, 0]$  y  $[A_{MM}, W_{NMply}, W_{NMplz}]$ , siendo  $A$  o  $W_{plz}$  valores estáticos habituales de los proutuarios de secciones metálicas, en tanto que los  $A_{My}$ <sup>6</sup>,  $W_{Nply}$ <sup>7</sup>,  $A_{MM}$ <sup>8</sup>,  $W_{NMply}$ <sup>9</sup> o  $W_{NMplz}$ <sup>10</sup> serían valores estáticos calculables directamente a partir de las figuras de distribución de tensión, y cuyos valores para las secciones habituales están tabulados en el anejo B de Cervera 2010a.

Conocidos de la manera indicada los vértices del poliedro límite, la determinación de los planos límite es una mera operación algebraica que se detalla, para el caso de tres dimensiones considerado aquí, en el anejo A.

**Secciones sin resistencia en tracción.** La figura 2.19 considera el caso de secciones sin resistencia en tracción, como resulta habitual en fábrica o mampostería. En este caso, y de cara a simplificar la construcción de los valores estáticos, se han trazado casos de línea neutra no recta que, aunque resultan improbables desde la perspectiva de las condiciones de distribución de ten-

---

6. Área disponible concurrente con flexión principal agotando las alas

7. Módulo para flexión principal concurrente con normal en alma

8. Área disponible concurrente con flexión esviada

9. Módulo en dirección principal de flexión esviada concurrente con normal

10. Módulo en dirección secundaria de flexión esviada concurrente con normal

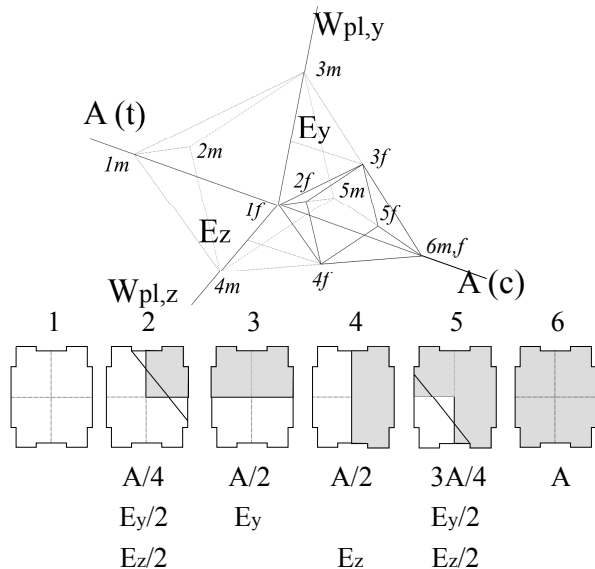


Figura 2.19: Modelado de límites de resistencia en secciones de mampostería o fábrica ( $f$ ), en contraste con el correspondiente modelado en el caso metálico ( $m$ ).

sión, son sin embargo más sencillos para la determinación de los correspondientes valores estáticos y, además, resultan estar del lado de la seguridad, como se comprueba fácilmente imaginando la modificación de dichos valores si se supone una línea recta que sustituya la quebrada manteniendo la magnitud de áreas

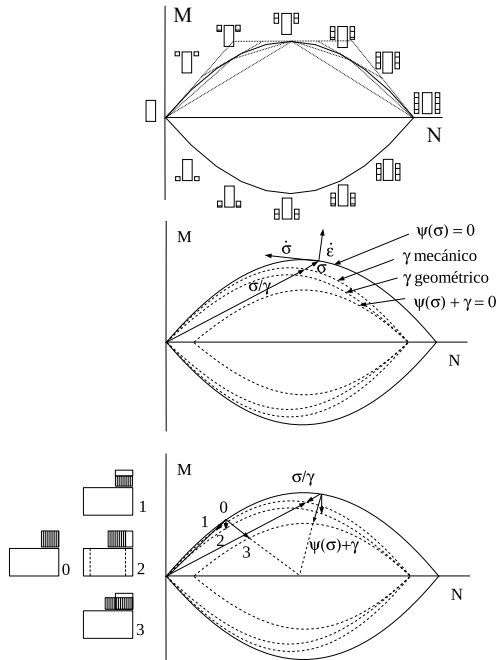


Figura 2.20: Comparativa entre los tres modelos de seguridad para el caso de secciones rectangulares en flexocompresión sin resistencia en tracción. a) estados de compresión excéntrica y alternativas, en líneas de puntos, para las combinaciones de esfuerzo límite. b) contracción de la superficie límite según cada uno de los criterios de seguridad. c) comparación en los modelos de reducción de tensiones entre el estado límite (0) y los considerados seguros (1, 2, 3) y los correspondientes vectores de reducción según criterio

sombreadas y no sombreadas.

Los valores estáticos pertinentes son ahora los del área de la sección o fracciones de esta, así como los momentos estáticos de media sección o sus fracciones, equivalentes los primeros a la mitad de lo que serían los correspondientes módulos plásticos en secciones con resistencia a tracción.

Lo relevante ahora es que la superficie límite —o de resistencia límite— no está centrada en el origen como era el caso precedente, sino que dicho origen —es decir el punto de esfuerzo nulo— corresponde a una de las posibles condiciones de límite de resistencia y, por tanto, una de las condiciones a evitar: la fábrica debe estar sometida a compresión para ser segura.

Y esto nos llevaría a considerar la diferencia entre los distintos criterios de seguridad empleados usualmente.

**Criterios de seguridad.** La figura 2.20 muestra gráficamente la diferencia entre los tres modelos habituales para la representación de las condiciones de seguridad en relación con los estados límite descritos por la superficie límite o superficie de [estados de] rotura (ver Cervera 2010b).

Podrían enunciarse los tres criterios de la manera siguiente:

- *criterio clásico*: Los esfuerzos mayorados no alcanzan la superficie límite (en el dominio de esfuerzos y capacidades resistentes) correspondiente a las resistencias minoradas. La reducción —proporcional, de esfuerzos o cargas— se produce en torno a la situación correspondiente a la carga nula (esfuerzo nulo). Se corresponde con el uso de un coeficiente de seguridad  $\gamma_m$  mecánico para mayorar las cargas.

- *criterio geométrico*: Los esfuerzos se resisten en una geometría reducida interior a la real (en el dominio o espacio geométrico que ocupa el volumen estructural). La reducción supone menor brazo a igualdad de compresión, (y menor disponibilidad de área para la resistencia de compresiones). Se corresponde con el uso de un coeficiente de seguridad  $\gamma_g$  geométrico para reducir la geometría disponible.
- *criterio robusto*: El dominio limitado por la superficie límite (en el espacio de esfuerzos y capacidades resistentes) se reduce en torno a un punto interior a esta, centrado, o razonablemente centrado en relación al dominio completo.

En todo caso, la aplicación de cualquiera de estos criterios nos llevará a caracterizar las condiciones de resistencia en el formato de la ecuación 1.40, tal como se comprueba en los ejemplos del apartado 1.4.13.2 y el anejo A.

### 2.2.1.3. Estructuras de barras: modelado de piezas

Hemos visto tanto en el apartado anterior, 2.2.1.2 como en el ejemplo del capítulo anterior, 1.4.13.2, cómo caracterizar las capacidades resistentes de las secciones: se trata de una decisión de diseño del modelo resistente para estas. El modelado de la pieza exige establecer dicha capacidad resistente, pero también la forma en que se alcanza ese límite, y como afecta a la pieza y a la estructura completa la correspondiente deformación plástica ulterior de la sección, a través de sus conexiones con el resto de piezas de la estructura.

En barras no cargadas localmente será habitual referir todo el comportamiento a las secciones extremas, al ser estas las so-

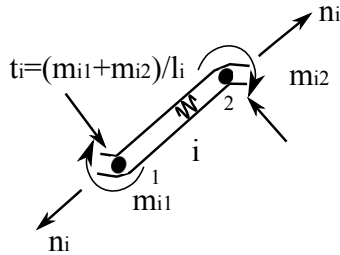


Figura 2.21: Modelado plástico de piezas metálicas: los extremos pueden tener rótulas plásticas, y la pieza podría igualmente estar sometida a deformaciones axiales por un mecanismo de plastificación cuya posición resulta indiferente.

metidas a los mayores esfuerzos, de modo que las rotaciones se acumulen en los planos de contacto de dichas secciones extremas con el resto de la estructura: esto lleva a establecer como nodos de conexión los puntos a los que asimilemos tales planos de contacto, siendo habitual elegir un único *nodo* por “nudo”, atribuyendo la deformación del interior del nudo de enlace entre piezas a las barras contiguas, al igual que se hace en el enfoque elástico, y suponiendo que toda la deformación está acumulada en el extremo de las piezas contiguo al nudo y aceptando la indeformabilidad completa del resto de estas.

La figura 2.21 refleja la idea de este modelo, en el que la posibilidad de deformaciones plásticas derivadas del acoplamiento de momento y esfuerzo normal exige las contrapartidas cinemáticas de rotación (en ambos extremos) y de cambio de longitud de la

pieza. Este último —sea alargamiento o acortamiento— no exige la determinación precisa de la región de plastificación: habiendo un único esfuerzo normal en la barra si no hay carga aplicada a esta, no se precisa más que un parámetro de deformación longitudinal que puede asociarse con la pieza misma como si fuera un resorte o un mecanismo extensible situado en cualquier posición de dicha pieza. Por otro lado es habitual considerar secundario el esfuerzo cortante, al poder deducirse directamente de las diferencias de momento en ambos extremos, de modo que no se adoptan variables ni para este ni para la deformación transversal de la pieza por distorsión de sus secciones.

De este modo, para cada barra los parámetros de esfuerzo  $\mathbf{f}_i$  son  $[m_{i1} \ m_{i2} \ n_i]^T$  para los correspondientes parámetros de deformación  $\mathbf{u}_i = [\theta_{i1} \ \theta_{i2} \ \delta_i]^T$  que serán los (únicos) parámetros locales a emplear en las correspondientes ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad entre condiciones locales y globales. Es decir que, aun cuando el conjunto de esfuerzos de extremo incluyen también los cortantes  $t_i$ , estos se expresan sólo como consecuencia de los momentos de extremo ( $t_i = (m_{i1} + m_{i2})/l_i$ ), y no forman parte, por tanto, del vector  $\mathbf{f}_i$ .

Este enfoque permite identificar los parámetros  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{u}$  con los del enfoque elástico: son los mismos esfuerzos o movimientos de extremo, si bien la interpretación de su significado difiere para las deformaciones: en el caso elástico responden a las rotaciones en el extremo derivadas de las deformaciones distribuidas por toda la barra mientras que en el plástico contienen la deformación concentrada en rótulas o regiones de plastificación. Y esta identificación permite, por tanto, el uso de las mismas

matrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  usadas en el enfoque elástico para establecer las condiciones de equilibrio y compatibilidad, ecuaciones 1.2 y 1.1.

Cabe señalar que este enfoque exige la consideración en los nudos de grados de libertad de desplazamiento y de rotación. Este segundo puede parecer redundante cuando solo hay dos barras y no hay momento aplicado, dado que entonces el momento flector a ambos lados del nudo es idéntico por equilibrio, y la deformación plástica la suma de las correspondientes a ambos lados del “nudo”, por lo que bastaría una sola rótula (plástica) y un solo esfuerzo.

#### 2.2.1.4. Estructuras de bloques indeformables

El enfoque plástico o límite es aplicable al análisis de estructuras (arcos) de fábrica o mampostería en los casos en que puedan cumplirse exacta o aproximadamente las condiciones de Heyman 1966 (ver traducción española en Heyman 1995), a saber

- la fábrica no tiene resistencia a tracción
- la resistencia a compresión es “infinita”
- no se produce deslizamiento en las juntas.

Si se cumplen exactamente estas condiciones se puede demostrar que se cumplen los teoremas del análisis límite y por tanto el análisis plástico es aplicable. La consideración de la infinidad de la resistencia en compresión solo trata de señalar que las condiciones de rotura corresponden a colapsos derivados de la rotación relativa entre las diferentes piezas o dovelas, con o sin

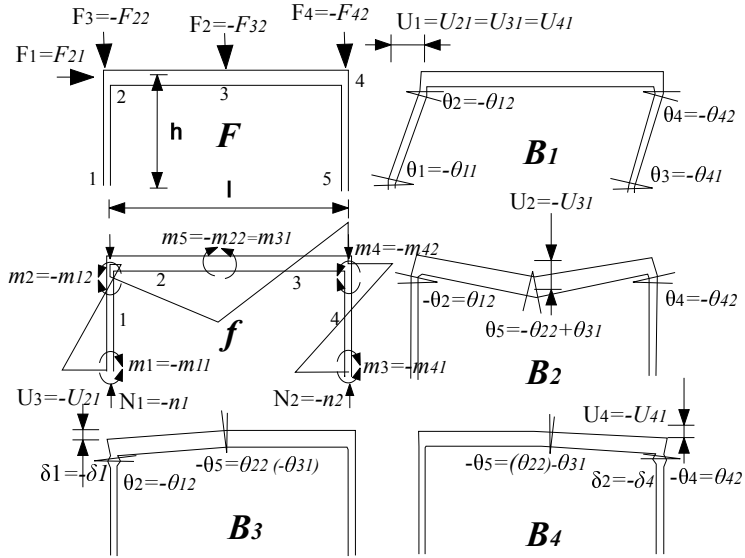


Figura 2.22: Modelado plástico de pórtico de acero con cuatro grados de libertad en desplazamientos considerando la posibilidad de acortamiento de los pilares por acoplamiento de esfuerzos normales y momentos en la plastificación. Se representan los vectores de carga y esfuerzo, así como las figuras de las que se derivan las cuatro columnas de la matriz de compatibilidad. Se selecciona un único parámetro de esfuerzo y deformación rotacional por nudo frente a la alternativa empleada en la figura 1.15.

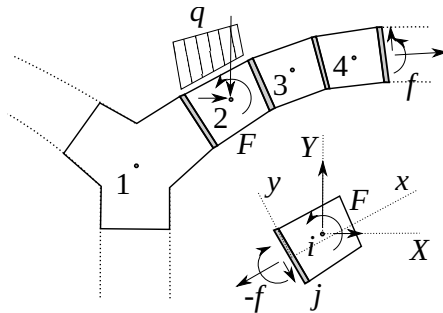


Figura 2.23: Modelo de estructura de bloques indeformables enlazados a través de juntas deformables. Se representa el esfuerzo  $f$  sobre alguna junta  $j$  resultante de la acción ejercida sobre esta (por el bloque  $i$ ) sobre la cara de ejes crecientes (cara derecha de la junta, en equilibrio con el esfuerzo contrario en la cara opuesta, negativa o izquierda).

aplastamiento de los puntos de contacto. Es una condición que cabe relajar, en tanto que el aplastamiento local permite considerar como centros de rotación puntos diferentes del extremo de la dovela. No así la condición de no deslizamiento pues, tal como estudia Magdalena Layos 2013, en caso de haber posibilidad de deslizamiento el modelo de rotura pasa a ser de plasticidad no asociada (ver definición en 1.4.4) y la solución deja de ser única. En lo que sigue consideraremos que se cumplen suficientemente las condiciones aunque solo aceptaremos los resultados del análisis si concuerdan con ellas.

**Parámetros: dovelas y juntas.** Consideramos por tanto la estructura o esqueleto de fábrica constituida por la agrupación de un conjunto de dovelas o bloques indeformables en contacto mutuo a través de juntas capaces de resistir compresiones excéntricas pero no tracciones, al modo de la figura 2.23.

Para tomar la decisión mediante la que se eligen los parámetros globales  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  o locales  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$ , consideramos la ventaja que supone describir los movimientos y equilibrios globales de cada uno de los bloques, en tanto que los esfuerzos y sus límites correspondiente a las condiciones de colapso están ligados a lo que sucede en las juntas. Esto lleva a que los bloques sean los que definen los parámetros globales y las juntas los locales.

De este modo los desplazamientos de cada uno de los bloques y las fuerzas externas aplicadas a estos son  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{F}$  respectivamente, en ejes globales  $X, Y$ , mientras que las deformaciones de las juntas —los movimientos relativos entre las dos caras de estas— y los esfuerzos en ellas serán respectivamente los parámetros  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}$ . Dichos esfuerzos internos se describen de acuerdo a ejes locales  $x, y$ , no coincidentes en general con los globales. Hay que considerar dos caras en cada junta, de modo que los esfuerzos internos son iguales a las fuerzas ejercidas sobre la cara creciente o sus contrarios en la cara decreciente, tal como se refleja en la figura 2.23 para dos juntas diferentes. Como criterio general elegimos representar el esfuerzo en la junta por el valor numérico de las fuerzas aplicadas sobre su cara creciente (en el sentido creciente del eje perpendicular a la cara). Hay que hacer notar la *quiralidad* de los esfuerzos en una sección, es decir que, siendo los valores de las fuerzas aplicadas iguales y contrarias según sea la cara en que se observen, los ejes que permitirían

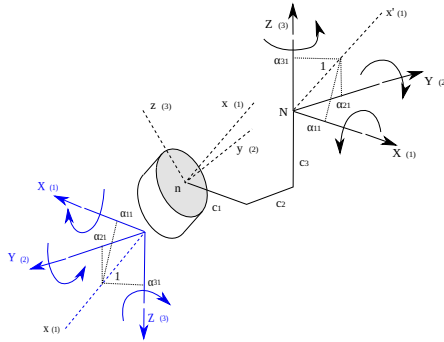


Figura 2.24: Quiralidad de los esfuerzos en una sección: siendo iguales y opuestas las fuerzas aplicadas a las dos caras de la sección, su descripción exige, o bien usar sistemas de ejes de quiralidad opuesta en cada cara, o bien diferenciar las denominaciones de las caras para un sistema de ejes único asociado a una de ellas. Esto segundo es lo más habitual, asociando los ejes a la cara positiva, en la dirección creciente del eje perpendicular.

emplear valores positivos idénticos en ambas caras tienen diferente quiralidad: los de la cara creciente son levógiros, mientras que los de la decreciente serían dextrógiros, tal como se aprecia en la figura 2.24. Esto exige, pues, considerar tanto la orientación atribuida a la junta como la cara con la que contacta con cada dovela considerada.

**Ecuaciones de equilibrio de la dovela.** Para establecer las condiciones de equilibrio en este caso, sucede sistemáticamente que no van a coincidir los orígenes de los ejes globales y locales, por lo que deberemos tener en consideración las expresiones de cambio de ejes del apartado 2.1.2.2, figura 2.10, y ecuaciones 2.63 y 2.64.

Si una junta  $j$  conecta en su cara creciente con un bloque  $i$  ( $i|j+$ ) o si lo hace a través de su cara decreciente ( $i|j-$ ) podemos considerar que con los adecuados cambios de eje los términos relevantes para sumar al equilibrio (para obtener resultante nula) son los términos globales de carga  $\mathbf{F}$  a añadir a los locales  $+(-\mathbf{f})$ , o los  $+(+\mathbf{f})$  para la carga negativa, y por tanto tendremos que la parte que dicha junta aporta al equilibrio, y la suma total de la aportación de las juntas al bloque podrían representarse con unas ecuaciones tales como las siguientes:

$$\mathbf{F}_{i|j+} = \mathbf{H}_{ij+} \mathbf{f}_{j+}; \quad \mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{i|j} \quad (2.106)$$

En esas expresiones  $\mathbf{F}_{i|j+}$  o los posibles  $\mathbf{F}_{i|j-}$  indicarán el aporte al equilibrio de juntas conectadas al bloque por la derecha (la cara creciente o positiva) o por la izquierda (la decreciente o negativa): en el primer caso el esfuerzo aportado al bloque es  $-\mathbf{f}_j$ , mientras que en el segundo será  $+\mathbf{f}_j$ , tal como se aprecia en la figura 2.23, con las consiguientes consecuencias en las matrices  $\mathbf{H}_{ij+}$  o  $\mathbf{H}_{ij-}$ .

En tres dimensiones, si la posición de la junta  $j$  que conecta en su cara creciente con un bloque  $i$  está en las coordenadas  $X, Y, Z$ , es decir, si las excentricidades en la figura 2.10 son

$[c_1, c_2, c_3] = [-X, -Y, -Z]_j$  (donde  $[c_1, c_2, c_3]$  son los valores positivos de las excentricidades en la figura, y siendo  $[X, Y, Z]$  las coordenadas de la junta en relación a ejes globales situados en el nodo de referencia de la dovela), pueden establecerse las ecuaciones del aporte parcial al equilibrio<sup>11</sup>, ecuaciones que restringidas al caso de dos dimensiones resultan, (para  $\mathbf{H}_{ij+}$ ):

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{Xx} & \alpha_{Xy} & 0 \\ \alpha_{Yx} & \alpha_{Yy} & 0 \\ \alpha_{Yx}X - \alpha_{Xx}Y & \alpha_{Yy}X - \alpha_{Xy}Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

donde además, siendo el ángulo  $\langle Xx \rangle = \varphi$ , resultará que  $\alpha_{Xx} = \cos \varphi$ ,  $\alpha_{Yx} = \sin \varphi$ ,  $\alpha_{Xy} = -\sin \varphi$ ,  $\alpha_{Yy} = \cos \varphi$ .

Para las juntas que conectan desde su cara decreciente los términos a considerar para la suma que aporta el equilibrio (la resultante nula) son ahora los locales  $+\mathbf{f}$ , con los correspondientes cambios de signos en la matriz de equilibrio  $\mathbf{H}_{ij-}$  que resulta ser ahora

$$\mathbf{H}_{ij-} = - \begin{bmatrix} \alpha_{Xx} & \alpha_{Xy} & 0 \\ \alpha_{Yx} & \alpha_{Yy} & 0 \\ \alpha_{Yx}X - \alpha_{Xx}Y & \alpha_{Yy}X - \alpha_{Xy}Y & 1 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

pero, ¡ojo!, pues así como en la ecuación 2.107 los valores de las coordenadas  $X, Y$  de la junta son negativas en relación a los ejes

---

11.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{Xx} & \alpha_{Xy} & \alpha_{Xz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{Yx} & \alpha_{Yy} & \alpha_{Yz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{Zx} & \alpha_{Zy} & \alpha_{Zz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{Zx}Y - \alpha_{Yx}Z & \alpha_{Zy}Y - \alpha_{Yy}Z & \alpha_{Zz}Y - \alpha_{Yz}Z & \alpha_{Xx} & \alpha_{Xy} & \alpha_{Xz} \\ \alpha_{Xx}Z - \alpha_{Zx}X & \alpha_{Xy}Z - \alpha_{Zy}X & \alpha_{Xz}Z - \alpha_{Zz}X & \alpha_{Yx} & \alpha_{Yy} & \alpha_{Yz} \\ \alpha_{Yx}X - \alpha_{Xx}Y & \alpha_{Yy}X - \alpha_{Xy}Y & \alpha_{Yz}X - \alpha_{Xz}Y & \alpha_{Zx} & \alpha_{Zy} & \alpha_{Zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}_j$$

de la dovela, ahora dichas coordenadas pasan a ser positivas, de modo que aunque simbólicamente la matriz se representa como negativa de la anterior, las coordenadas de la junta respecto de la dovela son diferentes y, por tanto, la matriz es diferente.

Una alternativa más sencilla consiste en emplear los ejes coordenados de junta para la medida de las excentricidades entre nodos globales (dovelas) y locales (juntas). Esto es así porque dichas excentricidades sólo afectan al cómputo de los momentos y, dado que los esfuerzos de la junta están en ejes locales, sus momentos en el nudo (o dovela) son muy sencillos de determinar en dichos ejes. Tenemos así que

$$\mathbf{H}_{ij_+} = \mathbf{H}_{ij_*} = \begin{bmatrix} \alpha_{Xx} & \alpha_{Xy} & 0 \\ \alpha_{Yx} & \alpha_{Yy} & 0 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

$$\mathbf{H}_{ij_-} = -\mathbf{H}_{ij_*} = - \begin{bmatrix} \alpha_{Xx} & \alpha_{Xy} & 0 \\ \alpha_{Yx} & \alpha_{Yy} & 0 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

donde ahora  $x, y$  son las coordenadas del nudo que identifica la dovela  $i$  en los ejes locales de la junta considerada,  $j$ , ejes que en el caso de la junta conectada por su cara creciente o positiva se orientan hacia el interior de la dovela, mientras en que en caso de estar conectada por la cara decreciente, o negativa, se orientan hacia el exterior de la dovela. Esta diferencia supone evidentemente signos diferentes en las coordenadas  $x, y$  de la dovela para ambas ecuaciones, al igual que sucedía en el caso de las 2.107 y 2.108.

De este modo las condiciones para equilibrar las fuerzas  $\mathbf{F}_i$  de una cierta dovela  $i$  deberán incluir la suma de las contribuciones de todas las juntas que enlazan con dicho bloque, lo que, atendiendo a la cara desde la que enlazan, puede expresarse como

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j_+(d)} \mathbf{H}_{ij_*} \mathbf{f}_{j_+} - \sum_{j_-(i)} \mathbf{H}_{ij_*} \mathbf{f}_{j_-} = \sum_j \mathbf{H}_{ij} \mathbf{f}_j \quad (2.111)$$

donde el signo negativo corresponde a las juntas que enlazan desde su cara negativa (o cara izquierda de la junta)

**Ecuaciones de equilibrio de la estructura completa.** Enlazando en una sola expresión las ecuaciones de equilibrio de todas las dovelas o bloques tendremos que, para la estructura completa, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \cdots & \mathbf{H}_{1n} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \cdots & \mathbf{H}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{N1} & \mathbf{H}_{N2} & \cdots & \mathbf{H}_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

siendo  $N$  el número de bloques,  $n$  el número de juntas, y empleando para cada  $\mathbf{H}_{ij}$  la correspondiente contribución de la junta  $j$  al equilibrio del bloque  $i$ , nula ( $\mathbf{0}$ ) si no hay conexión entre dicha junta y bloque, y considerando el signo  $+$  o  $-$  en la forma  $\mathbf{H}_{ij_*}$  según sea la cara de contacto.

**Ecuaciones de compatibilidad.** En el caso de que necesitemos las ecuaciones de compatibilidad, basta recordar la duali-

dad establecida en 1.2.5, y por tanto la ecuación 1.21, de modo que bastará usar la traspuesta de la matriz de equilibrio de la anterior expresión 2.112.

### 2.2.1.5. Restricciones de resistencia en fábricas

Tal como hemos visto para las estructuras de barras dúctiles, 2.2.1.3, la caracterización de las propiedades resistentes es una decisión de diseño del modelo resistente a emplear. En los párrafos siguientes vamos a presentar y discutir sucesivamente varias alternativas para el modelado de las estructuras planas de bloques, partiendo de los criterios comentados al inicio del apartado 2.2.1.4.

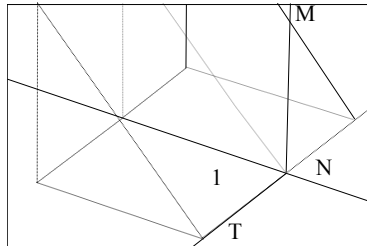


Figura 2.25: Resistencia de fábrica “de Heyman”: infinita resistencia en compresión (fuerza normal), y sin posibilidad de deslizamiento (resistencia infinita frente a fuerza tangencial).

El primer modelo, figura 2.25, respondería al cumplimiento estricto de los criterios de Heyman expresados en dicho aparta-

do. Tendríamos con condiciones de resistencia las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} h/2 & 0 & 1 \\ h/2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

Donde  $h$  es el canto de la junta, y donde podemos considerar  $h/2 = z_{pl}$  como el brazo de palanca plástico disponible para una junta de sección rectangular. Las condiciones para los esfuerzos posibles no están acotadas ni en  $N$  ni en  $T$ .

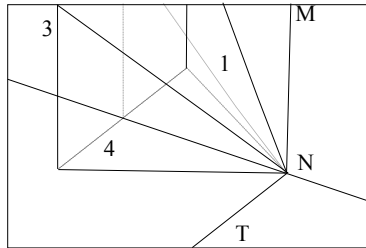


Figura 2.26: Resistencia de fábrica “de Heyman acotada”: resistencias en compresión y tangencial limitadas.

Si pensamos en limitar de forma absoluta los esfuerzos  $N$  o  $T$ , con un límite para  $T$  asociado al coeficiente de rozamiento  $\mu$ , tendremos un segundo modelo, figura 2.26, para el que podemos

escribir:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & n \\ m & 0 & -n \\ -1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ \mu & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |N_m|, \quad (2.114)$$

donde

$$n = 1/\sqrt{1 + z_{pl}^2}, \quad m = n z_{pl}; \quad \text{con } z_{pl} = h/2 \text{ en sección rectangular.}$$

pues efectivamente, las ecuaciones de resistencia lateral son  $|T| \leq \mu|N|$  mientras que para las de resistencia en tensiones normales, que ligán momento y normal a través de la excentricidad, hemos considerado el formato del cuadro 2 del apartado C en Cervera 2010a, aun sin limitar aún la capacidad a momento: las dos primeras ecuaciones son idénticas a las de 2.113 salvo el factor  $n$  que, por ser factor común en una ecuación homogénea, no afecta a la comprobación. En esta ecuación estamos usando  $z_{pl}$  para representar el brazo plástico de la sección dúctil, o la distancia entre los centros de gravedad de las dos mitades de la sección, que es igual a medio canto en secciones rectangulares, pero que resulta igualmente fácil de determinar en otras secciones y que, como veremos más adelante, facilita normalizar las comprobaciones en todo tipo de secciones.

Ese formato permite expresar con claridad un tercer modelo, en el que sustituímos la curva parabólica que expresaría la resistencia a flexocompresión en caso de tensiones a compresión limitadas (ver figura 2.20) por el hexágono circunscrito,

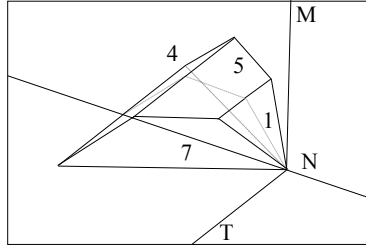


Figura 2.27: Resistencia de fábrica: tensiones en compresión y esfuerzo tangencial limitadas.

en el que, por tanto, el vértice de esfuerzo nulo se forma con las mismas líneas límite que en los caso anteriores, pero hay un vértice simétrico para la máxima compresión, y además el momento máximo corresponde a la situación de media sección comprimida. Tenemos así un tercer modelo, figura 2.27, al que corresponde la condición de resistencia de la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & n \\ -m & 0 & -n \\ m & 0 & -n \\ -m & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \mu & 1 & 0 \\ \mu & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ n \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |N_m|z_{pl}, \quad (2.115)$$

nuevamente con  $n = 1/\sqrt{1 + z_{pl}^2}$ ,  $m = n z_{pl}$ .

En lo que sigue vamos a construir un cuarto modelo que, aunque va a ser caracterizado numéricamente para secciones rectangulares, puede ser usado con buena aproximación para secciones macizas que no lo sean. Para construir este modelo aproximaremos la curva límite (parabólica en secciones rectangulares) a través del octógono que describimos en la figura 2.28.

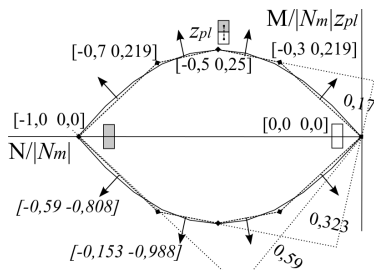


Figura 2.28: Resistencia de secciones de fábrica: aproximación a la superficie límite con capacidad limitada en compresión.

Para esta construcción consideramos como condiciones de resistencia las expresiones de las diferentes líneas límite del octógono, en la forma siguiente:

$$a \frac{N}{|N_m|} + b \frac{M}{|N_m|z_{pl}} \leq d \quad (2.116)$$

En ella,  $a$  y  $b$  son los componentes del versor de la recta considerada para los esfuerzos normalizados, y  $d$  la distancia de la recta al origen, deducible del paso de dicha recta por algunos de

sus puntos. Lo crucial es, pues, establecer las coordenadas de los vértices del octógono. Estamos usando como factores de escala los valores de normal máximo  $|N_m|$  y de momento de referencia  $M_{\text{ref}} = |N_m|z_{pl}$ . Los vértices son fáciles de determinar, y están indicados entre paréntesis cuadrados en tipografía normal en la figura 2.28. Los de la parte inferior pueden conocerse por simetría. Establecidos dichos vértices, es mera cuestión geométrica determinar los versores de los segmentos que los unen, y están identificados dos de ellos en *itálica* en la misma figura. Por la doble simetría de esta pueden determinarse todos los restantes. Finalmente es también mera geometría la determinación de las distancias de las diferentes rectas al origen. En la figura se identifican tres de estas distancias en las prolongaciones con líneas de puntos de los correspondientes segmentos. Otras tres son deducibles por simetría y las dos restantes corresponden a líneas que pasan por el origen.

De este modo podemos establecer las ocho condiciones de resistencia en flexocompresión si dividimos la ecuación 2.116 por el módulo de sus coeficientes que consta en la ecuación siguiente:

$$\left\| \frac{a}{|N_m|}, \frac{b}{|N_m|z_{pl}} \right\| = \frac{|a|}{|N_m|z_{pl}} \sqrt{z_{pl}^2 + \frac{b^2}{a^2}} \quad (2.117)$$

Resulta así como condición de resistencia:

$$\frac{z_{pl}a/|a|}{\sqrt{z_{pl}^2 + \frac{b^2}{a^2}}} N + \frac{b/|a|}{\sqrt{z_{pl}^2 + \frac{b^2}{a^2}}} M \leq \frac{d/|a|}{\sqrt{z_{pl}^2 + \frac{b^2}{a^2}}} |N_m|z_{pl} \quad (2.118)$$

En ella podemos ignorar el factor divisor común de modo que, sustituyendo por los valores para  $a, b, d$  correspondientes a cada

plano y añadiendo las ecuaciones de límite por rozamiento en el esfuerzo tangencial, resultan las diez ecuaciones de la expresión límite siguiente:

$$\begin{bmatrix} z_{pl} & 1,37 & 0 \\ z_{pl} & 6,46 & 0 \\ -z_{pl} & 6,46 & 0 \\ -z_{pl} & 1,37 & 0 \\ z_{pl} & -1,37 & 0 \\ z_{pl} & -6,46 & 0 \\ -z_{pl} & -6,46 & 0 \\ -z_{pl} & -1,37 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \\ \mu & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1,111 \\ 2,111 \\ 1 \\ 0 \\ 1,111 \\ 2,111 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |N_m|z_{pl}; \quad \psi \mathbf{f} \leq \mathbf{dr} \quad (2.119)$$

Dicha expresión puede usarse aproximadamente en secciones diferentes de la rectangular en la medida en que es una aproximación a la curva límite en la que cuatro de los ocho vértices, correspondientes a los máximos o mínimos de cada una de las componentes de esfuerzo  $N$  o  $M$  son exactos en cualquier circunstancia, mientras que los otros cuatro responden a una aproximación sensata a las diferentes curvas posibles que definen la resistencia de las secciones macizas simétricas en fábricas.

Hay que señalar de nuevo que el modelo resultaría inválido en los casos en los que la rotura se produzca con deslizamiento, pues la regla de flujo establecida en el apartado 1.4.6 para los modelos de *plasticidad asociada* implicaría, tal como se señala en el apartado 1.4.12, una cinemática de colapso que estaría siendo incumplida en la rotura real: la rotura por deslizamiento viola la

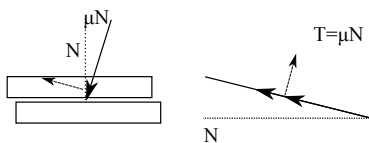


Figura 2.29: Violación de la regla de flujo: a la izquierda, el normal oblicuo y el vector de desplazamiento ortogonal a este que implicaría separación entre las superficies. A la derecha la línea límite en el espacio de los esfuerzos  $N, T$  y el correspondiente vector de plastificación, que debiera ser ortogonal si se cumpliera la regla de flujo.

regla de flujo en la medida en que esta exige una separación entre las superficies que deslizan que no se produce en la realidad. La figura 2.29 ilustra la cuestión.

### 2.2.2. Verificación de la estructura completa

Hasta aquí hemos visto como construir las condiciones de resistencia para las secciones, que limitan los esfuerzos en estas a través de las ecuaciones 1.40 (en versiones para las secciones como las 2.105 o 2.119, que cabe generalizar a la estructura completa sin dificultad ninguna, como en 1.41). Hemos visto igualmente como establecer las condiciones de equilibrio (e implícitamente de compatibilidad) entre tales esfuerzos y las cargas que harían colapsar la estructura, a través de las ecuaciones 1.37, en las que habitualmente desconoceremos al inicio del proceso las cargas finales de colapso  $F$  o, alternativamente, el factor de

carga  $\gamma$  por el que hay que escalar las cargas aplicadas inicialmente  $\mathbf{F}_I$  para alcanzar la rotura. De modo que la solución al estado de colapso de la estructura completa no es más que la solución al problema de determinar el factor de carga necesario para alcanzar ese colapso, junto con el estado de esfuerzos correspondiente.

### 2.2.2.1. Factores de carga límite

Como ya se ha visto en el apartado 1.4.9, la formulación de las condiciones de equilibrio permite que el factor de carga se aplique solo a una parte de las cargas, como cuando las cargas permanentes son conocidas y se busca saber en cuanto puede incrementarse la sobrecarga, obteniendo la carga de colapso como la suma de ambas componentes:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \gamma\mathbf{F}_I$ , ver 1.75.

Hemos visto además en el apartado 2.2.1.2 que cuando las condiciones límite son cercanas a situaciones de esfuerzo nulo o casi nulo, los criterios clásicos de seguridad no resultan adecuados: en ese caso veíamos como alternativa la determinación del denominado criterio robusto que busca determinar la forma y escala para la alteración de la carga más perjudicial.

Allí lo veíamos para la sección, pero es fácilmente generalizable para todas ellas, si para cada una es posible determinar la condición de esfuerzo  $\mathbf{f}_c$  que podemos llamar central, o esfuerzo más alejado de cualquiera de las situaciones de rotura. Podemos extender por ejemplo la figura 2.27 añadiendo ese centro, tal como hacemos en la 2.30, de modo que cualquier condición de esfuerzo pueda entenderse como la suma de esa componente más la diferencia requerida para llegar al esfuerzo considerado.

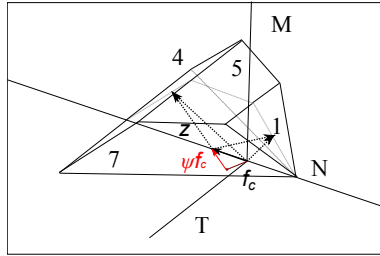


Figura 2.30: Resistencia de fábrica y su “centro”: tensiones en compresión y esfuerzo tangencial limitadas. Se añade un par de casos de esfuerzo, correspondientes a dos límites en los planos 1 y 4, y su composición como suma de componentes central ( $\mathbf{f}_c$ , común a ambos, en línea continua) y adicional. Para uno de ellos, se añade la descomposición del esfuerzo central entre las componentes paralela y ortogonal al correspondiente plano límite. Esta última es la proyección de  $\mathbf{f}_c$  sobre la dirección del versor del plano, alineada con la componente adicional, componente contenida en el plano  $N, M$  dada la simetría de la superficie límite respecto de este plano.

Lo que vemos para la sección es posible igualmente para la estructura pues, por equilibrio, se puede determinar el vector de cargas  $\mathbf{F}_c$  que genera esa situación óptima para todas las secciones:

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{H} \mathbf{f}_c \quad (2.120)$$

de modo que podemos expresar como parte variante o adicional

de la carga la parte de la carga inicial que se aleja de esa situación óptima, y por tanto caracterizar la rotura a partir del factor de carga que cabe aplicar a esa parte adicional hasta alcanzar la rotura. Tendríamos ahora, pues

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_a \quad (2.121)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \gamma \mathbf{F}_a \quad (2.122)$$

donde el factor de carga considerado coincidiría por tanto con el que hemos llamado robusto.

La determinación de los esfuerzos  $\mathbf{f}_c$ , necesarios para conocer la carga óptima para la estructura,  $\mathbf{F}_c$  es sencilla: las ecuaciones de resistencia pueden reescribirse utilizando *variables de holgura* positivas  $\mathbf{z}$ :

$$\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} \leq \mathbf{d} \mathbf{r} \equiv \boldsymbol{\psi} \mathbf{f} + \mathbf{z} = \mathbf{d} \mathbf{r}; \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (2.123)$$

Si elegimos la denominación  $\mathbf{z}$  para la menor de todas estas, nuevamente podemos reescribir estas ecuaciones como

$$\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} + \mathbf{1} \mathbf{z} \leq \mathbf{d} \mathbf{r}; \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \quad (2.124)$$

donde hemos sumado la holgura mínima  $\mathbf{z}$  a la combinación de esfuerzos  $\boldsymbol{\psi} \mathbf{f}$  en todas las ecuaciones límite (de ahí el uso de la columna de unos expresada por  $\mathbf{1}$ ). Si queremos buscar las condiciones de esfuerzo más alejadas de la rotura, esto supone buscar los valores de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{z}$  que maximizan  $\mathbf{z}$ , por lo que la solución para  $\mathbf{f}_c$  es la solución del problema de programación

lineal siguiente, y que cabe resolver con SIMPLEX:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{f}_c, z}{\text{máx}} z \\ & \psi \mathbf{f}_c + \mathbf{1} z \leq \mathbf{d} \mathbf{r} \\ & z > 0 \end{aligned} \quad (2.125)$$

### 2.2.2.2. Solución de los problemas de carga límite

De acuerdo con todo lo anterior cabe establecer como problema de comprobación, y empleando el enfoque estático (secciones 1.4.7.1 y 1.4.9), el problema de programación lineal 1.76 que, de acuerdo al teorema estático, combina las ecuaciones de equilibrio y resistencia en la determinación del máximo factor de carga admisible:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{f}, \Gamma}{\text{máx}} \Gamma \\ & \begin{bmatrix} \psi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{d} \mathbf{r} \\ -\mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \\ & \Gamma \geq 0 \end{aligned}$$

En dicha formulación la carga inicial  $\mathbf{F}_I$  se considera descompuesta en dos partes,  $\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1$ , una constante y otra variable, de modo que el factor de carga solo se aplica a la parte variable  $\mathbf{F}_1$  por lo que la carga de rotura es finalmente  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Gamma \mathbf{F}_1$ .

Tenemos así las posibilidades siguientes, ilustradas en parte en la figura 2.31:

- *factor de carga tradicional*

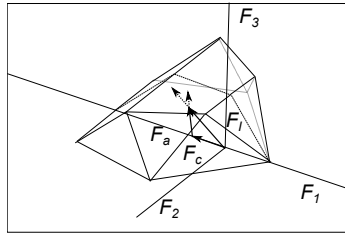


Figura 2.31: Factores de carga en fábricas: se representan los vectores de crecimiento hasta el límite de las cargas iniciales  $\mathbf{F}_I$  —para un espacio de tres parámetros de carga— dependiendo de que se use el factor de carga tradicional sobre la totalidad de la carga, o el robusto.

- aplicado a la totalidad de las cargas cuando  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$
- aplicado a las sobrecargas cuando  $\mathbf{F}_0$  contempla las cargas permanentes —con su propio coeficiente de seguridad— y  $\mathbf{F}_1$  contempla las variables: en este caso se mide el coeficiente disponible para estas.
- *factor de carga robusto* cuando  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_c$  son las cargas que equilibran la condición óptima de esfuerzos  $\mathbf{f}_c$ , determinados a través de la solución al problema 2.125, y el equilibrio subsiguiente 2.120, y donde por tanto  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_a$  expresa la parte de las cargas que se alejan de esa situación óptima.

### 2.2.2.3. Dualidad en problemas de programación lineal

Llegados a este punto merece la pena considerar las implicaciones en los problemas de plasticidad de una importante dualidad en los problemas de programación lineal. Tales problemas son problemas en los que se maximiza o minimiza una función lineal de un conjunto de variables a optimizar (un *coste* en el que los coeficientes de la expresión lineal serían los *precios* asociados a cada variable) y donde las variables están sometidas a restricciones lineales, expresables con una cierta matriz de coeficientes y unos valores límite para cada restricción.

Una formulación clásica de la dualidad establece que si existe un problema de programación lineal llamado *primal*, de minimización, también existe un problema adjunto o *dual*, en otro sistema de variables, de maximización en el que las restricciones lineales se expresan con la traspuesta de la matriz del primer problema, para otro conjunto de valores límite, y con la particularidad de que los valores límite de un problema son los coeficientes (*precios*) de la expresión lineal que se maximiza o minimiza en el otro, siendo idéntico el límite (*coste*) obtenido en la solución de ambos problemas. Expresándolo simbólicamente

$$\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \iff \begin{array}{l} \max_{\mathbf{y}}(\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y}) \\ \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (2.126)$$

Con  $\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} = \max_{\mathbf{y}} \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y}$ .

**Problema dual al de la carga límite.** Si comparamos la expresión de la derecha en 2.126 con el problema plástico estáti-

co o de carga límite en la formulación de la ecuación 1.65, vemos que podríamos obtener como problema dual de este uno como el siguiente<sup>12</sup>,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} & \left( [(\mathbf{d}r)^T \quad \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \right) \\ & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^T & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_I^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \mathbf{v}_1 \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.127)$$

problema en el que hemos desglosado el nuevo conjunto de variables  $\mathbf{v}$  en las dos partes,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , correspondientes a las dos componentes de las expresiones, tanto para el coste como para la definición de las restricciones, que se derivan de los diferentes grupos de componentes en las ecuaciones del problema original.

Observamos que el primer grupo de variables,  $\mathbf{v}_1$ , son —en la expresión de coste— coeficientes multiplicadores de los valores de capacidad resistente de comparación para cada una de las ecuaciones de resistencia, mientras que el segundo grupo,  $\mathbf{v}_2$ , son —en las ecuaciones para las restricciones— multiplicadores para los términos de carga inicial.

**Interpretación cinemática del problema dual.** Podemos establecer una interpretación inmediata del problema precedente estableciendo  $\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\lambda}_p$  y  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{U}$ , los parámetros de la aproximación cinemática estudiada en el apartado 1.4.7.2, ecuación

---

12. algunos de los detalles de la transformación en la forma que adoptan las restricciones requerirían de un proceso más detallado o riguroso que no vale la pena considerar aquí

**1.71.** Efectivamente si observamos la segunda parte en la expresión de las restricciones, tendríamos  $\mathbf{F}_I^T \mathbf{U} = 1$  que no es más que la condición de normalización de la velocidad de colapso a través de una medida fija para la pérdida de energía de las cargas, dado que, en un proceso de colapso de cinemática dada por  $\mathbf{U}$ , los desplazamientos son proporcionales en cada paso, pero indeterminados.

Si  $\mathbf{U}$  son desplazamientos, en la primera parte de las restricciones tenemos la expresión  $\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p - \mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{0}$  que no es más que la expresión de la regla de flujo 1.48 combinada con la ecuación de compatibilidad 1.1 cuando  $\boldsymbol{\lambda}_p$  son los multiplicadores plásticos asociados a cada restricción de resistencia.

Finalmente, dado que la carga de colapso es  $\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I$  resulta que el producto escalar que se minimiza determina precisamente el factor de carga:

$$\min \left( [(\mathbf{d}\mathbf{r})^T \quad \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_p \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \right) = \min ((\mathbf{d}\mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda}_p) = \gamma,$$

dado que  $(\mathbf{d}\mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda}_p \geq \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \gamma \mathbf{F}_I^T \mathbf{U}$ , de acuerdo a la ecuación 1.68.

De este modo comprobamos que el enfoque cinemático no es otra cosa que el dual del estático. Cabe señalar que esta dualidad que vemos reiterada resulta de las propiedades del producto escalar, por tanto de la elección de las variables estáticas y cinemáticas asociadas y de su producto, el trabajo.

Con esta visión podemos abordar todos los problemas de carga límite ya analizados desde la perspectiva estática, e incluso abordar problemas nuevos.

En relación con los problemas de carga límite abordados en la sección 1.4.9, cabe identificar sus versiones duales con facilidad. Por ejemplo, la versión cinemática dual del problema estático de 1.76 sería ahora

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_p, \mathbf{U}} \left( \gamma = [(\mathbf{d}\mathbf{r})^T \quad -\mathbf{F}_0^T] \begin{bmatrix} \lambda_p \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \psi^T & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_p \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_p \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.128)$$

pues  $(\mathbf{d}\mathbf{r})^T \lambda_p \geq \mathbf{F}^T \mathbf{U} = (\mathbf{F}_0^T + \gamma \mathbf{F}_1^T) \mathbf{U}$  por lo que, siendo  $\mathbf{F}_1^T \mathbf{U} = 1$ , resulta  $\gamma = \min \left( (\mathbf{d}\mathbf{r})^T \lambda_p - \mathbf{F}_0^T \mathbf{U} \right)$ . Las ecuaciones correspondientes a las restricciones siguen siendo las del problema anterior.

#### 2.2.2.4. Empujes límite

Hasta aquí hemos abordado desde la perspectiva del cálculo en rotura problemas en los que las condiciones geométricas —y con ellas las condiciones de apoyo— están prescritas y lo que se busca es determinar las cargas compatibles con esas condiciones, o los correspondientes factores de carga.

Un problema recurrente en las estructuras de fábrica o mampostería (en arcos) es acotar los valores máximo y mínimo admisibles para alguna de las fuerzas en los apoyos: el problema de los empujes límite. En este caso, dado que el empuje pasa a ser una variable estática relevante, resulta imprescindible considerar en el modelo la variable asociada: el desplazamiento del

apoyo. De este modo la (o las) junta(s) extrema(s) ya no son fijas, sino que es preciso unir las a una “dovela” ficticia, de espesor nulo, que permita representar en sus parámetros nodales — fuerzas-desplazamientos— las resultantes y los correspondientes movimientos para los colapsos asociados a sus valores máximo o mínimo.

En estos casos, además, la resultante —el empuje— tiene varias componentes de las que sólo interesa una en particular: piénsese, por ejemplo en el problema del empuje de una bóveda gótica sobre el arbotante: no suele ser relevante ni su posición más o menos excéntrica en la dovela de enlace, ni su mayor o menor inclinación: interesa básicamente el rango admisible en los empujes horizontales, dada la geometría y resto de cargas sobre el arbotante.

Podemos formular este tipo de problemas sin demasiada dificultad estableciendo que las cargas iniciales  $\mathbf{F}_I$  se componen, además de ciertas cargas fijas  $\mathbf{F}_0$ , de dos componentes adicionales  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_\rho$ , donde las  $\mathbf{F}_1$  representan las cargas límite que buscamos determinar, y las  $\mathbf{F}_\rho$  valores asociados a dichas cargas límite, de tal modo que siendo la carga inicial  $\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_\rho$ , la carga de rotura sea  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Gamma \mathbf{F}_1 + \mathcal{P}^T \mathbf{F}_\rho$ . En esta última expresión el factor  $\Gamma$  es el valor desconocido que nos interesa expresar como límite (empuje límite), en tanto que el o los factores  $\mathcal{P}$  solo nos interesan en tanto que son necesarios para describir la solución, pero no son determinantes. En el ejemplo del arbotante para la determinación del empuje horizontal máximo admisible ejercido por la bóveda, en un modelo plano,  $\mathbf{F}_0$  serían las cargas sobre el conjunto de dovelas salvo la dovela ficticia o extrema

que enlaza con la bóveda,  $\mathbf{F}_1$  aportaría sólo un valor unitario para la “carga” horizontal sobre la dovela extrema, de tal modo que  $\Gamma$  pueda ser ese empuje máximo buscado, y  $\mathbf{F}_\rho$  contendría columnas para expresar cada uno de los valores unitarios asociados a ese empuje, a saber, para la “carga” tangente a la cara de la dovela en contacto con la bóveda y para el “momento” sobre esa cara, asociado a la excentricidad del empuje, etc...

Así formulado, el problema desde la perspectiva estática sería obtener el máximo  $\Gamma$  posible, junto con los valores de los coeficientes  $\mathcal{P}$  correspondientes a cada uno de los valores unitarios de las fuerzas asociadas al empuje, con cumplimiento de las condiciones de resistencia y de equilibrio.

$$\begin{aligned} \max_{f, \Gamma, \mathcal{P}} \left( \Gamma \equiv [\mathbf{0}^T \quad 1 \quad \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \psi & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} d\mathbf{r} \\ -\mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \\ \Gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (2.129)$$

donde nuevamente las restricciones no son más que las ecuaciones de resistencia y de equilibrio.

Para la determinación del empuje mínimo, bastaría incluir en  $\mathbf{F}_0$  un empuje mayor al máximo, y en  $\mathbf{F}_1$  un “empuje negativo” capaz de restar al contenido en  $\mathbf{F}_0$ , maximizando esa resta con la misma expresión anterior.

Si consideramos ahora el problema cinemático dual del an-

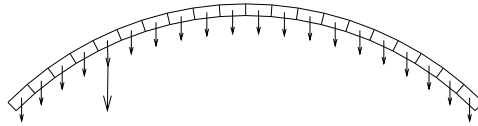


Figura 2.32: Arco con carga excéntrica: determinando el valor límite de esta

terior, tendremos, según lo visto en apartados anteriores, la formulación siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_p, \mathbf{U}} \left( \gamma(\lambda_p) = [(\mathbf{d}\mathbf{r})^T \quad -\mathbf{F}_0^T] \begin{bmatrix} \lambda_p \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \psi^T & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_1^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_\rho^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_p \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \lambda_p \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.130)$$

En este caso estamos utilizando el hecho de que  $(\mathbf{d}\mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbf{F}^T \mathbf{U}$ , con  $\mathbf{U}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T (\mathbf{F}_0 + \gamma \mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{F}_\rho)$  de tal modo que  $(\mathbf{d}\mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{F}_0^T \mathbf{U} \geq (\gamma \mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{F}_\rho)^T \mathbf{U}$ , y donde finalmente  $\mathbf{F}_1^T \mathbf{U} = 1$  y  $\mathbf{F}_\rho^T \mathbf{U} = \mathbf{0}$ , resultando por ello que la minimización del producto propuesto nos aporta el valor buscado para  $\gamma$ .

### 2.2.3. Ejemplo de aplicación: arco de bloques indeformables

La figura 2.32 presenta un arco sometido a su propio peso más una carga excéntrica para el que se busca analizar las condiciones de estabilidad. El arco se ha modelado con veinte dovelas y veintinueve juntas (las diecinueve entre las dovelas más las dos juntas de enlace del arco con la sustentación) y, puesto que se consideran como grados de libertad globales los movimientos de las dovelas, en caso de no haber deslizamiento resultará necesariamente que las juntas de extremo del arco no se mueven, resultan inamovibles, aun cuando podrían “deformarse”. Es decir, se trata de un modelo de apoyos fijos. En caso de pretenderse la posibilidad de movimiento de uno de los apoyos estaríamos considerando en este una dovela adicional, tal vez de espesor infinitamente delgado, en la que las cargas serían precisamente las fuerzas aplicadas a la junta desde el exterior a través del apoyo.

Se considera el arco de trazado circular, de radio 14,14 m y luz de 20 m, realizado con 20 dovelas de 0,5 m de canto, sin resistencia en tracción, y resistencia máxima de 500 kN en compresión, sometido a una carga de 10 kN por bloque más una puntual de 20 kN en la quinta dovela.

Se desea determinar

- el factor de carga de rotura para el total de las cargas consideradas
- el factor de carga de rotura para ampliación de solo la carga puntual
- la geometría de las cargas que resulta pésima para la estabi-

lidad del arco

- el factor de carga para dichas cargas pésimas y,
- las trayectorias de esfuerzos (correspondientes al funicular en cálculo gráfico) y las geometrías de colapso de los tres casos de rotura considerados

### 2.2.3.1. Formulación disponible

Recapitulando los aportes de los apartados teóricos, disponemos de las ecuaciones de

- EQUilibrio:  $-\mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , con  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Gamma\mathbf{F}_1$ ;
- COMpatibilidad:  $-\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{U} = \mathbf{0}$ , con  $\mathbf{B} = \mathbf{H}^T$ ;
- resistencia (MATERial):  $\boldsymbol{\psi}\mathbf{f} \leq \mathbf{d}\mathbf{r}$ .

donde se cumplen además —por ser plasticidad asociada— las

- regla de flujo:  $\boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}$ , y
- condición de colapso:  $(\boldsymbol{\psi}\mathbf{f} - \mathbf{d}\mathbf{r})^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ .

Finalmente el teorema estático aporta la desigualdad entre la pérdida de energía de las cargas y la disipación plástica:

- $\mathbf{F}^T\mathbf{U} \leq \mathbf{f}^T\mathbf{u} = (\mathbf{d}\mathbf{r})^T\boldsymbol{\lambda}$ .

Podemos determinar cual sería la *carga central* (óptima), es decir la que aporta la situación más alejada posible de la rotura, la asociada a los esfuerzos correspondientes a la máxima *holgura* posible, a través del problema de programación lineal siguiente

$$\begin{aligned} & \underset{z, \mathbf{f}_c}{\text{máx}} z \\ & z\mathbf{1} + \boldsymbol{\psi}\mathbf{f}_c \leq \mathbf{d}\mathbf{r} \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

y deduciendo dicha carga central a partir de estos esfuerzos por equilibrio, y determinando por ello la “peor” dirección de carga como diferencia entre la carga aplicada y la carga central — expresiones en las que además podemos distinguir entre cargas permanentes y variables, etc—

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= \mathbf{H} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{F}_a &= \mathbf{F}_I - \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_v - \mathbf{F}_c \\ \mathbf{F} &= \Gamma \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_c \end{aligned}$$

Con todo ello hemos visto como pueden abordarse las soluciones a los problemas estático (1.76) y su dual cinemático (2.128), y se trata ahora de materializar dichas soluciones para el problema propuesto.

Para ello deben construirse las diferentes matrices de datos de los dos problemas, si bien resulta útil considerar el formato traspuesto al segundo de los problemas<sup>13</sup>, dado que en ese caso las matrices de coeficientes para las restricciones son idénticas en ambos problemas.

La organización de los datos puede hacerse con eficiencia en cualquier lenguaje de programación, pero vamos a presentar aquí como podría organizarse una hoja de cálculo para la tarea, en tanto que resulta muy visual, y los programas de hojas o libros de cálculo tienen usualmente preprogramada la solución por SIMPLEX.

La hoja, esquematizada en la figura 2.33, permite obtener el vector de cargas centrales, así como la solución a los problemas estático y cinemático.

---

13. al modo en que la forma 1.72 es la traspuesta de la 1.71.

Vamos a ver como se usaría.

Tenemos por un lado los datos fijos, a saber, todas las columnas de unos o ceros, las matrices  $\psi$ ,  $-\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{r}$  (ambas permiten fijar la columna  $\mathbf{r}_l = \mathbf{d}\mathbf{r}$ ), así como posiciones para desglosar las posibles leyes de carga, permanentes  $\mathbf{F}_p$ , variables,  $\mathbf{F}_v \dots$  o para colocar resultados parciales como las cargas centrales  $\mathbf{F}_c$  y adicionales  $\mathbf{F}_a$ . Estas columnas permitirán desglosar las cargas iniciales  $\mathbf{F}_I$  del problema entre las constantes  $\mathbf{F}_0$  y las que se van a ver alteradas por el factor de carga  $\Gamma$ ,  $\mathbf{F}_1$ , o por los factores  $\mathcal{P}$  que están ligados a las cargas que hemos llamado asociadas a la carga variable, cargas  $\mathbf{F}_\rho$ . Las cargas fijas  $-\mathbf{F}_0$  son las que se insertan en la columna que sirve tanto como valores límite como coeficientes del cálculo de  $\gamma$ . Las cargas a introducir en las columnas de datos que resultarán afectadas por los factores de carga en cualquiera de los problemas a abordar son por tanto  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_\rho$ , en su caso.

Tenemos a su vez las variables de decisión  $z$ ,  $\mathbf{f}_c$  para las cargas centrales (el producto  $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix}$  se almacena en  $\mathbf{r}_c$  para su comparación con  $\mathbf{r}_l$ ) y las soluciones obtenidas con simplex permitirán calcular y fijar  $\mathbf{F}_c = \mathbf{H}\mathbf{f}_c$  y  $\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_I - \mathbf{F}_c$ , siendo  $\mathbf{F}_I$  la carga inicial del problema considerado.

Tenemos las variables de decisión  $\mathbf{f}$ ,  $\gamma$  (y tal vez  $\mathcal{P}$ ) para el problema estático, en el que se comparará el resultado  $\mathbf{r}_s$  con los objetivos de capacidad  $\mathbf{r}_l$ .

Tenemos finalmente las variables de decisión y coeficientes,  $\lambda$ ,  $\mathbf{U}$ , del cómputo del factor de carga  $\gamma$ , variables que multiplicadas por la gran matriz que contiene los coeficientes de resistencias  $\psi$ , equilibrios  $-\mathbf{H}$  y cargas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_\rho$ , permiten cal-

cular una fila de resultados a comparar con la fila de objetivos de ceros y un uno de la parte inferior de la hoja.

La determinación de los valores de las variables de decisión que solucionan cualquiera de los problemas que se quieran plantear se realiza con SIMPLEX con un proceso semejante al descrito en el ejemplo de un capítulo anterior, [1.4.13.3](#), estableciendo la celda objetivo, el sentido de la búsqueda (máximo o mínimo), las variables de decisión, y las restricciones relevantes.

### 2.2.3.2. Modelo y soluciones

Un desarrollo detallado del ejemplo y sus posibles soluciones está disponible en Cervera [2010a](#), anejo C. Puede encontrarse igualmente un modelo completo con una representación más precisa de los límites materiales en la hoja de cálculo adjunta a este documento (ArcoPlástico.ods).



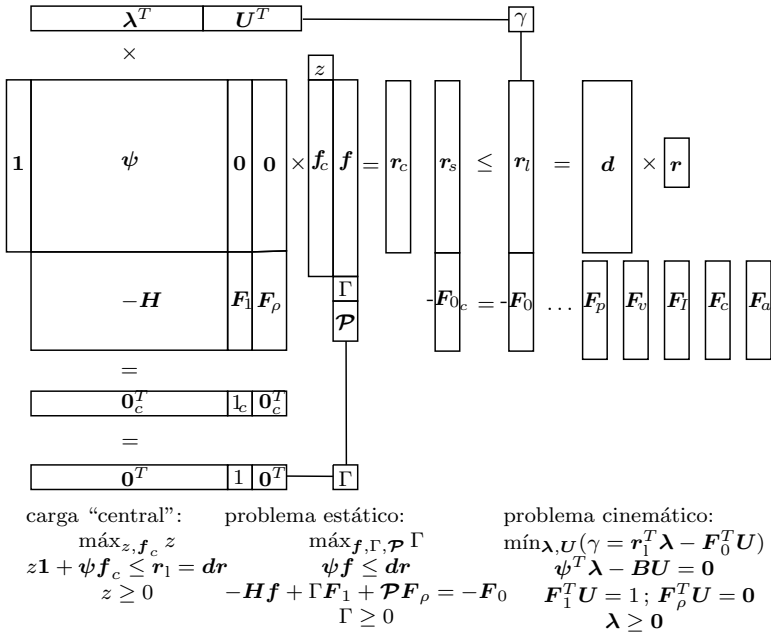


Figura 2.33: Esquema de hoja de cálculo para la solución plástica. Una sola hoja para ambas soluciones, estática y cinemática. Se señalan las posiciones para los datos (columnas de unos o ceros, matrices  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $-\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{r}$ , leyes de carga permanentes  $\mathbf{F}_\rho$  o variables,  $\mathbf{F}_v \dots$  para construir las  $-\mathbf{F}_0$  y  $\mathbf{F}_1$ ), para las variables de decisión ( $z$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\gamma$ ,  $\mathcal{P}$  o  $\lambda$ ,  $\mathbf{U}$ ), para resultados ( $\mathbf{r}_c = [\mathbf{1} \boldsymbol{\psi}] \times [z \mathbf{f}]$ ,  $\mathbf{r}_l = \mathbf{d} \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_s, \dots$ ) incluyendo los productos de los que resultan los factores de carga  $\Gamma$  y  $\gamma$ , etc; separando los valores de las operaciones de las partes izquierda y derecha de las desigualdades para permitir su comparación.

## Capítulo 3

# Estabilidad elástica

En este capítulo se presentan y desarrollan los conceptos y métodos requeridos para abordar los problemas de estabilidad desde la perspectiva elástica o elastoplástica. Se trata de un análisis en el que es absolutamente necesario considerar las condiciones de equilibrio en la situación deformada de la pieza o estructura en cuestión e, incluso, en situaciones de deformación perturbadas respecto de la del equilibrio posible.

Como se ve en la figura 3.1, solo cabe distinguir entre las condiciones de equilibrio estable, indiferente o inestable de un sistema cuando nos alejamos de la situación del puro equilibrio, cuando “perturbamos” este. Si la energía potencial del sistema crece en la perturbación, el sistema tratará de retornar a la posición del equilibrio inicial y el sistema será estable. Si la energía potencial total se mantiene constante, el sistema perderá la po-

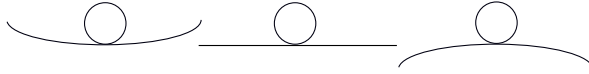


Figura 3.1: Tipos de equilibrio, estable, indiferente (o “crítico”) e inestable.

sición inicial aun siguiendo en equilibrio, que en este caso es indiferente. Y si la energía potencial total disminuye, el sistema se desequilibrará definitivamente alejándose de la posición inicial. El equilibrio es inestable.

El análisis puede hacerse tanto analizando la energía potencial como revisando las condiciones de equilibrio en las posiciones perturbadas: en la medida en que las fuerzas resultan ser las derivadas de la energía respecto del desplazamiento, el sentido creciente o decreciente de las resultantes en relación con la dirección de la perturbación permite caracterizar el comportamiento que cabe esperar. En esta evaluación, la *situación crítica* o indiferente permite separar a uno u otro lado las condiciones estables de las inestables.

### 3.1. Conceptos básicos en problemas de un grado de libertad

En este apartado analizamos sistemas cuya perturbación deriva de desplazamientos regidos por cambios en un solo grado de libertad. La sencillez de este modelo permite la introducción de los principales conceptos, que se generalizan en apartados

siguientes.

### 3.1.1. Estabilidad lateral de pórticos articulados

Consideramos el caso de un pórtico de pilares y vigas unidos con uniones articuladas y sometido a cargas verticales sobre los pilares. Se considera que la geometría inicial es perfecta y, por tanto, habiendo resistencia suficiente en los pilares, puede considerarse en equilibrio. Pero si se perturba esta geometría imponiéndole un desplazamiento lateral, resultará ahora que las fuerzas pasan a no estar alineadas con los pilares y, por tanto, el conjunto resulta desequilibrado: cada una de las cargas o reacciones verticales que comprimían los pilares puede considerarse ahora compuesta de la suma de una componente horizontal más una componente oblicua alineada con los pilares: esta última sigue estando en equilibrio con la compresión del pilar, pero ahora las componentes horizontales han dejado de estar equilibradas, y requieren de algún mecanismo que se oponga a ellas, es decir, de algún elemento rígido que, al deformarse, oponga fuerzas contrarias que las contrarresten.

#### 3.1.1.1. Estabilidad lateral

En la figura 3.2 consideramos cada pilar  $i$  sometido a una carga  $P_i$  y perturbamos el equilibrio inicial considerando un desplome  $\theta$  (o un desplazamiento lateral  $v$  tal que  $v = \theta h$ ). En esta figura, el mecanismo estabilizante es una barra horizontal rígida, obligada a extenderse o acortarse cuando se impone ese

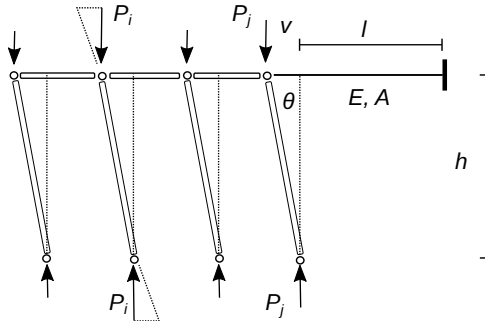


Figura 3.2: Estabilidad de pórtico: efectos desestabilizantes y estabilizantes.

desplazamiento lateral. La condición de contraste que nos permite identificar el tipo de equilibrio es la relación entre la suma de las fuerzas desestabilizantes,  $H$ , y la capacidad estabilizante de la barra,  $R_h$ : la condición crítica (indiferente) en el desplome está en la igualdad entre la carga lateral y la respuesta. Esta situación se dará si la totalidad de las cargas a estabilizar alcanzan un valor crítico  $P_k$ , que podríamos medir con un coeficiente de carga único  $\gamma_k$  multiplicado a las cargas realmente aplicadas  $\sum P_i$ , tal que su efecto lateral iguale la respuesta de la barra.

Es decir:

$$\begin{aligned}
 H &= R_h \\
 \theta \sum (\gamma_k P_i) &= \theta P_k = \varepsilon EA = \frac{EA}{l} v \\
 \theta P_k &= EA \frac{h}{l} \theta = K_\theta \theta
 \end{aligned}$$

En definitiva llegamos a que la carga “crítica”, asociada al conjunto de pilares estabilizados por la barra lateral depende de las propiedades de rigidez de dicha barra lateral:

$$P_k = K_\theta = EA \frac{h}{l} \quad (3.1)$$

Tenemos así que el *factor de carga crítica*, es decir, *el factor que lleva las cargas hasta el límite crítico* es

$$\gamma_k = \frac{P_k}{\sum P_i} = \frac{EA \frac{h}{l}}{\sum P_i} = \frac{K_\theta}{\sum P_i} \quad (3.2)$$

El factor de carga crítica es pues el cociente entre la rigidez lateral frente al desplome y la carga que comprime los elementos que se desploman, entendiendo el desplome como el ángulo de inclinación producido.

Para un factor de carga menor al crítico, la estructura será estable: el desplome no se producirá pues su inicio pondrá en marcha una respuesta superior a la carga desestabilizante, devolviendo el pórtico a la geometría inicial. E inversamente, para un factor de carga mayor, la respuesta será menor que el efecto

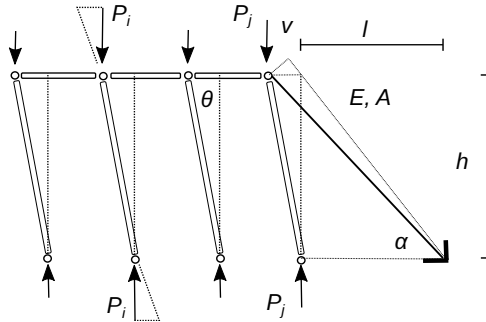


Figura 3.3: Arriostramiento de pórtico: efectos desestabilizantes y estabilizantes.

desestabilizante y, por tanto, siendo el equilibrio inestable, aumentará el desplome hasta alcanzar el límite de resistencia de la barra produciéndose el colapso.

### 3.1.1.2. Arriostramiento diagonal

En el caso de la configuración de la figura 3.3, el enfoque es el mismo aun cuando la respuesta estabilizante difiere: ahora la respuesta es una fuerza oblicua, cuya componente horizontal aporta la necesaria componente estabilizante, mientras que la componente vertical implicará aumentos en las cargas verticales totales. El equilibrio entre la fuerza lateral desestabilizante y la respuesta de la diagonal es ahora

$$H_a = \theta \left( \sum (\gamma_k P_i) + N_a \sin \alpha \right) = R_{h,a} = N_a \cos \alpha \quad (3.3)$$

siendo  $N_a$  la fuerza axial de la diagonal. Dicha fuerza depende del desplome y de la geometría del triángulo arriostrante:

$$N_a = \varepsilon EA = \frac{v \cos \alpha}{h / \sin \alpha} EA$$

$$N_a = \theta \frac{\sin(2\alpha)}{2} EA$$

La condición crítica queda caracterizada por la condición:

$$\theta \sum (\gamma_k P_i) + \theta^2 \frac{\sin(2\alpha)}{2} EA \sin \alpha = \theta \frac{\sin(2\alpha)}{2} EA \cos \alpha$$

condición que permite determinar la carga crítica y el factor de carga crítica de esta configuración:

$$\gamma_k \sum P_i = P_k = \frac{\sin(2\alpha) \cos \alpha}{2} EA$$

$$\gamma_k = \frac{EA \frac{\sin(2\alpha) \cos \alpha}{2}}{\sum P_i} \quad (3.4)$$

Nuevamente podemos ver a la carga crítica como una medida de la rigidez lateral que aporta el dispositivo estabilizante: no se requiere resistencia, no está presente para nada la capacidad de respuesta tensional del material, pues si hay rigidez suficiente no se inicia la perturbación, dado que la respuesta es mayor que la acción lateral y, por tanto, la perturbación no puede progresar.

Además de la caracterización del equilibrio como estable, crítico o inestable, según que la suma de las cargas alcance o supere la condición crítica, podemos encontrarnos con situaciones diferentes en las condiciones posteriores al inicio del desplome en

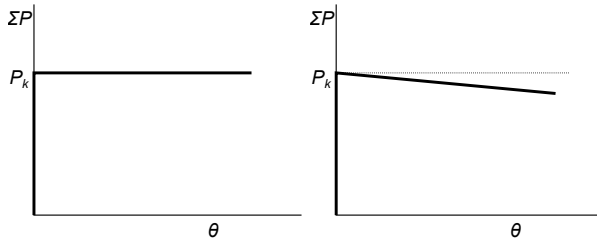


Figura 3.4: Tipos de comportamiento postcrítico: ambas figuras presentan diferencias en la evolución tras el inicio del desplome, con mantenimiento (como en el caso de la figura 3.2), o pérdida (como en el de la figura 3.3) de la rigidez lateral según avanza el desplome

los casos críticos, en los que la rigidez lateral, o capacidad estabilizante pudo ser igual en el inicio para dos dispositivos diferentes, pero variar en el proceso postcrítico, tal como refleja la figura 3.4, pues en el caso del arriostramiento podríamos reescribir la expresión 3.3 en la forma  $H = \theta \sum (\gamma_k P_i) = N_a (\cos \alpha - \theta \sin \alpha)$ , con pérdida de capacidad frente al efecto del desplome según avanza este.

### 3.1.2. Pandeo de Euler

La situación local de inestabilidad más visible corresponde al pandeo de las barras rectas sometidas a compresión, que a menudo provocan que el fallo de la barra se produzca, no por aplastamiento de alguna de sus secciones, sino por deformación

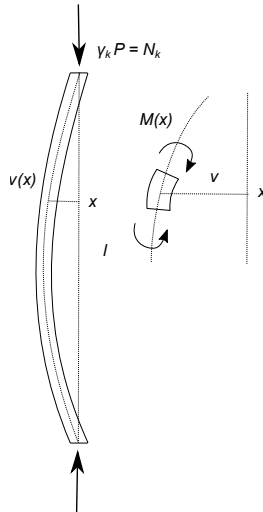


Figura 3.5: Pandeo de Euler: equilibrio de momentos en la curva deformada

lateral no controlada. Ha sido históricamente uno de los problemas más estudiados tanto teórica como experimentalmente. La formulación de Euler es la base del tratamiento actual de este problema. En lo que sigue presentamos las dos vías de abordarlo a saber, desde el equilibrio de fuerzas en la situación deformada, o desde la consideración de la condición de energía potencial mínima.

### 3.1.2.1. Modelo clásico de equilibrio en segundo orden

En la situación crítica, se supone la condición de equilibrio para una cierta deformada lateral de la barra dada por la ley  $v(x)$  que expresa ese desplazamiento para cada punto de coordenada  $x$  de la barra recta original.

El equilibrio entre el momento flector derivado de la excentricidad de la compresión  $P$  llevada hasta su valor crítico  $P_k = \gamma_k P$ , y la respuesta de la barra derivada de la curvatura, dada su rigidez en flexión, puede expresarse con la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \gamma_k P v(x) = N_k v = M(x) = E I c(x) = E I \frac{d^2 v}{dx^2} \\ N_k v = E I v'' \end{aligned} \quad (3.5)$$

La solución a la deformada es una ley senoidal, en la que  $n$  indica el número de semiondas entre los dos extremos

$$v = v_{\text{máx}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

ley que, aplicada a la anterior ecuación 3.5, permite expresar la respuesta correspondiente al equilibrio indiferente y deducir de ella el valor de la carga crítica, que depende del *modo* o número de semiondas de la deformada, y de entre las que seleccionamos la menor de todas correspondiente al valor de 1 para  $n$ :

$$\begin{aligned} N_k &= \frac{n^2 \pi^2 E I}{l^2} \\ N_{k,1} &= \frac{\pi^2 E I}{l^2} = \frac{\pi^2 E A i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E A}{\lambda^2}; \quad \lambda = \frac{l}{i} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se trata de una condición crítica, o de equilibrio indiferente. Para cargas menores a  $N_{k,1}$  la respuesta dada por la sección frente a la curvatura es mayor que el momento de la excentricidad de la carga y la pieza vuelve a su geometría recta. Para cargas mayores, el equilibrio se torna inestable y la pieza se deforma indefinidamente hasta que se desbarata la geometría de la estructura o hasta que el momento rompe la pieza en su sección central.

Aunque la anterior es la formulación clásica de la *carga crítica de Euler* es fácil ver que la condición crítica no es tanto la carga como la tensión, o mejor aún, la deformación. Efectivamente, si consideramos la deformación unitaria correspondiente a una compresión centrada en la sección, resulta que la condición crítica es una deformación unitaria que no depende del material considerado, sino solo de la esbeltez, de la geometría de la pieza

$$\sigma_{k,1} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{k,1} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \quad (3.8)$$

La anterior expresión viene a señalar el punto en el que a la pieza le resulta más sencillo deformarse flectando que acortándose: para deformaciones axiales pequeñas la pieza se acorta, pero alcanzado el límite  $\varepsilon_{k,1}$  la pieza adopta una configuración de equilibrio diferente, *bifurca* a una geometría deformada diferente, en flexión, dependiente solo de la esbeltez mecánica de la pieza

Considerando lo anterior, resulta útil identificar una esbeltez de referencia  $\lambda_0$  para la que la deformación crítica resulte idéntica a la deformación en el límite elástico: para esbelteces menores la pieza fallaría por aplastamiento, mientras que para esbelteces mayores la pieza fallará por pandeo.

$$\varepsilon_{y0} = \frac{\pi^2}{\lambda_0^2} \implies N_{k0} = N_u = Af_y \quad (3.9)$$

Dicha esbeltez de referencia se usa en los códigos para establecer la *esbeltez relativa*, cociente entre la esbeltez mecánica y la de referencia, y que se emplea en situaciones como las de la figura 3.7 para la determinación de los coeficientes de reducción de la capacidad resistente en compresión por efecto del pandeo.

### 3.1.2.2. Mínima energía potencial

Podemos abordar también el problema del pandeo desde la perspectiva de la energía potencial, para la que buscaremos la configuración que la hace mínima. En este caso tenemos que considerar tanto la energía potencial de la carga, considerando su posible descenso debido a la deformación, como la energía potencial de deformación de la pieza, integrando la de la deformación de todas sus secciones. En la figura 3.6 vemos como puede aproximarse el descenso de un tramo recto dado por su rotación a la posición inclinada, de modo que podemos medir la pérdida de energía potencial de la carga en la curva resultante de la flexión por pandeo junto a la energía de deformación

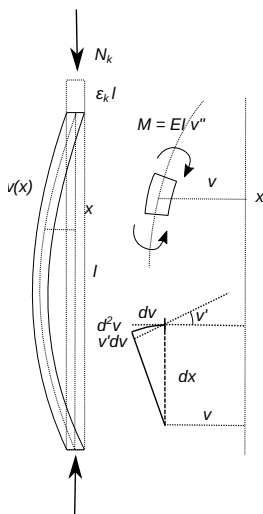


Figura 3.6: Pandeo de Euler: energía potencial total mínima

acumulada en dicha curva:

$$W_P = - \int_0^l N_k \frac{(v')^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx = \mathcal{W}(v(x)) \quad (3.10)$$

La expresión resultante es un funcional  $\mathcal{W}$  dependiente de la deformada  $v(x)$ . Para encontrar su mínimo consideramos variaciones de esa función  $v(x)$  en la forma  $v(x) + \xi u(x)$  siendo  $\xi$  un coeficiente que podemos hacer tender a 0 y  $u(x)$  una función arbitraria cualquiera, siempre que satisfaga las condiciones

de contorno, lo que implica en este caso que valga cero en los extremos.

La condición de mínimo es que el gradiente del funcional  $\mathcal{W}$  sea nulo, o lo que es lo mismo, se trata de buscar la función  $v$  para la cual cualesquiera variaciones infinitesimales<sup>1</sup>  $\xi u$  supongan que  $\mathcal{W}(v + \xi u) \geq \mathcal{W}(v)$ .

**Cálculo variacional.** Los problemas del tipo del anterior son el objeto del cálculo variacional.

Se presentan a continuación algunos conceptos básicos de este tipo de análisis

**Funcional.** Es una operación que transforma funciones  $f(x)$  en escalares  $\mathcal{F}(f)$  a través de integrales.

En un dominio dado  $X$ , el *producto escalar* entre funciones:  $\langle u(x), f(x) \rangle \equiv \int_X u(x)f(x)dx$ , es un funcional. La energía o el trabajo es un funcional.

**Gradientes en funcionales, y gradiente Gâteaux.** Al igual que los valores de una variable en una función pueden diferir entre puntos próximos y medimos estas diferencias (y las diferencias por unidad de distancia o gradiente) mediante las derivadas, podemos considerar las variaciones o gradientes en los funcionales dependiendo de las posibles variaciones en las funciones en que se basan.

---

1. Se usa  $\xi$  como factor de escala tendiendo a cero, y  $u$  como función que refleja la forma de alterar  $v$ .

Hay muchas maneras de expresar dichos gradientes, o tendencias, en el funcional dependiendo de cómo se alteren las funciones de que dependen. Una forma clásica es la del gradiente Gâteaux, que puede expresarse como sigue, donde  $\mathcal{G}_u$  expresa el gradiente del funcional  $\mathcal{F}$  en las alteraciones de la función  $f(x)$  que siguen el sentido de la función arbitraria  $u(x)$

$$\mathcal{G}_u(\mathcal{F}(f(x))) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathcal{F}(f(x) + \xi u(x))) \quad (3.11)$$

**Condición de máximo o mínimo en funcionales: gradiente nulo.** La condición de máximo o mínimo para un funcional es que el gradiente sea nulo en todas las “direcciones” posibles en que pueda concebirse que se alteran las funciones de que dependen:

$$\mathcal{G}_u(\mathcal{F}(f(x))) = 0, \forall u. \quad (3.12)$$

Es una condición análoga a la de máximo o mínimo en una función: que su derivada sea nula en todas las direcciones de las variables de que depende dicha función.

**Estableciendo la condición de mínima energía potencial total.** Tenemos el funcional para la energía potencial total, ecuación 3.10, y tenemos igualmente la condición para que sea mínimo, sin más que combinar las 3.11 y 3.12, de modo que

$$\mathcal{G}_u(\mathcal{W}(v(x))) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathcal{W}(v(x) + \xi u(x))) = 0, \forall u.$$

Esta expresión exige

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( - \int_0^l N_k \frac{(v' + \xi u')^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI(v'' + \xi u'')^2 dx \right) = 0$$

por lo que, desarrollando los cuadrados, derivando respecto a  $\xi$  y llevando  $\xi \rightarrow 0$  resulta

$$\begin{aligned} - \int_0^l N_k u' v' dx + \int_0^l EI u'' v'' dx &= 0, \\ \int_0^l (-N_k v' - EI v''') u' dx, \quad \forall u \end{aligned}$$

de donde resulta, finalmente

$$N_k v' + EI v''' = 0 \tag{3.13}$$

ecuación que, como se ve, remite a la 3.5.

### 3.1.3. Condiciones límite en piezas comprimidas

Por lo que hemos visto hasta aquí, para una pieza comprimida podemos considerar dos límites independientes:

- la carga última por aplastamiento:  $N_u$
- la carga crítica de Euler:  $N_k$

Podríamos trazar dichos límites en función de la esbeltez en figuras como la 3.7, con el fin de seleccionar como capacidad disponible el valor menor de entre los límites considerados.

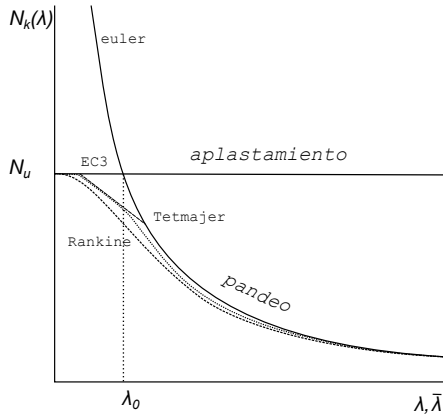


Figura 3.7: Curvas de resistencia de piezas comprimidas. Se indican los posibles límites para la carga en función de la esbeltez mecánica  $\lambda$ , de acuerdo a las condiciones de aplastamiento, de pandeo de Euler, así como curvas considerando combinaciones de ambos efectos: los casos de Rankine, Tetmajer, o los del Eurocódigo 3. Se señala la esbeltez de referencia  $\lambda_0 = \pi / \sqrt{\varepsilon_y}$ , ver ecuación 3.9, que permite definir la esbeltez relativa  $\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_0$ .

Ahora bien, si contrastamos las expresiones con experimentos, resulta que se da un ajuste limitado en condiciones de esbeltez baja, cercanas a  $\lambda_0$ , y la razón básica es que en la formulación no se han tenido en cuenta aún, ni la posibilidad de plastificación local, ni la existencia de incertidumbres asociadas a imperfecciones, estados de tensión interna derivados de los procesos de

laminación etcétera.

Hay muchas maneras de abordar el problema: históricamente contamos con la recta de Tetmajer que no es más que un truncamiento en esa región problemática, o la estrategia aportada por Rankine, basada en las expresiones clásicas de combinación de fenómenos, sean estos en “serie” o en “paralelo”, con expresiones del tipo

$$f_c = \sqrt[n]{f_1^n + f_2^n}; \quad \frac{1}{f_c} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{f_1}\right)^n + \left(\frac{1}{f_2}\right)^n}. \quad (3.14)$$

En este caso se trata de fenómenos en paralelo para los que la expresión más sencilla, adoptada por Rankine, es

$$N_{\text{lím}} = \frac{1}{\frac{1}{N_u} + \frac{1}{N_k}} \quad (3.15)$$

El abordaje moderno, recogido en códigos como el Eurocódigo 3, se basa en un desarrollo del problema que implica considerar, frente a las geometrías perfectas consideradas hasta ahora, los defectos o imperfecciones en las geometrías que se comprimen.

## 3.2. Imperfecciones, *ampliación de flecha* y factor de pandeo

Hasta aquí se ha considerado que la geometría sometida a compresión es inicialmente tan exacta como su modelo teórico: perfectamente vertical en los pórticos arriostrados, o perfectamente recta en las piezas. Sin embargo la existencia de defectos de producción o de montaje impide que esto sea posible en las situaciones reales, dadas las incertidumbres en los estados iniciales de tensión, en las geometrías o en los medios de unión, así como en los propios procesos de puesta en obra. De modo que la geometría de un problema como el considerado en la sección 3.1.1.1 se representa, mejor que con la figura 3.2, con una figura que incluya esos desplomes iniciales debidos a tal tipo de imperfección, como es la 3.8.

### 3.2.1. Ampliación de imperfecciones

El modelo con imperfecciones supone una geometría inicial en la que cada carga  $P_i$  se va a apoyar en un pilar que sufre un desplome inicial  $\theta_{0i}$ . La barra destinada a estabilizar el conjunto está montada, sin tensión, en una posición y longitud inicial acorde a esta geometría imperfecta. En estas condiciones, la aplicación de las cargas estaría produciendo desde el inicio un empuje lateral debido a su desalineación con la respuesta axial de los pilares, pero al no haber deformación inicial, no habría respuesta en tanto no se produzca un desplazamiento que extienda la barra estabilizante hasta que su deformación aporte la

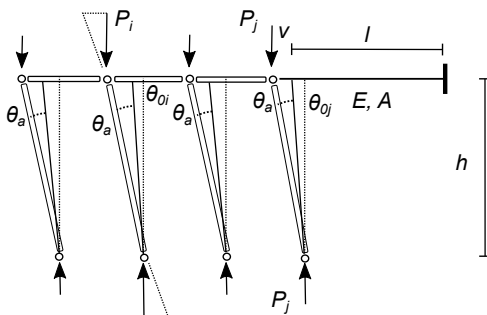


Figura 3.8: Estabilidad de pórtico con imperfecciones iniciales: efectos desestabilizantes y estabilizantes.

respuesta capaz de estabilizar esos empujes laterales. En estas condiciones se produce, por tanto, un incremento en el desplome, un desplome adicional  $\theta_a$ , que afecta a todos los pilares del conjunto y que, en el caso de haber estabilidad suficiente, asegura finalmente la igualdad entre la acción desestabilizante  $H$  y la respuesta estabilizante  $R_H$ :

$$H = \sum \theta_i P_i = \sum (\theta_a + \theta_{oi}) P_i = \left( \theta_a + \frac{\sum \theta_{oi} P_i}{\sum P_i} \right) \sum P_i$$

$$R_H = EA\varepsilon = EA \frac{\theta_a h}{l} = P_k \theta_a \quad (3.16)$$

Es decir, la fuerza horizontal desestabilizante dependerá del total de las cargas a estabilizar y el desplome final medio ponderado, que incluye el inicial medio, más el adicional, común a

todas las piezas, que se produce por la ampliación requerida para alcanzar el equilibrio. En tanto que la acción estabilizante solo dispone de esa deformación adicional para aportar la respuesta necesaria. Vemos que la respuesta es producto de una rigidez por una deformación, precisamente la rigidez que determina la carga crítica vista en el apartado 3.1.1.1, ecuación 3.1. El equilibrio entre acción y respuesta nos lleva a comparar el efecto de la totalidad de las cargas en el desplome total frente a la respuesta dada por la rigidez en el desplome añadido:

$$H = R_H \implies \bar{\theta} \sum P_i = (\theta_a + \bar{\theta}_o) \sum P_i = \theta_a P_k \quad (3.17)$$

Despejamos el desplome añadido  $\theta_a$  en la ecuación anterior, y obtenemos el desplome (medio) final

$$\begin{aligned} \theta_a &= \bar{\theta}_0 \left( \frac{\sum P_i}{P_k - \sum P_i} \right) \\ \bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + \theta_a &= \bar{\theta}_0 \left( \frac{1}{1 - \frac{\sum P_i}{P_k}} \right) = \bar{\theta}_0 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma_k}} \right); \quad \gamma_k = \frac{P_k}{\sum P_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Vemos en esta última expresión que el desplome final puede interpretarse como una ampliación del desplome ponderado medio inicial, ampliación cuyo factor, siempre mayor que 1, depende del factor de carga crítica visto en la ecuación 3.2.

De este modo vemos que la situación perfecta, aun no siendo adecuada para describir la más realista, con imperfecciones, aporta sin embargo un parámetro crucial para describir esta última, dado que es la relación entre la carga desestabilizante y

la carga crítica la que rige el proceso de ampliación de desplome: si ambas son iguales, el desplome resulta infinito.

Aun no siendo infinito, puede resultar que el desplome ampliado de equilibrio exija deformaciones que, suponiendo tensiones excesivas, estén por encima de las que pueden ser soportadas por la estructura. En el caso de la figura 3.8 esto supone añadir la comprobación de la deformación longitudinal de la barra: ¿ $\varepsilon = \theta_a h/l \leq \varepsilon_{yd}$ ?

Así pues, la comprobación de estabilidad implicará comprobar adicionalmente que la estructura es capaz de resistir los esfuerzos en esa situación deformada final. Es decir, se requerirá en general un análisis de *segundo orden* (de equilibrio y resistencia en la configuración deformada) no siendo suficiente con los equilibrios de la situación teórica original. Si el factor  $1/\gamma_k$  excede un valor pequeño (es habitual considerar 0,1 (o 10 %) como criterio) la normativa exige inexcusablemente llevar a cabo este tipo de análisis.

### 3.2.1.1. Resistencia lateral y efecto $P, \Delta$

El análisis en segundo orden de la estabilidad lateral de pórticos exige la comprobación de la situación de equilibrio frente a las fuerzas laterales considerando los efectos de la deformación, del desplazamiento lateral. Si en alguno de los problemas de las figuras anteriores 3.2 o 3.8 consideramos la existencia de una acción horizontal debida a empujes, viento o cualquier otra causa, resultará que el efecto horizontal de las cargas, la acción lateral, en la situación original será  $H_{E0} = H + \bar{\theta}_0 \sum P$  siendo  $\bar{\theta}_0$  el desplome ponderado medio por imperfección.

Sin embargo la comprobación de resistencia contra la capacidad resistente de la barra,  $H_R = A f_{yd}$ , no puede hacerse considerando ese estado, debe hacerse una vez conocida la situación de desplome final:  $H_E = H + \theta \sum P$  donde  $\theta$  pasa a ser el desplome definitivo. El proceso no lineal típico implicaría el cálculo iterativo del desplome para la carga  $H$  más el efecto del desplome del paso anterior, hasta alcanzar la convergencia. Hemos visto antes una posibilidad de atajar esta iteración mediante la ecuación 3.18 aunque ahora hemos de tener en cuenta que la situación inicial de desplome a amplificar deberá incluir el añadido por el efecto de la fuerza lateral  $H$ , es decir  $\bar{\theta}_0 = \theta_H + \bar{\theta}_{0i}$  si llamamos  $\theta_{0i}$  al desplome inicial por imperfecciones. Es decir que la comprobación exigirá

- determinar el desplome  $\theta_H$  provocado por la fuerza horizontal  $H$  (lo que permite evaluar la rigidez lateral  $H/\theta_H$  que, a su vez, permite determinar la carga crítica  $P_k$  pues esta es precisamente esa rigidez lateral, al ser indiferente el desplazamiento en la expresión  $\theta P_k = \theta(H/\theta_H) = \theta \gamma_k \sum P_i$ );
- añadir el desplome medio debido a defectos de puesta en obra (o a inclinación intencionada de los pilares, si es el caso);
- determinar el desplome final por ampliación del original:  $\theta = (\theta_H + \bar{\theta}_{0i}) / (1 - 1/\gamma_k)$ , con  $\gamma_k = P_k / \sum P_i$ ,  $\gamma_k = (H/\theta_H) / \sum P_i$ ;
- Comprobar la capacidad resistente para la fuerza horizontal total efecto de las cargas y del desplazamiento asociado:  $H_E \leq H_R$  o lo que es lo mismo  $H + \theta \sum P \leq A f_{yd}$ .

Una forma que se ha usado a veces en la literatura para esta última comprobación usa como elemento de comparación el efecto estabilizante o desestabilizante de cada componente en el

momento de vuelco, eligiendo esta versión para la condición de estabilidad. En ese caso, las ecuaciones de comprobación pasan al formato  $M_E = Hh \leq M_R$  (momento efecto menor que capacidad resistente a momento que, en el caso considerado, adopta la forma  $M_R = H_R h = h A f_{yd}$ ).

Esto va a hacer que la comprobación de la resistencia necesaria para la estabilidad en ese problema:

$$H + \theta \sum P \leq A f_{yd}$$

se pueda reescribir en otra forma:

$$Hh \leq A f_{yd} h - \theta h \sum P = A f_{yd} h - \left( \sum P \right) \Delta \quad (3.19)$$

en el que la comprobación estaría sugiriendo una pérdida de capacidad (de resistencia y también de rigidez) debido al efecto del desplazamiento  $P \Delta$ . Pero esto es más sencillo de ver como que  $P \Delta$  no es más que el efecto añadido a la acción horizontal por el desplome en la situación de equilibrio final.

Cabe hacer lo mismo para el caso de la medida de la rigidez, que puede obtenerse como el cociente entre la respuesta frente a la carga y el desplazamiento, pudiendo también expresarse como que la respuesta es igual a la rigidez por el desplazamiento. La determinación pasaría desde la anterior expresión a la forma siguiente, para un desplazamiento dado, sea el límite  $\Delta = \epsilon_{yd} l$

u otro cualquiera  $\Delta$ :

$$\begin{aligned}
 H_{\text{lím}}h &= \left( \frac{Af_{yd}h}{\epsilon_{yd}l} - \sum P \right) \Delta_{\text{lím}} = \left( \frac{EAh}{l} - \sum P \right) \Delta_{\text{lím}} \\
 Hh &= \left( \frac{EAh}{l} - \sum P \right) \Delta
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dicha expresión puede interpretarse como que la carga sobre los pilares reduce la rigidez que, asociada al desplazamiento lateral  $\Delta$ , actúa en oposición al momento desestabilizante de la carga horizontal,  $Hh$ .

### 3.2.2. Factor de pandeo.

Volvemos ahora a la barra recta comprimida, para la que analizamos una posible conformación inicial imperfecta, no recta. Este análisis, cuyas primeras versiones se remontan a Young (ver Cervera Bravo y col. 2013), está en la base de los métodos contemporáneos.

#### 3.2.2.1. Geometrías inicial y de equilibrio

Se supone una geometría curva inicial  $v_0(x)$ , no deformada, de excentricidad máxima  $e_o$ , que se asimila aproximadamente a

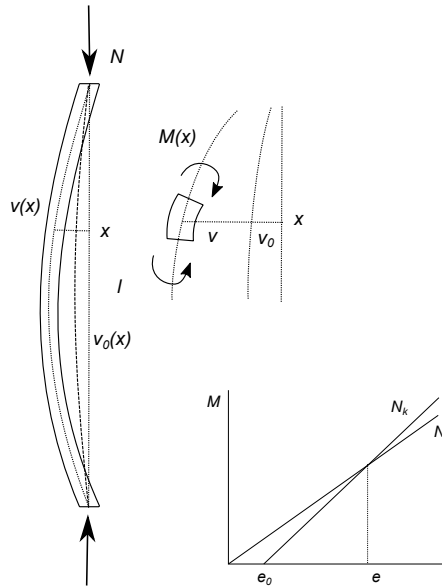


Figura 3.9: Ampliación de flecha en compresión. La deformada inicial  $v_0$  de excentricidad máxima  $e_0$  aumenta hasta la deformada de equilibrio  $v$ . En esta el momento efecto de la carga,  $M = Ne$ , se equilibra con la respuesta de la pieza dada su rigidez y el desplazamiento procedente de la deformación,  $N_k(e - e_0)$ .

una senoide<sup>2</sup>:

$$v_0(x) = v_{0\text{máx}} \sin \frac{\pi x}{l} = e_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (3.21)$$

2. cualquier otra forma de curva podría describirse por su desarrollo en serie de Fourier; en tal caso el primer término del desarrollo sería la senoide-

Se representa la curva final deformada por la función  $v(x)$ , de tal modo que la deformación es el cambio de  $v_0$  a  $v$ . La ley de momentos, debida a la excentricidad de la carga aplicada  $N$ , se iguala a la respuesta por cambio de curvatura:

$$M = Nv = EI(v - v_0)''$$

de donde, derivando y considerando la posición de máxima excentricidad se deduce

$$\begin{aligned} Ne &= \frac{\pi^2 EI}{l^2}(e - e_0) = N_k(e - e_0) \\ e &= e_0 \frac{1}{1 - \frac{N}{N_k}} = e_0 \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_k}} = e_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma_k}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

De modo que la expresión resulta ser semejante a la 3.18: el defecto inicial se amplifica por razón de una deformación regida por el factor de carga crítica, el cociente entre la carga crítica y la carga aplicada.

### 3.2.2.2. Pérdida de rigidez en soporte comprimido

Consideramos ahora el caso de compresión excéntrica que, por tanto, supone momentos de extremo. Vimos en la ecuación 2.47 que la rigidez de extremo en flexión, sin esfuerzo axial, y para un caso simétrico de deformación, con momentos en ambos

---

de elegida y, en la ampliación de deformación que se analiza a continuación resulta que es ese primer término el responsable básico de la geometría final.

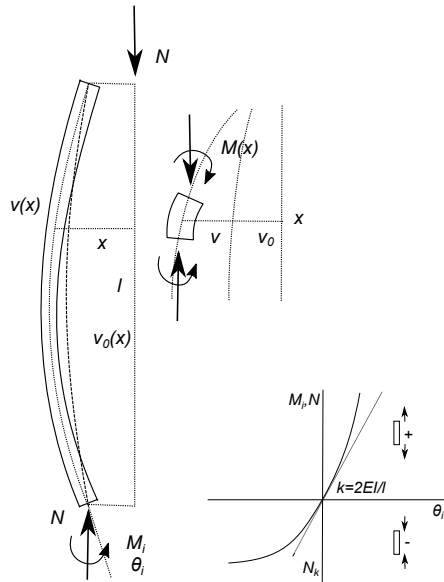


Figura 3.10: Ampliación de flecha en compresión y cambio de rigidez. Influencia de la compresión en la relación momento a giro en los extremos del pilar.

extremos era:

$$k_i = \frac{M_i}{\theta_i} = 2 \frac{EI}{l} \quad (3.23)$$

Si consideramos ahora un caso como el de la figura 3.10, en el que hay además esfuerzo axial resultará que la rigidez varía: la

relación entre  $M_i$  y  $\theta_i$  se altera. Hemos visto que se reduce con la compresión hasta hacerse nula para la carga crítica, lo que supone pendiente nula para la curva  $M, \theta$  cuando se alcanza  $N_k$ . Pero análogamente dicha rigidez aumenta con la tracción, como es fácil de entender al ver que la excentricidad del normal se opone a la curvatura —colabora para reducirla— de modo que la ley momento–giro o momento–curvatura no resulta constante al variar  $N$ , como se muestra en dicha figura. Estudiaremos este efecto en detalle más tarde, en la sección 3.5.2.

### 3.2.2.3. Factor de reducción por pandeo

Volvemos a la figura 3.9. Consideramos ahora que es factible acotar la imperfección inicial a través de los controles de fabricación y puesta en obra asociados a las prácticas constructivas y normativas vigentes. Definimos esa limitación a una fracción de la longitud de la pieza

$$e_0 \leq tl \quad (3.24)$$

donde  $t$  es un término de tolerancia, típicamente rondando el valor 1/350.

Aun cuando la compresión es centrada, debido al efecto de flexión por pandeo consideramos ahora la comprobación de resistencia a flexión compuesta en el rango elástico para la excentricidad resultante de la amplificación,  $e$ . La tensión de comprobación es:

$$\sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{N}{A} \left( 1 + e \frac{A}{W} \right) = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{ev}{i^2} \right) \quad (3.25)$$

donde hemos usado para  $W$  su valor  $I/v = I/(h/2) = Ai^2/v$ , en el que  $v$  es la distancia al centro de gravedad de la sección de la fibra más alejada a este, la mitad del canto en secciones simétricas.

Si ahora deducimos  $e$  de  $e_0$  con 3.22, usando como referencia del estado de compresión la tensión y la deformación unitaria media de la pieza  $\bar{\sigma} = N/A$ ,  $\bar{\varepsilon} = N/EA$ , tenemos la comprobación

$$\sigma_c = \bar{\sigma} \left( 1 + e_0 \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}/\varepsilon_k} \frac{v}{i^2} \right) \leq \bar{\sigma} \left( 1 + \frac{1}{1 - \bar{\varepsilon}/\varepsilon_k} \frac{tlv}{i^2} \right) \leq f_y$$

donde  $\varepsilon_k$  es la deformación crítica de Euler, ecuación 3.8.

Si ahora consideramos la relación entre la tensión o la deformación media máxima posible en la pieza y su valor en el límite elástico

$$\bar{\sigma} = f_y \chi = f_y \frac{1}{\omega}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_y \chi = \frac{\varepsilon_y}{\omega}$$

con lo que

$$\frac{f_y}{\omega} \left( 1 + \frac{1}{1 - \varepsilon_y/(\omega\varepsilon_k)} \frac{tlv}{i^2} \right) \leq f_y$$

y si además de 3.8 usamos la esbeltez de referencia  $\lambda_0$  de 3.9 tendremos una expresión de la que se deriva una ecuación de segundo grado en  $\omega$  cuya solución es

$$\omega = \frac{1}{\chi} \leq \phi + \sqrt{\phi^2 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}}, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{\varepsilon_y}}, \quad \phi = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{tv\lambda}{i} + \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right) \quad (3.26)$$

En esta expresión, el término  $\frac{tv\lambda}{i}$  puede expresarse en relación con la esbeltez  $\lambda_0$ , usando lo que se llama *factor de imperfección*:  $\hat{\alpha} = \frac{tv\lambda_0}{i}$ , de modo que  $\frac{tv\lambda}{i} = \hat{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda_0}$  con lo que el término  $\phi$  de la anterior ecuación adopta una forma que permite, para cada clase de material (descrito por  $\varepsilon_y$  o por  $\lambda_0$ ) y para cada familia de perfiles o secciones (la relación  $v/i$  y las tolerancias aceptadas, o medidas experimentalmente en esa familia, que cabe resumir en el factor de imperfección  $\hat{\alpha}$ ) determinar el coeficiente de reducción por pandeo o factor de pandeo. En la expresión siguiente se presenta esa forma y la forma corregida adoptada por el Eurocódigo 3 para las estructuras de acero tras una extensa campaña de ensayos de la Convención Europea para la Construcción Metálica (CECM) de finales del siglo XX.

$$\phi = \frac{1}{2} \left( 1 + \hat{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda_0} + \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \right); \quad \phi = \frac{1}{2} (1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2) \quad (3.27)$$

donde la esbeltez relativa  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$  puede expresarse de formas muy diversas considerando 3.9:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \lambda \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\pi^2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_y EA}{\frac{EA\pi^2}{\lambda^2}}}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_k}} = \sqrt{\frac{N_u}{N_k}} = \sqrt{\frac{N_u}{N} \frac{N}{N_k}}$$

El factor de pandeo  $\omega$ , o su inverso, el coeficiente de reducción por pandeo  $\chi$  pueden, por tanto, determinarse con la

expresión

$$\frac{1}{\chi} = \omega = \phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}; \quad \phi = \frac{1}{2} (1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0, 2) + \bar{\lambda}^2) \quad (3.28)$$

en la que el coeficiente  $\alpha$  en el Eurocódigo se atribuye a las diferentes curvas correspondientes a cada tipo de perfil (de nombres “a<sub>0</sub>, a, b, c, d”) mediante los valores  $\alpha([a_0; a; b; c; d]) = [0, 13; 0, 21; 0, 34; 0, 49; 0, 76]$ .

Cabe añadir que, si el factor (de reducción) de pandeo es una función de la esbeltez relativa,  $\omega = \omega(\bar{\lambda}, \alpha)$ , también existe la función inversa, la esbeltez relativa como función del factor de pandeo,  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\omega, \alpha)$ , función cuya expresión incluimos aquí por razón de completar el análisis.

$$\bar{\lambda}(\omega, \alpha) = \frac{\sqrt{\omega^3 + \left(0, 2\alpha + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\right)\omega^2 + (1 - 2\alpha)\omega - \frac{\alpha\omega}{2}}}{\omega - 1} \quad (3.29)$$

En la figura 3.11 se comparan los diferentes valores de reducción Teóricos en piezas rectas perfectas,  $\chi_T$ , correspondientes al menor de los límites de aplastamiento o de pandeo “crítico” de Euler, con los valores de aplicación práctica resultantes, bien de las reglas de combinación de Rankine ( $\chi_R$  y  $\chi_{R_2}$ ) vistas más arriba (apartado 3.1.3), bien de la formulación del Eurocódigo ( $\chi_{CTE}$ ), según las respectivas expresiones

$$\chi_T = \min\left(1, \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_y}\right) = \min\left(1, \frac{1}{\bar{\lambda}^2}\right) \quad (3.30)$$

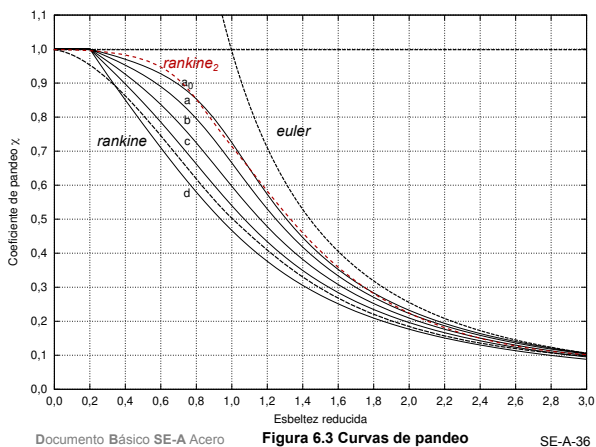


Figura 3.11: Curvas de reducción por pandeo: Valores comparados de  $\chi(\bar{\lambda})$  trazados sobre la figura que contenía el CTE, DB-SE-A.

$$\chi_R = \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon_k/\varepsilon_y}} = \frac{1}{1 + \bar{\lambda}^2} \quad (3.31)$$

$$\chi_{R_2} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_k/\varepsilon_y}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \bar{\lambda}^4}} \quad (3.32)$$

$\chi_{CTE} = \chi(\bar{\lambda}, \alpha)$ ; ver eq. 3.28.

$$\alpha([a_0, a, b, c, d]) = [0, 13; 0, 21; 0, 34; 0, 49; 0, 76]$$

### 3.2.2.4. Interpretaciones

Por lo visto hasta aquí,  $\chi \leq 1$ , o también  $1/\chi = \omega \geq 1$ . La comprobación elástica de la que hemos partido nos indica que en una pieza comprimida la tensión media requerida para soportar el esfuerzo normal,  $\sigma_N$ , no es una buena referencia para la comprobación, en tanto que se distribuye de forma variable para poder hacer frente al momento derivado de la excentricidad resultante  $e$ , añadiendo por ello, para la comprobación con el límite  $\sigma_y$ , una distribución de resultante nula y valor máximo  $\sigma_M$  a esa distribución uniforme  $\sigma_N$ . Aquí hemos usado por lo tanto la interpretación  $\chi = \sigma_N/\sigma_y = \sigma_N/(\sigma_N + \sigma_M)$ .

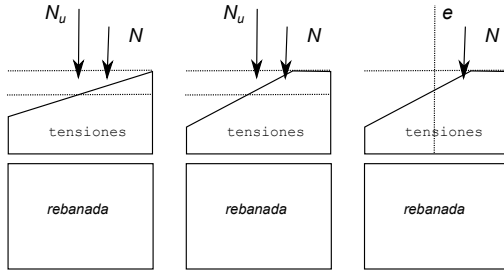
La excentricidad en ese caso,  $e = M/N$ , puede deducirse fácilmente:

$$e = \frac{M}{N} = \frac{W\sigma_M}{A\sigma_N} = \frac{W}{A} \left( \frac{\sigma_y - \sigma_N}{\sigma_N} \right) = \frac{W}{A} \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right) \quad (3.33)$$

expresión en la que  $W/A$  está en torno al valor de  $0,36h$  en perfiles metálicos en doble T. Puesto que la inercia y el módulo resistente son  $I = Ai^2$ ,  $W = I/v$ , resulta igualmente

$$e = \frac{i^2}{v} (\omega - 1); \quad \frac{1}{\chi} = \omega = 1 + \frac{ev}{i^2}. \quad (3.34)$$

Resultan por tanto tres interpretaciones posibles, recogidas en la figura 3.12. La primera interpretación no da cuenta adecuadamente de las situaciones elastoplásticas, razón por la que la normativa se ha decantado por la segunda. Sin embargo no cabe perder de vista la tercera: el factor de pandeo refleja la



$$N_u = \omega N = \omega \bar{\sigma} A, \quad N = \chi N_u = \chi \sigma_u A, \quad M = Ne = N \frac{W}{A} \left( \frac{1}{\chi} - 1 \right)$$

Figura 3.12: Interpretaciones del factor de pandeo, como aumento de las tensiones de comprobación, reducción de la capacidad resistente, o efecto de la excentricidad en la compresión.

existencia de una excentricidad: esta tercera perspectiva es imprescindible si el efecto del pandeo involucra uniones, como es el caso de un pilar en ménsula: empotrado en la base y libre en cabeza: en este caso la capacidad resistente a flexión compuesta, normal y momento, descrita por ese factor es necesaria en el pilar, pero también en el nudo de su base. Cabe estimar la excentricidad a considerar en el nudo a partir de las propiedades y factor de pandeo obtenidas para el pilar.

### 3.3. Dimensionado en pandeo

La determinación del factor de pandeo es inmediata, según hemos visto, si se trata de validar el estado de una pieza conoci-

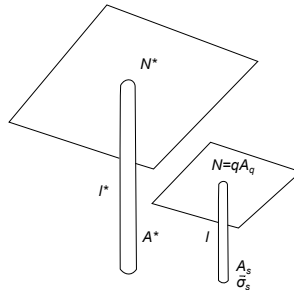


Figura 3.13: Proporcionalidad en problemas de pandeo: si la carga por unidad de superficie es la misma en ambas figuras, un cambio de dimensiones que no altere ninguna proporción entre todas ellas mantiene intacto el factor de pandeo

da, pero el problema de proyecto es elegir la pieza válida, por lo que, con el enfoque visto hasta aquí, el problema de proyecto no es directo, es necesariamente iterativo: hay que probar solución tras solución hasta dar con la apropiada. Esto dificulta también abordar reflexiones de más alcance, al tratarse solo de soluciones a casos particulares.

Sin embargo, vamos a ver que el problema mantiene condiciones de proporcionalidad, que vamos a aprovechar para abordar el proyecto de forma más directa.

### 3.3.1. Proporcionalidad en pandeo

La figura 3.13 presenta dos problemas diferentes en los que la geometría de las piezas, sus secciones y longitudes, y de las áreas cargadas cambia en dimensión, manteniendo todas las proporciones. En estas condiciones el factor de pandeo en ambos problemas se mantiene invariante.

Efectivamente si hacemos el cómputo de la magnitud  $l^2/N$ , siendo  $l$  la longitud de la pieza y  $N$  la carga, tenemos que

$$\frac{l^2}{N} = \frac{l^2}{A\bar{\sigma}} = \frac{l^2}{A\chi\sigma_y} = \frac{\mathcal{K}l^2}{i^2\chi\sigma_y} = \frac{\mathcal{K}}{\sigma_y} \frac{\lambda^2}{\chi} = \frac{\mathcal{K}}{\sigma_y} \omega\lambda^2 \quad (3.35)$$

expresión en la que hemos empleado  $\mathcal{K} = \frac{i^2}{A}$  que, en secciones que mantengan la proporción, es una constante. Ahora bien, puesto que para la función  $1/\chi = \omega = \omega(\lambda, \alpha)$  existe la función inversa  $\lambda = \lambda_0\bar{\lambda}(\omega, \alpha)$  (ver 3.29) resulta que al ser el producto  $\omega\lambda^2$  invariante con el cociente  $l^2/N$  el propio factor de pandeo no varía con dicho cociente. Tenemos

$$\frac{l^2}{N} = \frac{\mathcal{K}\lambda_0^2}{\sigma_y} \omega\bar{\lambda}(\omega, \alpha)^2 \implies \frac{l^2}{N} \frac{\sigma_y}{\mathcal{K}\lambda_0^2} = \omega\bar{\lambda}(\omega, \alpha)^2 \quad (3.36)$$

de modo que el factor de pandeo es realmente función de solo dos variables, una que corresponde al producto  $\frac{l^2}{N} \frac{\sigma_y}{\mathcal{K}\lambda_0^2}$ , y la otra, que es el factor de imperfección  $\alpha$ . De la primera nos interesan principalmente los términos del problema, longitud  $l$  y carga  $N$ . Puesto que en el formato  $\omega$  ese factor de pandeo tiene un valor algo mayor que la unidad, podemos escribir su desarrollo en serie dependiente de esa primera variable y mantener el (o

los) primer(os) término(s) de dicho desarrollo:

$$\omega = \omega \left( \frac{l^2}{N} \frac{\sigma_y}{\mathcal{K}\lambda_0^2}, \alpha \right) = 1 + i? \dots = 1 + \beta \frac{l^2}{N} + \dots \quad (3.37)$$

Para ello diferenciamos respecto de  $l^2/N$  los dos términos de la igualdad 3.36:

$$\frac{\partial}{\partial(l^2/N)} \left( \frac{l^2}{N} \frac{\sigma_y}{\mathcal{K}\lambda_0^2} \right) = \frac{\sigma_y}{\mathcal{K}\lambda_0^2} = \frac{\partial}{\partial(l^2/N)} (\omega \bar{\lambda}^2(\omega, \alpha)) \quad (3.38)$$

Usando 3.29, considerando la ecuación 3.37 para la descripción de  $\omega$ , y manteniendo solo el primer término del desarrollo:

$$\beta \approx \frac{\partial}{\partial(l^2/N)} \omega = \frac{\partial}{\partial(l^2/N)} \left( 1 + \beta \frac{l^2}{N} + \frac{1}{2} \beta_2 \left( \frac{l^2}{N} \right)^2 + \dots \right) \quad (3.39)$$

cabe deducir el coeficiente  $\beta$  (ver Cervera Bravo y col. 2013), con los valores de la lista siguiente

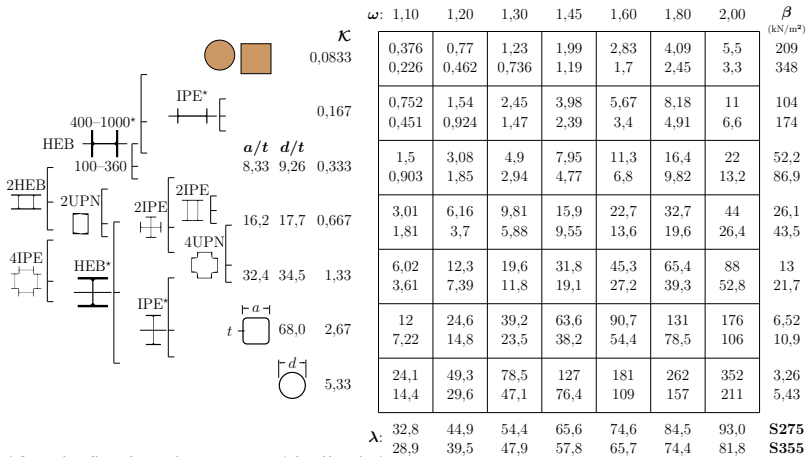
$$\beta(\alpha[a_0; a; b; c; d]) \approx [0, 26; 0, 31; 0, 40; 0, 50; 0, 69] \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{\pi^2 \mathcal{K}}. \quad (3.40)$$

Es importante señalar que  $\beta$  es una magnitud no adimensional: es una presión cuyo producto con  $l^2/N$  sí resulta adimensional.

### 3.3.2. Estimación en proyecto del efecto de pandeo

Con los resultados anteriores, cabe estimar ahora la influencia (el *peso*) del pandeo en el dimensionado. Empleamos para

Mapa de pandeo para la curva 'c' del CTE. Casillas recuadradas:  $\ell^2/N$  en  $\text{m}^2/\text{MN}$  para S275 y S355;  $\beta$  en  $\text{kN}/\text{m}^2$ ;  $\kappa = \ell^2/A$ ;  $\lambda = \ell/i$ .



\*: La serie de perfiles puede comprobarse con una curva más favorable que la 'c'.

Figura 3.14: Mapa de pandeo para la curva 'c' del Eurocódigo 3

ello tanto la expresión de comparación de tensiones como la excentricidad resultante del pandeo:

Para la primera tenemos

$$\sigma_c = \frac{N\omega}{A} = \frac{N}{A} \left( 1 + \beta \frac{l^2}{N} + \dots \right) = \frac{1}{A} (N + \beta l^2 + \dots) \leq f_y \tag{3.41}$$

expresión en la que vemos que la presión  $\beta$  aplicada al cuadra-

do de la longitud de pandeo ejerce un efecto semejante al que añadiría una carga (un peso)  $\beta l^2$  a la carga centrada.

Para la excentricidad derivada del pandeo  $e_\chi$  tenemos, de acuerdo a la expresión 3.33

$$e_\chi = \frac{W}{A} (\omega - 1) \approx \frac{W}{A} \left( \beta \frac{l^2}{N} \right); M_\chi = N e_\chi \approx \frac{W}{A} \beta l^2 \quad (3.42)$$

Como vemos, la aproximación al proyecto resulta más inmediata. La figura 3.14, procedente de Cervera Bravo y col. 2013 presenta la aplicación para el caso de la curva c del Eurocódigo 3.

## 3.4. Problemas locales de estabilidad elástica

El problema de la inestabilidad en compresión es general: se da en toda circunstancia en la que una estructura, pieza, sección o elemento de sección se ve sometida a compresión y su geometría le permite salirse de la línea de presión de esta. Aunque no vamos a detallar la formulación para cada caso presentamos una pequeña colección de figuras de algunas de las posibilidades a tener en cuenta, y cuyas expresiones de comprobación pueden encontrarse en los códigos.

### 3.4.1. En piezas: flexotorsión, pandeo lateral

Hemos visto el pandeo con flexión, pero es posible y relevante la combinación de flexión y torsión en el pandeo de las piezas si la

### 3.4. PROBLEMAS LOCALES DE ESTABILIDAD ELÁSTICA 267

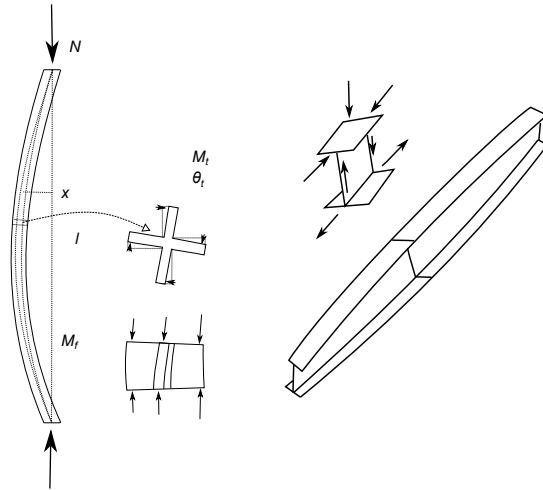


Figura 3.15: Casos de pandeo con torsión: Flexotorsión y pandeo lateral.

desalineación en las compresiones alimenta rotaciones en torno al eje de las piezas, como se ve en la figura 3.15. En el primer caso la inclinación variable de la sección induce ese momento torsor. En el segundo caso la inestabilidad del cordón comprimido le hace salirse del plano de flexión.

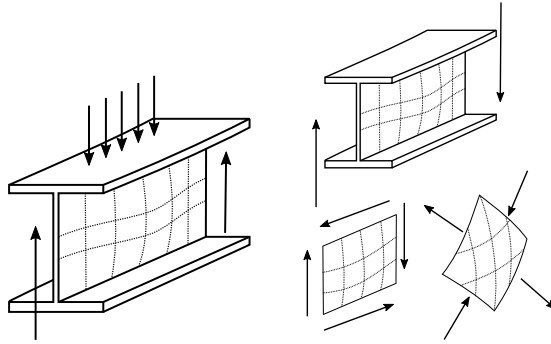


Figura 3.16: Abolladura, por carga concentrada, o por cortante.

### 3.4.2. En chapas de piezas: abolladura...

Las chapas que forman parte de la sección tienen también la posibilidad de salirse de su plano por efecto de las tensiones de compresión: es el caso de la abolladura. Esta puede darse (figura 3.16) por concentración de carga, o por simple cortante en chapas esbeltas: cabe recordar que el cortante implica un estado de esfuerzos tangenciales que suponen tensiones principales de compresión y tracción semejantes. La compresión implica reducción de rigidez en flexión, aunque la tracción supone incrementos. Sin embargo, tal como muestra la figura 3.10, la pérdida de rigidez en compresión es mayor que la ganancia en tracción y ello supone, por tanto, una pérdida en el saldo final, con la consecuencia de que el fenómeno de pandeo entre en juego.

## 3.5. Pandeo global de pórticos

Una vez establecidos los conceptos y relaciones relativas al pandeo de piezas o regiones de estructura cuyo estado es susceptible de ser representado mediante sistemas de un grado de libertad, vamos a considerar ahora los casos en los que esa deformación no puede ser representada adecuadamente más que si consideramos un número apropiado (y apreciable) de grados de libertad. Este es el problema de los pórticos, aunque también es el caso de todo tipo de estructuras de gran número de barras en las que las cargas deban equilibrarse con trayectorias de esfuerzos que impliquen compresiones.

Abordamos el caso de los pórticos por su mayor claridad aunque las técnicas que terminaremos empleando van a poder aplicarse de forma general a estructuras de geometría cualquiera.

### 3.5.1. Desplomes y efecto $P\Delta$

En una primera aproximación consideramos que el desplome se caracteriza, planta a planta, por un desplome (o deriva, o *drift ratio*) representado por el ángulo  $\theta = \Delta/h$  formado entre la vertical y la línea entre nudos de dos plantas sucesivas tras el desplazamiento.

Si vemos la secuencia de figuras de 3.17, comprobamos que el desplome total se compone, en los pórticos rígidos

- parte por desplazamiento (flexión) del pilar ( $\theta_p$ )
- parte por rotación de nudo (flexión de viga;  $\theta_v$ )
- ... a las que cabría añadir una parte por deformación del

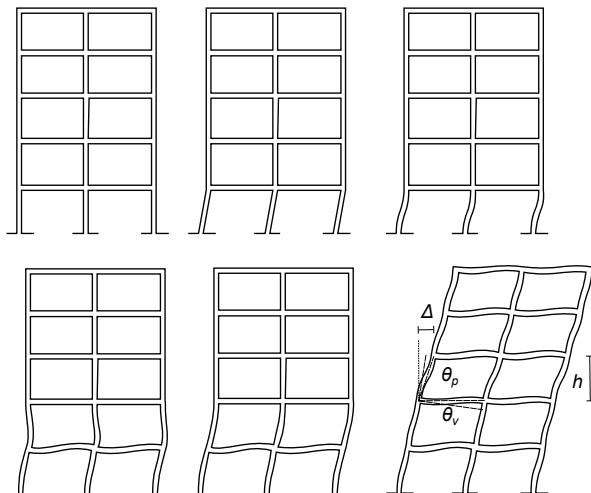


Figura 3.17: Desplome de pórtico de nudos rígidos. El desplazamiento de planta induce rotaciones en los nudos, por tanto en vigas, añadidas a las derivadas del desplazamiento en cabeza de los pilares

nudo (por cortante de nudo;  $\theta_n$ , ver figura 3.19)

Sin embargo, en pórticos articulados arriostrados, figura 3.18, este desplome de debe

- fundamentalmente al alargamiento de diagonales

Dichos desplomes implican una desalineación del efecto vertical de las cargas con la dirección inclinada de los ejes de los pilares, y esto supone, tal como vimos en el apartado 3.2.1.1,

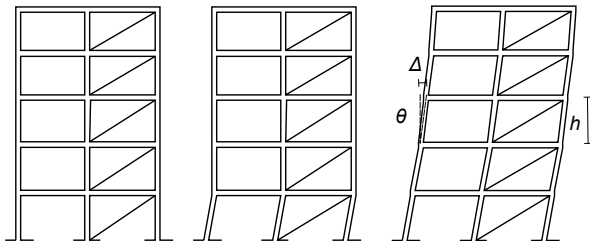


Figura 3.18: Desplome de pórtico articulado arriostrado. El alargamiento de las diagonales es la variable fundamental en tanto el pórtico no alcance alturas importantes.

un desequilibrio en la dirección horizontal que analizábamos de alguna de estas formas:

- como una carga lateral equivalente
- como una pérdida de rigidez

Vamos, por tanto a reconsiderar la cuestión, pero analizando ahora el fenómeno planta a planta

### 3.5.1.1. Carga lateral equivalente

La figura 3.20 muestra las deformaciones, desplomes y cargas por encima de una cierta altura  $i$  de la estructura (numerando las plantas desde arriba) y las condiciones de compresión y desalineación de los pilares situados bajo esa planta. La desalineación hace, para valores pequeños del desplome  $\theta_i$ , que el efecto de las cargas verticales pueda entenderse como una horizontal  $P_i\theta_i$  más la oblicua  $P_i$  alineada con el pilar desplomado.

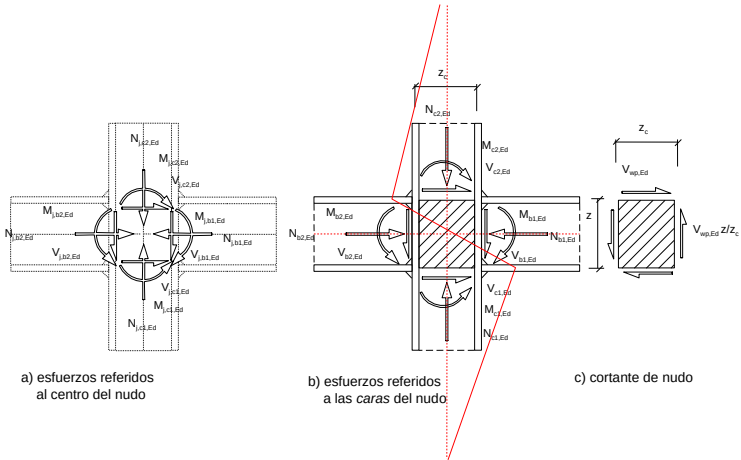


Figura 3.19: Cortante de nudo: las tensiones tangenciales en este superan habitualmente las de las piezas contiguas, dado que el salto de momentos entre pilares se produce en una distancia muy corta, pudiendo por ello ser relevante la distorsión resultante.

El análisis de primer orden considera el efecto de las compresiones alineados con la vertical, por lo que está ignorando el efecto de lo que llamamos carga lateral equivalente,  $P_i \theta_i$ . Esta carga, tal como vemos en la figura, se aplica con el mismo valor, pero con sentidos opuestos en los dos extremos del pilar. Si consideramos el pórtico completo, para cada planta, el saldo entre pilares por encima y por debajo de esta supone una carga añadida en cada planta equivalente al desplome de planta por el cortante de

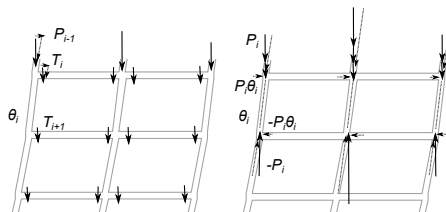


Figura 3.20: Cargas equivalentes en desplome de pórtico. Se representan las cargas por encima de una cierta región más los cortantes de esta. Se analiza la desalineación bajo la planta  $i$

vigas o carga total que se suma en la planta a las compresiones de los pilares que la soportan, figura 3.21. Además implica en cimentación una carga total igual y opuesta a la suma de la de todas las plantas.

De este modo tenemos para cada planta del pórtico un efecto semejante al considerado en el apartado 3.2.1, con una situación que vamos a caracterizar por:

- la carga vertical desplomada  $P = \sum q_i$
- los desplomes iniciales por imperfección o defectos:  $\theta_d$
- el desplome por carga horizontal de viento  $W$ :  $\theta_w$

Vamos a analizar las condiciones de equilibrio del pórtico.

### 3.5.1.2. Equilibrio horizontal

Si tenemos medios de analizar el pórtico frente a cargas horizontales de viento, podemos aproximar una estimación a la

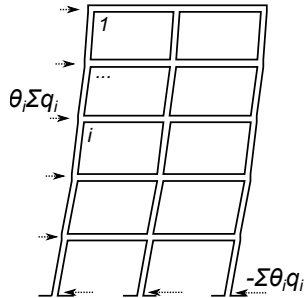


Figura 3.21: Cargas equivalentes aplicadas por desplome de pórtico. Suponen en cada planta el producto de la carga de la planta por el desplome, y en cimientos la opuesta a la suma de todas ellas.

rigidez lateral (carga/desplome) de una planta  $K_{\theta,i}$  como el cociente entre el cortante de viento en esa planta (suma de las cargas por encima de esta) y su desplome debido a la carga de viento en ella:

$$K_{\theta,i} \approx \frac{W_i}{\theta_{W,i}} = \frac{\sum_1^i w_i}{\theta_{W,i}} \quad (3.43)$$

Se trata de una primera aproximación en la que la interacción entre las distintas plantas se tienen en cuenta solo de forma indirecta, a través de los resultados de la hipótesis de carga horizontal de viento, aproximación tanto más adecuada cuanto más se aproximen la forma de la carga de viento empleada en ese análisis y la de la carga combinada a considerar en el problema completo. Pero esta aproximación es capaz de apor-

tar una importante estimación. Tenemos que esta rigidez lateral da, en cada planta, la medida de la carga crítica pues, para esta, el equilibrio es indiferente y para cualquier desplome se da la igualdad entre respuesta  $K_\theta\theta$  y acción  $P_k\theta$ :

$$K_\theta = \frac{W}{\theta_W}, \quad \text{con lo que} \quad K_\theta\theta = P_k\theta \implies P_k = K_\theta$$

Tenemos además el desplome inicial antes de la consideración del efecto de la compresión en los pilares

$$\theta_0 = \theta_d + \theta_W$$

y por lo tanto la condición de equilibrio final supone, como ya vimos, un aumento en la deformación para permitir que la respuesta alcance a la acción:

$$\begin{aligned} P\theta &= P(\theta_0 + \theta_{P\Delta}) = P_k\theta_{P\Delta} = P_k(\theta - \theta_0) \\ \theta &= \theta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}} = (\theta_d + \theta_W) \left( \frac{1}{1 - \frac{\theta_W P}{W}} \right) \end{aligned}$$

donde podemos usar  $\gamma_k = P_k/P$ . Dependiendo de los códigos, la expresión resultante adopta versiones variadas de la siguiente:

$$\theta = (\theta_d + \theta_W) \left( \frac{1}{1 - r} \right); \quad r = \frac{P}{P_k} = \frac{1}{\gamma_k}$$

Si  $r < 0,1$  el efecto horizontal  $P\theta$  es menor que  $|1 - 1/0,9|$  veces la carga horizontal total, por lo que podría ignorarse este efecto. En el lenguaje de los códigos se trata de un pórtico que

puede asimilarse a uno *intraslacional* . Sin embargo el efecto de las cargas verticales en el desplazamiento lateral debe tenerse en cuenta si  $r > 0,1$ . Se trata de un pórtico catalogado como *traslacional* .

Una aproximación lineal a este efecto es la dada por la expresión de amplificación del desplome que acabamos de ver. Esto exige desplomes parecidos en todas las plantas (y por tanto regularidad en la geometría, las cargas, las secciones...) pero permite un análisis lineal aproximado considerando como cargas horizontales por planta la suma de la de viento más la derivada del desplome:  $w_i + \theta q_i$ , siendo  $\theta$  el de la expresión precedente.

Una determinación más precisa exige analizar el efecto de ensamblado barra a barra en el pórtico, única vía de analizar rigurosamente la interacción de todas ellas, lo que nos exige considerar un modelo con más grados de libertad, asignados a cada uno de los nudos considerados.

### 3.5.2. Rigidez material y rigidez geométrica

En el análisis de estructuras de barras vimos que el enfoque elástico usado para incluir los efectos de interacción entre piezas en el comportamiento general de una estructura llevaba a una formulación en desplazamientos formalizada en formato matricial, ligando desplazamientos con cargas a través del ensamblaje de las rigideces locales de cada barra, representadas en las matrices de rigidez que ligan unos con otras. Por otro lado, en el análisis del fenómeno de pandeo hemos visto que este puede interpretarse como la alteración (la reducción si son compresiones) de la rigidez de la barra, por lo que vamos a considerar ahora el

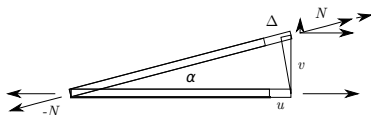


Figura 3.22: Geometría de barra articulada con esfuerzo axial y con desplazamiento lateral relevante en la rigidez

problema desde la perspectiva de esa rigidez local y su posible ensamblaje posterior.

### 3.5.2.1. Barras articuladas

Consideramos en primer lugar un modelo en el que las barras —los pilares— están articuladas.

La figura 3.22 nos muestra una barra sometida a esfuerzo axial en la que un nudo se desplaza lateralmente respecto de su eje.

Las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad en tal situación son, descritas en primera aproximación en la posición deformada y si el ángulo derivado del desplazamiento es pequeño:

$$\begin{bmatrix} f_H \\ f_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} N; \quad \Delta = l\epsilon = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

donde se puede expresar

$$\sin \alpha = \frac{v}{l + \Delta} = \frac{v}{l \left(1 + \frac{N}{EA}\right)}$$

aun cuando el segundo término entre paréntesis en el denominador, el alargamiento unitario, es pequeño en relación al primero y es factible despreciarlo.

Si consideramos ahora que la tracción real  $N$  de la barra, alineada con esta en la posición deformada, tiene las dos componentes paralela y perpendicular a la posición inicial de la barra, sobre la que representamos los esfuerzos, resultará que la componente perpendicular es

$$f_V \approx N \sin \alpha \approx N \frac{v}{l}$$

y por tanto escribiríamos el equilibrio completo en el formato

$$\begin{bmatrix} f_H \\ f_V \end{bmatrix} = \left( \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

que podemos simbolizar como

$$\mathbf{f} = (\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_G) \mathbf{u}$$

donde el primer término es el clásico de rigidez elástica, y el segundo término se denomina *matriz de rigidez geométrica* y da cuenta de la alteración derivada del efecto de las cargas axiales en el desplazamiento<sup>3</sup>.

---

3. Es posible también encontrar en la literatura, dependiendo de la formulación empleada, la expresión

$$\begin{bmatrix} f_H \\ f_V \end{bmatrix} = \left( \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{l + \Delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, ese es el caso si se emplea el procedimiento del apartado

Si en la matriz geométrica  $\mathbf{k}_G$  ignoramos los efectos axiales, y consideramos los efectos laterales iguales y contrarios en ambos extremos, tendríamos la forma siguiente:

$$\mathbf{f}_V = \mathbf{k}_G \mathbf{v} = \begin{bmatrix} f_{V,1} \\ f_{V,2} \end{bmatrix} = \frac{N}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Se trata de una forma útil en la que se expresan los movimientos de ambos extremos, aunque resulta redundante frente a la anterior, que solo considera el movimiento relativo de un extremo respecto del otro.

Si ahora buscamos estimar la *carga crítica*, es decir, la carga axial que, aplicada a una barra flectada en ménsula, hace que la respuesta lateral sea nula aun cuando el desplazamiento no lo sea, podemos aproximar para la rigidez lateral de la ménsula frente a la carga transversal la suma de la rigidez de una barra flectada empotrada en un extremo y la de la pieza tensada y tendremos:

$$f_V = \left( \frac{3EI}{l^3} + \frac{N_k}{l} \right) v = 0$$

$$N_k = -\frac{3EI}{l^2}$$

El resultado es solo aproximado: el valor exacto de la formulación de Euler es

$$N_k = -\frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$$

---

2.1.1.7, ecuación 2.32, y las funciones de forma de 2.24, aunque con la matriz geométrica local  $\kappa_G = N = \bar{\sigma}A$ , si bien la expresión no parece tener un fundamento razonable y cabe eliminarla con una formulación más rigurosa.

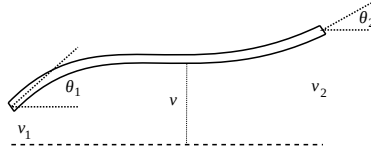


Figura 3.23: Geometría de barra en flexión con esfuerzo axial y con desplazamiento lateral (transversal,  $v$ ) relevante en la rigidez

por lo que una mejora en la aproximación exigirá considerar la deformación de flexión en el modelo tensado.

### 3.5.2.2. Barras en flexión

Vista la relativa imprecisión de suponer el efecto axial aisladamente, consideramos ahora el acoplamiento entre esfuerzos axiales y de flexión. Vamos a describir primero la deformada lateral a partir de los movimientos de los nudos extremos usando funciones de forma y vamos a considerar relevantes a los efectos buscados solo los movimientos de desplazamiento o rotación lateral, de modo que tenemos, para la función de desplazamiento lateral<sup>4</sup>

$$v = \mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{N}[v_1 \theta_1 v_2 \theta_2]^T \quad (3.45)$$

---

4. Atención en lo que sigue a la diferencia en la notación entre las funciones de forma  $\mathbf{N}$ , que serán las de la ecuación 2.29 y el esfuerzo axial  $N$  de la barra.

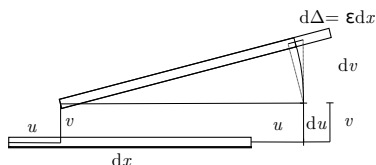


Figura 3.24: Alargamiento unitario para una deformación por desplazamiento plano. Nótese la semejanza en la posición desplazada entre el triángulo rectángulo de catetos  $dv$ ,  $dx$  y el ortogonal al tramo desplazado en su extremo derecho, donde también se ha representado la rotación del tramo.

Los alargamientos, incluyendo los añadidos por esta deformación lateral pueden medirse, de acuerdo a la figura 3.24, con

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)$$

Tendremos como esfuerzos de extremo los  $\mathbf{f} = [T_1 \ M_1 \ T_2 \ M_2]^T$  junto a  $[-N \ N]^T$ .

Medimos ahora la energía de deformación en la barra, considerando tanto los efectos axiales como los de flexión:

$$W = \int_0^l N \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} N \int_0^l \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx$$

de modo que la componente, *geométrica*, procedente de la flexión es

$$\rightarrow W_{G,F} = \frac{1}{2} N \int_0^l \mathbf{u}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{u} dx$$

donde cabe extraer de la integral los parámetros  $\mathbf{u}$ , y donde  $N$  es la compresión de la barra y  $\mathbf{N}$  las funciones de forma usadas para construir  $v(x) = \mathbf{N}\mathbf{u}$ , que son las de 2.29.

Si aplicamos ahora el teorema de Castigliano, por el que  $f_i = \frac{\partial W_G}{\partial u_i}$  resultará, para la componente derivada del efecto de flexión

$$\mathbf{f}_G = N \left( \int_0^l \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dx \right) \mathbf{u} = \mathbf{k}_{G,F} \mathbf{u}$$

de tal modo que ahora la matriz de rigidez geométrica correspondiente a los parámetros de desplazamiento y rotación lateral resulta ser

$$\mathbf{k}_{G,F} = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Este mismo resultado se obtiene si se aborda el análisis desde la perspectiva débil del equilibrio: trabajo interno igual a trabajo externo. En este caso, para la misma expresión de la deformada de 3.45, tendremos que las pendientes que las pendientes pueden determinarse con

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v' = \mathbf{N}'\mathbf{u}$$

de tal modo que la componente de esfuerzo transversal debida a la rotación del esfuerzo axial  $N$  será

$$V = v'N$$

y por tanto los esfuerzos de extremo equivalentes  $\mathbf{f} = [T_1 \ M_1 \ T_2 \ M_2]^T$ , pueden deducirse a partir de la igualdad de trabajos interno y externo  $W_i = W_e$

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} = \int_0^l \bar{v}' V \, dx, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}$$

expresión que, escrita a partir de las funciones de forma, adopta la forma

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} = \int_0^l \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \mathbf{N}' \mathbf{u} \, dx, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}$$

por lo que

$$\mathbf{f} = \int_0^l \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \mathbf{N}' \mathbf{u} \, dx$$

Como ahora las derivadas son

$$\begin{aligned} N'_{\delta,i} &= \frac{6x^2}{l^3} - \frac{6x}{l^2} \\ N'_{\theta,i} &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{4x}{l} + 1 \\ N'_{\delta,d} &= \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} \\ N'_{\theta,d} &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x}{l} \end{aligned}$$

resulta que la expresión definitiva

$$\mathbf{f} = \mathbf{N} \left( \int_0^l \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \, dx \right) \mathbf{u} = \mathbf{k}_{G,F} \mathbf{u}$$

lleva a la misma matriz  $\mathbf{k}_{G,F}$  de la ecuación 3.46.

Dicha rigidez es positiva en los casos de esfuerzos positivos, de tracción, pero resultará negativa en los casos de esfuerzos negativos, de compresión: la rigidez se reduce por el efecto de esta.

### 3.5.3. Factor de carga crítica, autovalores

Conocidas las matrices de rigidez que incorporan los efectos laterales de las cargas axiales es ahora sencillo establecer las relaciones generales entre cargas y desplazamientos, aunque hay un problema de no linealidad: la matriz de rigidez geométrica depende del estado de esfuerzos internos, que no son conocidos en tanto se resuelve el problema. De modo que los procedimientos habituales de análisis deben constar al menos de dos pasos: el primero en el que se analiza el estado de esfuerzos sin la consideración de la rigidez geométrica, y el segundo en el que esta rigidez geométrica se estima a partir de los esfuerzos de ese primer paso. Si se entiende que la deformación añadida por esa modificación (reducción) en la rigidez puede aumentar en proporción al aumento de la carga, esta hipótesis permite el análisis del posible estado de colapso crítico y por tanto del factor de carga crítica. Estamos hablando de un análisis lineal del pandeo o *pandeo lineal*.

Ahora bien, en ocasiones, y desde luego si los esfuerzos axiales cambian significativamente en ese segundo paso, no resulta posible asegurar que la evolución de los cambios en la geometría cuando aumenta la carga puedan representarse mediante un escalado de la deformación ya estimada y resulta imprescindible

un análisis no lineal iterativo que actualice dicha rigidez en cada paso de la deformación y que persiga la evolución combinada de carga y desplazamiento, evolución que puede suponer aumentos en los desplazamientos con pérdida de capacidad portante. Estaremos hablando ahora de un análisis de pandeo no lineal, y requerirá de métodos de análisis iterativos capaces de capturar esa evolución combinada (el método de longitud de arco, por ejemplo, ver figura 2.12 en el apartado 2.1.2.4). No vamos a avanzar en esta cuestión aquí aun cuando puede ser extremadamente relevante en estructuras comprimidas muy esbeltas.

### 3.5.3.1. Rigidez global con cargas axiales

Una vez que tenemos un medio para determinar la (pérdida de) rigidez derivada de la existencia de esfuerzos axiales cabe reescribir las ecuaciones globales de rigidez 1.24 en la forma

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{U} \quad (3.47)$$

donde  $\mathbf{K}_G$  depende de la carga, tal como hemos visto, y donde cabe por tanto realizar el análisis en dos pasos, con  $\mathbf{F}_0$  y  $\mathbf{K}_E$  en el primero para determinar las cargas que permiten determinar  $\mathbf{K}_G$ , considerando el sistema de cargas capaz de generar la situación de compresión más representativa en la vida de la estructura, y con  $\mathbf{F}$  (con, al menos, el caso de  $\mathbf{F}_0$  de nuevo y la rigidez  $\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G$ ) para el análisis de cualquier otra de las hipótesis o combinaciones de cargas de interés.

Sin embargo este análisis aún no nos informa de la mayor o menor proximidad a una situación crítica, para lo que se requiere

la determinación del (o de los) factores de carga crítica, tal como vemos a continuación.

### 3.5.3.2. Factor de carga crítica

El problema de la determinación de la carga crítica, o del factor de carga crítica se linealiza suponiendo  $\mathbf{F} = \gamma\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_l$  para un estado 0, con  $\gamma_0 = 1$ ,  $\mathbf{F}_l = 0$ , que permite determinar un primer estado de desplazamientos  $\mathbf{U}_0$  y esfuerzos  $\mathbf{f}_0$  con los que construir  $\mathbf{K}_{G,0} = \mathbf{K}_G(\mathbf{F}_0)$ . Para cargas  $\gamma_i\mathbf{F}_0$  se supone rigidez geométrica  $\gamma_i\mathbf{K}_{G,0}$ .

En el siguiente análisis se busca determinar el factor de carga  $\gamma_k$  necesario para alcanzar una situación en la que una deformación<sup>5</sup>  $\mathbf{U}_l$ , que respondería a una perturbación  $\mathbf{F}_l$ , resulte sin embargo sin respuesta, es decir, que se llegue a una situación de equilibrio indiferente con desplazamientos indeterminados. O en formato matemático

$$\mathbf{F}_l = (\mathbf{K}_E + \gamma_k\mathbf{K}_{G,0})\mathbf{U}_l = 0, \mathbf{U}_l \neq \mathbf{0} \quad (3.48)$$

El problema es un problema de autovalores generalizado: es el problema de determinar la o las parejas de  $\gamma_k$ ,  $\mathbf{U}_l$  capaces de asegurar la condición anterior, y corresponden a las situaciones en las que la matriz  $(\mathbf{K}_E + \gamma_k\mathbf{K}_{G,0})$  se hace singular (de determinante nulo).

Para cada valor de  $\gamma_k$  habrá un *modo* de desplazamiento  $\mathbf{U}_l$  ligado, que corresponderá a la geometría del equilibrio indiferente correspondiente a la carga crítica  $\gamma_k\mathbf{F}_0$ . Dicho modo no

---

5. Se entiende como una deformación que implique desalineación en las compresiones

tiene escala: cualquier deformación proporcional se corresponde igualmente con esa forma de equilibrio. Si la carga es menor que la crítica y la geometría fuese inicialmente perfecta no habría deformación ninguna. Si la carga alcanza la crítica, cualquier deformación proporcional a  $U_l$  es posible y, por tanto, el colapso está asegurado.

### 3.5.3.3. Inestabilidad como problema de autovalores

El problema 3.48 puede transformarse en un problema estándar de autovalores si existe la matriz inversa de  $\mathbf{K}_{G,0}$ . Ahora el problema puede plantearse en la forma

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{G,0}^{-1} \mathbf{K}_E + \gamma_k \mathbf{I}) \mathbf{U}_l &= 0, \mathbf{U}_l \neq \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_{G,0}^{-1} \mathbf{K}_E) \mathbf{U}_l &= \gamma_k^* \mathbf{U}_l \end{aligned}$$

En la última expresión usamos  $\gamma_k^*$  positivo o negativo dependiendo de cómo se esté formulando la rigidez geométrica  $\mathbf{K}_{G,0}$  pues, como veremos en el apartado siguiente, es posible hacer explícito el carácter de reducción de rigidez de esta.

Como caso de aplicación de este problemas de autovalores podemos ahora abordar de nuevo el problema de pandeo del soporte en ménsula que consideramos en el apartado 3.5.2.1 usando ahora la rigidez geométrica del apartado 3.5.2.2:

$$\left( \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3} + \frac{\gamma_k N}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l \\ 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_s \\ \theta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Considerando la solución correspondiente al menor de los autovalores se obtiene ahora que  $N_k = \gamma_k N = 2,486 \frac{EI}{l^2}$  cuando la

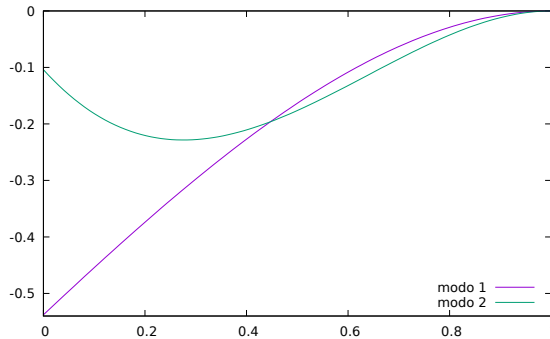


Figura 3.25: Modos de pandeo de ménsula comprimida (horizontalmente), de acuerdo a la rigidez obtenida según la formulación del apartado 3.5.2.2, siendo el derecho el nudo de sustentación.

solución de Euler,  $\pi^2/4 \times EI/l^2$ , resulta  $2,467 EI/l^2$ . La figura 3.25 muestra los dos modos de pandeo solución del problema de la ménsula comprimida formulado en 3.49.

#### 3.5.3.4. Factor de carga crítica como cociente de Rayleigh

Vamos ahora a reconsiderar el abordaje de la ecuación 3.47, que considera tanto la rigidez material como la geométrica.

Es interesante hacer explícito el carácter negativo o reductor de la rigidez geométrica, por lo que la reescribimos, al igual que la 3.48, y determinamos en esta el producto escalar que mediría

el trabajo en un desplazamiento  $\mathbf{U}_l$ . Esta operación permite, en el caso de que  $\mathbf{U}_l$  corresponda a un modo crítico, determinar el valor del correspondiente factor de carga crítica:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{K}_E - \mathbf{K}_G) \mathbf{U} \\ \mathbf{F}_l &= (\mathbf{K}_E - \gamma_k \mathbf{K}_{G,0}) \mathbf{U}_l = 0, \mathbf{U}_l \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_l^T \mathbf{F}_l &= 0 = \mathbf{U}_l^T \mathbf{K}_E \mathbf{U}_l - \gamma_k \mathbf{U}_l^T \mathbf{K}_{G,0} \mathbf{U}_l \\ \gamma_k &= \frac{\mathbf{U}_l^T \mathbf{K}_E \mathbf{U}_l}{\mathbf{U}_l^T \mathbf{K}_{G,0} \mathbf{U}_l} \end{aligned} \quad (3.50)$$

La última ecuación expresa el llamado cociente de Rayleigh y aporta un procedimiento que permite aproximar  $\gamma_k$  aproximando el modo de pandeo  $\mathbf{U}_l$ .

Pues, efectivamente, cabe iterar partiendo de una forma aproximada a  $\mathbf{U}_l$ , la  $\mathbf{U}_{l,0}$ , que permitiría expresar  $\mathbf{K}_E \mathbf{U}_{l,1} = \mathbf{F}_{G,0} = \gamma_0 \mathbf{K}_{G,0} \mathbf{U}_{l,0}$ , lo que permite determinar una aproximación mejor  $\mathbf{U}_{l,1}$ , y así sucesivamente.

### 3.6. Algunas conclusiones en estabilidad

Por lo que hemos visto, el problema de la estabilidad está ligado a la necesidad de analizar las condiciones de equilibrio, compatibilidad y de relaciones materiales en la geometría deformada de la estructura, no siendo suficientemente válida su formulación en la geometría inicial aun cuando se mantenga la

linealidad en las relaciones materiales: tenemos una situación de no linealidad derivada de los cambios en la geometría debidos a las deformaciones: una no linealidad geométrica. Un problema aún más complejo se dará cuando a esta causa de no linealidad se añada la de la no linealidad en las relaciones esfuerzo-deformación o cuando las deformaciones locales sean apreciables en relación a las dimensiones iniciales de las piezas.

### 3.6.1. No linealidad geométrica por grandes desplazamientos

Este caso de no linealidad que acabamos de estudiar implica que los desplazamientos no son pequeños o despreciables aun cuando las deformaciones sigan teniendo relaciones lineales con los esfuerzos y sí sigan siendo pequeñas. Estamos en este caso hablando de grandes desplazamientos (frente a los pequeños desplazamientos del análisis lineal). En este caso es posible que el problema no lineal de pandeo pueda linealizarse, o aproximarse linealmente, considerando que el efecto transversal derivado de la deformación es proporcional al producto de la compresión por esa deformación o desplazamiento transversal: esto nos presenta dos vías alternativas para enfocar el problema:

- como una (o un conjunto de) carga(s) equivalente(s) transversal(es) que se añade a la realmente aplicada y que se mide por la diferencia entre las cargas equilibradas por el esfuerzo en la geometría original y la que sería equilibrada por ese mismo esfuerzo en la geometría deformada (la diferencia entre la carga vertical y la alineada con el pilar en el caso de un pilar vertical desplomado) carga que por tanto aumenta

los movimientos laterales

- como una pérdida de rigidez lateral en las piezas comprimidas, que facilita por tanto mayores desplazamientos laterales que las que se producirían en el caso no comprimido.

Estamos hablando de pandeo lineal. Ambas estrategias consideran lo que podemos llamar efecto  $P\Delta$ , y aplicadas a geometrías exactas, o perfectas, nos permiten determinar el factor de carga que, aplicado a la carga real, llevaría a una situación de equilibrio lateral indiferente, o de pérdida total de rigidez (determinante nulo en la matriz de rigidez resultante). Es ese el factor de carga crítica, que cabe aproximar por técnicas como la del cociente de Rayleigh.

Las estructuras reales no son, sin embargo, perfectas, de modo que una mejor aproximación a su comportamiento supone considerar, prever, las *imperfecciones* posibles (para las que se elegirían las deformadas correspondientes a los modos de pandeo correspondientes al menor factor de carga crítica en una escala correspondiente al límite de las tolerancias admitidas para esos defectos en los procesos de construcción) y realizar el análisis (no lineal) para esa geometría o, alternativamente, estimar la carga lateral que correspondería a la deformación amplificada de esos defectos (y donde esa amplificación deriva del factor de carga crítica, según 3.18) y determinar la condición de equilibrio resultante, que cabría considerar segura si no supera la deformada amplificada supuesta para el análisis, y los esfuerzos resultantes en esta situación deformada final no superan los admisibles en ninguna región de la estructura.

### 3.6.2. No linealidad geométrica añadiendo grandes deformaciones

Si a las condiciones anteriores se añaden grandes deformaciones resulta ahora que los tensores de Cauchy empleados para la descripción de la deformación o de la tensión dejan de ser válidos y deben usarse nuevas formulaciones, como las que aportan los tensores de Green-Lagrange para deformación, y el segundo de Piola-Kirchoff para la tensión.

Este cambio va a afectar a las relaciones de EQUilibrio y COMPatibilidad, que deben reformularse teniendo en cuenta ambas geometrías, la original y la deformada, considerando las expresiones de ambos tensores en ellas. Es un problema en estructuras de materiales orgánicos elásticos como el caucho, aunque relativamente inhabitual en las estructuras de edificación.

Se remite, pues, a los interesados a los textos especializados.

## 3.7. Ejemplos

### 3.7.1. Pórtico de cinco plantas

Se busca analizar el estado de estabilidad del pórtico de 5 plantas considerado en el apartado 2.1.3, figura 2.13.

Es decir, manejamos la misma geometría, con alturas: 3 m., luces totales de vigas de 10 m y longitud del tramo de cartela de 2 m. con los pilares de fachada modelados como articulados y unión rígida en el central.

El dimensionado del pórtico es con viga base formadas por IPE 330, con cartela hasta aproximadamente 1,8 veces de canto

e inercia cuádruple y pilares HEB 180 en plantas 1 y 2, HEB 200, 220 y 240 en plantas 3, 4 y 5, contadas desde cubierta.

Se emplea el modelo matricial elástico, para los 10 grados de libertad considerados, partiendo de las matrices de rigidez global y condensada derivadas en dicho apartado.

### 3.7.1.1. Objetivos: planificación del análisis

- Cargas de cálculo y normales de soportes (centrales y totales) para las hipótesis de carga 1: gravitatoria simétrica, 2: asimétrica, 3: (1) más viento, 4: sísmica (todas ellas con coeficientes de simultaneidad y de seguridad apropiados)
- modelado de efectos locales:
  - Cortantes (horizontales) de planta y desplomes entreplanta y total
  - Cargas críticas de Euler y coeficientes de reducción por pandeo de los pilares
- modelado de efectos globales
  - Efecto  $P\Delta$  por planta: carga horizontal equivalente, rigidez lateral de planta; y factores de carga crítica y de ampliación.
  - Matrices de rigidez geométrica de pilares centrales y del pórtico
  - Mínimo factor de carga del pórtico (cociente de Rayleigh o problema de autovalores)
- Resumen y valoración de resultados

### 3.7.1.2. Detalles del desarrollo: análisis lineal



Vamos a desarrollar el análisis con auxilio de la hoja de cálculo “Portico5plantasEstabilidad.ods” disponible como documento adjunto en este pdf. La hoja se emplea con LibreOffice y tiene macros incorporados que cabe activar al abrirla. Estos aportan funciones empleadas en algunos de los cálculos, como puede ser el factor de pandeo según Eurocódigo 3, etc<sup>6</sup>.

La hoja (ElastK\_ENSAMB) se ha desarrollado detallando separadamente todos los cálculos para cada planta, aun cuando los datos sean iguales en todas ellas, al efecto de poder usarla incluso con datos diferentes. Los campos de entrada están en verde y los calculados en colores diversos para poder identificar áreas diferentes. Las unidades constan encima o junto al correspondiente campo. Además hay celdas con comentarios sobre su contenido o el de las celdas cercanas que se identifican por un punto rojo en la esquina superior derecha y que conviene consultar.

Las primeras filas, hasta la 20, aportan los datos geométricos y mecánicos de los perfiles de acero laminado que pueden emplearse en el pórtico.

Las filas 21 a 32 aportan la geometría y el dimensionado del pórtico, con alturas y luces, los perfiles elegidos para pilares y vigas, y la fracción de luz que supone la cartela.

---

6. La función para la determinación de autovalores y autovectores (*eigen*s o *eigen*sw) exige tener instalado y operativo *r* (Linux) o *Rscript*, pues lo hace llamando a *R* a través de uno de ambos procedimientos. Pueden verse en detalle en Herramientas > Macros > Organizar Macros > Basic y, desplegando la referencia a los posibles macros del fichero, editar el *Module1*.

Las filas 33 a 38 calculan los datos estáticos de la cartela y el cociente de su inercia máxima a la inercia del perfil base.

Las filas 39 a 63 determinan los coeficientes numéricos de la rigidez de la viga acartelada biempotrada relativos a  $EI_0/l$  de acuerdo al procedimiento descrito en 2.1.3.1: las columnas B y C contienen la rigidez del tramo de sección constante, las D y E (las dos primeras filas) la del tramo de cartela, las F, G, H, I ensamblan la de la pieza completa incorporando ambas, y las D y E (las dos segundas filas) condensan la de la pieza completa eliminando los parámetros asociados a la unión entre el tramo constante y el acartelado.

Las filas 64 a 89 calculan los factores de los momentos (en negro) y cortantes (en rojo) de empotramiento perfecto para carga uniforme de la viga, de acuerdo al procedimiento de 2.1.3.2: las columnas B y C contienen los valores correspondientes a cada tramo, para movimientos coaccionados en los tres nudos, la D los valores acumulados en los nudos extremos, 1 y 3, la E (las dos primeras filas) las “cargas” en el nudo 2, las G, H, I, J, la inversa de la matriz de rigidez de la barra aislada, la F los momentos añadidos a 1 y 3 al considerar los desplazamientos de las cargas en 2, y las E y A (las dos filas inferiores) los factores de momento y cortante definitivos de la viga acartelada biempotrada.

Las filas 91 a 100 contienen, en la columna A las rigideces relativas a la rigidez  $EI/l$  del soporte de la planta superior, en las columnas B y C, las matrices de rigidez de los soportes, relativas a dicha rigidez, en la columna C los datos de alturas y luces, en las E y F las matrices de las vigas ya calculadas, pero relativas igualmente a la rigidez de dicho soporte, la G, los momentos de

empotramiento (relativos a  $ql^2$ ) y las H, I, J los valores para la versión articulada de la viga (término de rigidez, relativo a la rigidez  $EI/l$  del soporte de la planta superior, término de empotramiento perfecto, relativo a  $ql^2$  y término de cortante relativo a  $ql$  en el nudo central).

Las filas 103 a 113 contienen el ensamblaje manual de la matriz de rigidez del pórtico, y las 114 a 124 la inversa que permite resolver los problemas para los 10 grados de libertad considerados, a saber desplazamientos y giros de los cinco nudos centrales. La rotulación muestra con claridad el orden elegido. Nuevamente las matrices globales en términos de la escala  $EI/l$  del soporte de la planta superior.

Las filas 124 a 126 aportan los valores para las cargas previstas, y las 127 a 137 los vectores de carga y de desplazamiento para las diferentes hipótesis consideradas, a saber: carga solo vertical asimétrica, carga horizontal de viento, y carga sísmica (los desplazamientos en sus valores dependientes del factor de escala  $EI/l$  usado, o en metros) Dichas filas incluyen también los datos geométricos y de carga total necesarios para el reparto de la carga sísmica total entre las diferentes plantas.

Para el análisis de estabilidad que se analiza en la sección se usarán las siguientes filas de la hoja de cálculo, tal como vemos en el apartado siguiente.

En la segunda hoja (ElastK\_BTkB\_comparar) se hace la construcción de la matriz global mediante el procedimiento matemático usual ( $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{kB}$ ) al objeto de comparar los resultados del ensamblaje manual y el resultado del producto matricial.

### 3.7.1.3. Análisis de la estabilidad

Para el análisis de estabilidad se precisa determinar los esfuerzos normales en los soportes centrales (para el cálculo de la pérdida de rigidez por compresión, o rigidez “geométrica”) pero también el efecto en los laterales que, aunque están articulados y no han sido modelados en el análisis previo, aportan el correspondiente efecto  $P\Delta$  (o  $P\theta$ , carga lateral equivalente) al desviarse de la vertical. Y como hemos visto esto puede verse alternativamente como una carga lateral equivalente o como una pérdida de rigidez lateral (geométrica). Las filas 141 a 148 se usan para determinar dichas compresiones en las tres hipótesis que se van a considerar: carga asimétrica máxima, simétrica máxima y gravitatoria asociada a la hipótesis sísmica, con las columnas: A, para el factor de carga en el nudo empotrado de la viga acartelada, y C, D, E, más G, H, I para la carga acumulada total por soporte o planta en las tres hipótesis analizadas.

Las filas 150 a 157 evalúan el desplome (inclinación) medio y por planta deducido del análisis elástico. Para facilitar la interpretación el dato en columnas C, D, E es el inverso de dicho desplome. Las columnas G, H, I determinan la carga lateral equivalente al efecto  $P\Delta$  derivado de dichos desplomes.

Las filas 159 a 165 aportan en columnas A y B una aproximación a la rigidez lateral de planta (cociente entre cortante de planta, columnas C, D, E y desplome, filas 153 a 157) y por tanto la correspondiente aproximación al factor de carga crítica en columnas G y H (ver la interpretación en rigideces de la expresión 3.2) y el coeficiente de amplificación de los desplomes laterales que se deduce de expresiones como las 3.18 o 3.22.

Las filas 167 a 181 analizan la reducción de eficacia en compresión de las piezas de soporte consideradas aisladamente de acuerdo a varias estimaciones típicas permitiendo comparar sus resultados, con la fila 182 recalcando la seguridad de cada aproximación en relación a la exigida por la normativa vigente.

Las filas 184 a 191 evalúan el factor de carga crítica local, es decir, el factor de incremento de la compresión de cada soporte necesario para alcanzar la carga crítica de Euler, a los efectos de comparar con los valores correspondientes al pórtico completo.

Las filas 194 a 224 determinan las matrices de rigidez geométrica de los soportes centrales y laterales, ecuaciones 3.46 y 3.44.

Las filas 226 a 237 aportan el ensamblaje manual de la matriz geométrica completa del pórtico, que se ensambla de forma automática ( $\mathbf{K}_G = \mathbf{B}^T \mathbf{k}_G \mathbf{B}$ ) en las filas 78 a 148 de la hoja ElastK\_BTkB\_comparar, hoja en la que cabe observar en la matriz  $\mathbf{B}$  el diferente efecto de los pilares centrales (en flexo-compresión) frente a los laterales, solo comprimidos.

En la primera hoja (ElastK\_ENSAMB), las filas 239 a 260 evalúan el cociente de Rayleigh, de acuerdo a lo descrito en el apartado 3.5.3.4, obteniendo los factores de carga crítica para cualquiera de las hipótesis de desplazamiento lateral consideradas, lógicamente diferentes según la carga lateral actuante para cada caso. Se estima en particular ese valor para una secuencia de iteraciones en la hipótesis de carga vertical más viento.

Finalmente, y en caso de estar disponible el acceso a  $r$  o  $Rscript$  indicado en el pie de página 6 de la página 294, se formula el problema de estabilidad como un problema de autovalores en las filas 262 a 295 para las matrices elástica y geométrica obtenidas previamente.

## Capítulo 4

# Fundamentos y técnicas de proyecto. Optimación

En los capítulos precedentes se han sentado las bases del análisis y se han desarrollado las técnicas necesarias para el análisis de las estructuras formadas por elementos lineales, ya sean barras de comportamiento elástico o plástico, ya sean elementos lineales rígidos en estructuras de mampostería. Pero la tarea del proyectista no es analizar, sino proponer. En caso de disponer solo de técnicas de análisis, el procedimiento es necesariamente iterativo: tras proponer una solución, las herramientas de análisis permitirán validar la idoneidad de la propuesta: si

esta no es lo suficientemente buena, por haber posibilidad de fallo, o por exceso de capacidad resistente y de coste, deberá reformular la propuesta y analizar nuevamente.

En el apartado 1.1.4 ya vimos esa dualidad, y tanto para el enfoque elástico, en 1.3.5, como para el plástico, en 1.4.8, vimos como emplear las ecuaciones de cada enfoque para aventurar soluciones capaces de resolver el problema planteado sin tanta iteración.

Sin embargo no toda solución igualmente válida en términos de seguridad es equivalente. Pues aunque toda solución debe aportar por razones obvias el mismo grado de seguridad, no todas son iguales en elegancia o en coste. Para cada problema buscaremos la solución que, a igualdad en el cumplimiento de los requisitos estructurales, suponga un menor uso de recursos. Por tanto el proyecto es un problema que puede asociarse a los problemas de optimación. Es de lo que se trata en este capítulo.

Este capítulo trata, pues, de aportar una cierta teoría del proyecto que facilite al proyectista la mejor eficacia en la necesaria secuencia en la toma de decisiones que supone todo proyecto de estructura.

Para ello se analizan en primer lugar posibles alternativas, que incluyen desde las posibilidades de uso de las herramientas de minimización, como el desarrollo de enfoques alternativos basados en métricas de coste adecuadas. Elegida esta segunda vía, y tras analizar simplídicamente estos problemas en estructuras flectadas sencillas, se analiza y desarrolla la poderosa métrica del *volumen estructural* o *cantidad de estructura*, que se empleará para determinar las relaciones entre la geometría de la estructura y su eficiencia en los tipos más habituales.

## 4.1. Teoría de proyecto

### 4.1.1. Definiciones

Para establecer bases sólidas a una posible teoría del proyecto es sensato identificar explícitamente los objetivos de este desde la perspectiva de la estructura. Por ello resulta apropiado aportar algunas definiciones aunque puedan parecer innecesarias por su obviedad.

**Cualidades estructurales.** Son las cualidades de la edificación que aseguran su supervivencia.

**Requisitos estructurales.** Son los requisitos cuyo cumplimiento asegura que se cuenta con las cualidades estructurales necesarias y suficientes para la supervivencia.

### 4.1.2. Objetivos del proyecto

Los objetivos del proyecto de estructuras son asegurar que se cumplen eficazmente los requisitos estructurales, y con fiabilidad y eficiencia suficientes para todas las condiciones de carga susceptibles de aparecer en su vida útil

- **Estabilidad:** La estructura es estable en su conjunto y en todas y cada una de sus partes.
- **Resistencia:** Todos sus elementos disponen de seguridad suficiente frente a la rotura.

- **Rigidez:** Las deformaciones de la estructura en cualquiera de sus condiciones de carga son compatibles con el uso previsto.
- **Durabilidad:** La estructura no presenta alteraciones que puedan afectar a su seguridad a corto, medio, o largo plazo.
- **Factibilidad, sostenibilidad:** Todo ello se logra a un coste o impacto adecuado y razonablemente bajo

La teoría de proyecto sería, en este contexto, una herramienta para avanzar en el cumplimiento de los objetivos en el necesario proceso de reflexión sobre la forma estructural más adecuada al problema planteado: se trataría de aportar instrumentos que permitan orientar en la mejor elección y la validación de la forma a lo largo del proceso de proyecto.

#### 4.1.3. Premisas: convencionalidad frente a realidad

Todo proyecto es en gran medida un proceso iterativo de decisión, evaluación y corrección con una aproximación y un grado de definición creciente en cada iteración, desde situaciones relativamente imprecisas y ambiguas a grados de detalle lo suficientemente elevados como para permitir el uso de las herramientas de análisis apropiadas a la evaluación crítica de lo proyectado. En este contexto es necesario el uso de formulaciones simplificadas y, tal vez, convencionales. Es muy claramente el caso de las acciones, que no pueden estimarse en toda su variabilidad y que, por tanto, se describen mediante modelos convencionales que cabe asociar igualmente a los tipos estructurales más

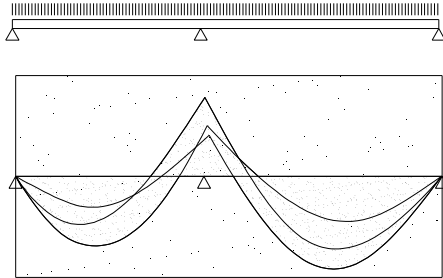


Figura 4.1: Convencionalidad de las acciones: la acción distribuida uniforme está asociada a soluciones convencionales de sección relativamente constante, para las que los valores máximos de las envolventes de las diferentes situaciones (leyes de esfuerzo) de las acciones previsibles pueden quedar adecuadamente cubiertas por las leyes de capacidad resistente de la solución estructural tipo. En las gráficas cabe identificar algunas leyes de esfuerzo, sus envolventes (que cabe representar como áreas o como parejas de líneas límite), y la ley de capacidades resistentes de la pieza.

convencionales.

Por mostrar un ejemplo sencillo de visualizar, en la figura 4.1 se muestra una solución típica en flexión, que va a estar sometida a leyes de carga muy variadas a lo largo de su vida útil, que darán lugar a situaciones o leyes de esfuerzo diferentes todas ellas, y cuyas envolventes deben en todo caso ser menores en todo punto que la correspondiente capacidad resistente de

la pieza. A los efectos del análisis esta variabilidad se sustituye por una carga convencional uniforme cuyo valor asegura con una cierta fiabilidad que la capacidad elegida para la pieza sea suficiente para todas las situaciones de carga futuras.

De modo que no deben confundirse las cargas probables y sus distintas leyes de esfuerzos, con las envolventes de estas leyes y su aproximación a través de las leyes de esfuerzo que resulten de las cargas convencionales de la norma, aproximación válida en tanto resulte menor que las leyes de capacidades resistentes de las piezas correspondientes al tipo estructural de referencia: en el ejemplo de la figura, en tanto que la capacidad resistente de la viga metálica es constante e igual para los momentos de ambos signos, basta la comprobación del punto peor, y la acción convencional resulta adecuada al proyecto. Sin embargo, si estuviésemos considerando un hilo como estructura, esa acción convencional ya no es adecuada, en tanto que no representa la posibilidad de movimiento de ese hilo según cambia la posición de las cargas.

Es por tanto imprescindible en toda simplificación considerar la adecuación de esta al tipo estructural implícito en la cadena de decisiones del proyecto en curso, no confundiendo en esa reflexión la convencionalidad de los modelos con la realidad de la estructura que se pretende proyectar.

#### 4.1.4. Algunos medios disponibles para la teoría

##### 4.1.4.1. Optimación

En la medida en que se trata de determinar formas y capacidades resistentes que, finalmente cabe describir a través de parámetros que definan las geometrías y las cualidades materiales aplicables a estas, cabe plantearse la posibilidad de recurrir a los métodos de optimación para la determinación de dichos parámetros, de modo que la descripción de las posibles formas apropiadas como solución se haga a través de algún tipo de parámetros numéricos o funcionales, que se establezca alguna métrica capaz de expresar la bondad de la solución, y que la aplicación de alguna de las múltiples herramientas de determinación de óptimos aporte la solución buscada.

Los problemas así considerados tienen por tanto un cierto abanico de parámetros de entrada, aquellos que permiten describir la solución, y un abanico menor de parámetros de salida que responderían a la codificación o cuantificación de las prestaciones requeridas que resultan ser el objeto de optimación (maximización o minimización). El modelado debe ser capaz de determinar cuales serían los valores de salida a partir de cualesquiera valores en la entrada, y los algoritmos, en este caso, tratan de determinar los valores de los parámetros de entrada que permitirían optimizar los de salida.

Entre las formulaciones clásicas empleadas para modelar problemas de optimación se han usado ampliamente estrategias basadas en variables, que representan rangos numéricos posibles para los parámetros, pero también estrategias basadas en fun-

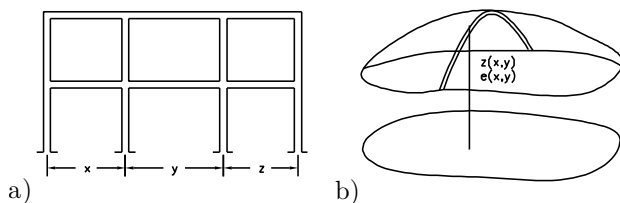


Figura 4.2: Formulación de problemas de optimización: se trata de determinar las variables (a) o las funciones (b) que describen la solución óptima buscada.

ciones, que representarían leyes posibles para la distribución de algunas de las propiedades geométricas o materiales buscadas.

Formulaciones más recientes asociadas al creciente desarrollo de las redes neuronales profundas resultan menos sencillas de describir. En este caso el entrenamiento de la red supone habitualmente la aportación a esta de una multiplicidad de casos en los que se proporcionan tanto los valores de los parámetros de entrada como de los de salida que resultan de los primeros para cada uno de los casos, de modo que los valores de los parámetros asociados a cada neurona de la red (en número muy elevado) terminen adaptándose al historial del entrenamiento y permitan posteriormente, a partir de cualesquiera otros grupos de valores en la entrada, determinar los más probables en la salida, de acuerdo al modelo del entrenamiento recibido. En este caso la optimización está orientada al proceso de ajuste del modelo a los datos del entrenamiento, modelo que ahora resultará mucho más complejo, en virtud del elevado número de paráme-



Figura 4.3: Esquema básico del ciclo de proyecto: la documentación que permite guiar el proceso de obra resulta de un ciclo de decisión (diseño o definición) y evaluación en que se adoptan progresivamente las decisiones que resultan validadas positivamente tanto individualmente como en conjunto en el contexto técnico y social al que se destina el proyecto.

tros subyacentes.

En todo caso no se dispone aún de modelos de este tipo que sean capaces de reproducir los procesos de decisión, evaluación y documentación a que responde todo proyecto (figura 4.3), aunque sí se dispone de herramientas parciales capaces de apoyar pasos concretos en ese proceso: son evidentes las herramientas de modelado para la definición de los objetos que se pretende producir, las de análisis para la evaluación de estos modelos, etc.

En lo que sigue apuntamos a las herramientas de apoyo al proyecto que se han ido empleando a lo largo de la historia, aunque se trata de una extensa línea de estudio que nos llevaría bastante lejos (ver Cervera 1982, Addis 2007, Kurrer 2018, Cervera Bravo 2022) y que no tendría sentido desarrollar aquí.

Para rastrear las fuentes de la formulación teórica adoptada y desarrollada más adelante véanse además Cervera 1989, Cervera 1990 y Cervera Bravo y Vázquez Espí 2011.

#### 4.1.4.2. Precedentes históricos: el análisis frente a las reglas de proporción

A lo largo de la historia, las soluciones construídas han evolucionado desde la pura experimentación, en la que sobrevivían las soluciones capaces de perdurar en el tiempo, y que serían por ello replicadas una y otra vez, a las soluciones actuales basadas en la verificación a través del análisis.

En ese proceso han perdurado desde tiempos muy lejanos las reglas de proporción como herramienta de extrapolación de las soluciones viables. Efectivamente, como veremos más adelante, tanto en situaciones en las que el peso propio no es relevante en las condiciones de resistencia, como en los problemas de estabilidad en los que no se cuenta con capacidad de resistencia en tracción, las condiciones de comprobación que aplicaríamos hoy día derivan en reglas de proporción: si una solución es viable, lo son igualmente soluciones escaladas en las que se mantengan las proporciones iniciales. Esto hace que en este tipo de construcción, las reglas de proporción hayan podido condensar la experiencia práctica, y hayan podido emplearse con éxito a lo largo del tiempo.

La aplicación del método científico al ámbito de la resistencia de los materiales y de la construcción tiene en su origen la contribución fundacional de Galileo 1638, en la que la reflexión sobre las relaciones entre las que él llamaba *resistencia absoluta* (frente a acciones axiales) y *resistencia relativa* (frente a acciones transversales) deriva en una teoría dimensionalmente correcta sobre la resistencia de las piezas flectadas. Basado en dicha teoría, Galileo demuestra la imposibilidad de la existencia de los

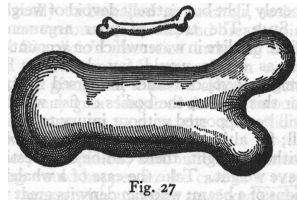


Figura 4.4: Huesos de persona y de gigante según Galileo

gigantes, a través de la conocida como *ley del cubo-cuadrado*: los efectos de los pesos crecen con el cubo de la alteración en las dimensiones lineales, mientras que las capacidades resistentes solo lo hacen con el cuadrado, por lo que el crecimiento relativo de los órganos necesarios para la supervivencia hace imposible un crecimiento proporcional de los humanos para alcanzar el tamaño atribuido a los gigantes (figura 4.4).

De este modo la crítica teórica de Galileo desacreditaría las reglas de proporción desde la perspectiva científica, abriendo un nuevo campo científico que sería pronto explorado ampliamente tanto desde enfoques teóricos como experimentales, a lo largo del resto del siglo XVII y de todo el siglo XVIII, en el que las herramientas de la nueva matemática desarrollada para la descripción de las leyes de la naturaleza, el *análisis*, se abrirán paso como vía de interpretación de la realidad.

Es significativo, sin embargo, que la desacreditación teórica de las reglas de proporción no las puso en desuso en la realidad: siguen empleándose a lo largo de los siglos XVII y XVIII, y solo las revoluciones social e industrial que se producen en el cambio

del siglo XVIII al XIX serán capaces de transformar el panorama lo suficiente como para dejarlas finalmente de lado. Pues, efectivamente, se producen con la revolución industrial cambios en los materiales disponibles, no siendo ya de aplicación las reglas antiguas a los nuevos materiales, junto a la aparición de todo un nuevo conjunto de tipos de edificación. Y por otro lado, las alineaciones políticas generadas en la revolución francesa hacen que el nuevo régimen deba formar rápidamente a los ingenieros necesarios (Cervera 1982), y esa formación, en la *École Polytechnique*, se basará en toda la base científica y experimental desarrollada a lo largo del siglo XVIII, dando lugar al uso generalizado del análisis como vía de validación de las propuestas constructivas, abandonando definitivamente las antiguas reglas.

Pero eso no implica que la estrategia de abordar los problemas de resistencia o estabilidad en clave geométrica sea incorrecta: lo que Galileo demostró es que las reglas de proporción no eran de aplicación en problemas en los que el peso propio es relevante, pero no que no sea posible establecer reglas geométricas de comprobación, entre las que las de proporción pueden ser parte de ellas en ciertos casos, aun no siendo aplicables en otros. De hecho el método de Galileo es en sí un método de análisis puramente geométrico, aun cuando su desarrollo posterior haya hecho perder la claridad geométrica inicial al introducir magnitudes y constantes físicas de dimensionalidad compleja. Veremos a continuación que es posible reescribir en clave geométrica las expresiones analíticas de comprobación que empleamos habitualmente.

#### 4.1.5. Método

Lo que se busca es reescribir las expresiones analíticas que empleamos en la validación de la estructura sobre la base de los parámetros geométricos que permiten caracterizar a las estructuras en cuestión: pues, efectivamente, en las etapas iniciales de diseño las decisiones geométricas son, no solo las iniciales, sino también las fundamentales desde la perspectiva de la compatibilidad de la estructura con el resto de los condicionantes del proyecto. De tal modo que las reglas geométricas que quepa establecer y que puedan aportar información sobre la eficacia y la eficiencia de la forma estructural resultarán de gran utilidad desde el inicio del proyecto.

Para ello es imprescindible restringir la variabilidad de los objetos considerados y, por tanto, recurrir a su distribución en clases o tipos que mantengan proximidad geométrica. Esto permitirá incluir en la formulación un conjunto de parámetros geométricos que resulte útil desde la perspectiva del proyecto en dicho tipo.

Para ello la estrategia más productiva, iniciada por Ricardo Aroca y desarrollada en el seno del Seminario de Diseño de Estructuras en la ETSAM, (ver figura 4.5) es la de establecer los tipos en base al uso propuesto pues, efectivamente, no solo aportamos una reducción en la variabilidad geométrica, sino que además esa variabilidad queda restringida por componentes del proyecto predefinidas e invariables, y completamente independientes de las decisiones de tipo estructural que nos puedan interesar.

Resumiendo, por tanto:

**Qué pretendemos:** clasificar y cualificar las estructuras a partir de pocos y potentes parámetros. (Cabe aquí señalar la diferencia entre *potencia* y *precisión*: un parámetro puede ser muy poco preciso en la forma en que detalla las decisiones adoptadas, pero muy potente en sus implicaciones: el *tamaño*, por ejemplo.)

**Parámetros Geométricos a usar:** serán preferentemente los empleados en las cruciales fases iniciales de proyecto, donde la definición es aún poco precisa.

**Término de comparación:** no nos interesa solo la seguridad o la rigidez (la eficacia): todas las estructuras a comparar debieran ser idénticas en prestaciones. Nos interesa la eficiencia, la capacidad de ser eficaz con recursos limitados.

**Medidas de la eficiencia:** cabría considerar el esfuerzo humano, el uso de recursos, la huella ambiental, el coste . . .

**Medida estructural de la eficiencia:** nos interesa una medida de la eficiencia comparada de la estructura a igualdad del resto de factores, computable en lo posible mediante las variables propias del análisis estructural.

De modo que:

1. Vamos a desarrollar y aprovechar conceptos de eficiencia,
2. . . . independientes de las cualidades de los materiales,
3. Haremos un recorrido comparado por tipos aprovechando dichos conceptos de eficiencia,
4. . . . para identificar cuales son los parámetros relevantes y sus efectos.

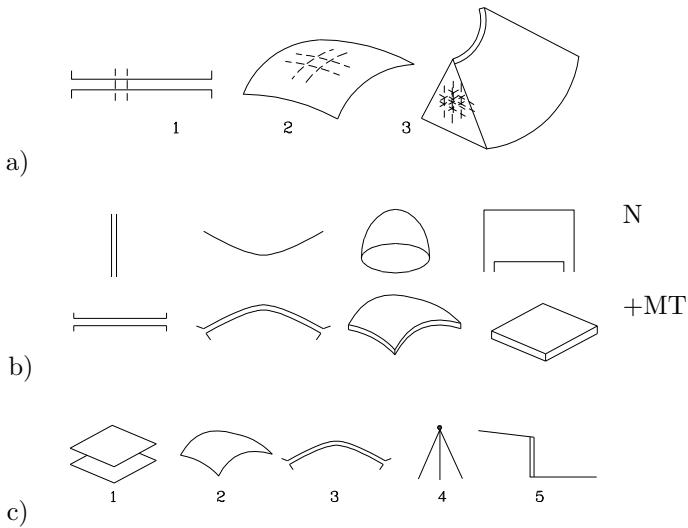


Figura 4.5: Tres estrategias de tipificación de las estructuras: a), por dimensionalidad; b), por tipo de esfuerzo y forma; c), por uso: 1: habitar planos paralelos —*estructuras de pisos*—, 2: cubrir espacios —*cubiertas*—, 3: facilitar el cruce de un punto a otro —*puentes*—, 4: fijar un punto en el espacio —*antenas*—, 5: contener masas —*depósitos, presas, o muros de contención*—

## 4.2. Geometría y eficiencia en estructuras adinteladas

Como primera reflexión, vamos a abordar desde una perspectiva geométrica el análisis de las estructuras del tipo c.1 de la figura 4.5, es decir del tipo más habitual en la construcción: las estructuras de pisos, en las que las cualidades geométricas básicas responden a la configuración de planos paralelos separados y relativamente poco espesos, configurados habitualmente por familias de *dinteles* apoyadas unas en otras y que, por tanto, trabajan básicamente en flexión.

En un caso sencillo de material y geometría, que veremos que es fácilmente generalizable, vamos a analizar sucesivamente la forma de plantear el análisis en formato geométrico, y los parámetros geométricos resultantes y su incidencia en los costes estructurales. Vamos posteriormente a generalizar ese primer análisis a materiales, geometrías o configuraciones más complejas, derivando de todo ello los parámetros que son relevantes para caracterizar la eficiencia de las soluciones.

### 4.2.1. Comprobaciones clásicas en estructuras adinteladas

Vamos a caracterizar el análisis de las estructuras adinteladas explorando la viga de un caso sencillo (ver figura 4.6) de forjado más viga: una solución en la que se repite indefinidamente un forjado sometido a una carga uniforme por metro cuadrado dada por  $q$ , y apoyado en vigas apoyadas de luz  $l$  que están se-

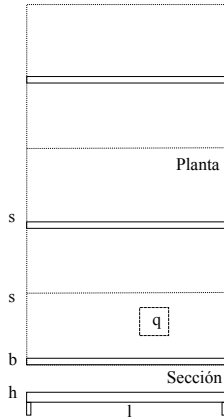


Figura 4.6: Solución adintelada repetida indefinidamente, de forjados sobre viga apoyada de sección rectangular

paradas uniformemente a distancias  $s$ . Dichas separaciones son igualmente la luz de carga dada la simetría en las condiciones de apoyo de los forjados.

#### 4.2.1.1. Formato clásico de las comprobaciones

Las comprobaciones clásicas de resistencia y rigidez para el conjunto de decisiones previas sobre tipo, material y geometría son sencillas, aunque tales decisiones implican la adopción sucesiva de valores concretos para la configuración general y parámetros particulares. Veamos estas decisiones.

**Tipo** Consideramos un forjado no excesivamente deformable para carga uniforme total  $q$ , sobre vigas apoyadas de sección rectangular. Esto establece la configuración general (tipo de organización y de sección, límites de deformación, etc.), además del valor de la carga total  $q$  en la que puede distinguirse su valor característico  $q_k$  habitual en las comprobaciones de estados límite de servicio, de su valor de cálculo  $q_d$  usado en las comprobaciones de estados límite últimos.

**Material** Será de comportamiento simétrico en tracción y compresión, estando definido por su resistencia de cálculo frente a tensiones derivadas de la flexión, normales  $f_{Md}$ , y tangenciales  $f_{Vd}$ , y su módulo de elasticidad  $E$ .

**Geometría** Esta implica ya decisiones de mayor detalle (o mayor *precisión*): la luz  $l$  y las separaciones  $s$  de las vigas, así como las dimensiones de su sección, canto  $\times$  ancho:  $h \times b$ .

Aunque las decisiones de tipo y material pueden cuestionarse en todo momento y tienen implicaciones evidentes en el comportamiento de la solución, lo habitual es que en el proceso de validación, y a los efectos de asegurar el cumplimiento de los requisitos estructurales, solo se modifiquen las características de la geometría.

Las comprobaciones habituales son las de resistencia frente a momento y cortante, y la de rigidez, o limitación de flecha. Las vemos en su formato normativo: efecto (de cálculo) menor o igual que capacidad (de cálculo) frente a dicho efecto.

Cortante:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd} \equiv \frac{q_d s l}{2} \leq \frac{2}{3} b h f_{Vd} \quad (4.1)$$

Momento:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \equiv \frac{q_d s l^2}{8} \leq \frac{b h^2}{6} f_{Md} \quad (4.2)$$

Flecha:

$$\delta \leq \delta_{\text{lim}} \equiv \frac{5}{384} \frac{q_k s l^4}{EI} \leq \frac{l}{400} \quad (4.3)$$

Las anteriores comprobaciones permiten validar la adecuación de las decisiones adoptadas o, en caso contrario, rechazarlas, aportando información útil para corregirlas.

#### 4.2.1.2. Formato geométrico de las comprobaciones

En su formato habitual, están considerados indistintamente todos los parámetros independientemente del tipo de parámetro y momento de decisión en que es adoptado. Y sin embargo hemos visto que las decisiones de carácter tipológico o de elección de material son habitualmente menos flexibles. De modo que resulta sensato reescribir las mismas ecuaciones de comprobación anterior adoptando un formato geométrico, en el que queden separadas unas de otras decisiones.

Si hacemos esto cambiando algunos términos de posición, llevando los geométricos al primer miembro y el resto al segundo, ahora esas mismas ecuaciones 4.1 a 4.3 se pueden reescribir en un formato diferente de gran interés.

Cortante:

$$\frac{sl}{bh} \leq \frac{4}{3} \frac{f_{Vd}}{q_d} \equiv \lambda_s \lambda_l \leq k_\tau \quad (4.4)$$

Momento:

$$\frac{sl^2}{bh^2} \leq \frac{8}{6} \frac{f_{Md}}{q_d} \equiv \lambda_s \lambda_l^2 \leq k_\sigma \quad (4.5)$$

Flecha:

$$\frac{sl^3}{bh^3} \leq \frac{384}{24000} \frac{E}{q_k} \equiv \lambda_s \lambda_l^3 \leq k_\delta \quad (4.6)$$

Hay que hacer notar que en las expresiones anteriores los cocientes entre los parámetros de carga y de resistencia, o de carga y módulo de elasticidad, son cocientes adimensionales al ser ambas magnitudes presiones, en términos dimensionales, de modo que los términos de comparación resultantes ( $k_\tau$ ,  $k_\sigma$ ,  $k_\delta$ ) son meros números derivados de las decisiones adoptadas sobre tipo y material, pero completamente independientes de los detalles de la geometría adoptada. Y por otro lado los cocientes  $s/b = \lambda_s$  (esbeltez en planta) y  $l/h = \lambda_l$  (esbeltez en alzado) son proporciones fácilmente identificables, y también adimensionales.

Vemos con ello que las comprobaciones habituales, establecidas en una forma que facilite tener en cuenta las cuestiones meramente geométricas, son en realidad meras comprobaciones de proporción: si se cumplen las proporciones dadas por las reglas 4.4 a 4.6, la solución será válida.

#### 4.2.1.3. Reglas de proporción y rangos de comprobación

No es solo que las comprobaciones 4.4 a 4.6 sean reglas de proporción, es que además permiten aportar una información

extremadamente interesante: los rangos de aplicación de cada una de dichas comprobaciones.

Es usual que para una solución estructural dada a un cierto problema deban considerarse varias comprobaciones independientes, de entre las cuales una de ellas resulta dominante: en el caso que nos ocupa, la viga podría estar dimensionada por deformación, aunque resulte sobreabundante en términos de resistencia. Es decir, para ciertos rangos de las soluciones, la expresión crítica para la validación puede ser una de entre todas las consideradas: si el canto es muy pequeño dominará la comprobación de rigidez.

Las expresiones anteriores permiten hacerse una idea cabal y mucho más precisa de dicha situación. Imaginemos una solución para la que la expresión dominante es la de flecha, por lo que realmente estamos usando el material por debajo de sus tensiones admisibles a fin de mantener controlada la curvatura, y resulta así una sección sobrada para resistir el momento. Si procedemos con soluciones que aumenten el canto de la sección manteniendo la misma flecha, las mismas curvaturas, (para igualdad de luz esto supondrá igualmente reducir la esbeltez  $\lambda_l$ ) esto supondrá un proceso de aumento de las tensiones empleadas, y por tanto con una reducción en el margen de sobrerresistencia para momento, hasta que llegamos a la *esbeltez límite*  $\lambda_l = \lambda_{l(\text{límite})}$  para la que la sección continúa en el límite de deformación, pero ha alcanzado el límite de resistencia en tensiones normales de flexión.

En esta condición se cumplen simultáneamente las dos ecuaciones 4.5 y 4.6 en estricta igualdad, de tal modo que dividiendo

la segunda por la primera tendremos

$$\lambda_{l(\text{límite})} = \frac{k_{\delta}}{k_{\sigma}} \quad (4.7)$$

En este caso particular, y recordando los valores resultantes para estas constantes en dichas expresiones podemos establecer

$$\lambda_{l(\text{límite})} = \frac{6 \cdot 384}{8 \cdot 24000} \frac{E}{\frac{f_{Md}}{q_d/q_k}} = \frac{3}{250} \frac{1}{\varepsilon_s} \quad (4.8)$$

al ser la deformación máxima en servicio  $\varepsilon_s = (f_{Md}/\gamma_d)/E$ .

En esa situación es habitual que la sección resulte sobreabundante para cortante. Si seguimos aumentando el canto (reduciendo la esbeltez), siempre manteniendo la sección en el límite admisible para momento, podemos reducir el ancho más deprisa (el módulo resistente depende del canto al cuadrado y linealmente del ancho) lo que resulta en una reducción del área de la sección y por tanto del coste. Ahora bien, como es ese área la clave en la resistencia a cortante, esta reducción implica una reducción en el margen de resistencia para cortante, hasta que llegamos a un punto semejante al anterior, correspondiente a lo que llamamos *esbeltez base*, para la que la sección está igualmente en el límite para ambas comprobaciones. La llamamos *esbeltez base* pues, como veremos, no tiene sentido una reducción aún mayor: como el área de la sección debe mantenerse para mantener la resistencia a cortante, a partir de ese canto no hay ya reducción posible en el coste de la solución. Estando en situación de estricta igualdad para las dos ecuaciones 4.4 y 4.5,

podemos dividir la segunda por la primera obteniendo

$$\lambda_{l(\text{base})} = \frac{k_\sigma}{k_\tau} \quad (4.9)$$

Tenemos así referencias para los rangos de aplicación de las comprobaciones, que podemos completar en el extremo de esbelteces altas con la siguiente reflexión.

Si aumentamos la esbeltez manteniéndonos en las condiciones de comprobación de rigidez, ese aumento exige una reducción en la esbeltez en planta  $\lambda_s$  (un aumento del ancho  $b$  si no modificamos la separación  $s$  entre vigas) reducción que tiene igualmente un límite, correspondiente al caso en el que el ancho de la viga,  $b$ , ocupa todo el espacio disponible,  $s$ . En ese punto  $\lambda_{s(\text{min})} = 1$  y por tanto alcanzamos un valor tope para la esbeltez de lo que ahora será una losa:

$$\lambda_{l(\text{tope})} = \sqrt[3]{k_\delta} \quad (4.10)$$

De tal modo que cabe establecer el conjunto de rangos para la esbeltez de la pieza que determinan cual es la expresión dominante en las comprobaciones:

$$\begin{aligned} T : & \quad \lambda_l \leq \lambda_{l(\text{base})} = k_\sigma/k_\tau \\ M : & \quad \lambda_{l(\text{base})} \leq \lambda_l \leq \lambda_{l(\text{límite})} = k_\delta/k_\sigma \\ \delta : & \quad \lambda_{l(\text{límite})} \leq \lambda_l \leq \lambda_{l(\text{tope})} = \sqrt[3]{k_\delta} \end{aligned} \quad (4.11)$$

En ocasiones sucede que la comprobación de momento no resulta de aplicación en ninguna circunstancia, al quedar cubierta la capacidad necesaria, bien por las necesidades de resistencia a

cortante, bien por las necesidades de inercia requeridas para limitar la flecha. Es este a menudo el caso de las piezas de madera aserrada en situación doblemente apoyada, en donde se aúnan las bajas resistencias frente a la tensión tangencial junto a la apreciable deformabilidad derivada de las condiciones de apoyo. En este caso el límite está entre los rangos de aplicación de las comprobaciones frente a cortante o de rigidez. El límite entre ambas es, en ese caso:

$$\text{límite}(T \leftrightarrow \delta) = \lambda_{l(T\delta)} = \sqrt{k_\delta/k_\tau} \quad (4.12)$$

#### 4.2.1.4. Costes unitarios: influencia de los parámetros de proporción

Hemos visto el valor explicativo de las expresiones de comprobación cuando se establecen en el formato geométrico propuesto. Pero ese valor explicativo va más allá todavía. Para ello consideramos ahora los costes unitarios de cualquiera de las soluciones, es decir, el coste de la solución adoptada por cada metro cuadrado de superficie soportada.

El coste total de una de las vigas es proporcional a su volumen  $V = l \times h \times b$ , pero nos interesa el unitario por cada unidad de la superficie soportada total por dicha viga, que es  $l \times s$ . Nos interesa  $C_u$ :

$$C_u \doteq V_u = \frac{h b}{l s} = \frac{l}{\lambda_l \lambda_s} \quad (4.13)$$

Si ahora contrastamos con las expresiones de 4.11, considerando que el dimensionado se realiza en el límite, es decir para las condiciones de estricta igualdad en la comprobación,

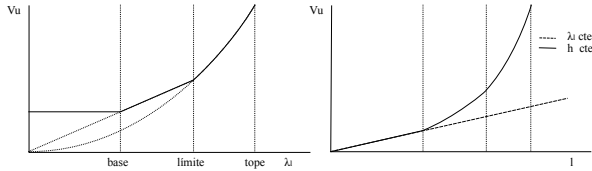


Figura 4.7: Costes unitarios para soluciones adinteladas, dependiendo de las leyes de variación de luces y cantos: **a**: esbeltez variable y luz constante, **b**: luz variable y canto variable para esbeltez constante (trazos) o canto constante (línea continua).

resultarán las leyes de coste para cada uno de los rangos en la expresión dominante:

$$\begin{aligned}
 T : \quad V_u &= \frac{l}{\lambda_l \lambda_s} = \frac{l}{k_\tau} \\
 M : \quad V_u &= \frac{l \lambda_l}{\lambda_l^2 \lambda_s} = \frac{l \lambda_l}{k_\sigma} \\
 \delta : \quad V_u &= \frac{l \lambda_l^2}{\lambda_l^3 \lambda_s} = \frac{l \lambda_l^2}{k_\delta}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Es decir, si la expresión dominante es el cortante, dado que la resistencia depende del área de la sección rectangular, independientemente de cómo se resuelva esta, el coste unitario depende solo de la luz. Sin embargo para las condiciones en las que el momento es dominante, el coste depende linealmente de la luz y la esbeltez. Finalmente si es la rigidez la condición dominante, el coste depende linealmente de la luz y cuadráticamente

de la esbeltez. Esto puede reflejarse gráficamente, ver figura 4.7, situando el rango de volúmenes unitarios requeridos, dependiendo de las condiciones de esbeltez con que se establezcan las decisiones, entre su límite mínimo, para resistir el cortante con un canto dado por la esbeltez base y el ancho requerido en consecuencia, y un límite máximo, establecido para resolver el problema con la losa de menor canto posible, definida en ese caso por los requisitos de deformación, con la condición  $\lambda_{l(\text{tope})} = l/h_{\text{losa mínima}} = \sqrt[3]{k_{\delta}}$ .

$$\frac{l}{k_{\tau}} \leq V_u \leq \frac{l}{\lambda_{l(\text{tope})}} = h_{\text{losa mínima}} \quad (4.15)$$

#### 4.2.2. Algunas variantes en las comprobaciones clásicas

Cabría reprochar al sencillo análisis anterior precisamente eso: su sencillez, en tanto que se ha considerado el caso más elemental, de viga de sección rectangular y doblemente apoyada.

Es evidente que otras condiciones de apoyo son posibles, lo que exclusivamente afectaría a los números implicados en las comprobaciones: los factores 1/8 en el cálculo del momento efectivo, o de 5/384 en el cálculo de la flecha, pero esto no afectaría más que a los valores concretos resultantes para las constantes de comprobación  $k_{\tau}$ ,  $k_{\sigma}$ , o  $k_{\delta}$ , y a sus relaciones mutuas, sin afectar en ninguna forma al resto de reflexiones sobre la influencia de las condiciones de proporción en las comprobaciones o el coste.

Resulta, sin embargo, que cabe extender tales reproches a

otras variantes más relevantes en los diseños de las vigas: la sección puede no ser rectangular, o incluso puede tratarse de una condición de proyecto más compleja, como sería la de proyectar en un material compuesto.

Vamos por ello a mostrar como cabe generalizar estas reflexiones o parte de ellas a través del estudio del caso de las soluciones adinteladas en hormigón armado, o de su adaptación a las series de perfiles laminados en acero.

#### 4.2.2.1. El caso del hormigón armado

Vamos a considerar en la que sigue las tres comprobaciones básicas: las dos de resistencia a cortante y momento, y la de rigidez suficiente, o de límite de deformación. En el caso de las soluciones en hormigón armado tenemos las dos componentes del proyecto: la sección  $h \times b$  de hormigón, que incluye tanto la parte correspondiente a la cabeza comprimida necesaria, que varía a lo largo de la pieza, como la parte requerida para separar esta cabeza de la armadura traccionada de acero, también variable, y que a su vez contribuye a la resistencia a cortadura junto con la contribución de la armadura de cortante. Ambas componentes son elementos que contribuyen en la rigidez de la pieza en la que, para mayor complicación, es preciso la consideración de la situación fisurada variable, nuevamente a lo largo de la pieza, en una variación que también depende de los criterios con los que se haya definido la cuantía de armado.

Todas estas condiciones pueden hacer pensar en la imposibilidad de aplicar reglas tan sencillas como las descritas en los apartados precedentes a las piezas de un solo material. Pe-

ro vamos a ver que las condiciones de proyecto habituales en hormigón armado permiten reducir esta complejidad en buena medida.

Para ello vamos a analizar la geometría de la sección de hormigón,  $h \times b$ , su relación con la armadura de acero, y las condiciones de comprobación a emplear, buscando en estas la sección mínima adecuada a cada problema.

**Cortante.** La resistencia a cortante requiere dos comprobaciones:

- la de la capacidad de la armadura traccionada de acero, que antes del código estructural de 2021, podía considerarse trabajando en colaboración con la capacidad tangencial del hormigón, colaboración que se ignora a partir de dicho código.
- la de la capacidad de la sección para alojar la biela comprimida en el hormigón

La primera comprobación no tiene implicaciones relativas a la geometría de la sección rectangular: para una misma inclinación de la armadura, más canto puede suponer simultáneamente más longitud de cercos, con mayor separación, lo que mantiene el volumen de armadura requerido. Es por ello la segunda comprobación la que puede delimitar la sección necesaria.

El ancho de la biela comprimida será el que defina el máximo de la capacidad resistente en cortante de la sección

$$V_{Rd,c1} = f_{1cd} b_0 d \frac{\cot \alpha + \cot \theta}{1 + \cot \theta^2} \quad (4.16)$$

**Momento.** Consideramos que la sección de la viga se establece para asegurar capacidad resistente adecuada a lo que llamamos *momento de proyecto* o *momento de diseño*:  $M_D$ . Ese momento es un valor de referencia para la pieza completa y representa un valor probable para sus secciones, correspondiente a la cuantía más habitual de la armadura en la pieza, excluyendo, por tanto, los valores máximos que pueden darse en los picos de momento negativos para los que puede requerirse puntualmente un mayor armado en tracción o incluso armadura comprimida. Este momento es el isostático en los casos de piezas biapoyadas, o un valor entre la mitad y el 60% del isostático en los casos de piezas con continuidad en sus dos extremos.

Frente a ese momento (*efecto* de las acciones), la *capacidad* resistente se establece adoptando una decisión sobre la profundidad comprimida de la cabeza de hormigón, que será una fracción  $\gamma$  del canto útil  $d$ .  $\gamma$  es una cuantía mecánica, pues la compresión resultante para dicha profundidad sería  $\gamma b d f_{cd}$ . Por razones de eficacia,  $\gamma$  no puede superar un valor de 0,4 o 0,45 y, considerando la necesidad de capacidad adicional local en las puntas de negativos, es usual emplear valores de 0,35. En todo caso supone una decisión de proyecto que cabe considerar como relativamente independiente de las demás decisiones.

Establecida esta, resulta la capacidad resistente a momento que usaremos en la comprobación

$$M_{Rd} = f_{cd} b \gamma d \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) d \quad (4.17)$$

**Flecha.** Considerando las reflexiones del apéndice B podemos considerar que una buena aproximación a la rigidez de la pieza

fisurada, la rigidez equivalente adecuada para la aproximación de su deformación es

$$EI \approx K \approx 0,5 E_s A_s h^2, \quad \text{con } A_s = \gamma b d \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad (4.18)$$

de tal modo que la comprobación del límite de deformación (usando 1/400 de la luz) adopta la forma

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{\alpha}{384} \frac{q_k s l^3}{K} \approx \frac{\alpha}{384} \frac{q_k s l^3}{0,5 E_s A_s h^2} \leq \frac{1}{400} \quad (4.19)$$

expresión en la que  $\alpha$ , entre 1 y 5, dependerá de las condiciones de extremo de la pieza.

Cabe deducir el área de armadura típica empleada para el momento de cálculo usado como momento de proyecto:

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{z f_{yd}} = \frac{\beta q_d s l^2}{8} \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) d f_{yd}} \quad (4.20)$$

y expresar por ello la comprobación de deformación en la forma:

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{\alpha}{\beta} \frac{8}{192} \frac{q_k f_{yd} l \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) d}{q_d E_s h^2} \leq \frac{1}{400} \quad (4.21)$$

donde ahora,  $\beta$  es la fracción del momento isostático usada para definir el momento de proyecto.

En resumen resulta

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{3}{100} \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon_s \lambda \leq \frac{1}{400} \quad (4.22)$$

por ser  $f_{yd}q_k/q_d = f_s$ , en servicio,  $d \approx 0,8h$ , y empleando valores de  $\gamma \in [0,25; 0,45]$ , y valor típico  $\gamma \approx 0,35$ , lo que nos lleva a la expresión:

$$\lambda_l \leq \frac{1}{12} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\varepsilon_s} = \lambda_{l(\text{límite})} \quad (4.23)$$

Vemos por tanto que

- la capacidad resistente de la expresión 4.16 es dimensionalmente semejante a la de 4.1 pues depende del área de la sección
- la capacidad resistente de la expresión 4.17 es dimensionalmente semejante a la de 4.2 pues depende del producto del área de la sección por el canto
- la expresión 4.19 es dimensionalmente semejante a la 4.3: el denominador es una rigidez, aunque medida desde el acero, si bien cabe su traslado a la sección de hormigón necesaria, tal como se hace en 4.20 y 4.21,

Por tanto, al reformar las expresiones de comprobación al que hemos llamado formato geométrico resultarán formas idénticas a las 4.4 a 4.6, y donde solo van a variar los valores concretos que quepa asignar a las constantes de comprobación geométrica  $k_\tau$ ,  $k_\sigma$  y  $k_\delta$ .

Vemos finalmente que es posible establecer la esbeltez límite que delimita los rangos de comprobación para momento o flecha, ecuación 4.23, lo que supone una herramienta que facilita la obtención de  $k_\delta$  a partir de  $k_\sigma$ , si recordamos la ecuación 4.7.

#### 4.2.2.2. El caso del acero laminado

Este caso resulta menos evidente pues las decisiones de sección quedan reducidas a la elección de la serie de perfiles y a la determinación del canto capaz de cumplir los requisitos dentro de la serie elegida, si bien cabría un cierto paralelismo si consideramos estrategias de peor eficiencia como la de situar colaborando varios perfiles en paralelo.

La primera de las decisiones fija las relaciones geométricas entre los diferentes parámetros (ancho, canto, espesores de alma y ala y radios de acuerdo) de modo que a partir de ahí no resultan independientes las elecciones de canto y ancho, dimensiones que quedan ligadas en la serie.

Pese a ello es posible ver que parte de las reflexiones siguen siendo de utilidad. Para ello cabe considerar que, aunque las cualidades geométricas en cada serie son discretas, sus relaciones pueden aproximarse con provecho. En particular las comprobaciones de resistencia a flexión y de rigidez suficiente siguen manteniendo un límite en el rango de aplicabilidad fácil de delimitar: si para una esbeltez particular ambas comprobaciones se cumplen estrictamente, dicha esbeltez es la esbeltez límite. Dichas comprobaciones son

$$M_{Ed} = \beta \frac{q_d s l^2}{8} \leq W_{x,pl} f_{yd} = M_{Rd}$$

$$\delta = \frac{\alpha q_k s l^4}{384 E I_x} \leq \frac{l}{400}$$

y siendo  $W_{x,pl} = (W_{x,pl}/W_{x,el}) \times (I_x/(h/2))$ , pueden reescribirse

en la forma

$$\beta \frac{q_d s l^3}{8} \frac{h/2}{l} \leq \frac{W_{x,pl}}{W_{x,el}} I_x f_{yd}$$

$$\frac{\alpha q_k s l^3}{384} \leq EI_x \frac{1}{400}$$

de modo que en ese límite, para el que tendríamos  $l/h = \lambda_{l(\text{límite})}$  y las condiciones de igualdad en ambas expresiones, podemos dividir la segunda ecuación por la primera y obtenemos

$$\lambda_{l(\text{límite})} = \frac{3}{50} \frac{W_{x,el}}{W_{x,pl}} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\varepsilon_s} \quad (4.24)$$

La expresión es semejante a la ya establecida para el hormigón armado, ver 4.23. Para esbelteces menores, la expresión dominante será la de resistencia mientras que si la esbeltez es mayor dominará la comprobación de rigidez.

### 4.2.3. Los problemas derivados del peso propio

Hasta aquí no se ha considerado aún el efecto del peso propio en las comprobaciones, asumiendo, como es relativamente usual, que no es más que una fracción pequeña de la carga total, en la que se incluye directamente a través de un valor aproximado en exceso.

Pero resulta claro que, si el propio peso es parte relevante del problema, esta aproximación no es suficiente y por ello, en los apartados siguientes, vamos a abordar su formulación.

Una primera reflexión nos obliga a revisar levemente las expresiones 4.4 a 4.6. Pues, efectivamente, la carga ahora ya no es solamente la útil por unidad de superficie soportada ( $q_k$  o  $q_d$  según consideremos su valor característico o de cálculo) sino que será necesario añadir la derivada del peso. Para la tipología allí adoptada la repercusión por unidad de superficie sería el cociente entre el peso total de la viga  $lbh\rho$  y el área soportada  $ls$ , donde debe emplearse el peso específico del material en su valor característico  $\rho_k$  o de cálculo  $\rho_d$  según convenga.

Es decir, en vez de  $q_d$  tendremos  $q_d + \frac{lbh\rho_d}{ls} = q_d \left(1 + \frac{\rho_d l}{q_d \lambda_l \lambda_s}\right)$ . Esto es equivalente a usar en vez de  $q_d$  un valor de  $q_d$  ampliado:  $\mu q_d$  siendo  $\mu = 1 + \frac{\rho_d l}{q_d \lambda_l \lambda_s}$  de tal modo que las expresiones geométricas 4.4 a 4.6 se transforman a las siguientes:

$$T : \quad \frac{sl}{bh} \leq \frac{4}{3} \frac{fV_d}{\mu q_d} \equiv \lambda_s \lambda_l \leq \frac{k_\tau}{\mu} \quad (4.25)$$

$$M : \quad \frac{sl^2}{bh^2} \leq \frac{8}{6} \frac{fM_d}{\mu q_d} \equiv \lambda_s \lambda_l^2 \leq \frac{k_\sigma}{\mu} \quad (4.26)$$

$$\delta : \quad \frac{sl^3}{bh^3} \leq \frac{384}{24000} \frac{E}{\mu_k q_k} \equiv \lambda_s \lambda_l^3 \leq \frac{k_\delta}{\mu_k} \quad (4.27)$$

Y del mismo modo los límites que resultan para los rangos de las expresiones dominantes son ahora

$$T \leftrightarrow M : \lambda_{l(\text{base})} = k_\sigma / k_\tau \quad (4.28)$$

$$M \leftrightarrow \delta : \lambda_{l(\text{límite})} = \frac{k_\delta \mu}{k_\sigma \mu_k} \quad (4.29)$$

$$\text{tope} : \lambda_{l(\text{tope})} = \sqrt[3]{k_\delta / \mu_k} \quad (4.30)$$

Se ve, pues, que hay una modificación en los valores de las constantes de comprobación requeridas aunque seguimos estando en comprobaciones de proporción y donde, además, los rangos dominantes para las expresiones dominantes siguen siendo fáciles de determinar, siendo algunos de ellos idénticos o muy próximos a los ya obtenidos sin la consideración de los efectos del peso propio.

Pero, en tanto que ahora las expresiones son dependientes del término  $\mu$  que expresa la *ampliación de carga* desde la útil  $q$  a la total  $\mu q$ , que incluye el propio peso, ¿como podemos hacernos una idea de este término de ampliación de la carga?

Para ello iniciamos la reflexión llenando al caso extremo: el caso en el que la pieza es capaz de resistir solo su propio peso. Posteriormente analizaremos qué sucede cuando la pieza tiene margen de resistencia para resistir cargas útiles adicionales a su peso.

#### 4.2.3.1. Cuando todo es peso propio: el tamaño límite

Si la carga es solo el propio peso, tenemos que  $\mu q = \frac{\rho l}{\lambda_s \lambda_l}$  y por lo tanto las expresiones 4.25 a 4.27 pueden reescribirse en la forma

$$T : \frac{sl}{bh} \leq \frac{4}{3} \frac{f_{Vd} \lambda_s \lambda_l}{\rho_d l} \equiv l \leq \frac{4}{3} \frac{f_{Vd}}{\rho_d} = L_\tau = k_\tau \frac{q_d}{\rho_d} \quad (4.31)$$

$$M : \frac{sl^2}{bh^2} \leq \frac{8}{6} \frac{f_{Md} \lambda_s \lambda_l}{\rho_d l} \equiv l \leq \frac{8}{6 \lambda_l} \frac{f_{Md}}{\rho_d} = L_\sigma(\lambda_l) \quad (4.32)$$

$$\delta : \frac{sl^3}{bh^3} \leq \frac{384}{24000} \frac{E \lambda_s \lambda_l}{\rho_k l} \equiv l \leq \frac{0,016}{\lambda_l^2} \frac{E}{\rho_k} = L_\delta(\lambda_l^2) \quad (4.33)$$

Es decir, resultan ahora comprobaciones de tamaño: si la luz  $l$  es menor o igual que un cierto tamaño máximo  $L$ , que en los casos de la comprobación de flexión o de flecha depende lineal o cuadráticamente de la esbeltez, entonces la estructura es viable, soportará su propio peso. Tamaños mayores resultan inviables. Cabe hacer notar ahora que la dimensionalidad de las expresiones la da el cociente entre una presión (la tensión resistida o el módulo de elasticidad) y un peso específico, cociente del que resulta una longitud. En particular, para la expresión central, la de resistencia a las tensiones normales derivadas de las flexiones, dicha magnitud,  $f_M/\rho$  o también  $\sigma/\rho$  es una magnitud que denominamos *alcance*,  $\mathcal{A}$ , y es equivalente a la longitud de un cable de sección constante arbitraria  $A$ , colgando y en el límite de resistencia a su propio peso: pues en dicho límite la expresión  $\sigma A = \rho A l$  pasa a ser  $\sigma_{\text{limm}} A = \rho A \mathcal{A}$ , de donde  $\mathcal{A} = \sigma_{\text{limm}}/\rho$ .

Se trata por tanto, nuevamente, de comprobaciones claramente geométricas, aunque ahora son de tamaño, dependientes de la esbeltez de la pieza y de las diversas alternativas del alcance del material.

#### 4.2.3.2. La inclusión del efecto del peso propio en las comprobaciones

Resulta ahora sencillo determinar el factor de ampliación de carga  $\mu$  requerido para incorporar el efecto propio en las comprobaciones. Efectivamente, en cada una de las comprobaciones 4.31 a 4.33 resulta que si  $l$  está en el límite de tamaño, se agota por el peso propio el margen en la *presión* de comparación empleada en la expresión, de tal modo que una reducción en esa

presión de comparación implica una reducción en el tamaño y, por lo mismo, una reducción en el tamaño supone una reducción en la presión a ser resistida debida al efecto del propio peso.

Considerando el caso de la comprobación de flexión, 4.32, la fracción de la capacidad resistente  $f = f_{Md}$  empleada para resistir el propio peso,  $f_p/f$ , resulta por ello ser proporcional a la fracción que representa el tamaño de la pieza en relación a su tamaño máximo,  $l/L$ . Es menor, pues, que la capacidad total  $f$ , quedando por ello un margen de tensiones posibles  $f_q = f - f_p$  disponibles para resistir las cargas útiles. Y por lo tanto, dada la proporcionalidad entre carga y tensión

$$\frac{l}{L} = \frac{f_p}{f} = \frac{f - f_q}{f} = 1 - \frac{f_q}{f} = 1 - \frac{1}{\mu} \quad (4.34)$$

$$\mu = \frac{1}{1 - l/L} \quad (4.35)$$

En esta expresión cabe identificar el cociente  $l/L$  como el parámetro clave para la influencia del propio peso siendo por ello útil dotarle de una denominación propia: la *talla*.

La última expresión para  $\mu$  permite ahora emplear las formas de comprobación 4.25 a 4.27 y los límites a sus rangos de aplicación, 4.28 a 4.30.

#### 4.2.4. Parámetros básicos de la forma

Si repasamos ahora las expresiones de comprobación, tanto para carga externa (las 4.25, 4.26 y 4.27) como para solo peso propio (4.31, 4.32 y 4.33), considerando además la correspondiente al factor de ampliación de carga (4.35), así como las

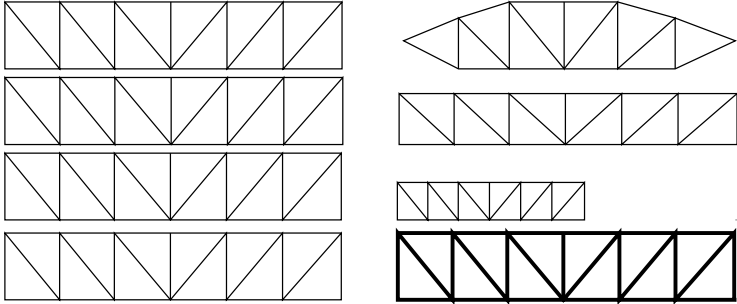


Figura 4.8: Parámetros de la forma: esquema, proporción, tamaño y dimensionado (o grueso). En cada fila solo cambia uno de esos parámetros.

reflexiones realizadas sobre rangos de aplicación, costes, etc., podemos identificar los parámetros básicos de la forma desde la perspectiva estructural.

Si los consideramos por orden de su importancia (su papel en las expresiones, etc. . .) tenemos la lista siguiente, que se esquematiza en la figura 4.8:

**esquema:** caracterizado por los valores de  $k_\tau$ ,  $k_\sigma$ ,  $k_\delta$ , que forman parte independiente de todas las expresiones.

**proporción:** definido por  $\lambda_l$ , que apareciendo sistemáticamente es también determinante en las expresiones de tamaño y por tanto en el impacto del propio peso.

**tamaño:**  $l$ , (o tamaño relativo o talla,  $l/L$ ), responsable del efecto del peso propio en la carga total.

**dimensionado:** caracterizado por  $\lambda_s$ , que solo aparece en las expresiones de comprobación de resistencia y rigidez, pero sin influencia alguna en las de tamaño, por lo que no interviene en la caracterización del efecto del propio peso.

En apartados posteriores vamos a comprobar que cabe generalizar esta caracterización. Pero para ello necesitamos vías más generales para la definición de las formas y sus costes.

### 4.3. Cantidad de estructura y eficiencia estructural

En este apartado establecemos y exploramos la aplicación del concepto de *cantidad de estructura* o *volumen de tensiones*, concepto que va a resultar de extrema utilidad para generalizar las ideas ya avanzadas en el estudio de las estructuras adinteladas.

Para esta generalización necesitaremos poder abordar formas arbitrarias para las estructuras analizadas y ponerlas en relación con alguna magnitud que sea capaz de medir eficazmente el consumo o coste invertido en materializar tales estructuras.

#### 4.3.1. Cantidad de estructura

En la medida de la inversión en recursos o material necesario para poner en pie una estructura se han manejado a lo largo de la historia muchas magnitudes, como el peso, el volumen o el coste monetario. En la actualidad es corriente considerar por razones de sostenibilidad la emisiones de gases de efecto invernadero,

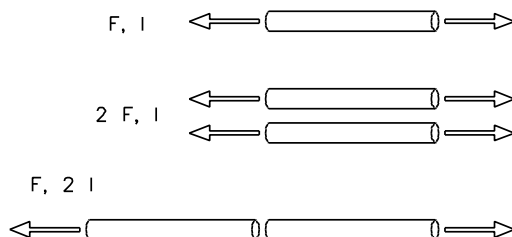


Figura 4.9: Concepto de cantidad de estructura: los problemas de ambas filas inferiores necesitan doble inversión que la requerida para el de la primera fila.

o las posibilidades y coste de reincorporación de los productos empleados a un ciclo cerrado en el uso de materiales. Todas y cada una de estas magnitudes tienen ventajas e inconvenientes, pero todas ellas adolecen de un problema inicial fundamental que es la necesidad de considerar algún material concreto para su determinación. Sin ese material, son magnitudes que no pueden ser computadas. Resulta por ello de interés considerar alguna magnitud alternativa que solo considere las componentes más elementales de los problemas estructurales, a saber, los que tratan de generar formas capaces de materializar las condiciones de equilibrio de fuerzas a distancia, cargas y reacciones.

La figura 4.9 muestra tres de esos problemas, y ejemplifica

que las soluciones estructurales deben emplear recursos tanto por las magnitudes de las fuerzas a equilibrar como por las distancias entre estas. De tal modo que una magnitud capaz de medir soluciones a los problemas estructurales debiera estar ligada exclusivamente a esas dos dimensiones. La figura recuerda la definición que Descartes manejaba de *fuerza* como base de su concepción de la estática —concepto equivalente a nuestro actual concepto de trabajo— al afirmar que *la misma fuerza que puede levantar un peso, por ejemplo de 100 libras a una altura de dos pies puede también levantar uno de doscientas libras a la altura de un pie*. (Descartes 1638a y Descartes 1638c, citadas en una interesantísima reflexión por Duhem 1905–06, tomo 1, pp. 339 y ss. aunque dicha formulación por Descartes es aún anterior: Descartes 1637 y Descartes 1638b, tal como señala Roux 2004. La obra de Descartes, incluyendo su correspondencia, está disponible en Tannery 1897..1913.) No prosperó su definición, que hubiese dado pie a una visión de la mecánica basada en el trabajo.

Para acotar el problema consideramos inicialmente estructuras constituídas por barras sometidas a esfuerzos axiales y definimos en estas la *cantidad de estructura* como la integral del valor absoluto de los esfuerzos en las barras por las distancias correspondientes:

$$W = \int |N| dl \quad (4.36)$$

Es interesante la comparación de esta magnitud con otras

muy habituales en los problemas de optimación de estructuras:

$$\text{Volumen material: } \int dV = \int Adl = \int |N/\sigma| dl \quad (4.37)$$

$$\text{Volumen de tensiones: } \int |\sigma| dV = \int |\sigma| Adl = \int |N| dl \quad (4.38)$$

$$\text{Energía de deformación: } \sim \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int \varepsilon \sigma Adl = \int |N\varepsilon| dl \quad (4.39)$$

En la última expresión, de energía o volumen de deformación<sup>1</sup> en la que, para facilitar la comparación, hemos ignorado el factor 1/2 del caso elástico, se considera el hecho de que tensiones y deformaciones tienen igual signo en los estados uniaxiales. Es interesante igualmente ver que la cualidad del material empleada en esta expresión es una de las dos cualidades geométricas claves del material, la deformación unitaria máxima en servicio, cualidad que ya hemos identificado como clave en los problemas de estabilidad, ver las reflexiones asociadas a las expresiones 3.8 y 3.9.

Puede verse que la cantidad de estructura, o volumen de tensiones, es una magnitud no dependiente del material, y que se sitúa en una situación intermedia entre dos de las magnitudes más habituales en optimación de estructuras: el volumen de la estructura —o el correspondiente peso— o su energía de deformación. En la primera los esfuerzos están ponderados por el inverso de las tensiones, mientras que en la segunda están ponderados por las deformaciones —proporcionales a las tensiones—

---

1. *compliance* en la literatura anglosajona.

En ambos casos esa ponderación requiere la adopción de un material de referencia, lo que no es el caso en el volumen de tensiones, al resultar directamente de los esfuerzos de las barras y sus longitudes.

Cabe añadir una consideración de gran interés: en el caso de estar tratando con estructuras dimensionadas de tal forma que en todas sus secciones el material esté trabajando a su máxima tensión, las tres magnitudes resultan en valores proporcionales: si  $\sigma$  o  $\varepsilon$  adoptan el mismo valor en todas las secciones, dichos valores pasan a ser el factor de proporcionalidad que liga una magnitud con otra.

Todo lo anterior forma parte de las razones que, como veremos, hacen de la cantidad de estructura una magnitud clave en la medida del consumo estructural y que resulta extremadamente productiva.

Vamos por ello a establecer un marco preciso de definiciones y de relaciones para el trabajo con dicha magnitud.

**Definición 4.1 (Problema de Maxwell)** <sup>2</sup> *Se define como el problema de adoptar una estructura para un sistema de fuerzas (externo a esta) en equilibrio, y fijas en posición, dirección y magnitud.*

Las fuerzas están en equilibrio —de fuerzas y momentos— en el espacio, pero ese equilibrio requiere una estructura para su materialización. Dicho conjunto de fuerzas incluyen tanto acciones como reacciones, sin adoptar distinción entre unas y otras.

---

2. Denominación elegida en honor de la clara formulación establecida en Maxwell 1870, pág. 13 y ss.

**Definición 4.2 (Estructura de Maxwell)** *Es una estructura que materializa el equilibrio de las fuerzas de un problema de Maxwell mediante barras sometidas a esfuerzo uniaxial, es decir, traccionadas o comprimidas.*

**Definición 4.3 (Estructura estricta)** *Es una estructura de Maxwell en la que todas las barras están sometidas a una misma tensión, ya sea en tracción o en compresión, tensión que corresponderá a la máxima admisible para el material considerado.*

Por el momento vamos a considerar materiales para los que una y otra tensión máxima son iguales en su valor absoluto, si bien más adelante veremos materiales no simétricos en su comportamiento frente a ambos signos de la tensión.

En tales condiciones podemos ya reiterar la definición establecida en la expresión [4.36](#).

**Definición 4.4 (Cantidad de estructura)** *Es la integral del valor absoluto de las tensiones extendida a todo el volumen de una estructura constituida por piezas trabajando uniaxialmente. Equivalente a la suma, para todas las barras que constituyen la estructura, del producto del valor absoluto del esfuerzo en cada barra por la longitud de esta.*

#### 4.3.1.1. Relación con otras magnitudes

Dado que  $dV = A ds$ , podemos relacionar, como hemos visto, la cantidad de estructura con el volumen y el peso de esta:

$$V = \int A ds = \int \frac{|N|}{|\sigma_s|} ds = \frac{W}{\overline{|\sigma_s|}} \geq \frac{W}{\sigma} \quad (4.40)$$

$$W = \int |N| ds = \int A |\sigma_s| ds = \int |\sigma_s| dV \leq \mathcal{W} = \sigma V \quad (4.41)$$

$$P = \rho V = \rho \frac{\mathcal{W}}{\sigma} = \frac{\mathcal{W}}{\sigma/\rho} \quad (4.42)$$

expresiones en las que  $\sigma_s$  representan la tensión de trabajo en cada posición  $s$ , y  $|\overline{\sigma_s}|$  la media ponderada en el volumen de su valor absoluto, siendo  $\sigma$  la tensión de comprobación del material considerado, y  $\rho$  su peso específico.

En las expresiones precedentes vemos, pues, las relaciones entre las magnitudes

$P$  Peso de la estructura (en unidades de fuerza)

$V$  Volumen de la estructura (en unidades de volumen)

$\mathcal{W}$  Volumen o capacidad estructural (en unidades de trabajo)

$W$  Cantidad de estructura o volumen de tensiones (en unidades de trabajo)

En la expresión 4.42 aparece la segunda cualidad geométrica clave de los materiales, el cociente  $\sigma/\rho$  que, como ya hemos visto en el apartado 4.2.3.1, es una longitud a la que denominamos *alcance* del material y que resulta clave en los problemas de peso propio, tal como vimos allí y como generalizaremos en el apartado 4.3.4.

### 4.3.1.2. Componentes de la cantidad de estructura

Descomponer la cantidad de estructura en sus distintas componentes aporta, como veremos, perspectivas de gran utilidad.

**Cantidad traccionada y comprimida.** La primera descomposición resulta de considerar separadamente las regiones traccionadas  $N^+$  y las comprimidas  $N^-$  considerando por tanto separadamente las cantidades de estructura traccionada  $W^+$  o comprimida  $W^-$ .

$$W^+ = \int |N^+| ds, \quad W^- = \int |N^-| ds, \quad (4.43)$$

$$W = \int |N| ds = \int_+ N^+ ds + \int_- |N^-| ds = W^+ + W^- \quad (4.44)$$

**Cantidad horizontal y vertical.** Dado que es usual considerar las cargas gravitatorias como cargas dominantes, es útil distinguir entre fuerzas horizontales  $F^=$  y verticales  $F^{\parallel}$  (o fuerzas ortogonales  $F^{\perp}$  y paralelas  $F^{\parallel}$  a la dirección dominante) y por razones semejantes, distinguir entre cantidad de estructura horizontal  $W^=$  y vertical  $W^{\parallel}$ , para lo que usamos el paralelismo que se da en todo caso entre las direcciones de los esfuerzos y

de las longitudes de las barras:

$$W = \int |N| dl = \int |\mathbf{N} \cdot d\mathbf{l}| = \int (|N_x dx + N_y dy + N_z dz|),$$

$$W = \int |N_x| dx + \int |N_y| dy + \int |N_z| dz, \quad \text{pues } \mathbf{N} \parallel d\mathbf{l} \quad (4.45)$$

$$W^{\parallel} = \int |N_z| dz; \quad W^{\perp} = \int |N_x| dx + \int |N_y| dy \quad (4.46)$$

$$W = W^{\perp} + W^{\parallel} = W^{\perp} + W^{\parallel} \quad (4.47)$$

### 4.3.2. Teoremas de la cantidad de estructura

Podemos ahora formular un conjunto de teoremas de la máxima relevancia para la caracterización del comportamiento de las estructuras.

**Teorema 4.1 (Teorema de Maxwell)** *Para toda estructura de Maxwell que resuelve un mismo problema de Maxwell, el número de Maxwell  $M = \int N ds$  es función de las fuerzas aplicadas y de sus puntos de aplicación, e independiente de la forma de la estructura, siendo el mismo para todas ellas.*

Veamos la demostración.

Sea un espacio que contiene a todas las estructuras que resuelven un problema, para cargas  $\mathbf{F}_i$  fijas.

Sea una expansión uniforme de factor  $(1 + e)$ , en torno a un punto.

Sea  $\mathbf{e}_i$  el vector de desplazamiento de cada punto  $i$ .

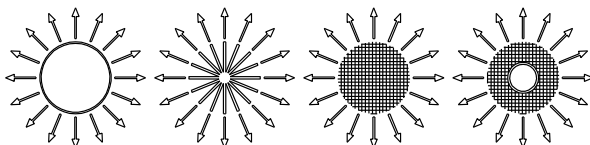


Figura 4.10: Identidad entre estructuras traccionadas por ser mínimas todas ellas

Por el principio de los trabajos virtuales y la consiguiente igualdad entre el trabajo de las fuerzas exteriores y el de las interiores tendremos

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_i \mathbf{e}_i &= \sum F_{xi} X_i \mathbf{e} + \sum F_{yi} Y_i \mathbf{e} + \sum F_{zi} Z_i \mathbf{e} = \\ U &= \int \sigma e dV = e \int \sigma dV = e \int N \frac{dV}{A} = e \int N ds \end{aligned}$$

por lo que

$$M = \int N ds = \sum F_{xi} X_i + \sum F_{yi} Y_i + \sum F_{zi} Z_i. \quad (4.48)$$

### Corolarios del teorema de Maxwell.

- Una estructura de Maxwell solo traccionada o solo comprimida es mínima, lo que permite considerar idénticas todas las que resuelven el mismo problema de esa forma. (figura 4.10).
- Minimizar la parte traccionada (o comprimida) de una estructura implica minimizar la estructura al deber mantenerse

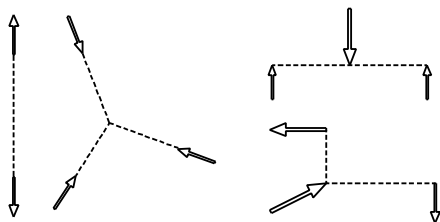


Figura 4.11: Tipos de estructura y número de Maxwell

la diferencia entre ambas.

- Pueden clasificarse las estructuras por el valor de  $M$  que resuelven (figura 4.12):

**Tracción**  $W \approx \geq M > 0$ ,

**Compresión**  $-W \approx \leq M < 0$ ,

**Flexión**  $W \neq M \approx 0$ .

**Teorema 4.2 (Teorema de Michell)** *Una estructura estricta alcanza el límite de economía —es estructura mínima— si el espacio en el que está situada puede ser sometido a una deformación —virtual— tal que los alargamientos o acortamientos unitarios se incrementan igualmente en todas las piezas —con el mismo valor, y en el signo de la deformación original—, y en valor no menor que el cambio unitario de longitud de cualquier otro elemento del espacio.*

*Si el espacio considerado se extiende al infinito en todas las direcciones, el volumen de tal estructura es mínimo con rela-*

*ción a todos los posibles diseños, y en caso contrario mínimo en relación a los diseños que pueden considerarse incluidos en el mismo contorno finito.*

Sea un espacio que contiene a todas las estructuras que resuelven un problema, para cargas  $\mathbf{F}_i$  fijas.

Sea una deformación virtual arbitraria, y establecida de forma tal que el valor absoluto de las deformaciones principales en todo punto del espacio sean menores que un cierto valor  $e$  dado. Es decir, en toda dirección del espacio el valor absoluto del alargamiento o acortamiento unitario  $\mu$  es:  $|\mu| \leq e$ .

Por el principio de los trabajos virtuales, la variación en la energía de deformación de cada estructura en dicha deformación  $\delta U$  es igual al trabajo realizado por las fuerzas exteriores y por lo tanto será igual para todas ellas.

Y por tanto

$$\delta U = \int \mu \sigma \, dV = \int \mu \sigma A \, ds \leq \int |\mu| |N| \, ds \leq \int e |N| \, ds;$$

es decir,  $\delta U \leq e \int dW$ . (4.49)

Pero sucederá que en las estructuras en las que se cumplan las condiciones de Michell el signo de las expresiones precedentes será de igualdad, por lo que dichas estructuras tendrán como energía de deformación el producto de su cantidad de estructura por esa deformación unitaria  $e$  y serán por ello mínimas:

$$\delta U = \delta U_{e(\min)} = e \int dW_{e(\min)} \leq e \int dW \quad (4.50)$$

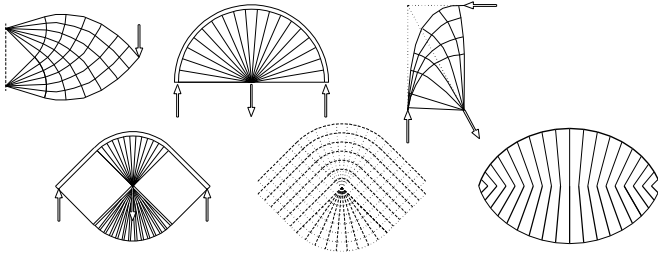


Figura 4.12: Estructuras de Michell, óptimas o cuasióptimas en flexión. La fila inferior muestra la óptima para carga puntual y su deformación test, así como una aproximación cuasióptima para carga uniforme.

### Corolario

Pueden caracterizarse las estructuras óptimas mediante una deformación test:

- Estructuras con esfuerzos todos de igual signo: la deformación test será una expansión o contracción del espacio: coincide con el primer corolario del teorema de Maxwell
- Estructuras formadas por barras ortogonales antes y después de la deformación: la deformación test es de expansión y contracción en dichas direcciones

**Teorema 4.3 (Teorema de la rigidez)** *De entre todas las estructuras estrictas que resuelven el mismo problema de Maxwell, todas aquellas que tienen igual cantidad de estructura tie-*

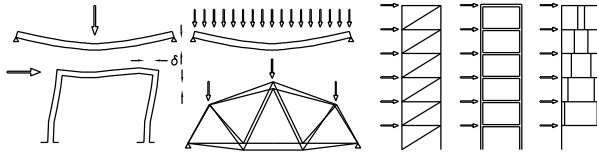


Figura 4.13: Flecha ponderada: cabe medir la deformación de la estructura por la pérdida de energía potencial de las cargas en el desplazamiento correspondiente.

*nen igual deformación; la deformación aumenta con la cantidad de estructura del esquema elegido y, por lo tanto, la estructura mínima —la de menor cantidad de estructura— es también la más rígida.*

Sea una medida ponderada de la flecha de la forma siguiente:

$$\delta_e = \sum \alpha_i \delta_i.$$

Y úsense como factores de ponderación las cargas mismas (ver figura 4.13):

$$\delta_e = \sum P_i \delta_i$$

La medida de la deformación resultante es la pérdida de energía potencial de las cargas, igual a la energía de deformación más la complementaria de la estructura (figura 4.14).

Y por tanto

$$\delta_e = U = \int \sigma \varepsilon dV = \int \sigma \varepsilon \frac{dW}{\sigma} = \int \varepsilon dW \quad (4.51)$$

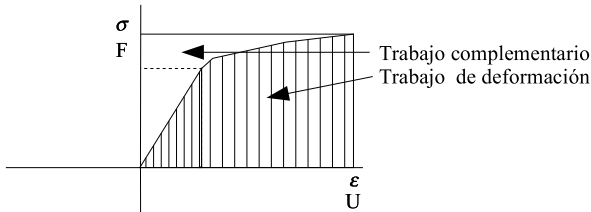


Figura 4.14: Energías de deformación y complementaria

### Corolarios del teorema de la rigidez.

- Para minimizar una estructura basta buscar el esquema que minimice su deformación —con igual aprovechamiento del material—
- Estructuras con igual pérdida de energía potencial son equivalentes. (ver figura 4.15)
- Si una estructura estricta presenta una deformación  $\alpha$  veces mayor que otra establecida para las mismas cargas, lograr en la primera la misma deformación que en la segunda exigirá aceptar un consumo de  $\alpha^2$  veces la la la segunda, y ello por ser  $\alpha$  veces menos eficiente, y por deber reducir tensiones en un factor de  $\alpha$  para igualar la deformación.
- Los materiales estructurales en edificación están limitados, salvo fuertes sobredimensionados, a deformaciones unitarias menores al 2 por mil, pues las esbelteces y límites de flecha habituales impiden el aprovechamiento de deformaciones



Figura 4.15: Estructuras equivalentes en flexión, pues, si se usa igual canto y el mismo aprovechamiento del material, la curvatura es idéntica y por tanto también lo es la pérdida de energía potencial de las cargas.

mayores<sup>3</sup>.

**Teorema 4.4 (Teorema de Aroca, o del canto óptimo)** *Si a partir de una estructura sometida a cargas —y reacciones— solo verticales consideramos todas las formas que pueden obtenerse manteniendo la topología original y la posición de las cargas en dicha topología, y que alteren la geometría mediante transformaciones afines que solo afecten al canto de la estructura, la estructura óptima entre estas será la que cumpla la condición de que las cantidades de estructura vertical y horizontal se igualan.*

Veamos que sucede si al cambiar el canto debe asegurarse que se mantiene el equilibrio (ver figura 4.16). Consideramos dos fases:

---

3. Esta afirmación puede demostrarse por referencia a las deformaciones resultantes en estructuras óptimas o cuasióptimas en flexión y las correspondientes pérdidas de eficiencia para las esbelteces de los tipos habituales.

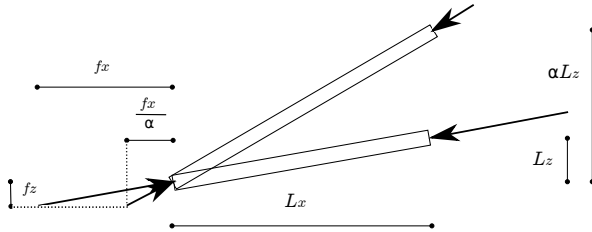


Figura 4.16: Efectos del cambio de canto si debe mantenerse la componente vertical para mantener el equilibrio con las cargas.

**Fase 0:** se mantienen las dimensiones, cargas y fuerzas originales.

**Fase 1:** cambio de los cantos (factor  $\alpha$ ) y de las fuerzas horizontales (factor  $1/\alpha$ ).

**Comprobamos equilibrios y compatibilidad geométrica**  
**Fase 0.**

Las fuerzas sobre los nudos están en equilibrio con la suma de esfuerzos, siendo los esfuerzos paralelos a las direcciones de las barras:

$$F_j^{\parallel} = \sum f_i^{\parallel}$$

$$F_j^{\perp} = \sum f_i^{\perp}$$

$$\frac{f_i^{\parallel}}{f_i^{\perp}} = \frac{L_i^{\parallel}}{L_i^{\perp}}$$

Dichos esfuerzos y longitudes permiten medir las cantidades de estructura

$$W^{\parallel}; W^{\perp}$$

**Fase 1.**

Transformamos la estructura multiplicando el canto por un factor  $\alpha$ , manteniendo las dimensiones horizontales y reduciendo las componentes horizontales de fuerzas y esfuerzos con ese factor. Es decir, para cada variable  $V$  obtenemos la transformada  $V(\alpha)$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} F_j^{\parallel}(\alpha) &= F_j^{\parallel}, & f_i^{\parallel}(\alpha) &= f_i^{\parallel} \\ L_i^{\parallel}(\alpha) &= \alpha L_i^{\parallel}, & L_i^{\perp}(\alpha) &= L_i^{\perp} \\ F_j^{\perp}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} F_j^{\perp}, & f_i^{\perp}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} f_i^{\perp} \end{aligned}$$

Con ello se mantienen tanto el equilibrio como la alineación de esfuerzos y direcciones de las barras:

$$\begin{aligned} F_j^{\parallel}(\alpha) &= \sum f_i^{\parallel}(\alpha) \\ F_j^{\perp}(\alpha) &= \sum f_i^{\perp}(\alpha) \\ \frac{f_i^{\parallel}(\alpha)}{f_i^{\perp}(\alpha)} &= \frac{L_i^{\parallel}(\alpha)}{L_i^{\perp}(\alpha)} \end{aligned}$$

De este modo las cantidades de estructura resultantes son:

$$W^{\parallel}(\alpha) = \alpha W^{\parallel}; W^{\perp}(\alpha) = W^{\perp}/\alpha \quad (4.52)$$

En dichas condiciones resulta que el producto entre ambas componentes se mantiene constante y el mínimo resultará, pues,



Figura 4.17: Estructura con ambos cordones curvos

del mínimo de la suma de dos componentes cuyo producto es constante. El problema es análogo al del rectángulo de mínimo semiperímetro para igualdad de área, problema cuya solución es el cuadrado.

$$W^{\parallel} \cdot W^{\perp} = W^{\parallel}(\alpha) \cdot W^{\perp}(\alpha)$$

$$\text{mín } W = \text{mín}(W^{\parallel} + W^{\perp}) \implies W_{e(\text{mín})}^{\parallel} = W_{e(\text{mín})}^{\perp} \quad (4.53)$$

$$\text{mín } W = 2\sqrt{W^{\parallel} \cdot W^{\perp}} \quad (4.54)$$

Por lo que el teorema queda demostrado.

### Corolarios del teorema de Aroca

- La esbeltez óptima puede obtenerse a partir de los valores de las cantidades de estructura horizontal y vertical:

$$\begin{aligned} \alpha_o &= \frac{W_o^{\parallel}}{W^{\parallel}} = \frac{\sqrt{W^{\parallel} W^{\perp}}}{W^{\parallel}} = \sqrt{\frac{W^{\perp}}{W^{\parallel}}} \\ \lambda_o &= \frac{\lambda}{\alpha_o} = \lambda \sqrt{\frac{W^{\parallel}}{W^{\perp}}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

- Las estructuras en flexión con curvatura en ambos cordones —y que ocupan ambos lados de la línea o plano que une los apoyos— resultan aproximadamente  $\sqrt{2}$  veces más eficientes que las que se sitúan de uno solo de los lados de esta (ver figura 4.17)

La demostración de la segunda afirmación es como sigue:

Sea un arco atirantado sobre la horizontal, del que carga el tablero suspendido en péndolas, y consideremos que está en su esbeltez óptima. Usamos  $W^{+\parallel}$  como unidad de medida de la cantidad de estructura. Por los teoremas de Maxwell (al ser una estructura en flexión  $M = 0$ ) y de Aroca (al ser de esbeltez óptima) las cantidades de estructura comprimida y traccionada son iguales y también lo son las componentes vertical y horizontal. La traccionada de arcos y péndolas se corresponde con la comprimida del arco, que cabe desdoblar en las partes horizontal y vertical, que se corresponderán con las correspondientes del tirante y las péndolas en tracción. De tal modo que

$$\begin{aligned}
 W^{+\parallel} &= W^{+=} = W^{-\parallel} = W^{-=} = 1 \\
 W &= W^+ + W^- = W^{+\parallel} + W^{+=} + W^{-\parallel} + W^{-=} = 4 \\
 W^{\parallel} &= W^= = 2
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Desdoblamos, rotamos, y reconectamos el arco, por lo que desaparece el tirante horizontal. Las cantidades son ahora  $W_*^= = 1$ ,  $W_*^{\parallel} = 2$ ,  $W_* = W_*^= + W_*^{\parallel} = 3$ , no óptimas.

Se logrará el óptimo con

$$\begin{aligned}
 W_o^{\parallel} &= W_o^{\perp} = \sqrt{W_*^{\parallel} W_*^{\perp}} = \sqrt{2} \\
 W_o &= 2\sqrt{2} \\
 \lambda_o &= \lambda_* \sqrt{\frac{W_*^{\parallel}}{W_*^{\perp}}} = \lambda_* \sqrt{\frac{2}{1}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

### 4.3.3. Expresión general para la cantidad de estructura

Por lo que hemos visto, la cantidad de estructura se mide en unidades de trabajo, y su expresión general puede caracterizarse por las propiedades siguientes

- Es proporcional a la carga total  $Q$ , pues si cambiamos la carga —y las correspondientes reacciones— sin cambiar la geometría, los esfuerzos crecen proporcionalmente.
- Es proporcional a la dimensión básica de la estructura, su luz  $l$  o su tamaño. Pues si manteniendo la forma, las proporciones y las cargas aplicadas en los nudos cambiamos el tamaño, las longitudes de las barras crecen sin alteración de los esfuerzos.
- La expresión que define esa magnitud de trabajo es, por tanto, del tipo  $W = \nu Ql$

Supongamos que para esa expresión, consideramos casos con flexión dominante. La situación de canto óptimo, por el teorema de Aroca es

$$W_o = W_o^{\perp} + W_o^{\parallel} = \nu_o Ql \quad \text{con } W_o^{\perp} = W_o^{\parallel}. \tag{4.58}$$

En esta situación la esbeltez es la óptima,  $\lambda_o$ , mientras que para otros cantos tendríamos  $\lambda = \alpha\lambda_o$ , variando el canto con  $\frac{1}{\alpha}$  (suponiendo  $\alpha > 1$ , el canto disminuye).

De este modo la cantidad de estructura vertical variará — disminuirá — con  $1/\alpha$  mientras que la horizontal lo hará — aumentará — con  $\alpha$ .

Así pues

$$\begin{aligned}
 W &= W^= + W^{\parallel} = \alpha W_o^= + \frac{1}{\alpha} W_o^{\parallel} \\
 W &= \frac{W_o}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \\
 W &= \frac{W_o}{2} \left( \frac{\lambda}{\lambda_o} + \frac{\lambda_o}{\lambda} \right) \\
 W &= \frac{W_o}{2} \frac{\lambda}{\lambda_o} \left( 1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2} \right). \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

La última expresión tiene sentido en la medida que las esbelteces habituales en flexión son apreciablemente más altas que las de la solución óptima, lo que hace que el segundo término de la expresión entre paréntesis,  $(\lambda_o/\lambda)^2$  sea en general muy pequeño con relación al primero.

Ahora bien, siendo la expresión para el caso óptimo de la forma  $W_o = \nu_o QL$ , considerando posibles cambios de esbeltez podemos escribirla como  $W_o = \phi_o \lambda_o Ql$ , y tenemos entonces como expresión para la cantidad de estructura para una esbeltez

cualquiera

$$W = \frac{\phi_o \lambda_o}{2} Ql \frac{\lambda}{\lambda_o} \left( 1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2} \right) = \frac{\phi_o}{2} \left( 1 + \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2} \right) \lambda Ql$$

$$= \phi_\lambda \lambda Ql \quad (4.60)$$

En esta expresión,  $\phi_\lambda = \phi_o (1 + (\lambda_o/\lambda)^2) / 2$  es una función dependiente de la esbeltez que varía entre  $\phi_o$  y  $\phi_o/2$ , pero que para las esbelteces habituales, altas, puede aproximarse con  $\gamma \approx \phi_\lambda \rightarrow \phi_\infty = \phi_o/2 = \nu_o/2\lambda_o$  de tal modo que la cantidad de estructura se representará en esos casos como

$$W = \nu Ql \approx \gamma \lambda Ql \quad (4.61)$$

donde  $\nu = \phi_\lambda \lambda \approx \gamma \lambda$  es el *número de Michell* de la geometría estructural, y donde  $\gamma = \nu_o/2\lambda_o$  es una constante de la forma estructural no dependiente ni del tamaño ni de la esbeltez, dado que procede de números fijos determinados a partir de la variante de esbeltez óptima para esa forma.

Es decir, la cantidad de estructura en los problemas de flexión se mide por el producto de la esbeltez por la carga total y la luz total, afectada de un coeficiente de efecto inverso a la eficacia de la forma estructural.

Si además el problema pasa a estar dominado por la condición de deformación, de rigidez, por superar la esbeltez  $\lambda$  a la esbeltez límite de la configuración,  $\lambda_{e(\text{lim})}$ , el consumo estructural necesario será ahora  $W \times \lambda/\lambda_{e(\text{lim})}$  por la necesidad de reducir las tensiones de trabajo en el factor  $\lambda/\lambda_{e(\text{lim})}$ , de tal modo que los costes pasarán a ser dependientes del cuadrado de la esbeltez.

#### 4.3.4. Cantidad de estructura y peso propio

Vamos a considerar estructuras estrictas para las que el volumen o capacidad estructural  $\mathcal{W}$  es igual a la cantidad de estructura  $W$ , y consideramos estas realizadas con material de peso específico  $\rho$ . En dichas condiciones el peso de la estructura es

$$P = \frac{\rho}{\sigma} W; \quad \text{con } W = \gamma \lambda Q l \quad (4.62)$$

#### Alcance o tamaño insuperable

Consideramos ahora el problema de la estructura de alcance o tamaño insuperable, es decir del tamaño  $L$  en el que la estructura se soporta solo a sí misma: es estricta para su propio peso habiendo alcanzado el límite de tamaño viable. Consideremos como aproximación válida que la distribución espacial de ese peso es semejante a la considerada para la carga  $Q$  en la expresión 4.62 por ser parecida a la distribución de las cargas aplicadas en las formas de uso habitual de la estructura.

Tendremos

$$W = \gamma \lambda P L = \gamma \lambda W \frac{\rho}{\sigma} L$$

y despejando  $L$

$$L = \frac{1}{\gamma \lambda} \frac{\sigma}{\rho} = \frac{1}{\nu} \frac{\sigma}{\rho} \quad (4.63)$$

Vemos que en esa expresión resulta crucial la magnitud que aporta la dimensión: el *alcance* del material

$$\mathcal{A} = \frac{\sigma}{\rho} \quad (4.64)$$

y el otro parámetro determinante del tamaño límite es el inverso del número de Michell. Con tamaños  $l$  menores que  $L$  podríamos emplear tensiones (capacidades) en el material proporcionalmente menores. Por lo tanto, la fracción de la resistencia disponible que se emplea en sostener el propio peso es,

$$\chi = \frac{l}{L} = \frac{\sigma_p}{\sigma} = \frac{\nu l}{\sigma/\rho} \quad (4.65)$$

Denominamos *talla* a dicho cociente  $\chi$ , que representa el tamaño relativo al tamaño insuperable del tipo estructural considerado.

### Ampliación de carga

Suponemos ahora la existencia de cargas adicionales al propio peso. La carga será  $Q = P + R$ , el propio peso más carga adicional o carga útil, y seguimos considerando carga y peso homólogos en su distribución sobre la estructura.

En esas condiciones

$$\begin{aligned} \frac{Q}{R} &= \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_p} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_p}{\sigma}} = \frac{1}{1 - \frac{l}{L}} \\ \frac{Q}{R} &= \frac{1}{1 - \chi} \end{aligned} \quad (4.66)$$

y por lo tanto la carga total  $Q$ , incluyendo el propio peso,  $P$ , es la carga útil  $R$  ampliada en el factor  $1/(1 - \chi)$ . Puede apreciarse aquí, pues, que la influencia del tamaño en el peso de la estructura lo es exclusivamente a través de la *talla*, la relación del tamaño adoptado frente al tamaño insuperable.

**Eficiencia de la forma estructural.** Una medida clásica de la eficiencia de la estructura ha sido el rendimiento, cociente entre carga soportada (carga útil) y peso propio:

$$r = \frac{R}{P} = \frac{Q - P}{P} = \frac{1 - \frac{P}{Q}}{\frac{P}{Q}} \quad (4.67)$$

$$r = \frac{R}{P} = \frac{1 - \chi}{\chi} = \frac{1}{\chi} - 1 \quad (4.68)$$

No es buena medida, pues como vemos depende del material empleado y no sólo de la geometría de la estructura, al depender  $\chi$  del alcance del material:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{L}{l} = \frac{\sigma/\rho}{l} \frac{1}{\gamma\lambda}$$

Mejor medida de la eficiencia es, por tanto, el inverso del número de Michell, que involucra tanto la configuración geométrica de la estructura como su esbeltez, sin referencia al material:

$$\frac{1}{\gamma\lambda} = \frac{1}{\nu}. \quad (4.69)$$

Pues efectivamente, cabe detectar incongruencias en la eficiencia comparada de estructuras según pesos o *rendimientos*. Veamos:

**Eficiencias:** Inversas de  $\nu$

**Pesos:**  $P$ , dependientes del material,  $\sigma/\rho$ , la carga útil  $R$ , la forma...

**Rendimientos:**  $r = R/P$

Para materiales diferentes no es útil la relación entre rendimientos pero sí entre eficiencias.

$$e = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\chi} \frac{l}{\sigma/\rho} = (r + 1) \frac{l}{\sigma/\rho} \quad (4.70)$$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{1/\nu_1}{1/\nu_2} = \frac{(r_1 + 1)\mathcal{A}_2}{(r_2 + 1)\mathcal{A}_1}; \quad (4.71)$$

$$\frac{r_1 + 1}{r_2 + 1} = \frac{\mathcal{A}_1/\nu_1}{\mathcal{A}_2/\nu_2}; \quad \mathcal{A}_i = \frac{\sigma_i}{\rho_i} \quad (4.72)$$

Si conocemos los pesos de dos soluciones,  $P_1$ ,  $P_2$ , y la carga útil  $R$ , que debe ser idéntica para ambas, la comparación de rendimientos es inmediata; la de eficiencias a partir de esos pesos exige considerar las cualidades de los materiales usados, lo que también es inmediato, pero la operación elimina la dependencia de dichas cualidades de la que sí dependen los rendimientos. De tal modo que pueden resultar conclusiones discrepantes: cabe atribuir un mejor *rendimiento* a una estructura peor simplemente por el uso de un mejor material, de un material de mayor alcance. Aislar la eficacia de la forma implica evitar el *rendimiento* como indicador.

### 4.3.5. Estructura y forma: parámetros estructurales de la forma

Observando las expresiones para la cantidad de estructura y para la consideración del peso propio, es decir

$$W = \gamma\lambda Ql; \quad l \leq L = \frac{1}{\gamma\lambda} \frac{\sigma}{\rho} = \frac{1}{\gamma\lambda} \mathcal{A}; \quad \frac{Q}{R} = \frac{1}{1-\chi}; \quad \chi = \frac{l}{L}.$$

observamos como elementos que caracterizan a la estructura los siguientes:

**esquema** que queda definido por el coeficiente  $\gamma$ ,

**proporción** o *esbeltez*, caracterizada por  $\lambda$ ,

el **número de Michell**, inversamente ligado a la *eficiencia*, es  $\nu = \gamma\lambda$ .

**tamaño** o dimensión básica del problema, la luz,  $l$ , menor que el límite, *alcance*, o tamaño insuperable  $L$ .

**dimensionado** asociado a  $Q$ , pero que resulta ser independiente de  $L$ . No tiene influencia en el tamaño insuperable para peso propio. Cambios en el dimensionado suponen cambios en las áreas, lo que modifica en la misma medida el peso y la resistencia, de tal modo que no afectan a la fracción de resistencia involucrada en resistir el peso propio.

Vemos así que la lista de parámetros coincide con la que obtuvimos en el apartado 4.2.4, si bien ahora de una forma mucho más general, no restringida a las soluciones adinteladas.

## 4.4. Forma y coste en estructuras flec-tadas de cubierta

Analizamos ahora más en detalle las soluciones de estructuras de cubierta: vamos a abordar la estimación de sus costes —de su cantidad de estructura— a partir de los parámetros de forma de las posibles soluciones. Se trata de problemas de flexión, caracterizados por números de Maxwell nulos o cercanos al cero, dependiendo de la posición de las cargas. Por tanto, de estructuras en las que las componentes de tracción y compresión tienen papeles equiparables.

Se aborda el cómputo de los costes tras considerar el problema y los tipos de solución.

### 4.4.1. Problema y geometrías en flexión

Consideramos el problema de trasladar cargas perpendicularmente a su línea de acción hasta una pareja de apoyos situada en la misma línea en que se sitúan las cargas. Se trata de un problema de flexión con número de Maxwell nulo,  $M = 0$ , dado que todas las cargas son ortogonales a su vector posición si disponemos el origen en la línea de los apoyos (ecuación 4.48).

#### 4.4.1.1. Problema y soluciones tipo

El problema de flexión (figura 4.18) puede representarse, independientemente de como sea la estructura que materializa las condiciones de equilibrio

- A través de la gráfica de momentos (modelo *viga*),

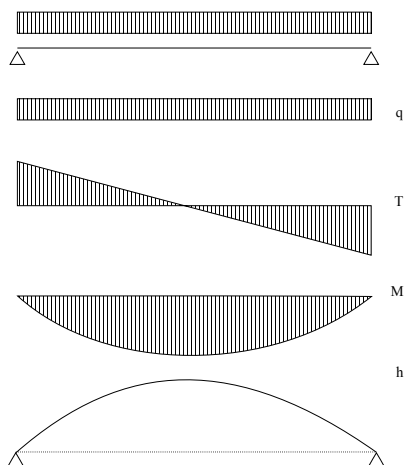


Figura 4.18: Problema de flexión y funciones básicas para su representación: problema de sostener una carga entre apoyos y funciones de carga,  $q$ , cortante,  $T$  y momento,  $M$ , o canto antifuncular,  $h$ .

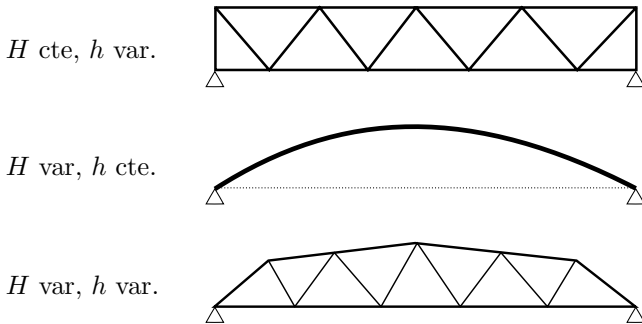


Figura 4.19: Tipos de estructura para flexión: viga, arco o cercha.

- A través del polígono funicular (modelo *arco*).

El problema queda caracterizado por las funciones que describen la carga y los potenciales equilibrios de una rebanada: las funciones de carga  $q(x)$ , cortante  $T(x)$  y momento  $M(x)$ , o bien a través de la forma funicular  $h(x) = \frac{M(x)}{H(x)}$ , donde  $H(x)$  es la componente horizontal de las fuerzas en los cordones, funciones que mantienen las relaciones de equilibrio bien conocidas en cortes paralelos a las cargas:  $q = \frac{\partial T}{\partial l}$ ,  $T = \frac{\partial M}{\partial l}$ ;  $H(x) = H = \text{constante} \implies h(x) = M(x)/H$ .

A su vez dicho problema puede abordarse con estructuras que respondan a alguno de estos tres tipos (figura 4.19):

- Tipo 1: viga, caracterizado por un canto  $h$  constante, con la componente horizontal en cordones  $H = M/h$  variable,

- Tipo 2: arco, caracterizado por un canto  $h$  variable, con  $H = M/h$  constante al adoptar  $h$  la forma de la ley de momentos  $M$ ,
- Tipo 3: cercha, caracterizado por tener tanto  $h$  como  $H = M/h$  variables, aun siendo necesario que su producto iguale la ley  $M$ .

Los apartados siguientes pretenden visualizar los costes de dichas soluciones recurriendo a la cantidad de estructura, y sus propiedades.

#### 4.4.1.2. Costes en vigas

Analizamos la cantidad de estructura requerida en cordones y diagonales considerando dimensionado estricto, aunque permitiendo la extensión a leyes de dimensionado no estricto.

#### Cordones

La fuerza en cordones es de media  $H = M/h$  pues, dependiendo de la geometría de la triangulación, su valor real en cordones envuelve ese valor, por encima en uno de ellos y por debajo en el otro, tal como muestra la figura 4.20. De modo que la cantidad de estructura para cada tramo de cordones es el doble del

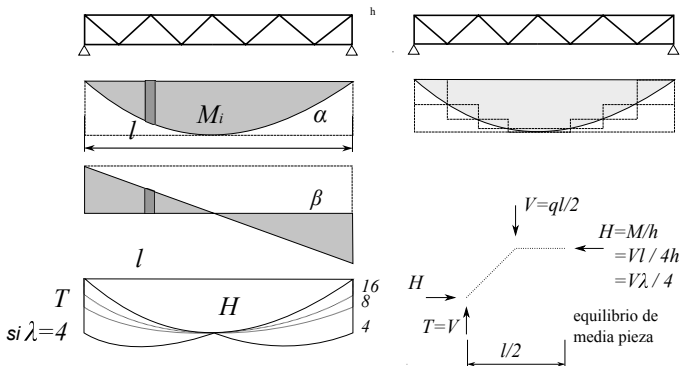


Figura 4.20: Estimación de costes en vigas. Se representan por las áreas sombreadas. En el caso de los cordones, ese área representa la suma de ambos. Las áreas se disponen a la misma escala en la parte inferior de la figura, dependiendo de la esbeltez  $\lambda$ . Para ello el esquema de la derecha muestra la relación entre la máxima fuerza en cordones  $H$  y el cortante máximo, la reacción en el apoyo.

producto de  $M/h$  por la longitud del tramo:

$$\begin{aligned} W_c &= 2 \int \frac{M}{h} dl = \frac{2}{h} \int M dl \\ &= \frac{2}{h} \int d(\check{M}) = \frac{2}{h} \check{M} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$= 2\alpha M_i \frac{l}{h} = 2\alpha M_i \lambda \quad (4.74)$$

$$= 2\alpha l H_{\text{máx}} \quad (4.75)$$

En las expresiones anteriores hemos usado el símbolo  $\check{M}$  para expresar el área de la gráfica de momentos;  $\alpha$  representa la fracción que ese área supone respecto del área del rectángulo  $M_i l$ , donde  $M_i$  es el momento isostático para la carga considerada. Esto permite considerar dimensionados no estrictos empleando en el cómputo el área de las capacidades resistentes dispuestas en la viga en vez del área de los momentos efecto.

### Diagonales

Las fuerzas en las diagonales, al igual que sus longitudes, dependen de su ángulo con la vertical, siendo la fuerza  $N = T/\cos \psi$  y la longitud de la diagonal de  $h/\cos \psi$ , para una longitud de viga recorrida en ese tramo de  $h \tan \psi$ .

De tal modo que la cantidad de estructura será para cada tramo de diagonal  $ds$ , correspondiente a un tramo  $dl$  de la longitud de la viga,

$$\int |N| ds = \int \frac{|T|}{\cos \psi} \frac{h/\cos \psi}{h \tan \psi} dl = \int \frac{|T|}{\sin \psi \cos \psi} dl = \int \frac{2|T|}{\sin 2\psi} dl \quad (4.76)$$

cuyo valor mínimo se da cuando  $\sin 2\psi_{d(\min)} = 1$ ,  $\psi_{d(\min)} = 45^\circ$ , que corresponde a la inclinación óptima para las diagonales. Para otros valores o combinaciones de valores dependiendo de la familia de diagonales, tendremos *penalizaciones* al coste —factores multiplicadores— medidos por la relación  $\sin 2\psi_{d(\min)}/\sin 2\psi$  ponderada a la fracción de la luz correspondiente a la familia de inclinación  $\psi$ . En el caso particular de  $\psi = 90^\circ$  de las vigas Pratt o similares, su aportación al coste, que resulta indeterminada en esta última ponderación, depende de la segunda familia que es la que marca la posición y frecuencia de su empleo: resulta un coste local por montante de  $|T|h$  para un tramo eficaz dado por  $h \tan \psi_2$  y, por tanto, suponen una aportación al coste de  $|T|/\tan \psi_2$  por unidad de longitud de la viga.

De este modo la cantidad de estructura en diagonales depende de los ángulos de estas, penalizando tal como hemos señalado los costes de la mínima posible, que son

$$W_D = 2\check{T} = 2\beta Tl = 2 \cdot 2 \int_0^{\frac{l}{2}} T dl = 4M_i = 8M_i\beta \quad (4.77)$$

Ahora  $\beta$  expresa la fracción del rectángulo  $|T|l$  correspondiente a la capacidad dispuesta efectivamente y puede, además, añadir los factores correspondientes a las penalizaciones por inclinaciones no óptimas.

### Coste total

Para componer ambos costes de forma visual resulta útil superponer ambas áreas de momentos y cortantes a una escala común, lo que puede hacerse con facilidad comparando las ex-

presiones 4.77 y 4.75, y poniendo a la misma escala  $T$  y  $H$  para cada esbeltez  $\lambda$ , tal como se hace en la figura 4.20.

#### 4.4.1.3. Costes en arcos

Ahora analizamos el arco atirantado, en el que situamos las cargas en un tablero horizontal suspendido por péndolas, figura 4.21. Analizamos sucesivamente la cantidad de estructura de cada componente.

##### Tirante

Su cantidad de estructura, que es en tracción y horizontal, será

$$W_T = \int |N| dl = lH = W^{+} \quad (4.78)$$

##### Péndolas

Su cantidad de estructura mide la necesaria para subir la carga distribuída  $q$  a la altura  $h$  del tramo de arco correspondiente:

$$W_P = \int_0^l h q dl = q \int h dl = q\check{h} \quad (4.79)$$

$$= \int h \frac{\partial T}{\partial l} dl = \int T \frac{\partial h}{\partial l} dl = \int T dz \quad (4.80)$$

$$= q\alpha hl = W^{+||} \quad (4.81)$$

La expresión 4.79 muestra la cantidad de estructura como proporcional a la forma y área del alzado. Para la expresión 4.80 se ha usado la relación entre carga y cortante y el hecho de que,

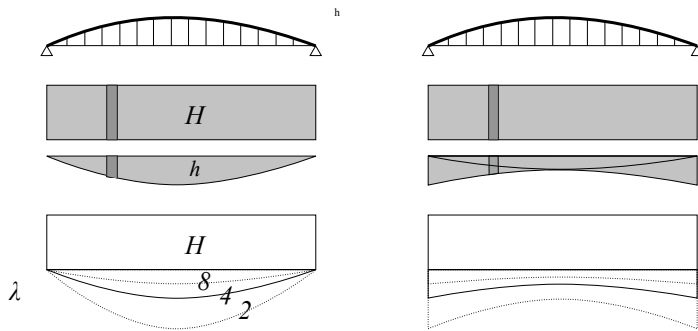


Figura 4.21: Estimación de costes en arcos. Se representan por las áreas sombreadas, que se disponen a la misma escala en la figura inferior, dependiendo de la esbeltez  $\lambda$ . A la izquierda los valores verticales totales están en un formato apto para comparar escalas. A la derecha se sitúan en las posiciones de aparición real de tales costes a lo largo de  $l$ , considerando las componentes de cantidad de estructura horizontal de arco y tirante y la vertical en péndolas y arco.

en la integral por partes resultante, los valores en extremos de  $h$  o en el centro de  $T$  son nulos.

### Arco

Obtenemos su cantidad de estructura combinando las partes horizontal y vertical y, puesto que en cada sección estas componentes son  $H$  y  $T$  respectivamente, resulta

$$W_a = W^{-=} + W^{-\parallel} = lH + \int T dz \quad (4.82)$$

$$= lH + l\alpha h q = l(H + 2R\alpha/\lambda) \quad (4.83)$$

en la última expresión usando el hecho de que  $lq = 2R$  (donde  $R$  es la reacción en cada apoyo) y siendo  $h = l/\lambda$ .

Hay que hacer notar la correspondencia directa de las dos componentes horizontal y vertical de la cantidad de estructura del arco con las correspondientes en tracción de tirante y péndolas.

### Coste total

Recordando que la reacción es igual a la máxima componente horizontal en cordones,  $R = H$ , cuando  $\lambda = 4$ , podemos nuevamente sumar a la misma escala ambas regiones sombreadas correspondientes a las dos partes, horizontal y vertical, de la cantidad de estructura para visualizar el correspondiente coste, tal como se hace en la figura 4.21.

#### 4.4.1.4. Costes en cerchas

Aunque la variada geometría de las cerchas parece que haría difícil, en principio, la generalización de la determinación y visualización de los costes en forma semejante a lo ya realizado para vigas y arcos podemos, sin embargo, aproximarnos rápida y sencillamente a estos si comparamos la geometría de la cercha en cuestión con la viga y el arco de idéntico canto, de igual esbeltez.

Vamos a ver esa aproximación en dos casos, correspondientes a dos formas muy habituales, pero no demasiado eficientes, como son la cercha triangular, dos de cuyas variantes son el *cuchillo español*, y el *diente de sierra*. Y para ello usaremos dos figuras, 4.22 y 4.23, en las que usamos el hecho de que a igualdad de canto, las gráficas de  $M$ , para un valor dado de  $M_i$  en la viga, y de  $h$  en el arco, pueden trazarse a la misma escala al ser  $M_i = Hh$ .

#### La cercha triangular

En el caso de la cercha triangular, figura 4.22, podemos usar para la parte correspondiente a los cordones la referencia a la viga en el centro de la pieza, y la referencia al arco en los extremos: en ellos el equilibrio en el arranque de ambos cordones es indistinguible al del arco, por lo que la ley de costes será el de un arco tangente, y por tanto de esbeltez doble a la del arco de comparación. Al ser mitad de canto requeriría una componente horizontal doble, lo que da la evolución de coste en el extremo. En cambio en el centro tenemos el coste semejante al del centro de la viga.

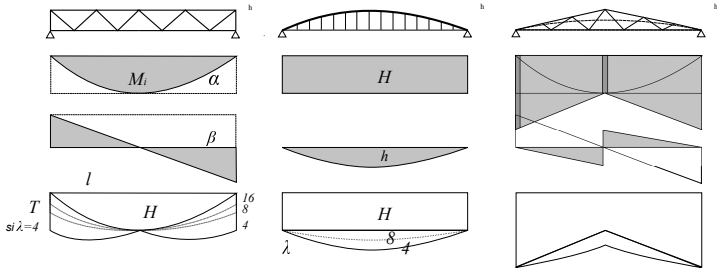


Figura 4.22: Estimación de costes en cerchas. Se representan, por referencia a los de vigas y arcos, por las áreas sombreadas, que se disponen a la misma escala en la figura inferior, dependiendo de la esbeltez  $\lambda$

La interpolación entre ambos valores a lo largo de los cordones exige, con una ley lineal de cantos, lograr una ley parabólica de momentos, lo que da para esa componente, básicamente correspondiente a la parte horizontal del coste, una ley también lineal.

Para la componente de cortante, tenemos que en el extremo el cortante se resuelve por la inclinación del cordón, lo que supone restar a la necesidad de cortante todo ese mismo valor. Pero como las componentes horizontales disminuyen en cordones hasta la mitad del valor en el apoyo, al ser la pendiente constante, la resta de cortante sigue la misma proporción, que resulta en exceso en el centro de vano: el resultado es que la pieza funciona llevando la carga al centro, donde cuelga del vértice entre

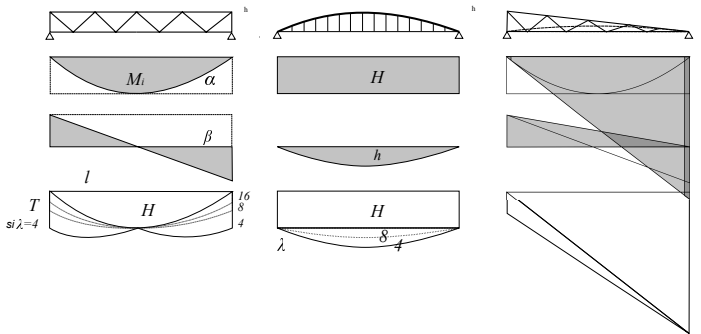


Figura 4.23: Estimación de costes en cerchas (dientes de sierra). Se representan, por referencia a los de vigas y arcos, por las áreas sombreadas, que se disponen a la misma escala en la figura inferior, dependiendo de la esbeltez  $\lambda$

cordones, en una geometría de costes (sombras) que tiende a parecerse más a la del arco que a la de la viga.

El resultado en la suma de ambas componentes resulta claramente menos eficaz que la viga o el arco dado el mal ángulo en el arranque de la pieza.

### El diente de sierra

Realizamos la comparación de esta forma con la viga y el arco en la figura 4.23.

En este caso el comportamiento de los cordones en el extremo izquierdo será semejante al de la viga, mientras que en el

extremo derecho se asemejará al arco tangente, que resulta ser de canto cuatro veces menor que la pieza estudiada. Esto da dos puntos para los costes unitarios en ambos extremos, representados por valores de 0 y  $4H$  respectivamente, entre los que interpolar las leyes de componentes  $H$  responsables de asegurar los momentos  $M$ . Una ley de cantos lineal para una ley parabólica de momentos exige una ley lineal para esta interpolación, lo que aporta la figura para esa parte de la ley de costes.

Añadiendo ahora la parte de cortante, que evoluciona entre la casi identidad con la de la viga en el extremo izquierdo, con la resta del total en el extremo derecho, tenemos una ley que nuevamente debe añadir a la ley de cortantes una resta proporcional a la de la ley de componentes horizontales por ser pendiente constante, lo que da una ley resultante triangular que lleva cargas de derecha a izquierda.

Resulta con ello que se trata de una forma cuya extrema ineficiencia se hace visible de inmediato.

### Otras formas

Cabe usar la misma técnica usada en las formas anteriores para otras formas, si bien se pone de manifiesto que cualquier mejora pasará por mejorar el ángulo de encuentro entre tracciones y compresiones en los apoyos, tal como sugiere un corolario del Teorema 4.2, de Michell. El subsiguiente aumento del ángulo de la última diagonal, que deja de acompañar al cordón superior o lo sustituye supone una mejora imprescindible y puede usarse en esta segunda forma en cubiertas inclinadas para alojar los canalones de recogida de aguas.

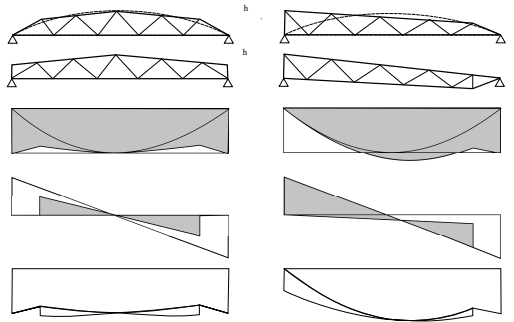


Figura 4.24: Formas mejoradas de cercha y aproximación a los costes resultantes

La alternativa supone alterar la horizontalidad del cordón inferior para permitir su llegada inclinada al apoyo, acodalando las diagonales contra el correspondiente cambio de dirección de ese cordón, tal como sugiere un corolario del teorema 4.4, de Aroca.

La figura 4.24 muestra alguna de esas variaciones.

#### 4.4.1.5. Soluciones para contorno circular

La misma forma de cómputo empleada para el cálculo de la cantidad de estructura en cerchas del anterior apartado puede usarse para la estimación de esa magnitud en configuraciones más complejas, como puede ser el de estructuras apoyadas en todo un contorno cerrado, como puede ser el círculo. Las figuras

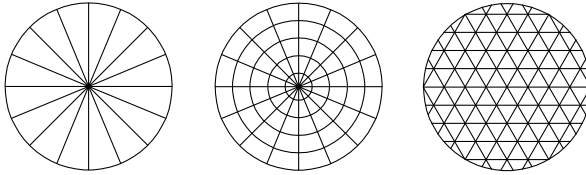


Figura 4.25: Red de vigas en contorno circular. Aunque la primera solución es un conjunto de cerchas radiales, las dos siguientes trabajan acopladas radial y circunferencialmente, más cerca del comportamiento de losas

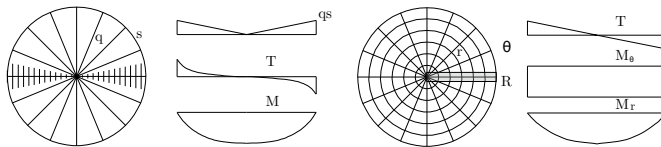


Figura 4.26: Leyes de cargas y esfuerzos en redes de vigas de contorno circular, la segunda considerada como equivalente a losa

en 4.25 muestran varias de estas posibilidades y las de 4.26 las leyes de esfuerzos correspondientes a un par de estas soluciones, el segundo caso para rigideces y resistencias equiparables en las dos direcciones.

Si medimos las cantidades de estructura estricta en cordones y diagonales tenemos en ambos casos los valores (ver Cervera 2001)

$$W_{Me} = \frac{1}{8}Ql\lambda; \quad (4.84)$$

$$W_{Te} = \frac{1}{3}Ql \quad (4.85)$$

pues en el primero de ellos tendríamos, con dimensionado constante, las magnitudes

$$W_M = \frac{1}{6}Ql\lambda;$$

$$W_T = Ql$$

fáciles de determinar a partir de los valores máximos en un sector circular, de momento,  $qsl^2/24$  y cortante  $qsl/4$ , para arco  $s$  en el apoyo, con ahorros sobre estas cantidades para un dimensionado estricto de  $1/4$  en cordones y  $2/3$  en la triangulación.

Y en el segundo para dimensionado constante tendríamos, dadas las leyes locales de la figura para un elemento rectangular, integradas a todo el círculo,

$$W_M = \frac{1}{6}Ql\lambda;$$

$$W_T = \frac{1}{2}Ql$$

siendo ahora los ahorros sobre estas cantidades correspondientes al dimensionado estricto de  $1/4$  en cordones y  $1/6$  en la triangulación.

Pero vemos que esta identidad en el caso de dimensionado estricto no tiene nada de sorprendente pues, como demuestra un corolario del Teorema 4.3 de la rigidez (ver figura 4.15) si la pérdida de energía potencial de las cargas es igual, en soluciones estrictas también lo es la cantidad de estructura. Y si las curvaturas son idénticas al igual que las distorsiones por cortante, la envolvente de ambas deformadas es exactamente la misma.

Esta consideración nos va a permitir ahora recorrer comparativamente todo un conjunto de tipos estructurales para cubiertas, aparentemente muy diferentes.

#### 4.4.2. Estructuras equivalentes: soluciones tridimensionales

La pregunta relevante es si cabe establecer algún tipo de semejanza o comparación en las muy diferentes formas empleadas en las estructuras de cubierta, esquematizadas en la figura 4.27: ¿en qué medida cabría establecer algún tipo de semejanza entre ellas?

El panorama tipológico que se muestra a continuación fue presentado por primera vez en Sevilla el 8 de julio de 1992 (ver Cervera Bravo 1993) como fruto de una reflexión sobre las posibilidades de transformación geométrica de las formas estructurales sin cambio sustantivo en los costes que cabe concebir si, para el mismo grado de aprovechamiento en los materiales empleados, además

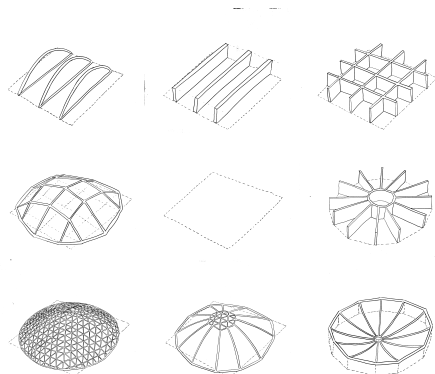


Figura 4.27: Formas comparables de cubierta, para cerrar un espacio de contorno regular.

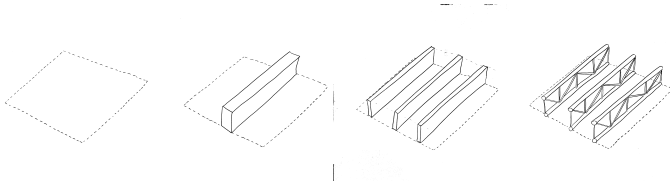


Figura 4.28: Viga

- se mantienen cargas, tamaño, y esbeltez,
- se aprovechan los corolarios de los teoremas 4.1 de Maxwell y 4.3 de la rigidez, que se resumen en las figuras 4.10 y 4.15, Aquella reflexión y sus dibujos, que son los que se usan aquí, fueron objeto de otra publicación posterior, (Cervera 2001) y han formado parte habitual de mis cursos de Proyectos de Estructuras en la ETSAM. De modo que aquí solo se hace un repaso rápido a dichas ideas, que se basan en las identidades estructurales entre las tres distintas formas representadas por la solución radial, el anillo o la malla.

Se parte de la solución más elemental, la viga, figura 4.28, que puede desdoblarse tanto como se desee —la separación  $s$  entre vigas solo influirá apreciablemente en el coste unitario de la siguiente familia, dado que la cantidad de estructura por unidad de superficie no varía: si se reduce  $s$  habrá más vigas, pero cada una de ellas con menos carga— Es posible aligerar la solución triangulando, lo que frente a soluciones de alma llena bien diseñadas resulta ventajoso solo a partir de luces altas, superiores a los 10, 12 m.

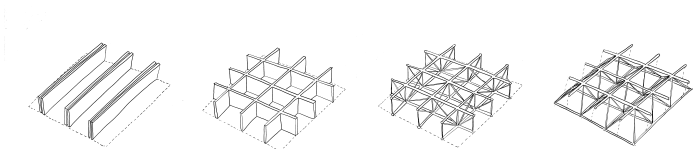


Figura 4.29: Emparrillado

Desdoblar la viga y rotarlas para crear el emparrillado, figura 4.29, permite una muy leve mejora en cantidad de estructura pues el apoyo en los cuatro lados reduce el descenso cerca de los apoyos añadidos, a cambio de una mayor complejidad constructiva derivada de los cruces de piezas, que cabe reducir desplazando verticalmente unas respecto de otras. Por ello, en soluciones de tamaño reducido será ventajosa la viga frente a la ventaja que aportará el emparrillado en soluciones de gran tamaño. La triangulación usual no se hace para las vigas aisladas por la multiplicidad de nudos que resultan, sino desplazando en horizontal medio módulo las dos familias de cordones superiores respecto de los inferiores dando lugar a la malla de pirámides de base cuadrada.

La alternativa al canto constante (o casi constante) de la viga es tender a la forma (anti)funicular, pasando por variantes de cercha de forma más o menos próximas a las del diagrama de momentos dominante, dando lugar al arco, figura 4.30, que usualmente necesitará rigidez tanto por ser el cordón comprimido (pandeo) como por no poder ajustar su forma a todas las

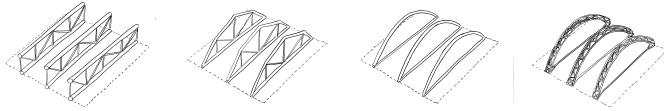


Figura 4.30: Arco

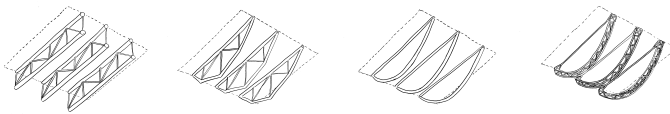


Figura 4.31: Catenaria

leyes de carga concebibles.

Invertir el proceso anterior, colgando la carga en vez de apoyarla, lleva a la catenaria, 4.31, en la que la necesidad de rigidez a flexión del cordón cargado sigue estando presente, aunque ahora solo por razón de las variaciones de forma de la carga. Esta rigidez se aporta a menudo mediante técnicas de pretensado, muchas veces con una catenaria invertida tensante contra la componente portante, arco o catenaria, ocasionalmente con un arco invertido rígido paralelo a la catenaria portante. La catenaria genera, sin embargo, el problema de tener que levantar los apoyos cuando, en general, el suelo soporte de la cimentación

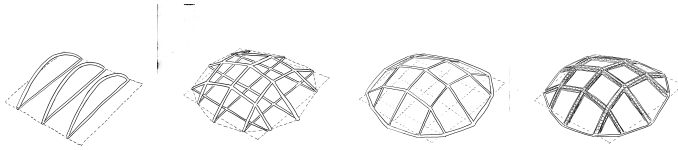


Figura 4.32: Arcos cruzados

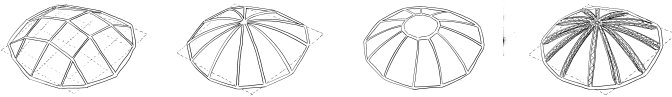


Figura 4.33: Arcos radiales

está a cotas más bajas que las de la cubierta.

Alternativa a rotar las vigas para generar el emparrillado es rotar los arcos para generar arcos cruzados, figura 4.32, si bien ahora, si se quiere hacer coincidir las cotas en los cruces, será necesario modificar levemente la planta que hemos considerado inicialmente cuadrada, a una forma poligonal más cercana a la circunferencia. Ahora la malla de tirantes en tracción se sustituye eficazmente por un anillo. Los arcos siguen siendo cordones comprimidos con requisitos de rigidez local a flexión, aunque algo menores al poderse transferir carga en dos direcciones.

La alternativa a la malla que se deriva de la rotación com-

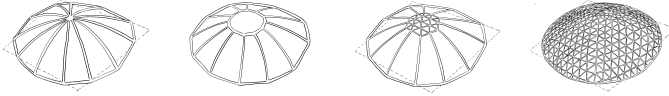


Figura 4.34: Cúpula

pleta de la familia principal es la solución radial, que en arcos resultará en arcos radiales, figura 4.33, bien conocida en la construcción tradicional, y en la que la clave se resuelve usualmente mediante un disco o un anillo (dejando un óculo tal vez) al que acometen de idéntica forma todos y cada uno de los radios.

Si el disco o anillo de la clave de la solución precedente se sustituye por una malla y esta se extiende a la totalidad de la superficie, resulta la cúpula, figura 4.34, que para dimensiones pequeñas tiene rigidez local importante dada la doble curvatura, pero que para grandes dimensiones requiere nuevamente de rigidez en flexión, lo que da lugar a las soluciones de doble capa, etc.

La alternativa radial a la malla en vigas lleva a las cerchas radiales, cuyos anillos centrales para recoger cordón comprimido y traccionado se transforman habitualmente en tambores, cuya caja triangulada deberá transportar el cortante entre unas cerchas y otras en los casos de cargas no simétricas. Pero esta operación de transferencia anular de cargas y equilibrios a través del efecto circunferencial del tambor puede usarse en cualesquiera

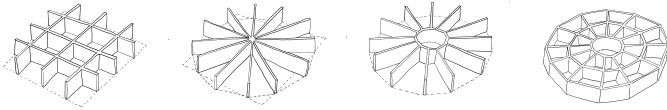


Figura 4.35: Tambor

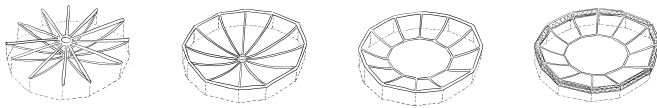


Figura 4.36: Cesta

otros radios de la planta, dando lugar al tipo que denominamos tambor, figura 4.35, en el que la concentración de material que exigiría una red radial de cerchas en su centro puede difundirse de mejor forma por toda la cubierta.

Finalmente, si en la solución radial de catenarias usamos un anillo como sustituto del conjunto de cordones comprimidos radiales, tenemos la forma que denominamos cesta, figura 4.36, cuyo anillo central traccionado puede ser de un diámetro apreciable de tal forma que el óculo pasa a dejar cubierta solo una fracción de la superficie, como podrían ser las gradas de un estadio, dejando libre la arena central. El anillo comprimido

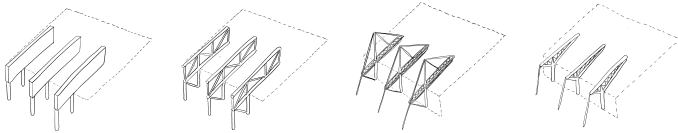


Figura 4.37: Voladizo

requerirá rigidez y, si esta es apreciable, permitirá resistir las flexiones en planta que puedan derivarse tanto de asimetrías en las cargas como de posibles desviaciones en planta respecto a la forma circular.

Frente a las familias de soluciones para la estructura con apoyos en el contorno estarían las familias semejantes que cabe concebir para una estrategia de apoyo en el centro, con toda una tipología de posibles variantes de voladizos compensados formando *setas* o parasoles con toda la variabilidad ya vista para el uso de apoyos laterales. Sin embargo estas soluciones son menos comunes en tanto que ese apoyo central resulta contradictorio con buena parte de los usos. Si se buscan soluciones en vuelo con solo apoyo lateral resulta imprescindible la aportación de la estructura necesaria para la flexión de enlace del voladizo, figura 4.37, lo que reduce el abanico de posibilidades al no contar ya con las posibilidades de apoyo que abren el resto de lados o direcciones del polígono.

Lógicamente pueden combinarse estas últimas soluciones en vuelo en los lados del polígono con las soluciones de vano en el

centro del polígono, lo que da lugar a variantes comparables a la viga con momentos negativos en apoyo y positivos en vano, variantes que resulta fácil identificar en muchas soluciones de cubiertas de estadios, etc. pero que no parece necesario seguir explorando aquí.



## Capítulo 5

# Métodos de discretización

En los capítulos 1 a 3 hemos empleado la técnica de representar el comportamiento estructural en base a los valores y relaciones de un conjunto de variables discretas capaces de describir fuerzas y movimientos (o esfuerzos y deformaciones) referidos a un conjunto limitado de puntos de la estructura, a partir de los que cabía extrapolar o deducir los del conjunto constituido por el continuo de esta: las variables  $F$ ,  $U$ ,  $f$ ,  $u$ , y sus relaciones  $K$ ,  $k$ , etc...

En estructuras de barras esta estrategia ha permitido obtener las relaciones algebraicas necesarias para formular y resolver problemas de análisis o de proyecto, tal como se definen en el

apartado 1.1.4, mediante los recursos aportados por los resultados del enfoque elástico, 1.31, o plástico, 1.88.

En geometrías más complejas, basadas en distribuciones del material estructural en superficies o volúmenes extensos, tenemos que considerar la existencia de un continuo de infinitud de puntos sobre el que no resulta aplicable de forma inmediata el procedimiento anterior. Las relaciones mecánicas, cinemáticas y mutuas a considerar en el continuo deben tener en cuenta esa infinitud. Se trata de las funciones y ecuaciones de campo de la mecánica de sólidos que, en una forma general, adoptan como resumimos más adelante el formato de ecuaciones diferenciales, apartado 5.1.1, ecuaciones cuya solución exige el establecimiento tanto de las condiciones de campo —en el interior del continuo considerado— como de contorno —en la superficie o borde exterior de dicho continuo— condiciones que responderán al tipo de continuo y de problema considerado.

Sin embargo, si la dificultad en la solución del problema diferencial es importante, usualmente por complejidad geométrica y por tanto en la forma requerida para las funciones que describirían las soluciones, cabe pensar en establecer métodos que permitan identificar variables localizadas en un número finito de puntos o regiones, a partir de las cuales puedan determinarse las relevantes en el continuo y sus relaciones. En esto consisten los métodos de discretización, cuya descripción, apartado 5.1.2, y aplicación a problemas estructurales existentes en edificación es objeto de este capítulo.

Dado que entre tales métodos se ha generalizado en el ámbito profesional el uso del Método de los Elementos Finitos, MEF, se dedica a este una especial atención, en los apartados 5.2 a 6.4.

## 5.1. El continuo representado desde valores discretos

El objetivo de este apartado es trasladar la descripción del comportamiento de la estructura desde las funciones de punto que describirían este en el continuo de los infinitos puntos de esta, hasta un conjunto amplio, pero limitado, finito, de variables.

Para ello consideramos aquí que cabe describir el comportamiento de la estructura a través de las funciones y operadores siguientes aplicadas al continuo estructural:

<b>desplazamientos</b>	$v$	vector que define el movimiento del punto.
<b>cargas</b>	$\varphi$	densidad de carga en el punto, carga por unidad de volumen.
<b>deformaciones</b>	$\epsilon$	tensor descriptivo de las deformaciones del entorno de ese punto.
<b>esfuerzos</b>	$\sigma$	tensor de esfuerzos en un elemento diferencial situado en torno al punto.
<b>rigidez</b>	$\kappa$	relación que permite determinar, para el material localizado en el punto, los esfuerzos a partir de las deformaciones.

- operadores:**  $\partial(\cdot)$  Operador diferencial, que expresa el gradiente en los valores de una cierta variable, aquella a la que se aplica el operador, en el punto considerado. Este caracteriza las relaciones entre variables cinemáticas.
- $\partial^*(\cdot)$  Operador diferencial adjunto al anterior (ver 2.1.1.3) Caracteriza las relaciones entre las variables estáticas. (5.1)

Las ecuaciones de campo son las que, en cada rama de la teoría de estructuras, relacionan las variables anteriores en todos los puntos del continuo estructural. Vamos a ver un subconjunto amplio de estas, aunque no es objeto de este texto justificarlas: se dan por válidas tal como se detallan en los textos clásicos de las correspondientes teorías.

### 5.1.1. Ecuaciones de campo en mecánica de sólidos

Se pretende en este apartado generalizar las ecuaciones de todas las teorías en un formato unificado común

#### 5.1.1.1. Teoría clásica de barras

En esta teoría, en la que las propiedades y el estado de la barra se describen a través de funciones para la posición lineal  $x$  a lo largo de la directriz de la barra, las funciones descritas en

la lista 5.1 son, correlativamente:  $\mathbf{v} = w(x)$ , el desplazamiento vertical —flecha— del punto considerado,  $\varphi = q(x)$ , la densidad de carga vertical aplicada en dicho punto,  $\epsilon = c(x)$ , la curvatura local en las coordenadas del punto y  $\sigma = M(x)$ , el momento flector sobre la rebanada elemental en dichas coordenadas.  $\kappa = EI$  es la rigidez en la sección, que en teoría de vigas es el producto del módulo de elasticidad por la inercia, y que expresa las relaciones (materiales o *constitutivas*) entre tensión y deformación en barras elásticas:  $M = EI c$ .

Finalmente el operador  $\partial(\cdot)$  es en teoría de barras el operador  $\partial(\cdot) = \partial = d^2/dx^2 = d^2(\cdot)/dx^2$ , que establece las relaciones entre flecha y curvatura (compatibilidad). Pero es idéntico al operador  $\partial^*(\cdot)$  que describe las relaciones entre momento y densidad de carga locales (equilibrio), en las expresiones  $c = d^2w/dx^2$  y  $q = d^2M/dx^2$ . En este caso  $\partial(\cdot) = \partial^*(\cdot)$ , es un operador *autoadjunto*, al ser de segundo grado.

### 5.1.1.2. Teoría de la elasticidad

En este caso tenemos los desplazamientos  $\mathbf{v}$  descritos por el vector columna  $[u \ v \ w]^T$ , que describe el desplazamiento en las tres direcciones del espacio, y la densidad de carga por unidad de volumen sobre el punto, como el vector columna, también de tres componentes,  $\varphi = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ .

El tensor de tensiones  $\sigma$ , es un tensor tridimensional simétrico que cabe representar por la matriz 
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$
 que, siendo simétrica, iguala los valores en torno a la diagonal,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , y

donde se usa el convenio  $\sigma_i = \tau_{ii}$ . En los subíndices de  $\tau_{ij}$  se usa el primer subíndice para indicar la dirección perpendicular a la cara del cubo elemental que se está considerando y el segundo subíndice para la dirección de la proyección que se considera de la tensión ejercida sobre dicha cara, de tal modo que las  $\sigma$  son las tensiones normales y las  $\tau$  las tangenciales. En los formatos matriciales que usaremos más adelante es habitual escribir el conjunto de componentes independientes del tensor de tensiones en forma de vector columna, usándose por tanto el formato  $\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$ .

El tensor de deformaciones relevante es nevemente tridimensional  $\begin{bmatrix} \epsilon_x & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & \epsilon_y & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$ , donde  $\epsilon_i = b_{ii}$  sería el desplazamiento relativo al punto considerado de otro punto situado sobre el eje  $i$  a una distancia unidad y medido en la misma dirección  $i$  y por tanto mide el alargamiento unitario en esa dirección, y donde  $b_{ij}$  sería, para ese mismo punto sobre el eje  $i$  relativo al mismo origen, el desplazamiento en la dirección  $j$  derivado de la deformación de la esfera de radio unidad. La distorsión angular  $\gamma_{ij}$  entre los ejes  $i$  y  $j$  se mide por la suma  $b_{ij} + b_{ji}$ , por lo que, siendo el tensor simétrico,  $b_{ij} = b_{ji}$ , se usa  $b_{ij} = \gamma_{ij}/2$ . Dada la regla de usar variables estáticas y cinemáticas energéticamente congruentes, en las expresiones matriciales que vamos a emplear se usará la forma de vector columna siguiente:  $\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$ , dado que en la expresión de densidad trabajo para una cierta distorsión angular tendríamos  $\sigma_{ij}b_{ij} + \sigma_{ji}b_{ji} = \sigma_{ij}\gamma_{ij}$ , por la simetría de ambos

tensores y la relación entre  $\gamma$  y  $b$ .

De este modo cabe plantear a partir de estas variables el conjunto de las ecuaciones de campo en teoría de la elasticidad: las clásicas de equilibrio, compatibilidad y de relaciones de constitución material.

Las ecuaciones de equilibrio igualan en cada dirección del espacio tridimensional la densidad de carga sobre el punto a la diferencia, entre caras opuestas del cubo unidad, de las tensiones orientadas en esa dirección :

$$\varphi = \mathfrak{D}^* \sigma \equiv \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

En la literatura es frecuente encontrar para el adjunto  $\mathfrak{D}^*$  la expresión simbólica  $\mathfrak{D}^{-T}$ , tal como sugiere la comparación con el operador siguiente.

Las ecuaciones de compatibilidad local en el punto, en las que las diferencias entre desplazamientos de los puntos próximos se igualan a las deformaciones son

$$\epsilon = \mathfrak{D} \nu \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Finalmente las ecuaciones que caracterizan el comportamiento material, en su versión elástica isótropa<sup>1</sup> son

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

ecuación que es habitualmente deducida a partir de la relación inversa (5.5), considerando el efecto de alargamiento elástico en la dirección de la tensión de tracción y el simultáneo de acortamiento por el efecto Poisson en las direcciones perpendiculares, así como por la relación entre los módulos elásticos longitudinal y transversal,  $E/G = 2(1+\nu)$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\kappa}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

---

1. de comportamiento idéntico para todas las direcciones del espacio

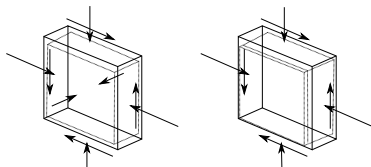


Figura 5.1: Estados planos, de deformación y de tensión

En edificación es poco habitual considerar el estado triple de tensión–deformación, siendo lo habitual recurrir a los estados planos, sea de tensión, en los que las tensiones en los planos de dirección  $z$  se consideran despreciables frente a los otros dos planos ( $\sigma_z \approx 0$ ;  $\tau_{zx} \approx 0$ ;  $\tau_{zy} \approx 0$ ), sea de deformación, en los que se considera coacción completa para la dirección  $z$  de tal modo que las deformaciones correspondientes son nulas ( $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ ), figura 5.1. En dichos estados se reducen las variables consideradas eliminando dicha dirección del conjunto de tensiones y deformaciones consideradas, obteniendo como ecuaciones para las relaciones elásticas tensión–deformación (o sus inversas) las siguientes:

### Estado plano de deformación

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E/(1+\nu)}{(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y) \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

En este caso la reducción se deriva de los ceros en las deformaciones, que suponen la eliminación de las correspondientes filas y columnas de la expresión 5.4 para generar la 5.6, cuya inversa aporta la 5.7.

### Estado plano de tensión

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$$

Estas ecuaciones se obtienen considerando nulas las tensiones en la cara  $z$  y eliminando por tanto las correspondientes filas y columnas en la expresión 5.5 para obtener la 5.9, cuya inversa es la 5.8.

La expresión 5.8 está escrita en formato matricial, que en forma condensada se representa como  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}$ , pero es también

usual en la literatura el uso del formato de Einstein,  $\sigma_i = \kappa_{ij}\epsilon_j$ , que supone una suma implícita de todos los productos con igual índice en los casos de índices repetidos.

Una alternativa a esta formulación es la tensorial: dado que tanto tensión como deformación son tensores de segundo orden, la rigidez elástica que las relaciona es un tensor de cuarto orden, y en este caso la notación cambia. Los tensores relevantes en el caso de estado plano son

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \epsilon_x & b_{xy} \\ b_{yx} & \epsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}; \quad \epsilon_{xy} = b_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

y la ecuación elástica adopta la forma

$$\sigma_{ij} = \kappa_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (5.10)$$

donde podemos interpretar  $\kappa_{ijkl}$ , de cuatro dimensiones, en la forma siguiente, en la que los índices  $i, j$  seleccionan el bloque y los  $k, l$  el término en dicho bloque:

$$\kappa_{ijkl} = \kappa_{ij(kl)} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ \frac{1-\nu}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

### 5.1.1.3. Teoría de placas delgadas en flexión

En esta teoría, las ecuaciones del equilibrio del diferencial de los cortantes con la densidad de carga, y del equilibrio del diferencial de los momentos con el momento aportados por los

cortantes dan lugar a una ecuación combinada del equilibrio, en momentos y densidad de carga:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q &= 0 \\
 \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + V_x &= 0 \\
 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + V_y &= 0 \\
 \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} &= q
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Y por otro lado las relaciones de compatibilidad que relacionan diferencias en descensos con inclinaciones de la placa y diferencias en estas inclinaciones con las curvaturas permite ligar curvaturas con flechas:

$$\begin{aligned}
 c_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad c_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad c_{xy} = c_{yx} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \\
 \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \\
 c_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad c_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad c_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Finalmente los momentos en la placa pueden obtenerse por integración de las tensiones correspondientes a los estados planos de cada plano paralelo al plano medio según se recorre el espesor de la placa y, dado que estas tensiones se derivan elásticamente de las deformaciones de dichos planos, que pueden deducirse de

las curvaturas, resultan las ecuaciones de los momentos de la placa dependientes de las curvaturas de esta.

En formato matricial tenemos, por tanto, las mismas tres familias de ecuaciones:

Equilibrio de cargas-cortantes-momentos<sup>2</sup>

$$q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (5.14)$$

Compatibilidad descensos-giros-curvaturas

$$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} w; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial} w \quad (5.15)$$

Rigidez

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_{xy} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.16)$$

donde  $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D$  es la llamada *constante de placa*, término equivalente a la rigidez  $EI$  de la sección de una viga en teoría de barras. Si en la ecuación 5.16 aplicamos el operador diferencial de la 5.14 a ambos miembros, sustituímos el resultado del primero de acuerdo a 5.14, y sustituímos las curvaturas del segundo de acuerdo a 5.15, es decir, si combinamos los tres grupos

---

2. En este caso  $\boldsymbol{\partial}^* = \boldsymbol{\partial}^T$ .

de ecuaciones, obtenemos la ecuación diferencial de la placa

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}; \quad \partial^T(\kappa \partial \mathbf{v}) = \varphi \quad (5.17)$$

#### 5.1.1.4. Condiciones de contorno

Resolver el problema diferencial exige, además de la ecuación general que cabe deducir tal como hemos hecho en el caso de la placa, la imposición de condiciones en el contorno del volumen, sin las que la solución resultaría indeterminada. Aunque estas condiciones pueden ser variadas, en general se consideran dos grandes grupos:

**Condiciones “esenciales”, de Dirichlet: cinemáticas, CDC, en sustentación**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\Gamma_s}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_s \quad (5.18)$$

Establecen o fijan los desplazamientos en la región de sustentación, o de movimientos impuestos, de la superficie,  $\Gamma_s$ , y resultan en general sencillas de plantear.

**Condiciones “naturales”, de Neumann: estáticas, CNS en puntos libres**

$$\varphi = \varphi_{\Gamma_l}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l \quad (5.19)$$

Establecen las cargas aplicadas en la parte de la región libre de la superficie, aquella que no tiene coaccionado el movimiento directamente,  $\Gamma_l$ . En tanto que las cargas *respuesta* dependen

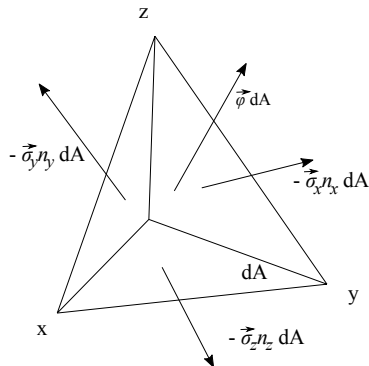


Figura 5.2: Triedro de equilibrio en la superficie. Las tres caras ocultas (el triedro) están en el interior del volumen  $\Omega$ , mientras que la cara vista está en la superficie exterior libre  $\Gamma_l$  de dicho volumen. Se representan las tensiones y superficies de las cuatro caras, donde las del triángulo son proyección de la del triángulo en la superficie

de los estados de tensión y estos de los desplazamientos incógnita, son condiciones más difíciles de plantear en formulaciones analíticas. Un ejemplo clásico es el del triedro de equilibrio en la superficie en problemas de elasticidad tridimensional, figura 5.2 en la que se indican los ejes globales y el triángulo de superficie  $dA$ , de vector (vector normal y unitario)  $\mathbf{n}$ , sometido a una densidad de carga superficial  $\varphi_\Gamma$ . El equilibrio (vectorial)

implica

$$\begin{aligned}
 -\sigma_x \alpha_{nx} \, dA - \sigma_y \alpha_{ny} \, dA - \sigma_z \alpha_{nz} \, dA + \varphi_\Gamma \, dA &= 0 \\
 -\sigma_x n_x - \sigma_y n_y - \sigma_z n_z + \varphi_\Gamma &= 0 \\
 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_\Gamma &= \varphi_\Gamma
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

que cabe expresar como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{\Gamma x} \\ \varphi_{\Gamma y} \\ \varphi_{\Gamma z} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

### 5.1.1.5. Ecuaciones de campo y ecuación diferencial en todas las teorías elásticas.

En todos los casos nos hemos encontrado como conjunto de las ecuaciones de campo los tres grupos

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\partial}^* \boldsymbol{\sigma} \tag{equ} \tag{5.22}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{v} \tag{com} \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\epsilon} \tag{mat} \tag{5.24}$$

Y si, tal como hemos hecho en el caso de las placas, combinamos las tres expresiones obtenemos como *ecuación diferencial del problema* la expresión

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\partial}^* (\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{v}) \tag{5.25}$$

que debe cumplirse en todos los puntos del volumen, que podemos denotar por  $\Omega$ . El primer término de la ecuación es la

densidad de carga aplicada en cada punto  $\mathbf{x}$  del volumen, podemos denotarlo con  $\varphi_\Omega$ , mientras que el segundo pasa a ser una función que determina la densidad de carga capaz de ser equilibrada por una expresión diferencial del desplazamiento  $\mathbf{v}$ , expresión que se escribe en forma de *respuesta* a dicho desplazamiento,  $\varphi(\Theta(\mathbf{v}))$ , con lo que el desarrollo nos llevaría, tal como en el caso de la placa, a expresiones en la forma

$$\varphi(\Theta(\mathbf{v})) - \varphi_\Omega = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.26)$$

Que viene a decir que un cierto operador aplicado a los desplazamientos debe igualar la carga aplicada, y donde el operador combina los tres grupos de ecuaciones del problema.

Además de la ecuación diferencial 5.25 deben establecerse las condiciones de contorno, ecuaciones 5.18 y 5.19. Y con ello tenemos la forma *fuerte* del problema. Dado que trata de una forma en general de difícil o muy difícil solución, aunque es útil para comprender las características del problema, no se emplea directamente en su solución.

#### 5.1.1.6. Forma débil de las ecuaciones de campo

Para formularla se recurre directamente al principio de los trabajos virtuales, que afirma la igualdad entre el trabajo externo y el interno realizados por un estado de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  equilibrados con las cargas  $\varphi$  en el movimiento derivado de añadir cualquier estado de deformación y desplazamiento compatible  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \bar{\mathbf{v}}$ .

En las cargas se consideran todas las aplicadas al cuerpo, que incluyen tanto las aplicadas al interior del volumen, tal vez gra-

vitatorias,  $\varphi_\Omega$ , medidas por unidad de volumen, como las aplicadas en la superficie libre,  $\varphi_\Gamma$ , medidas por unidad de superficie. Se considera la nulidad o coacción completa al desplazamiento en las regiones de sustentación de la superficie  $\varphi_{\Gamma_s}$ .

De tal modo que ese principio permite formular el problema del equilibrio en la forma alternativa siguiente:

$$\int_{\Omega} \bar{\epsilon}^T \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \bar{v}^T \varphi_\Omega \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{v}^T \varphi_\Gamma \, d\Gamma, \\ \forall([\bar{v}, \bar{\epsilon}], [\varphi_\Omega, \varphi_\Gamma, \sigma]) \text{ COM, EQU} \quad (5.27)$$

Se denomina *forma débil* frente a la *forma fuerte* contenida en la expresión 5.22, empleada en la combinación que lleva al problema diferencial 5.25, en tanto que el tipo de funciones con las que cabría tantear soluciones en la expresión diferencial requiere un mayor grado de continuidad<sup>3</sup> del requerido por las funciones con las que cabría tantear soluciones en esta última expresión integral, 5.27. En el estado que se pretende determinar,  $\sigma$ , ligado a las cargas aplicadas  $\varphi$ , debe poder verificar dicha expresión para cualquier estado de desplazamiento compatible  $\bar{v}, \bar{\epsilon}$  discernible.

Puede demostrarse la identidad entre ambas aproximaciones, partiendo de la *forma fuerte* 5.25 haciendo uso del Teorema de Green–Gauss, que permite la integración por partes de la expresión que usamos ahora con el criterio de signos habitual en los textos clásicos de elasticidad

$$\partial^* (\kappa \partial v) + \varphi = 0 \quad (5.28)$$

---

3. asociada a la posibilidad de saltos en las funciones que suponen posibles valores indeterminados o infinitos en algunas de sus derivadas.

expresión en la que, multiplicando por un campo de desplazamientos arbitrarios  $\bar{\mathbf{v}}$ , debe mantenerse la nulidad en todo punto y, por tanto, la nulidad en la integral sobre todo el dominio,

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}^T (\boldsymbol{\partial}^* (\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial} \mathbf{v}) + \boldsymbol{\varphi}) \, d\Omega = 0 \quad (5.29)$$

pudiendo ahora procederse al desglose de términos y su integración por partes

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\partial}^* (\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial} \mathbf{v}) + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\varphi}_{\Omega} \, d\Omega = \\ & \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\partial} \bar{\mathbf{v}})^T (\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial} \mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\varphi}_{\Omega} \, d\Omega = \\ & \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\varphi}_{\Gamma} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\varphi}_{\Omega} \, d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = W_e - W_i = 0, \\ & \quad \forall([\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\epsilon}}], [\boldsymbol{\varphi}_{\Gamma}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}]) \text{ COM, EQU} \end{aligned} \quad (5.30)$$

### 5.1.2. Técnicas de discretización

Una vez que disponemos de un modelo capaz de representar las condiciones del equilibrio elástico en el continuo, su solución exigiría resolver el correspondiente problema diferencial, tarea que solo es posible en muy reducidas ocasiones. Por ello la estrategia habitual es transformar el problema de determinar las funciones solución, en un problema en el que estas funciones puedan ser aproximadas por una lista de valores discretos atribuidos a un conjunto amplio, pero finito, de variables, y donde el problema se reduzca a determinar los valores de estas variables

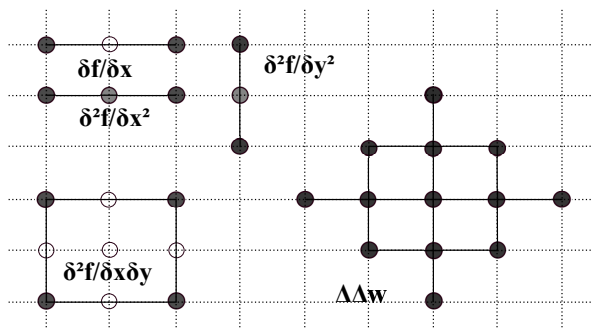


Figura 5.3: Diferencias finitas. Puntos próximos afectados por la aproximación a diferentes operadores diferenciales en un punto.

que proporcionen la mejor aproximación posible a las funciones buscadas en el problema diferencial.

Se trata, pues, de la transformación del problema del continuo en un problema de valores para variables discretas. Veamos algunas de las estrategias apropiadas para ello.

### 5.1.2.1. Diferencias finitas

En este método se aborda la solución del problema de campo en su formulación *fuerte* discretizando la función y sus derivadas. Para ello se traza una malla regular de puntos sobre los que se busca determinar los valores de las variables de campo de dicha formulación (los descensos, por ejemplo en el caso de las placas, ecuación 5.17). Las expresiones diferenciales se apro-

ximan con las diferencias entre los valores de dichas variables en puntos próximos, figura 5.3:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &\approx \frac{w_{1,0} - w_{-1,0}}{2\Delta_x}; & \frac{\partial w}{\partial y} &\approx \frac{w_{0,1} - w_{0,-1}}{2\Delta_y}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &\approx \frac{\frac{w_{1,0} - w_{0,0}}{\Delta_x} - \frac{w_{0,0} - w_{-1,0}}{\Delta_x}}{\Delta_x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &\approx \frac{w_{1,1} + w_{-1,-1} - w_{1,-1} - w_{-1,1}}{4\Delta_x \Delta_y}\end{aligned}$$

De este modo los problemas pasan a constituir un conjunto de ecuaciones lineales en los valores de las variables, lo que permite obtener estos y, por tanto, la aproximación buscada por interpolación.

### 5.1.2.2. Aproximaciones nodales: de puntos a regiones

Los métodos más actuales, por elementos finitos (finite element method, FEM, o MEF en español), elementos de contorno (boundary element method, BEM) o sin malla (meshless methods), establecen una aproximación diferente, que veremos en detalle para el método de los elementos finitos en el apartado 5.2. En dicha aproximación se busca igualmente interpolar o aproximar las funciones solución a partir de los valores de ciertos parámetros, usualmente, pero en algunos casos no exclusivamente, ligados a la componente cinemática del problema, establecidos en puntos privilegiados del dominio: los nodos. En

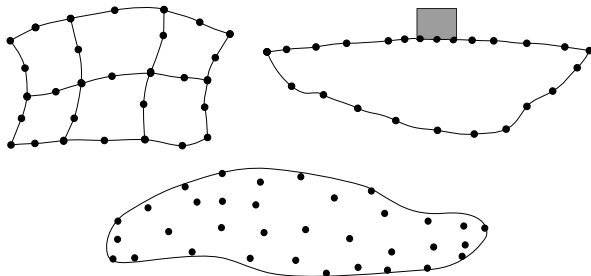


Figura 5.4: Aproximaciones nodales: elementos finitos (FEM), elementos de contorno (BEM), métodos de partículas (meshless).

el caso de los elementos finitos, las funciones se interpolan localmente en cada elemento a partir de los valores de los nodos en contacto con el elemento, mientras que la continuidad se asegura a través de los nodos compartidos entre elementos en contacto. En el caso de los elementos de contorno se consideran los valores de las variables en el contorno del dominio y su influencia en la función de interés en cualquier punto en el interior del dominio. Y en el caso de los métodos sin malla, la aproximación se realiza mediante una interpolación más difusa que determina en cualquier punto el valor de la función de interés a partir de los existentes en las variables de los nodos próximos y de su grado de proximidad.

Las formulaciones para estos métodos consisten en la reescritura de las ecuaciones de campo, en general en su formato

débil, en base a las variables nodales establecidas, lo que permite transformar el problema diferencial en un problema numérico con elevado número de variables, en general lineal, o linealizable por pasos tal como se vio en el apartado 2.1.2.4, problemas susceptibles de ser resueltos mediante alguno de los procedimientos numéricos propios del álgebra lineal.

Aun cuando todos los métodos citados han dado origen a herramientas de gran utilidad y siguen de actualidad en algunos campos, tratamos aquí solo del método de los elementos finitos, dado que es el empleado casi universalmente en las herramientas software habituales en los estudios profesionales dedicados a la ingeniería estructural.

## 5.2. Las ecuaciones en la base del método de los elementos Finitos

Se desarrolla a continuación una descripción general de los fundamentos del MEF y de sus principales ecuaciones, aun sin entrar demasiado en los detalles, que se analizarán en el capítulo 6.

### 5.2.1. La interpolación por elementos de las ecuaciones de campo

Consideremos la condición de equilibrio para un estado mecánico (de esfuerzos–cargas)  $\sigma, \varphi$  ligados a un estado cinemático (de deformaciones–desplazamientos)  $\epsilon, v$  compatible que cumpla los

tres grupos de ecuaciones del análisis elástico,

$$\partial^* \sigma = \varphi; \quad \epsilon = \partial v; \quad \sigma = \kappa \epsilon \quad (5.31)$$

y consideremos la formulación *débil* imaginando estados cinemáticos (suelen calificarse como *virtuales*) compatibles,  $\bar{\epsilon}, \bar{v}$ , que por tanto verifican

$$\bar{\epsilon} = \partial \bar{v} \quad (5.32)$$

Dicha formulación, considerando cargas aplicadas solo en el contorno, asegura la igualdad entre trabajos interno y externo del estado equilibrado en el movimiento compatible, de modo que que

$$\int_{\Omega} \bar{\epsilon}^T \sigma \, d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{v}^T \varphi \, d\Gamma, \quad \forall (\bar{\epsilon}, \bar{v} | \bar{\epsilon} = \partial \bar{v}) \quad (5.33)$$

Lo que aportan los métodos es una forma de interpolación lineal de las funciones de dicha formulación, en todo punto  $\mathbf{x}$  del dominio  $\Omega$ , a partir de los valores, desconocidos inicialmente, de un gran número de parámetros  $\mathbf{a}$ , vinculados a las regiones del dominio. Es posible usar formatos diferentes dependiendo de cuales sean las funciones que se interpolan:

**clásico** se interpolan los desplazamientos  $\mathbf{v}$

**híbrido** se interpolan también los estados de esfuerzo  $\sigma$

Para las interpolaciones se usan funciones preestablecidas y por ello conocidas, dependientes del método y del tipo de dominio, funciones que permiten escribir, dependiendo de la forma de la

aproximación

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a},; \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \approx \boldsymbol{\partial}\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{b}; \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \approx \boldsymbol{\kappa}^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{b}\end{aligned}$$

Vamos a seguir el desarrollo de la aproximación clásica. En ella, las aproximaciones a las funciones de campo son

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{N}\mathbf{a}; \quad \boldsymbol{\epsilon} \approx \boldsymbol{\partial}\mathbf{N}\mathbf{a}; \quad \boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\partial}\mathbf{N}\mathbf{a} \quad (5.34)$$

Estas aproximaciones pueden emplearse tanto para el estado de equilibrio cuya solución se busca, como para los estados de deformación compatible virtuales. Por lo tanto la forma débil puede expresarse aproximadamente:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \approx \\ \int_{\Omega} \bar{\mathbf{a}}^T ((\boldsymbol{\partial}\mathbf{N})^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial}\mathbf{N}) \mathbf{a} d\Omega &= \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma\end{aligned} \quad (5.35)$$

y dado que los parámetros tanto del estado real como del virtual son valores numéricos independientes de las funciones, resulta

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}^T \left( \int_{\Omega} (\boldsymbol{\partial}\mathbf{N})^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial}\mathbf{N} d\Omega \right) \mathbf{a} &= \bar{\mathbf{a}}^T \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma, \quad \forall \bar{\mathbf{a}} \\ \left( \int_{\Omega} (\boldsymbol{\partial}\mathbf{N})^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\partial}\mathbf{N} d\Omega \right) \mathbf{a} &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma\end{aligned} \quad (5.36)$$

expresión en la que las integrales en ambos miembros pueden realizarse independientemente del valor desconocido de los parámetros  $\mathbf{a}$  de la aproximación. De ello resulta un sistema lineal de

ecuaciones en el que, si los parámetros  $\mathbf{a}$  se interpretan como desplazamientos, la forma deviene en la ya conocida expresión de rigidez: cargas igual a rigidez por desplazamientos, 1.24:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F}; \quad \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{U}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (5.37)$$

Lo característico del Método de los Elementos Finitos, en el que la estructura se descompone en una lista de elementos conectados, es que la expresión 5.36 que permite determinar los coeficientes de la matriz  $\mathbf{K}$  y el vector  $\mathbf{F}$ , se calcula sustituyendo las integrales en el dominio o el contorno por la suma de tales integrales sobre el conjunto de todos los elementos que componen la estructura:

$$\int_{\Omega} \phi \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \phi \, d\Omega; \quad \int_{\Gamma} \psi \, d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_e} \psi \, d\Gamma \quad (5.38)$$

Para asegurar la identidad entre la integral completa con la suma por elementos es preciso asegurar la suficiente continuidad en las funciones involucradas para evitar la pérdida de contenido al atravesar los límites entre elementos: hay que asegurar que esas integrales resultan nulas en el cruce de dichos límites. Veremos las implicaciones de este requisito más adelante.

## 5.2.2. Puntos libres y de sustentación: reacciones y coacciones

Vimos en el apartado 1.3.2 que la inclusión del total de los posibles parámetros tanto en regiones libre como en las sustentadas lleva a una expresión, ecuación 1.28, que no es invertible al

permitir movimientos sin carga, como serían los desplazamientos rígidos de la estructura:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{ls} \\ \mathbf{K}_{sl} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_s \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

de tal modo que es la reducción que permite considerar conocidos los movimientos de los nodos sustentados, en base a las coacciones impuestas por la sustentación, la que permite expresiones susceptibles de solución:

$$\mathbf{F}_l - \mathbf{K}_{ls}\mathbf{U}_s = \mathbf{F}_{l,eq} = \mathbf{K}_{ll}\mathbf{U}_l \quad (5.40)$$

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{F}_s = \mathbf{K}_{sl}\mathbf{U}_l + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{U}_s \quad (5.41)$$

La primera expresión permitiría la determinación de los desplazamientos libres  $\mathbf{U}_l$  establecidas las cargas conjugadas con esos grados de libertad,  $\mathbf{F}_l$ , junto con los valores de los desplazamientos forzados o anulados en los puntos sustentados,  $\mathbf{U}_s$ . Si son nulos, la relación entre cargas y desplazamientos en los nudos libres es inmediata:  $\mathbf{F}_l = \mathbf{K}_{ll}\mathbf{U}_l$ .

Si son no nulos, tales movimientos en la sustentación se interpretarán como las cargas equivalentes que sería necesario imponer en la estructura para hacerlos compatibles con movimientos nulos de los puntos libres: piénsese en la ecuación 5.40 aplicada a la estructura sin más cargas que las necesarias para imponer los valores no nulos prefijados en  $\mathbf{U}_s$  y nulos en  $\mathbf{U}_l$ .

La segunda de dichas expresiones, ya vista en 1.29, permite la determinación de las reacciones, que no son otra cosa que las fuerzas aplicadas en los puntos de sustentación necesarias para

mantener el estado de equilibrio con las cargas aplicadas al modelo que resulte compatible con los desplazamientos prefijados en la sustentación.

En los programas de ordenador, la construcción de la matriz de rigidez completa de la expresión 1.28 resulta sencilla, pero no lo es tanto la reducción 5.40 en casos en los que los movimientos  $U_s$  en la sustentación sean no nulos, por lo que en ocasiones se aplica el procedimiento trucado siguiente: se coloca un número  $\Xi$  muy alto en los pivotes<sup>4</sup> de  $K_{ss}$ . En el vector de fuerzas, se disponen fuerzas ficticias  $F_s = \Xi U_{s,c}$  donde  $U_{s,c}$  es el valor conocido o prescrito para el correspondiente  $U_s$ . Por tanto, en la aproximación, la correspondiente ecuación a resolver para un cierto grado de libertad  $s$  será

$$F_s = \Xi U_{s,c} = \sum_{i \neq s} K_{si} U_i + \Xi U_s$$

donde los coeficientes de los términos distintos al  $s$  serían pequeños en relación a  $\Xi$ , obteniéndose por tanto  $U_s \approx U_{s,c}$ .

### 5.2.3. Otras formas de coacción

Es posible considerar formas adicionales de coacción, o de imposición de restricciones de otro tipo a los desplazamientos del modelo. Es posible, por ejemplo, en modelos de estructuras de pisos basadas en pórticos representar solo las barras de los

---

4. los términos sobre la diagonal principal de la matriz. Hay que señalar que la alteración de algún pivote implica eliminar la dependencia lineal de esa fila de la matriz de rigidez respecto de las demás, lo que, al hacerlo sobre todas las coaccionadas, elimina la singularidad de la matriz.

pórticos. En este caso, la existencia de forjados —de diafragmas rígidos entre los diferentes pórticos— implica que los desplazamientos horizontales de todos los nudos situados en la misma planta deben estar ligados entre sí, pues derivan todos del desplazamiento y la rotación de la planta. Puede haber otros casos, como en las reducciones del tamaño del modelo por imposición de condiciones de regularidad (las alas de una turbina) etcétera. Es decir, algunos o todos los desplazamientos  $\mathbf{U}$  dependerán, por compatibilidad impuesta, de un número menor de desplazamientos globales  $\mathbf{U}_g$ :  $\mathbf{U} = \mathbf{B}\mathbf{U}_g$ .

En general esto implica que existen ecuaciones que coaccionan los desplazamientos, en la forma

$$\mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

donde la lista de desplazamientos  $\mathbf{U}$  podría separarse entre los *libres*  $\mathbf{U}_l$  y los restringidos o coaccionados  $\mathbf{U}_r$  teniendo

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_l \quad \mathbf{C}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_r \end{bmatrix} &= [\mathbf{0}] \\ \mathbf{U}_r &= -\mathbf{C}_r^{-1}\mathbf{C}_l\mathbf{U}_l \end{aligned} \quad (5.42)$$

resultando posible la sustitución de los grados de libertad  $\mathbf{U}$  por los  $\mathbf{U}_l$ , así como, considerando la dualidad 1.2.5, las correspondientes cargas conjugadas y su relación matricial con los desplazamientos:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}_r^{-1}\mathbf{C}_l \end{bmatrix} \mathbf{U}_l = \mathbf{T}\mathbf{U}_l \quad (5.43)$$

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{T}^T \mathbf{F}; \quad \mathbf{K}_l = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}. \quad (5.44)$$

### 5.2.4. La discretización del comportamiento del elemento

Contando con lo visto en los apartados precedentes podemos proceder ahora al desarrollo de las propiedades de cualquiera de los elementos en que descomponemos la estructura, propiedades que se resumirán en un conjunto limitado, discreto, de variables. Para ello

- se analiza el formato de las ecuaciones a nivel del elemento
- se identifican las funciones de interpolación a emplear
- se construyen las expresiones de carga y de rigidez del elemento que posteriormente se ensamblarán en el modelo de la estructura completa

#### 5.2.4.1. Ecuaciones en el elemento

Se consideran en el elemento nodos en los cuales se establecen los grados de libertad (o posibles desplazamientos)  $\mathbf{u}_e$ , a los que corresponderán las fuerzas conjugadas sobre el elemento  $\mathbf{f}_e$  que se ejercen desde el resto de los elementos en contacto o como cargas sobre el contorno del elemento en los nodos que estén sobre la superficie exterior. Por el principio de los trabajos virtuales, considerando una ley de deformaciones y desplazamientos compatibles  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \bar{\mathbf{v}}$ , para la que los correspondientes movimientos nodales son  $\bar{\mathbf{u}}_e$ , tendremos

$$\int_{\Gamma_e} \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma + \bar{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (5.45)$$

Ahora bien, estamos interpolando  $\bar{\mathbf{v}}$  en la forma  $\bar{\mathbf{v}} \approx \mathbf{N}\bar{\mathbf{a}}$ , de modo que

$$\bar{\mathbf{a}}^T \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma + \bar{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{f}_e = \bar{\mathbf{a}}^T \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\partial}\mathbf{N})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

y si elegimos como parámetros de la interpolación  $\mathbf{a}$  los mismos grados de libertad  $\mathbf{u}_e$  resultará  $\bar{\mathbf{u}}_e = \bar{\mathbf{a}}$ . Considerando que la expresión anterior debe ser cierta para cualquier movimiento virtual y que  $\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\partial}\mathbf{N}\mathbf{u}_e$ , resulta finalmente

$$\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma + \mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\partial}\mathbf{N})^T (\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\partial}\mathbf{N}) d\Omega \mathbf{u}_e \quad (5.46)$$

donde tenemos el vector de carga para las regiones de la superficie cargada del elemento

$$\mathbf{f}_{E,e} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \quad (5.47)$$

y la condición de equilibrio elástico en el elemento

$$\mathbf{f}_{E,e} + \mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e; \quad \mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{b} d\Omega, \quad \text{con} \\ \mathbf{b} = \boldsymbol{\partial}\mathbf{N} = \mathbf{N}'; \quad \mathbf{N} = [\mathbf{N}_1(\Omega_e), \mathbf{N}_2(\Omega_e), \dots]. \quad (5.48)$$

expresión en la que la suma de la carga exterior  $\mathbf{f}_{E,e}$  y los esfuerzos internos ejercidos por el resto de la estructura sobre el elemento  $\mathbf{f}_e$  están en el equilibrio elástico definido por las deformaciones inducidas por los desplazamientos nodales  $\mathbf{u}_e$ . El

total de las fuerzas sobre el elemento resulta igual a la rigidez de este por sus desplazamientos nodales.

Si definimos, por tanto, el conjunto de funciones nodales  $\mathbf{N}_i(\Omega_e)$  asociadas a cada uno de los nodos  $i$  del elemento tales que permitan interpolar en el interior del elemento los movimientos de cualquier punto de este a partir de los movimientos  $\mathbf{u}_{e,i}$  de tales nodos, será posible determinar las cargas externas y la rigidez, locales en el elemento, necesarias para ensamblar las globales de la estructura, en la manera ya estudiada para las estructuras de barras, en el apartado 2.1.2.2.

#### 5.2.4.2. Funciones Nodales (o funciones de forma)

La estrategia para establecer las funciones de interpolación no es otra que atribuir en cada elemento y a cada nodo funciones nodales o de forma cuyo valor sea la unidad en las coordenadas de dicho nodo, y nulo en las coordenadas del resto de los nodos del elemento. Pues efectivamente, si esto es así, dado que los parámetros de la interpolación son los movimientos de los nodos, la interpolación asignará a estos tales movimientos  $\mathbf{u}_e$ , atribuyendo al resto de los puntos del elemento movimientos compatibles con estos:

$$\mathbf{v}(\Omega_e) = \mathbf{N}(\Omega_e)\mathbf{u}_e = [\mathbf{N}_1(\Omega_e), \mathbf{N}_2(\Omega_e), \dots] \cdot [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots]^T \quad (5.49)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{I}, \dots] \cdot [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots]^T, \\ \text{siendo } \mathbf{N}_i(\mathbf{x}_i) = 1; \mathbf{N}_i(\mathbf{x}_j) = 0, i \neq j. \quad (5.50)$$

Veremos condiciones adicionales de continuidad más adelante de acuerdo a lo apuntado en el apartado 5.2.1.

### 5.2.4.3. Obtención de las cargas externas y rigidez del elemento

La expresión de las cargas aplicadas a la región de la superficie de la estructura que coincide en un elemento  $e$  es, ecuación 5.47:

$$\mathbf{f}_{E,e} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_1 \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_2 \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

De igual forma, de la expresión 5.48 puede derivarse la construcción de la rigidez del elemento:

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 \\ \mathbf{N}'_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} [\mathbf{N}'_1 \quad \mathbf{N}'_2 \quad \dots] d\Omega = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}'_1 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N}'_1 d\Omega & \int_{\Omega_e} \mathbf{N}'_1 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N}'_2 d\Omega & \dots \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{N}'_2 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N}'_1 d\Omega & \int_{\Omega_e} \mathbf{N}'_2 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N}'_2 d\Omega & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

El ensamblaje atribuirá el nodo  $i$  del elemento al Nodo  $I$  en la estructura ( $i \rightarrow I$ ) de acuerdo a la conectividad establecida en el modelo, de tal modo que cada componente de carga o rigidez del elemento se acumulará en el proceso de ensamblaje en la correspondiente componente de la estructura, considerando si

es preciso los necesarios cambios de ejes, en el supuesto de que no coincidan sus posiciones o sus alineaciones, de acuerdo a lo descrito en 2.1.2.2.

### 5.3. Procedimientos numéricos

Hemos visto hasta aquí que es factible construir la expresión débil de las ecuaciones de campo mediante expresiones integrales (5.36) susceptibles de abordarse por elemento separados, (5.38, 5.51, 5.52) y que permiten transformar el problema de campo en un sistema de ecuaciones lineales (5.37) en los desplazamientos nodales que se emplean como parámetros para la interpolación de la solución.

El problema ahora será, por tanto, el de establecer la vía para abordar las fases de integración necesarias para la determinación de los coeficientes numéricos de dichas ecuaciones. La estrategia habitual es la de acometer la integración por procedimientos numéricos que permitan una aproximación aceptable a dichos coeficientes.

#### 5.3.1. Integración numérica

Se analizan a continuación los procedimientos más habituales para la integración de las funciones que resultan de la formulación débil. Las funciones continuas resultantes pueden ser consideradas en general como funciones polinómicas, bien porque procedan de productos de varias de ellas si, como es usual, se usan funciones polinómicas para las funciones de forma, bien

porque las funciones resultantes puedan considerarse aproximadas suficientemente por desarrollos en serie. De este modo, nos basta considerar el problema de la integración numérica, o cuadratura, de las funciones polinómicas.

### 5.3.1.1. Integración de funciones polinómicas

Dada una función polinómica, su integral indefinida resulta inmediata

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\int f(x) dx = C + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots \quad (5.53)$$

La aproximación numérica a su forma definida, por métodos como el de Simpson etc. . . resulta también sencilla si se dispone de valores de la función en un conjunto suficiente de puntos en el intervalo de interés

$$\int_a^b f(x) dx = a_0(x_b - x_a) + a_1 \frac{x_b^2 - x_a^2}{2} + a_2 \frac{x_b^3 - x_a^3}{3} + \dots$$

$$\approx \sum_j W_j f(x_j), \quad x_j \in [x_a, x_b]. \quad (5.54)$$

En la sencilla regla del trapecio, por ejemplo, los puntos  $x_j$  se sitúan equidistantes sobre el intervalo y los pesos  $W_j$  computan esa equidistancia para los puntos interiores y su mitad para los extremos.

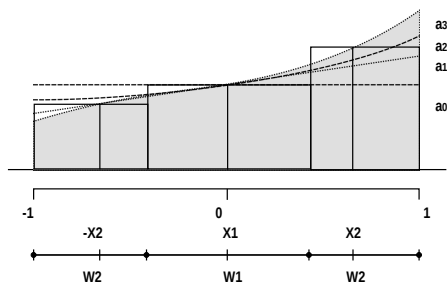


Figura 5.5: Integración de Gauss

Resulta de interés esa misma expresión para el caso en el que el intervalo se disponga simétrico respecto del origen, dado que ahora la expresión reduce el número de coeficientes a considerar para un cierto grado en el polinomio, y más aún cuando los extremos tienen como coordenadas la unidad:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 2a_0 + 2\frac{a_2}{3} + 2\frac{a_4}{5} + \dots \quad i \in \text{par} \quad (5.55)$$

### 5.3.1.2. Integración de Gauss

La integración o cuadratura de Gauss, figura 5.5, busca establecer, para el intervalo  $[-1, 1]$ , la mejor combinación posible, en la aproximación de la integral, de coordenadas para la determinación del valor de la función y sus respectivos pesos, considerando la sencillez de la expresión 5.55 para aproximar la versión sumatoria 5.54. Para ello, y dependiendo del grado

del polinomio que se busca integrar, la función en 5.53 requerirá los coeficientes  $a_i$  hasta el grado deseado. Se elige un número de puntos de integración (simétricos), lo que supone ese mismo número de sumandos en la expresión de 5.54, y permite considerar el mismo número de coeficientes pares. Como la suma debe igualar la expresión de esos mismos coeficientes y sus multiplicadores en 5.55, esto permite determinar los correspondientes pesos y coordenadas.

Un punto (simétrico) permite integrar exactamente expresiones lineales:

$$W_1 f(x_1) = 2a_0 \implies W_1 = 2, x_1 = 0 \quad (5.56)$$

Dos puntos (simétricos) facilitan la integración exacta de polinomios hasta el tercer grado:

$$\begin{aligned} W_1 f(x_1) + W_1 f(-x_1) &= W_1 2(a_0 + a_2 x_1^2) = \\ 2a_0 + 2\frac{a_2}{3} &\implies W_1 = 1; x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Con tres puntos (simétricos) la integración resulta exacta

para polinomios hasta el quinto grado:

$$\begin{aligned}
 W_1 f(x_1) + W_2 (f(x_2) + f(-x_2)) &= \\
 W_1 a_0 + W_2 2(a_0 + a_2 x_2^2 + a_4 x_2^4) &= \\
 2a_0 + 2\frac{a_2}{3} + 2\frac{a_4}{5}; \text{ con} & \\
 W_1 + 2W_2 = 2; 2W_2 x_2^2 = \frac{2}{3}; 2W_2 x_2^4 = \frac{2}{5} \implies & \\
 x_1 = 0; x_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}; W_1 = \frac{8}{9}, W_2 = \frac{5}{9} & \quad (5.58)
 \end{aligned}$$

Los textos clásicos relativos al MEF incluyen tablas de los puntos y pesos de Gauss, que permiten la integración exacta de polinomios hasta el grado  $2n - 1$ , siendo  $n$  el número de puntos de Gauss empleados. De modo que las integrales adoptan la forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_j W_j f(x_j), \quad x_j, W_j \in \text{Tabla de Gauss.} \quad (5.59)$$

### 5.3.2. Problemas no lineales

Hemos descrito un medio de transformar el problema diferencial elástico en un sistema resoluble de ecuaciones lineales, soluble mediante los recursos algebraicos presentes en todas las bibliotecas de software científico. Pero buena parte de los problemas de interés no son lineales, bien porque el comportamiento

de los materiales no lo es, bien por la inadecuación en la aproximación geométrica empleada, que presupone pequeñas deformaciones y desplazamientos, lo que permite aceptar que la leve alteración de la geometría no influye en el comportamiento. Se trata de dos fuentes de no linealidad en el comportamiento, la material y la geométrica, que sin embargo pueden ser relevantes en importantes grupos de comportamientos.

A continuación anotamos brevemente algunas particularidades de este tipo de problemas.

#### 5.3.2.1. No linealidad material

En las situaciones en las que el material se comporta no linealmente el problema habitual no es solamente la pérdida de la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones: podría mantenerse la *elasticidad* del material si ese fuese todo el comportamiento, en la medida en que la energía de deformación podría en ese caso recuperarse completamente en los ciclos con fases de carga y descarga en los que el trayecto en la gráfica de tensión–deformación coincidiría en ambas fases sin pérdida de energía. Sin embargo es más habitual el comportamiento con trayectos no coincidentes, en los que la descarga se inicia con pendientes en la gráfica semejantes a las de inicio de la carga, de tal modo que la gráfica del ciclo arroja una pérdida de energía en el fenómeno denominado *histéresis*, que es a menudo descrito como la superposición de dos componentes de deformación en el proceso, la parte elástica, recuperable, y la plástica, de pérdida de energía por plastificación y con producción de daño progresivo en el material, tal como se representa en la figura 5.6, daño

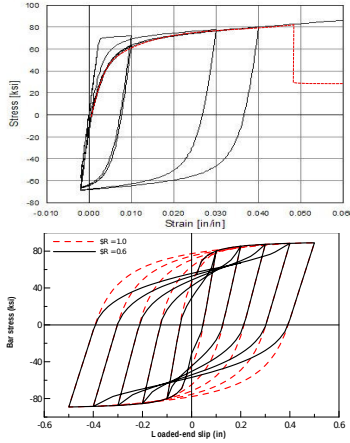


Figura 5.6: No linealidad material, con ciclos de histéresis. Casos locales en metales (imagen superior) o de barras atornilladas con posibilidad de deslizamiento (imagen inferior).

que, además, afectará progresivamente a la geometría de la curva tensión–deformación de ciclos sucesivos.

De este modo, en este tipo de problemas, se trata no solo de describir la no linealidad en las relaciones entre tensión y deformación, sino de incorporar la descripción de algún tipo de parámetro de daño y su influencia en la geometría de las curvas de carga y descarga del ciclo.

Los problemas a representar incluyen por tanto los de la evolución en las relaciones entre tensión y deformación depen-

dientes de la historia previa, que pueden incluir fenómenos de aumento o reducción del límite elástico (el caso de aumento, por ejemplo en los fenómenos de endurecimiento de metales típicos de los aceros estirados en frío) de pérdidas de rigidez y (o) de resistencia, y la caracterización de los correspondientes ciclos histeréticos.

Se trata en todo caso de fenómenos que afectarán a las relaciones denominadas *constitutivas* o de constitución del material.

Pese a su importancia, no cabe en este texto un estudio detallado de este conjunto de problemas.

### 5.3.2.2. No linealidad geométrica

Tal como se ha estudiado en el capítulo 3, otra importante fuente de comportamientos no lineales es la correspondiente a la consideración de la influencia de la deformación o el desplazamiento de la estructura en las condiciones del equilibrio final: el problema se mantiene lineal en los casos de elasticidad lineal en los materiales si, y sólo si, se supone que la geometría deformada es suficientemente próxima a la geometría original como para no influir en las condiciones del equilibrio, que se formulan sobre la geometría original. En el caso contrario, es decir, si es preciso considerar la formulación de las condiciones de equilibrio sobre la geometría deformada, estamos en problemas de no linealidad geométrica, sea por desplazamientos relevantes (*grandes*) aunque las deformaciones locales sean pequeñas como pueden ser los de pandeo, sea por grandes deformaciones, correspondientes al comportamiento de materiales muy deformables, como el caucho.

El abordaje de los problemas de grandes desplazamientos, ya visto en el capítulo 3, supone considerar la variación de rigidez derivada de la sollicitación axial y su formalización por la concatenación de los procedimientos siguientes

- análisis y solución del problema de autovalores y de los consiguientes modos de pandeo
- consideración de imperfecciones en el marco de las tolerancias de fabricación y proporcionales a las de dichos modos de pandeo (en particular del primero) y
- análisis no lineal incremental a partir de esta imperfección hasta la situación de equilibrio correspondiente a la carga de cálculo requerida.

Cabe recordar para ello las formulaciones desarrolladas en el apartado 3.5.3 que

- permiten la determinación del factor de carga crítica, 3.5.3.2,
- formalizando el problema de autovalores generalizado para un estado de carga dado
  - abordándolo como un problema de autovalores, 3.5.3.3,
  - o alternativamente por su aproximación iterativa mediante el cociente de Rayleigh, 3.5.3.4.

Para el caso de grandes deformaciones, la formulación con los modelos de Cauchy para los estados de tensión y deformación son incorrectas, debiendo manejarse los tensores de Green-Lagrange para deformación y el segundo de Piola-Kirchoff para tensión. Se trata nuevamente de métodos fuera del alcance de este texto.

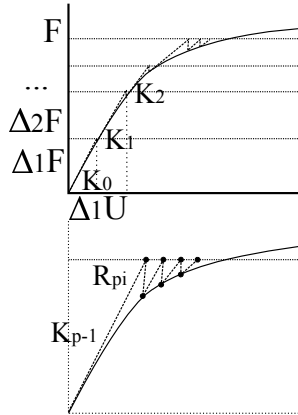


Figura 5.7: Procedimientos de Newton–Raphson y Newton–Raphson modificado

### 5.3.2.3. Métodos de resolución

La solución numérica de problemas no lineales requiere emplear procedimientos iterativos en los que es habitual el uso de una doble iteración.

Se trata en cada uno de los pasos de de un proceso incremental en un cierto tiempo<sup>5</sup> de determinar la respuesta  $F_{Ri}(U_i)$  para el estado  $i$  de cargas y comportamiento. Empezando con un estado inicial en el paso 0 con desplazamiento nulo, es usual

5. un tiempo ficticio: no se trata de un análisis dinámico en el que sería imprescindible la consideración de las fuerzas de inercia.

considerar en cada paso la carga correspondiente a un factor creciente:  $\lambda_i \mathbf{F} = \mathbf{F}_i = \sum_i \Delta_i \mathbf{F}$ , con  $\lambda_0 = 0, \lambda_i \in (0, 1]$ . Para cada paso de carga se determina el incremento de desplazamiento  $\Delta \mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i$  necesario para equilibrar la diferencia entre la carga y la respuesta precedente a través de la aproximación  $\lambda_{i+1} \mathbf{F} - \mathbf{F}_{Ri}(\mathbf{U}_i) = \mathbf{K}_i \Delta \mathbf{U}_i$ . Es usual iterar en cada escalón de carga para mejora de la convergencia. Resultan así los métodos más difundidos esquematizados en la figura 5.7.

**Newton–Raphson** Se adopta la siguiente recurrencia para los sucesivos  $p$  pasos de carga, y para cada iteración  $i$  en cada ellos

- Para el desplazamiento  $U_{pi}$ , la respuesta es  $F_{Rpi}$ , con un “residuo” no equilibrado  $R_{pi} = \lambda_p F - F_{Rpi} = \lambda_p F - F(U_{pi})$ . Falta por tanto equilibrar la “carga”  $R_{pi}$ . Si el residuo es suficientemente pequeño, se para el proceso para ese escalón de carga y se pasa al escalón siguiente.
- Para el equilibrio aún pendiente la rigidez a emplear es la correspondiente al desplazamiento alcanzado hasta ese instante  $K_{pi} = K(U_{pi})$
- Se estima el incremento de desplazamiento requerido mediante la aproximación  $R_{pi} = K_{pi} \Delta U_{pi}$ . El desplazamiento alcanzado será por tanto  $U_{p,i+1} = U_{pi} + \Delta U_{pi}$

**Newton–Raphson modificado** Se mantiene la “rigidez”  $K_0$  durante todo el proceso (o durante un número dado de pasos, de escalones de carga, . . . tras los que se recalcula de nuevo)

### 5.3.3. Organización de un programa de ordenador

A la vista de todo lo anterior resulta factible proponer la organización de un programa de ordenador capaz de acometer el modelado de los problemas elásticos, su representación numérica y su solución. Para ello se adopta una organización modular de modo que cada módulo resulte independiente del contenido o procesos del resto. Cada módulo opera sobre regiones de memoria, y solo los de entrada o salida comunican esa memoria con el exterior. A continuación se señalan los módulos fundamentales.

**Entradas de datos** Procedimientos para la identificación de Materiales, selección de Elementos (sus funciones de forma  $\mathbf{N} \dots$ , Puntos y pesos Gauss...), y trazado de la Malla estructural (coordenadas -conectividad), y apoyos.

**Métodos generales** Módulos para la determinación aislada y a demanda de cada grupo de valores numéricos:

**rigidez:** Por cada elemento, y por cada punto de Gauss: material  $\kappa$ , genera matrices  $\mathbf{b} = \partial \mathbf{N}$ , e integra  $\mathbf{k}$ ; ensambla  $\mathbf{K}$

**carga:** Por elemento, y por punto de Gauss, genera e integra el vector  $\mathbf{f}_E$ ; ensambla  $\mathbf{F}$ ;

**resolver:** Resuelve  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$  (o más bien  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}\Delta \mathbf{U}$  en el caso más general de procedimientos incrementales)

**desplazar:** Actualiza  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \Delta \mathbf{U}$

**esfuerzos:**  $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b}\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}$

**reacciones:**  $\varphi_{\Gamma,s} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_{\Gamma,s}$

**residuos:** con  $\mathbf{f}_e = \mathbf{k}(\mathbf{u})\mathbf{u}$  determina  $\Delta\mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{B}^T \mathbf{f}_e$

**Salidas** A demanda: cualquiera de las variables o grupos o combinaciones de estas en memoria en cualquier región de la estructura.

**Estados internos (memoria)**

- Globales: coordenadas, desplazamientos, (cargas y escalón de carga), (topología)
- Locales: Elementos: propiedades, cargas, conexión, deformaciones, esfuerzos, degradación o daño

**Métodos globales: orden habitual**

- rigidez, carga, resolver, desplazar, reacciones, residuos

**Métodos elemento: por llamada global**

- rigidez, carga, esfuerzos, residuos

**Esquema general del análisis:** Hasta que residuo=0, desplaza(resuelve(residuo previo+ $\Delta$ carga))

## Capítulo 6

# El método de los elementos finitos

En este capítulo se desarrolla más en detalle el método descrito en el apartado 5.2, presentando tanto una visión general de uso del método, tal como se emplea en buena parte de los programas disponibles, como algunas de las técnicas apropiadas a los tipos de elementos más comunes, con particular énfasis tanto en como se aborda la formulación de tales elementos como en los recursos disponibles para asegurar una precisión y un control de errores aceptable. La intención es que esta visión facilite un empleo informado y crítico de las herramientas disponibles, sean comerciales o de código abierto.

Fuentes básicas para el desarrollo de este apartado son Zien-

kiewicz 1977, Zienkiewicz 1980, Bathe 1982, Clough y Penzien 1975 y Wilson 2002.

## 6.1. Bases de uso del método

El método se basa en una descripción del comportamiento estático y cinemático de la estructura, por compleja que sea, a través del ensamblaje de un número, en general muy elevado, de elementos que individualmente resultan ser relativamente sencillos. El modelado y análisis de la estructura supone por tanto un proceso que integra, *(a)* la descripción de la estructura y sus condiciones de contorno (cargas y sustentaciones) a través de la descripción de los elementos que la conforman y sus enlaces, *(b)* la simulación del comportamiento del modelo a través de la determinación de los movimientos y deformaciones adecuados al cumplimiento de los tres grupos de ecuaciones habituales del análisis de estructuras (equilibrio, compatibilidad y relaciones materiales), y *(c)* la exploración en detalle de los valores de las variables resultantes en todos los puntos del modelo para determinar la viabilidad, la seguridad, o la eficiencia de este.

Tenemos, por tanto, tres fases en el análisis, que pasamos a describir con algo más de detalle.

### 6.1.1. Fases del análisis

Las tres fases, a las que se alude en la figura 6.1 y que incluyen el propio núcleo del análisis, es decir, la determinación del estado del modelo para las cargas y condiciones de sustentación

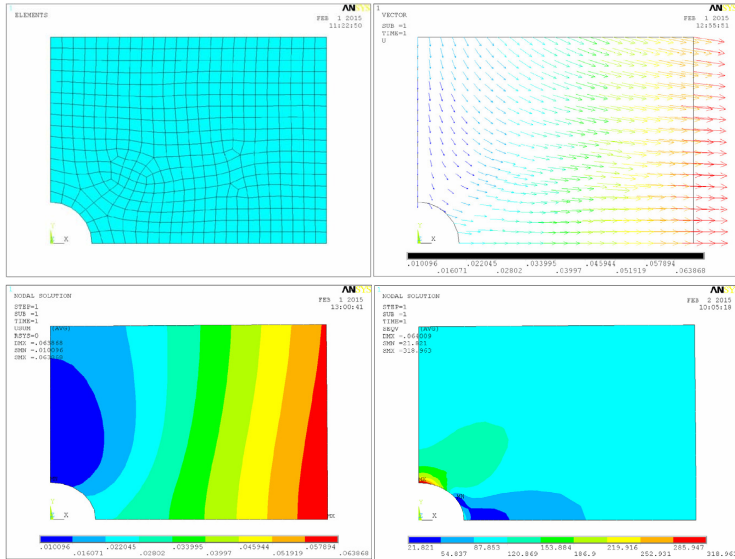


Figura 6.1: Fases del análisis en el Método de los Elementos Finitos: *modelado*, *análisis* y *evaluación*. Se trata aquí (1) del mallado para representar una chapa con un taladro sometida a tracción, con simplificación por doble simetría, (2) la determinación de los desplazamientos, y (3, 4) la interpretación de resultados, en este caso la magnitud de tales desplazamientos y la tensión de comparación de acuerdo al modelo de Von–Mises, esta última determinada a partir del análisis sobre un nuevo mallado, más refinado en el contorno del taladro que el de la primera figura.

previstas, pueden identificarse como:

- modelado (preproceso)
- análisis (proceso)
- evaluación (postproceso)

#### 6.1.1.1. Modelado, o preproceso

En esta fase se trata de construir un modelo que represente adecuadamente a la estructura objeto de estudio mediante su descomposición en elementos relativamente sencillos y de tamaño finito adecuadamente enlazados entre sí. Se trata de asegurar (1) que, localmente, en cada elemento, tanto la geometría como la formulación de las leyes que ligan las variables estáticas y cinemáticas de su comportamiento sean sencillas y suficientemente próximas a las de una teoría apropiada al tipo de comportamiento esperado en esa región de la estructura y, (2) que la representación de la conexión entre tales elementos y de estos con el contorno (cargas y sustentaciones) asegure la adecuada identidad de movimientos y el equilibrio en las regiones de contacto.

Implica, por lo tanto, decisiones en relación con el tipo de comportamiento a describir: dimensionalidad (2D o 3D), tipos de deformaciones y esfuerzos relevantes (axial o flexión), simplificaciones posibles (por simetrías u otras consideraciones)...

En esta fase, por tanto, es clave la decisión sobre los tipos de elemento a emplear en el modelo, su distribución en todo el volumen de la estructura y su tamaño y forma típica en cada región de esta (mallado), la conectividad entre estos y con el con-

torno... Es usual que el mallado se realice de forma automática en regiones amplias a partir de parámetros establecidos en los límites de tales regiones.

En la elección del tipo de elemento y de sus dimensiones típicas es preciso considerar la forma de las funciones implementadas en estos y su posible adaptación a las formas esperadas en la respuesta de regiones concretas, tanto en el interior de cada elemento, como en los pasos de unos elementos a otros.

Es igualmente de extrema importancia, en los casos de uso de tipos variados de elementos, considerar las condiciones de conexión apropiadas para asegurar la continuidad en los campos de desplazamientos y de esfuerzos.

### Elección del tipo de elemento

En función de la geometría y del comportamiento de la pieza o región a representar, el modelado implicará usar alguno de los tipos aportados por el programa en cuestión y, por tanto, de las cualidades capaces de ser representadas por ese tipo de elemento. Se usan aquí denominaciones empleadas en el programa Sap.

- región lineal
  - para comportamiento puramente axial: *truss*
  - si además se combina con flexión: *frame*
- región superficial
  - para comportamiento de membrana (axial): *plane*
  - incluyendo comportamiento en flexión: *shell*
- región volumétrica

- elemento elástico en 3D: *solid*

Los elementos se definen en su geometría por referencia de los nodos del tipo a nodos (coordenadas) concretos de la geometría de la estructura que se modela, y en sus cualidades materiales por referencia a materiales tipo y a valores concretos de las propiedades de tales materiales, así como por valores de propiedades geométricas típicas del elemento seleccionado (propiedades de sección, etc. a menudo por referencia a grupos de propiedades definidas al margen de elementos concretos y comunes a muchos de ellos)

### **Descripción de la geometría y materiales**

Es importante tener clara consciencia de la multiplicidad de referencias que cabe emplear: la geometría de la estructura estará definida en alguna suerte de ejes globales, que pueden ser definidos como cartesianos, o polares o esféricos en casos apropiados, e incluso regiones concretas de la geometría general pueden quedar mejor definidas en ejes orientados particulares.

Los elementos, a su vez, mantienen ejes locales adecuados a la formulación, de tal modo que cualquier tipo de información aportada o reclamada debe serlo con clara definición de cuales son los ejes de referencia pertinentes.

Por parte de los materiales, deberán considerarse y representarse, dependiendo del tipo de análisis a realizar, sus propiedades elásticas o plásticas, sus densidades o pesos específicos, sus propiedades de amortiguación o sus propiedades histeréticas, etc.

**Condiciones de contorno: cargas y apoyos**

Es habitual considerar en el software tres grupos diferenciados de conceptos

- patrones de carga,
- casos de carga,
- combinaciones de casos de carga.

Un patrón de carga es un conjunto de cargas o restricciones a los movimientos procedentes de una fuente común y que permite agrupar todas ellas en una referencia única (por ejemplo, *masa estructural*, o *viento norte*). Cada uno de los patrones de carga implicará establecer alguno o varios de los dos tipos de condiciones de contorno posibles:

- cargas, sean de considerar las masas de los elementos, o sean aplicadas específicamente sobre estos o sobre nudos de la estructura.
- restricciones de movimientos en ciertos nudos de la estructura, bien como coacciones completas (apoyos, empotramientos. . .) bien como desplazamientos impuestos, bien como enlaces o combinaciones forzadas de algunos de estos

A estos pueden añadirse en los casos relevantes condiciones de temperatura: es usual considerar temperaturas por defecto de 20 grados centígrados, de tal modo que efectos de dilatación o contracción forzados –que a veces se han usado para simular efectos de pretensado– pueden modelarse estableciendo temperaturas diferentes y los correspondientes coeficientes de dilatación térmica en los materiales empleados.

Los casos de carga establecen agrupaciones de patrones correspondientes a alguna hipótesis de acción posible sobre la es-

estructura, y la forma en que se aplica dada uno de los patrones. Por ejemplo, establecer un caso de carga correspondiente a un cierto análisis dinámico frente a viento, podría incluir la aplicación constante en el tiempo de la masa de la estructura (patrón 1) y cierta masa característica apoyada en esta (patrón 2) así como las condiciones de anclaje de la estructura al suelo (patrón 3), junto con la aplicación dinámica en el tiempo de una determinada escala de algún patrón de cargas laterales por viento (patrón 4). Otros casos de carga posibles corresponderían a otras direcciones o escalas de la acción del viento, a variantes de aplicación de las cargas gravitatorias, etc.

Las combinaciones de casos de cargas corresponden a exploraciones de alguna forma de efecto combinado de varios de estos casos. Dichas combinaciones pueden ser de diversos tipos, según el resultado deseado:

- sumas, si se trata de determinar el efecto de su superposición
- envolventes, si se pretende establecer los valores extremos que resultan en cada región de la estructura
- valores “esperados” si lo que se busca es determinar los valores probables de combinación (y tal vez otras propiedades estadísticas) de la combinación de casos de carácter probabilístico.

#### **6.1.1.2. Análisis, o proceso**

Esta fase busca establecer el estado o secuencias de estados del modelo de la estructura que se analiza mediante los métodos numéricos apropiados.

El proceso de análisis construirá, a partir de la información del modelo y de las intenciones del analista, los tres grupos de ecuaciones habituales de las teorías estructurales, y resuelve las incógnitas —usualmente los desplazamientos— que pueden determinarse con dichas ecuaciones. En la descripción del análisis a realizar cabe distinguir acercamientos variados, según se trate de un análisis estático o dinámico (en el que se tendrán en consideración los efectos inerciales y de amortiguamiento...), de un análisis lineal o no lineal (y tipo de no-linealidad a considerar) así como, en casos muy particulares como puede ser el caso de aproximaciones híbridas del tipo de las descritas en el apartado 5.2.1, del tipo de algoritmo a considerar en el análisis, en tanto que la matriz fundamental resultante, usualmente la matriz de rigidez, la matriz que condensa los coeficientes de todas las ecuaciones del problema pueda ser no simétrica, u otras razones.

El resultado del proceso es, pues, la determinación de la parte de las variables de estado correspondientes a las incógnitas en la formulación empleada, los desplazamientos habitualmente, para todos y cada uno de los casos de carga establecidos en el modelado y para el tipo de análisis requerido.

### Tipo y algoritmo de análisis

Cabe considerar tres grandes grupos en los tipos de análisis que cabe abordar (y que deberá declararse al programa)

- Estático: sin consideración de los efectos de inercia y amortiguación:
  - lineal (elástico)
  - no lineal incremental (o *pushover*) donde parte de la car-

ga crece en pasos sucesivos

- no lineal “geométrico”, con consideración de los efectos axiales en la rigidez en los sucesivos pasos de carga
- Dinámico
  - con análisis en el dominio del tiempo, lo que puede hacerse
    - mediante análisis de la respuesta modal y por procedimientos de superposición de esta. Sea a través del análisis de los autovalores y autovectores de la expresión dinámica clásica  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\Phi = \mathbf{0}$ , o de la obtención de una secuencia de los así llamados *vectores de Ritz*, en particular de los *dependientes de la carga*<sup>1</sup>,
    - mediante análisis que realicen la integración de la respuesta paso por paso en el tiempo
  - con análisis en el dominio de la frecuencia buscando, ya sea la respuesta estacionaria a una excitación concreta, o la respuesta espectral frente a un cierto rango de frecuencias.
- Análisis de estabilidad o seguridad frente al pandeo global
  - aproximación *lineal* del pandeo global a través del problema de los autovalores de  $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_G(\mathbf{F}))\Phi = \mathbf{0}$ .

Para el análisis requerido el programa selecciona y activa los algoritmos necesarios y generará las correspondientes bases de

---

1. el primero proporcional a la deformada estática y los sucesivos, ortogonales a los precedentes y a la matriz de masas, ver Wilson 2002, capítulo 14.

datos de resultados a emplear posteriormente en el postproceso.

### **Consideraciones sobre no linealidad en la respuesta**

Cabe en la mayor parte de los programas establecer propiedades no lineales en la respuesta, ya sea por la posibilidad de no linealidad en las propiedades de los materiales, a través de límites elásticos en las tensiones o mediante leyes explícitas de tensión–deformación, ya sea por la no linealidad de componentes concretas, como pueden ser las leyes momento–rotación en rótulas o leyes para la definición de los efectos  $P\Delta$  en cables, ya sea por la no linealidad del modelo completo, de la geometría general, por razón de los efectos  $P\Delta$  globales o de la posibilidad de considerar grandes desplazamientos, es decir, las condiciones de equilibrio en las geometrías deformadas de cada paso de carga.

### **Consideraciones sobre las propiedades de amortiguación en análisis dinámico**

Las fuentes de amortiguación en el comportamiento dinámico pueden ser de dos tipos: la viscosa, dependiente de las velocidades interpartículas, y la histerética, dependientes del historial de los desplazamientos. Las formulaciones dinámicas clásicas incorporan con cierta facilidad las primeras, a través de una matriz de relaciones  $\mathbf{C}$  entre las fuerzas de oposición y las velocidades correspondientes a cada grado de libertad, y con mucha mayor dificultad los segundos, a través de una matriz  $\mathbf{D}$  variable en el tiempo, de relaciones entre las fuerzas correspondientes a la disipación de energía que los desplazamientos suponen para cada

grado de libertad y esos mismos desplazamientos.

Para el caso de la amortiguación viscosa, la matriz  $\mathbf{C}$  se construye habitualmente, a falta de teoría apropiada y eficiente mejor, como combinación de las de masa y rigidez, sea por caso de carga ( $\mathbf{C} = c_k \mathbf{K} + c_m \mathbf{M}$ ), sea por material ( $\mathbf{c}_i = c_k \mathbf{k}_i + c_m \mathbf{m}_i$ ), o por combinación modal. La cuestión, relevante, requiere una fundamentación dinámica que no cabe abordar en este texto, pero que de todos modos implica adoptar decisiones concretas en la declaración del tipo de análisis a realizar por el programa.

### 6.1.1.3. Evaluación, o postproceso

En esta fase se pretende explotar las bases de datos de información construídas en las fases previas para caracterizar la respuesta de la estructura y determinar su seguridad o informaciones que faciliten la incorporación de modificaciones capaces de mejorar la propuesta.

A partir de estas informaciones, el usuario del programa puede trazar a demanda los valores de otras variables de estado no resueltas, pero deducibles a partir de la información previa, como pueden ser los campos resultantes de deformación y de tensión, etc...

Con dicha información pueden contrastarse los estados en cada región de la estructura con los valores límite admisibles para el grado de seguridad deseada, etc.

Una parte muy importante de esta fase final es la de evaluar la validez de los resultados. En esta evaluación es imprescindible constatar que se cumplen los equilibrios previstos: pues aunque el sistema resuelve adecuadamente los equilibrios para los datos

aportados podría haber errores en la definición de las cargas o de las coacciones resultando respuestas ajenas al objetivo pretendido por errores en el modelo. Por ello, en esta evaluación previa básica resulta una práctica extremadamente necesaria la comprobación de que **las reacciones** obtenidas

- se corresponden con, e igualan la suma de las cargas aplicadas
- concuerdan con las condiciones de sustentación previstas.

En el postproceso

- pueden obtenerse trazados de las funciones de campo (de estado) o de sus envolventes, ya sean desplazamientos, campos de esfuerzos por casos de carga o envolventes de grupos de combinaciones de carga
- también cabe obtener valores “integrales” para regiones dadas (solicitaciones en secciones de la propia estructura, por ejemplo) mediante la definición del corte y de la expresión integral buscada. Lo que permite comprobar la verosimilitud de la respuesta por comparación con modelos sencillos.

Por tipo de análisis, cabrá determinar

- en análisis dinámico modal: las frecuencias y modos de oscilación, sus factores de participación, así como los correspondientes factores de masa modal efectiva, donde usualmente bastará contar con los modos que acumulen una masa modal efectiva de entre el 90 % y el 95 %.
- en un análisis de la respuesta espectral, los espectros de las aceleraciones respuesta para cada modo, las correspondientes amplitudes modales y las respuestas combinadas por los

métodos habituales, SRSS (Square Root of Sum of Squares) o CQC (Complete Quadratic Combination)

- en análisis no lineal estático se determinan las leyes de desplazamiento–deformación–esfuerzo–carga. Debe prestarse atención en este tipo de análisis a la forma de control del proceso incremental, sea por carga o por desplazamiento, siendo el primer proceso inestable en el límite de la carga.
- los análisis más sofisticados y costosos son los que resuelven los procesos dinámicos como series temporales de estados, (“time history analysis” o THA) habitualmente por integración directa, aunque no solo: el FLA o “Fast Linear Analysis” es una alternativa en programas como SAP. En estos casos, dada la abundancia de información que cabe generar, es importante considerar la información requerida, de tal modo que, previamente al análisis, quepa establecer los adecuados elementos destinados a su rastreo (que en algunos programas se llaman *grabadoras*).

La evaluación de la precisión de los resultados y del margen de error en estos es, finalmente, la que permitirá validar los resultados obtenidos como suficientemente representativos de la respuesta de la estructura que se modela. Por su importancia, se dedicará a este aspecto el apartado siguiente.

### 6.1.2. Metodología, precisión y control de error

En este apartado se analizan las posibles fuentes de error, cuyo control es necesario para asegurar la utilidad de los resultados del análisis. Se analizan los requisitos de continuidad de

las funciones de campo en el interior de los elementos en que se divide la estructura y en las interfaces entre estos, y las vías para cuantificar y abordar los posibles errores, o afinar los resultados del análisis.

#### 6.1.2.1. Fuentes de error

Es posible la aparición de errores por causas variadas, no siempre resultantes de inexactitudes en el modelado. Podemos agruparlas en las categorías y causas siguientes:

- *Discretización*: considerando los criterios de continuidad o la precisión de las funciones empleadas,
- *Cómputo de las expresiones integrales*: efectos de la integración numérica,
- *Aproximación de la geometría*: discretización de la forma y modelado de enlaces y condiciones de contorno,
- *Errores numérico en la obtención de soluciones*: asociados al condicionamiento de la matriz, y al truncado o al redondeo,
- *Ecuaciones de constitución MATERIAL*: defectos en los valores de los parámetros o en sus relaciones en situaciones no isótropas. . .

Las vemos con mayor detalle a continuación.

#### 6.1.2.2. Discretización, funciones empleadas y cómputo de integrales

Puesto que la técnica empleada en el método implica sustituir la geometría continua por una malla discreta de elementos,

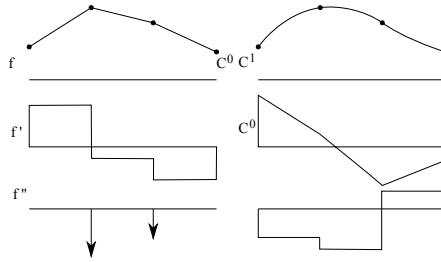


Figura 6.2: Continuidad del campo de desplazamientos: en el interior del elemento, por los polinomios elegidos para las funciones de forma; en la interfaz entre ellos, si el desplazamiento en esta depende solo del de nodos compartidos. Las derivadas tienen órdenes de continuidad menor, pero no deben resultar términos que den lugar a valores no nulos en las integrales a través de la interfaz entre un tramo (elemento) y el siguiente.

la primera causa de posibles errores reside en la posibilidad de que dicha sustitución no resulte adecuada porque las funciones empleadas y las integrales resultantes de la formulación no sean capaces de aproximar suficientemente las que cabría esperar en la solución diferencial del modelo continuo, ya sea en el interior de los elementos o en sus interfaces.

De tal modo que es preciso contrastar

- Los criterios de continuidad requeridos:
  - Esto implica asegurar derivabilidad e integrabilidad suficiente en las funciones empleadas, de tal forma que tengan sentido las expresiones empleadas: 5.47, 5.51, 5.48,

5.52. Por lo que debe asegurarse el suficiente grado de continuidad de las funciones de forma y sus derivadas (ver figura 6.2).

- En la interfaz entre elementos debe asegurarse la identidad en los campos de desplazamientos y sus derivadas vistos desde cualquiera de los elementos en contacto, para asegurar la posibilidad de sustitución de las integrales en el dominio por la suma de estas en los elementos, ecuación 5.38, lo que exige que tales integrales sea nulas al atravesar dicha interfaz, y, en tanto que las ecuaciones incluyen un operador diferencial sobre estos campos, implica excluir la posibilidad de singularidades en dichas derivadas en la interfaz.
- La precisión alcanzada mediante la aproximación:
  - donde puede mejorarse la proximidad de la función aproximada a la buscada, bien reduciendo el tamaño de la malla, bien aumentando el orden de las funciones empleadas. Se trata de los métodos “ $h$ ” (tamaño representativo del elemento) y “ $p$ ” (grado del polinomio de las funciones usadas en el elemento)
  - esa mejora puede automatizarse mediante un mallado adaptativo y el acoplamiento de mallas diferenciadas según regiones a partir de la detección automática de los gradientes en las funciones de estado.

**Continuidad y derivabilidad e integrabilidad de las funciones. Conformidad**

Si el operador diferencial relevante es de orden  $n$ , el modelado exige funciones de forma al menos del mismo grado para no anularse en el interior de los elementos y, a su vez, que quede asegurada una continuidad en la interfaz de orden  $n - 1$ : si las funciones son lineales por ser el operador diferencial de primer grado ( $n = 1$ ), a través de la interfaz debe mantenerse continuidad  $C^0$ , o en el caso de funciones de segundo grado para un operador de ese orden ( $n = 2$ ) se exigiría continuidad  $C^1$  –continuidad por tanto en las derivadas– a fin de que el término diferencial relevante computado a través de la interfaz, aun pudiendo ser discontinuo, no resulte singular, al objeto de que la integral a través de dicha interfaz sea nula (ver figura 6.2).

Se denominan elementos compatibles o *conformes* los que aseguran esa suficiente continuidad en los campos de desplazamientos y sus derivadas, asegurando la adecuada integrabilidad de las funciones resultantes en la formulación (ecuaciones 5.38, 5.48...).

Elementos cuyas formulaciones no cumplan dichos requisitos de continuidad se denominan *no conformes*. Aun estos pueden seguir siendo aceptables si la falta de continuidad desaparece en regiones de comportamiento semejante, en tanto que un proceso de refinamiento de la malla en que se descompone la estructura reduciría la diferencia entre elementos próximos y, por tanto, la discontinuidad fuente de error, de acuerdo al criterio de la parcela, ver página 460.

**Capacidad de reproducir movimientos y deformaciones básicas** Las funciones de forma representan la influencia del

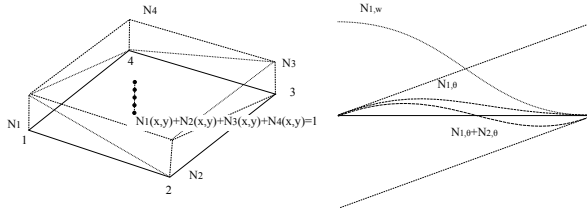


Figura 6.3: Suma de funciones de forma en el elemento: puesto que deben ser capaces de representar movimientos sin deformación, su suma debe igualar la unidad en todo el elemento. En casos de órdenes superiores de interpolación, se ligan las funciones asociadas a desplazamientos y a giros.

movimiento de cada nodo en cada punto del continuo del elemento. Y deben ser capaces de representar sin problemas todo tipo de movimientos básicos.

Veamos el caso de los movimientos, desplazamientos o rotaciones, sin deformación.

El desplazamiento  $\mathbf{u}_x$  en un punto  $\mathbf{x}$  se expresa como  $\mathbf{u}_x = \sum \mathbf{N}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ , siendo  $i$  un índice a alguno de los nodos del elemento y  $\mathbf{u}_i$  su desplazamiento, con tantas componentes como las dimensiones del espacio representado, y siendo  $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$  las funciones de forma asociadas al mismo para todas las componentes de desplazamiento. La matriz  $\mathbf{N}$  es una matriz de bloques, uno por cada nudo  $i$ , en la que cada una de las filas asocia una componente del desplazamiento del punto  $\mathbf{x}$  al desplazamiento completo del nudo ( $u_{x,d} = \mathbf{N}_{id}\mathbf{u}_{id} =$

$N_{i,d1}(\mathbf{x})u_{i,1} + N_{i,d2}(\mathbf{x})u_{i,2} + N_{i,d3}(\mathbf{x})u_{i,3}$  para el caso tridimensional y cualquiera de las tres dimensiones  $d$  del espacio en que se define  $\mathbf{u}_i$ ). De modo que si el desplazamiento es  $\boldsymbol{\nu}_R$ , deberá resultar para cada nodo  $i$  que  $\mathbf{u}_i = \boldsymbol{\nu}_R = \mathbf{I}\boldsymbol{\nu}_R$  y por tanto, la columna de desplazamientos nodales del elemento,  $\mathbf{u} = \mathbf{1}\boldsymbol{\nu}_R$  donde  $\mathbf{1}$  es una matriz vertical de bloques, con un bloque por nudo siendo cada bloque la matriz identidad  $\mathbf{I}$ . De este modo al deber ser  $\mathbf{u}_x = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{1}\boldsymbol{\nu}_R = \boldsymbol{\nu}_R$  necesariamente  $\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{1} = \mathbf{I}$ , lo que supone que para cada dimensión  $d$  deba ser  $\sum_i N_{i,dd}(x) = 1$ ;  $\sum_i N_{i,de}(x) = 0$ ,  $d \neq e$ , es decir, las funciones de forma de todos los nudos deben sumar en todo punto del dominio la unidad para las componentes del desplazamiento coincidentes en dirección o dimensión espacial, y deben anular su suma para las componentes no coincidentes .

Una rotación sin deformación exige que quepa identificar el producto vectorial  $\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x}$  (que expresa esa posible rotación) con la transformación  $\sum \mathbf{N}_i(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x}_i)$ . Esto exige asegurar la simetría en las funciones para todas las dimensiones del espacio. Es usual por las dos condiciones anteriores el uso de elementos isoparamétricos en los que se aplica una interpolación separada para cada una de las dimensiones del espacio con el empleo del mismo número de parámetros para cada dirección, lo que supone que  $N_{i,de} = 0$ , si  $d \neq e$ , y  $N_{i,dd} \neq 0$ ,  $\sum_i N_{i,dd} = 1$ .

Si además de usar los desplazamientos como parámetros nodales se emplean mayores órdenes de interpolación (mayor número de parámetros), añadiendo los giros como suele ser en el caso de las vigas y losas, lograr movimientos sin deformación exige ligar las funciones asociadas a unos y otros movimientos: las ligadas a los desplazamientos  $\mathbf{N}_w$  con las ligadas a las rotaciones

$\mathbf{N}_\theta$ . Pues como se ve en la figura 6.3, desplazamiento sin rotaciones de extremo las asocia necesariamente si se considera la geometría deformada relativa a la línea que une ambos nudos: debe ser  $N_{1,\theta} + N_{2,\theta} = N_{1,w}/l + t(x)$  tal que la segunda derivada ( $\partial$ ) de  $t(x)$  sea nula.

En definitiva

- un desplazamiento sin deformación  $\nu_R$  exige que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nu_R, \forall \mathbf{x} \in \Omega$  y por tanto  $\mathbf{N}(\mathbf{x})(\mathbf{1}) = \mathbf{I}$ , o lo que es lo mismo,  $\sum_i N_i(\mathbf{x}) = 1$ .
- una rotación sin deformación exige simetría para las funciones de forma para todas las direcciones del espacio.
- en elementos de orden mayor, —que manejan como parámetros los giros en los nudos además de los desplazamientos— están necesariamente ligadas las funciones correspondientes.

### Capacidad de reproducir estados de deformación constante

La necesidad de hacer posible la representación de deformaciones básicas incluye la de poder describir adecuadamente estados de deformación constante, estados a los que se tiende de forma natural según se refina la malla, y cuya representación, pues, resulta imprescindible

- al menos cuando la dimensión del elemento tiende a cero
- para facilitar la convergencia, mejor en todo elemento de tamaño finito
- y para todo tipo de deformación constante posible

Dicha capacidad permite relajar las condiciones de continuidad consideradas en el apartado 6.1.2, dejándolas limitadas a una formulación más débil, menos estricta, en lo que se denomina *criterio de la parcela*.

**Criterio de la parcela:** La condición necesaria para la convergencia, incluso con elementos no conformes es que el modelo permita representar estados de deformación constante en regiones amplias, construídas por muchos elementos contiguos y que, en esta condición, la correspondiente parcela mantenga las condiciones de continuidad requeridas.

Pueden proponerse diversos tests para validar dicho criterio:

- A se prescribe un campo de desplazamientos lineal y se comprueban las fuerzas –cargas– resultantes (deben resultar nulas en el interior de la parcela, pues si la deformación es constante también lo son las tensiones internas y el saldo aplicado en los nodos interiores es por ello nulo)
- B considerando que se conoce el campo de desplazamientos, se fija el desplazamiento de algunos nudos, se calculan los de los otros mediante el modelo, y se comprueba que coinciden con los movimientos correspondientes a ese campo
- C se prescriben fuerzas en equilibrio en el contorno y la coacción mínima correspondiente al movimiento del sólido rígido, y se comprueba que se verifica el estado de equilibrio y de deformación interna.

**Grado y completud de los polinomios que aproximan las funciones de campo**

La aproximación del método implica el empleo de métodos de integración que suponen implícitamente que los campos quedan representados adecuadamente mediante funciones polinómicas, en tanto que cabe su aproximación mediante desarrollos en series de Taylor. En estos desarrollos los términos básicos de la expansión son los de menor orden:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\
 &\quad + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_{x_0} \frac{(x - x_0)^n}{n!} + O(x - x_0)^{n+1} \\
 f(x) &\approx \sum_{i=0}^n \frac{h^i}{i!} \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \Big|_{x_0} + O(h^{n+1}) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} \right)^i f \Big|_{x_0} + O(h^{n+1}); \\
 &\hspace{20em} h = x - x_0, \\
 f(x, y) &\approx \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f \Big|_{x_0, y_0} + O((h+k)^{n+1}); \\
 &\hspace{20em} h = x - x_0, k = y - y_0.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

De tal modo que la expansión de Taylor resulta exacta para polinomios del grado considerado,  $n$ , pero para el resto aporta un error cuyo orden depende del tamaño del elemento elevado a la potencia  $n + 1$

$$e_n = f(x) - f_{T_n}(x) = O(h^{n+1}) \tag{6.2}$$

De este modo, la convergencia exige (Bathe 1982) que se cumpla la condición siguiente:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{h^n f^{(n)}}{n!}} < 1 \tag{6.3}$$

La construcción de las funciones básicas supone, por tanto, la elección de los términos polinómicos de menor orden que, por ejemplo para las definidas en un espacio 2D, quedan localizados en los rombos que cabe trazar centrados en la altura del triángulo de Pascal, que vemos en 6.4 :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & \xi & & \eta & & \\
 & & & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 & \\
 & & \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 \\
 & \xi^4 & & \xi^3\eta & & \xi^2\eta^2 & & \xi\eta^3 & & \eta^4 \\
 & \xi^5 & & \xi^4\eta & & \xi^3\eta^2 & & \xi^2\eta^3 & & \xi\eta^4 & & \eta^5 \\
 \xi^6 & & \xi^5\eta & & \xi^4\eta^2 & & \xi^3\eta^3 & & \xi^2\eta^4 & & \xi\eta^5 & & \eta^6
 \end{array} \tag{6.4}$$

### Cómputo de las integrales en los elementos

A las posibles fuentes de error asociadas a la elección de las funciones de forma descritas antes, se añaden ahora las procedentes de las formas de integración empleadas en la construcción de los modelos de distribución de las acciones o de las rigideces derivadas de las expresiones 5.36 que como se vio se reducen a la forma 5.37 una vez realizadas las integrales, por elementos, tal como se señala en 5.38.

La integración se realiza habitualmente de forma numérica (por integración de Gauss, 5.3.1.2) de modo que la exactitud de la *cuadratura* depende del grado de los polinomios correspondientes a la función a integrar y el número de opuntos de Gauss elegidos por cada dirección del continuo a representar: solo será exacta por Gauss si se usan al menos  $n$  puntos por dirección para integrar polinomios de grado  $2n - 1$ . Con menor número

de puntos resultarán errores de interpolación.

Consideremos el formato numérico de la integral, tal como se verá en el apartado 6.1.3.2:

$\sum_i \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i$  con  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\partial}_x \mathbf{N} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \boldsymbol{\partial}_\xi \mathbf{N}$ . (6.22) donde la suma se hace sobre el valor, ponderado por  $\Omega_i$ , de la expresión en los puntos de Gauss,  $i$ , siendo  $\mathbf{N}$  las funciones de forma en la geometría canónica o regular del elemento,  $\boldsymbol{\partial}_x$  el operador diferencial relevante<sup>2</sup>,  $\mathbf{G}$  la matriz que proyecta tales funciones de forma sobre la topología y la geometría real del elemento,  $\mathbf{J}$  el jacobiano de la transformación de una geometría a la otra, y  $\boldsymbol{\kappa}$  la matriz que describe localmente las relaciones tensión–deformación, todas ellas con los valores correspondientes a cada punto de Gauss considerado,  $i$ .

El grado del polinomio a integrar será  $\text{grado}(\mathbf{b})^2 * \text{grado}(\boldsymbol{\kappa}) * \text{grado}(|\mathbf{J}|)$ , pero  $\text{grado}(\mathbf{b}) = \text{grado}(\mathbf{G}) * \text{grado}(1/|\mathbf{J}|) * \text{grado}(\boldsymbol{\partial}_\xi \mathbf{N})$  de modo que resulta tanto más elevado y alejado del orden del elemento cuanto mayor orden se emplee en su descripción. Se alcanza por tanto mejor “exactitud” en elementos de menor orden, pero esto exigirá por ello menor tamaño en las dimensiones de la malla para permitir representar adecuadamente la variación en las funciones, resultando además en órdenes de continuidad menor en la interfaz entre elementos.

Como veremos en el apartado dedicado a los elementos en flexión, 6.3, problemas en la descripción del acoplamiento entre los efectos del cortante y del momento llevan en ocasiones a formulaciones con exceso de rigidez (ver bloqueo de cortante en página 520) que requieren corregirse aportando una cier-

---

2. de acuerdo a las expresiones locales 5.22, 5.23 y 5.24.

ta relajación mediante modos de integración reducida (menor número de puntos de Gauss, etc.) para asegurar la flexibilidad necesaria, pero acentuando con ello los potenciales problemas de diferencias numéricas con los resultados que cabría señalar como exactos de acuerdo a la forma precisa de las ecuaciones de campo.

**Se requiere por tanto una aceptable regularidad matemática**

Sea cual sea la formulación, debe quedar asegurada la no singularidad (espúrea) de la matriz del elemento y la invariancia geométrica, en el sentido de insensibilidad al cambio de ejes de coordenadas y de simetría en la formulación con relación a las diferentes direcciones espaciales.

La singularidad de la matriz del elemento, es decir, el determinante nulo, implica respuesta nula (autovalor nulo) con autovector no nulo, es decir, supone poder describir un movimiento sin energía de deformación:  $\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$ ,  $\{\mathbf{f} = 0, \mathbf{u} \neq 0\} \implies \mathbf{f} = \lambda\mathbf{u}$ , con  $\lambda = 0$ ; y  $(\mathbf{k} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$ . Desde el punto de vista del elemento hay que considerar que los movimientos sin deformación deben ser posibles, pero no debe haber fuentes adicionales de singularidad que puedan suponer deformaciones del elemento sin energía de deformación.

**6.1.2.3. Errores numéricos en el cálculo de la solución al sistema de ecuaciones**

El sistema de ecuaciones resultantes en cada paso de análisis, en el formato lineal de 5.37 puede tener problemas adicionales

dado el modo limitado de la representación numérica en el ordenador. Repasamos sus posibles fuentes, causa de imprecisiones numéricas, y que pueden agruparse en

- mal condicionamiento de la matriz
- errores de truncado
- errores de redondeo

La imprecisión puede proceder de problemas en la formulación del problema que den lugar a un mal condicionamiento numérico de la expresión fundamental  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$ . Este mal condicionamiento se refleja en que pequeñas variaciones en  $\mathbf{F}$  o en  $\mathbf{K}$  dan lugar a grandes variaciones en  $\mathbf{U}$ .

Podemos medir ese grado de condicionamiento,  $\text{cond}(\mathbf{K})$  (*condition number*), por el cociente entre la escala del error en  $\mathbf{U}$  respecto a la escala del error en  $\mathbf{F}$ :

$$\text{cond}(\mathbf{K}) = \frac{\|e(\mathbf{U})\|}{\|\mathbf{U}\|} \div \frac{\|e(\mathbf{F})\|}{\|\mathbf{F}\|} \quad (6.5)$$

de modo que es un número relacionado con los autovalores de  $\mathbf{K}$ , que cabe medir con el cociente entre el mayor y el menor de tales autovalores:

$$\text{cond}(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{K})}{\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{K})}. \quad (6.6)$$

Este indicador de  $\mathbf{K}$  permite predecir el número de guarismos incorrectos en la mantisa de los valores resultado:  $g_i = \log_{10} \text{cond}(\mathbf{K})$  y, como bien se puede entender, dicho problema queda asociado a formulaciones que describan situaciones

de rigidez muy reducida para alguno de los posibles modos de deformación.

Pero pueden también darse problemas por la limitada precisión en la representación numérica empleada en el ordenador sea por

- error de redondeo (en el último guarismo)
- error de truncado (en sumas de números  $a$  y  $b$  muy diferentes, cuando resultan provenir de restas de números iguales o muy próximos al mayor)

Debe asegurarse el uso de altas precisiones: mejor que usar *float* será emplear la precisión de *double* o mayor. Y tal vez sea relevante prestar atención a la escala relativa de los distintos términos de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ : al tratarse a veces de términos de magnitudes muy diferentes (distintas unidades) a diferentes escalas, cabría esperar diferente precisión en los distintos tipos de resultados.

#### **6.1.2.4. Otros errores de modelado**

En general, debe considerarse la posibilidad de errores en el modelado de la realidad, siendo algunas de las fuentes las siguientes:

**Errores en ecuaciones de constitución de MATeriales**  
Pueden darse por errores en los valores de parámetros, o por error en las relaciones entre dichos parámetros en situaciones sin isotropía u homogeneidad.

Considerando los comportamientos lineales en casos isótropos, para el caso de los estados planos, resulta relevante el módulo de Poisson. En casos no isótropos, tanto este como el módulo de Young. En casos dinámicos resulta relevante prestar atención a una adecuada estimación de la amortiguación.

En la descripción de comportamientos no lineales debe cuidarse la descripción de la evolución de las variables de acuerdo a su historial de carga y descarga, con la correspondiente evaluación de la evolución (y acumulación) de daño. Lo que exige la adecuada representación de los ciclos de histéresis.

Los errores surgidos de un tratamiento inadecuado de estos parámetros pueden ser de gran importancia.

**Aproximación de la geometría** Debe considerarse la adecuación en la representación de la forma estructural, los enlaces entre elementos, y cualesquiera de las condiciones de contorno existentes. Esta es una fuente de error relativamente frecuente, tanto más probable cuanto más automática sea la forma de empleo del programa.

Cabe considerar como posibles errores de modelado de la geometría algunos de los siguientes:

- que la representación sea solo aproximada (por error de interpolación en la forma). No suele ser clave en edificación, aunque sí en aeronáutica o en las situaciones en que el modelo sirve para la fabricación por control numérico.
- la eliminación de elementos clave en el comportamiento. Es el caso de particiones y escaleras en análisis dinámicos, eliminación que altera sustancialmente los períodos propios de

oscilación en las fases iniciales o sin daño.

- geometría incorrecta en los enlaces entre elementos o en la aplicación de cargas, como las posiciones de las cargas de fachada en relación con los elementos estructurales.
- inadecuada representación de las holguras y estados iniciales de la estructura, o de la evolución de su estado de acuerdo a los procesos de construcción.

Y es de particular importancia prestar una correcta atención a las condiciones de contorno

- es lamentablemente demasiado frecuente la introducción de coacciones inexistentes . . .
  - rótulas sin posibilidad de desplazamiento en arranques de cerchas apoyadas
  - empotramientos (coacciones completas al giro) en extremos de piezas sin tal grado de coacción
- . . . o mal definidas (apoyo inclinado o elástico en la realidad pero no en el modelo . . .)
- resulta relevante, para validar un modelo, considerar la sensibilidad de su comportamiento a cambios en la condición de apoyo.

Cabría apuntar por todo ello, como herramienta de validación de interés, la utilidad de comparar resultados obtenidos a partir de modelados diferentes de un mismo problema.

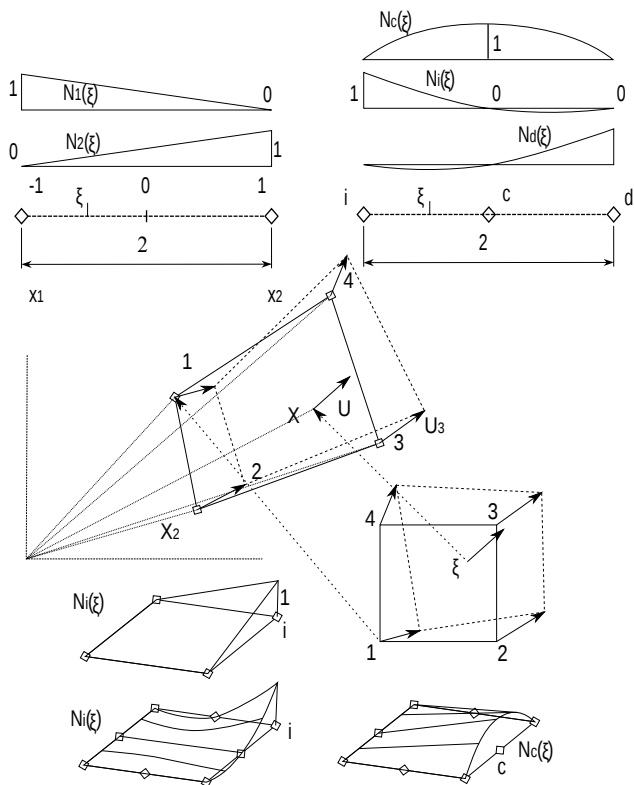


Figura 6.4: Funciones de forma e interpolación. Funciones lineales o cuadráticas en elementos lineales (arriba) o superficiales (abajo). Los desplazamientos (en el centro) se interpolan en el espacio de de coordenadas *naturales* a partir de los de los nodos, y se trasladan a los puntos correspondientes del espacio de coordenadas *reales*. Se determina  $x$  correspondiente a  $\xi$  interpolando a partir de las coordenadas de los nodos.

### 6.1.3. Funciones de forma y propiedades del elemento

Con todas las consideraciones de los apartados precedentes podemos explorar ahora alternativas para la definición de las funciones de interpolación y la correspondiente construcción de las propiedades de los elementos, y vamos a hacerlo inicialmente, por su mayor sencillez, considerando elementos lineales (barras) para estados de esfuerzo y deformación axiales o elementos superficiales en estados planos. En la sección 6.3 desarrollaremos con mayor extensión los modelos de elemento para piezas sometidas a estados de flexión o flexocompresión.

Pensando en la integración de Gauss, sección 5.3.1.2, resulta habitual considerar sistemáticamente dos sistemas de coordenadas, uno que facilite la identificación de los puntos de Gauss, que denominamos sistema *natural* o canónico, con coordenadas en intervalos  $[-1, 1]$  para todas las direcciones del espacio considerado, es decir, una en casos axiales:  $\xi$ , dos para los superficiales:  $\xi = [\xi, \eta], \dots$  y otro *real*, con coordenadas de valores en unidades del espacio *real*,  $x$  en casos axiales,  $\mathbf{x} = [x, y]$  en los superficiales, de tal modo que la geometría del espacio *real* se construye a partir del sistema de coordenadas *naturales* por interpolación desde estas de forma análoga a como los movimientos en el interior del elemento se interpolan a partir de los movimientos de los nudos, trasladándose estas interpolaciones en el espacio de coordenadas *naturales* al espacio de las coordenadas *reales*.

Dadas las condiciones vistas para las funciones, es decir, teniendo  $N_i(\mathbf{x}_i) = 1; N_i(\mathbf{x}_j) = 0, i \neq j$ , siendo  $i, j$  índices a los nudos, y dado el criterio de elección de los términos polinómicos

de menor orden en el triángulo de Pascal, las funciones polinómicas apropiadas asociadas a cada nudo, dependiendo del número de nudos por elemento, son como las de la figura 6.4 para el espacio de coordenadas *naturales*: las figuras de arriba representan las funciones lineales o cuadráticas para un elemento lineal con dos o tres nudos, las de abajo para un elemento superficial de cuatro o de ocho nudos, y en las figuras del centro, la derecha la interpolación del movimiento en el espacio *natural* y su traslado al espacio *real*. La figura central izquierda muestra los desplazamientos de los nudos y la deformación real resultante. También muestra la interpolación de la geometría *real* del elemento a partir de las coordenadas reales de los nudos, interpolación que permite establecer la correspondencia entre ambos espacios, de  $\xi$  a  $x$ .

### 6.1.3.1. Tipología y expresiones para las funciones de forma

Cabría establecer las funciones de forma directamente en el espacio de coordenadas *reales* a través de funciones polinómicas elegidas respetando los criterios descritos en los apartados 5.2.4.2 y 6.1.2.2, tal como se hará más adelante en el ejemplo de la sección 6.2, apartado 6.2.4, en el que se muestra como obtener los coeficientes de los monomios elegidos para esas funciones en el triángulo de Pascal, expresión 6.4, formalizado para coordenadas en el espacio real  $x$ . Sin embargo resulta mucho más sencillo establecer dichas funciones en el espacio de coordenadas *naturales* y trasladarlas al de coordenadas *reales* mediante una transformación geométrica que proyecte el primero en el segun-

do, transformación muy sencilla de realizar si aceptamos que la geometría *real* se interpole a partir de la *natural* asegurando que la proyección sitúe los nodos en las coordenadas reales, cosa que puede hacerse usando las mismas funciones de forma que las usadas para interpolar los desplazamientos en el elemento a partir de los de los nodos.

Veamos algunos posibles tipos de función.

### **funciones lagrangianas**

construidas sobre la base de los polinomios de Lagrange. Para una dimensión

$$N_i(\xi) = l_i^n(\xi) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left( \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (6.7)$$

El producto de los  $n - 1$  valores constituye una función continua, se hará igual a la unidad para las coordenadas  $\xi_i$  del nodo  $i$  al que se refiere la función, al serlo cada uno de los multiplicandos, y se anulará en todos los demás nodos, al ser nulo alguno de tales multiplicandos, por lo que cumple las condiciones requeridas:  $N_i(\mathbf{x}_i) = 1; N_i(\mathbf{x}_j) = 0, i \neq j$ .

Para más de una dimensión bastaría cambiar las diferencias que aparecen en cada cociente por una norma de las coordenadas que en ese cociente se representa: la distancia por ejemplo, o el producto de esos mismos polinomios aplicados separadamente a cada dirección del espacio:

$$N_i(\xi, \eta) = N_i(\xi)N_i(\eta) \quad (6.8)$$

**funciones serendípitas**

Si consideramos el sistema *natural* con coordenadas en el intervalo  $[-1, 1]$  para cada dirección del espacio cabe establecer con mucha facilidad funciones de menor complejidad, sin más que aprovechar las especiales posiciones de los nodos: tenemos que para una dimensión, las funciones serían, sin más complicación las siguientes:

lineales, con dos nodos.

$$N_i = \frac{1 + \xi_i \xi}{2} \quad (6.9)$$

cuadráticas, con tres nodos.

$$N_c = 1 - \xi^2$$

$$N_{i(i \neq c)} = \frac{1 + \xi_i \xi}{2} - \frac{1 - \xi^2}{2} \quad (6.10)$$

siendo  $c$  el nudo central.

Para el caso de más dimensiones puede usarse la estrategia propuesta antes para las funciones lagrangianas, 6.8, que funciona bien para elementos con solo nudos en los vértices, pero que requiere para las versiones cuadráticas, y en los nudos del centro de los bordes, considerar productos de la función cuadrática para la dirección que recorre el borde, con otra parabólica de valor nulo solo en el borde opuesto para las direcciones ortogonales a esta, a fin de evitar evitar valores nulos en el centro del elemento (en el origen de coordenadas) que supondría un exceso espúreo de rigidez.

Son posibles otras formulaciones, como el uso de funciones bézier, lo que es particularmente útil para la interpolación de la

geometría en situaciones ligadas a procesos de fabricación asistida por ordenador, así como considerar nodos no situados en los bordes: por ejemplo un nodo central en elementos superficiales permitiría obviar la llamada de atención del párrafo precedente. Pero la sencillez de la formulación serendípita anterior facilitará la exposición siguiente, por lo que lo dejamos aquí.

### 6.1.3.2. Formulación de propiedades del elemento con funciones isoparamétricas

Una vez adoptado el método de interpolación, se trata ahora de construir las propiedades de cada elemento aislado, propiedades que serán posteriormente ensambladas en la de la estructura mediante los procedimientos que ya vimos en 2.1.2.2.

Vamos a explorar el caso de elementos superficiales para estados planos, para el que consideramos los dos sistemas de coordenadas

$$\mathbf{x} = [x \ y]^T; \quad \boldsymbol{\xi} = [\xi \ \eta]^T$$

El operador diferencial  $\boldsymbol{\partial}$  apropiado al problema es el que relaciona desplazamientos con deformaciones en cada punto del continuo del elemento, ver 5.3 aplicado a dos dimensiones, aunque ahora esas funciones se va a interpolar a partir de los valores nodales:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{v} \approx \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{b} \mathbf{u}; \quad \boldsymbol{\partial}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Usamos el subíndice en  $\boldsymbol{\partial}_x$  para hacer explícito que es un operador en el espacio de coordenadas reales del elemento.

Ahora bien, dicho operador no puede aplicarse directamente tal como está a las funciones de forma puesto que estas están definidas en el espacio de coordenadas naturales, de modo que tenemos que considerar la transformación de la geometría. Tenemos que esa transformación nos permite establecer, para cualquier función las relaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \nabla_{\xi} f = \mathbf{J} \nabla_{\mathbf{x}} f \quad (6.12)$$

donde  $\mathbf{J}$  es el jacobiano de la transformación de la geometría de coordenadas  $\xi$  a  $\mathbf{x}$  (o de  $\mathbf{x}$  como función de  $\xi$ ).

La transformación inversa es evidente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad \nabla_{\mathbf{x}} f = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi} f \quad (6.13)$$

de modo que el operador, en el espacio de coordenadas reales, establecido a partir de los diferenciales en coordenadas naturales, es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad \det \mathbf{J} = |\mathbf{J}| \quad (6.14)$$

expresión que podemos condensar en formato matricial

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{G}_J}{|\mathbf{J}|} \nabla_{\xi} \quad (6.15)$$

Esta expresión nos permite ahora determinar la forma que debe adoptar el operador de la expresión 6.11 para aplicarlo a funciones definidas en el espacio natural. Adoptamos el formato

$$\partial_x = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_\xi \quad (6.16)$$

o, con más detalle

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{22} & -\mathbf{J}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{11} \\ -\mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{22} & -\mathbf{J}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

donde el operador final  $\partial_\xi$  se ha elegido de tal forma que su aplicación al vector de desplazamientos  $\mathbf{v} = [u \ v]^T$  permita completar la lista de derivadas parciales  $[\frac{\partial u}{\partial \xi} \ \frac{\partial u}{\partial \eta} \ \frac{\partial v}{\partial \xi} \ \frac{\partial v}{\partial \eta}]^T$ . Resulta por tanto que

$$\partial_x = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_\xi; \quad \partial_x N = \mathbf{b} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_\xi N \quad (6.18)$$

donde el formato de las funciones de forma, para una ordenación por nodos de los desplazamientos  $u, v$  en las direcciones  $x, y$ , es:

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

siendo  $N_i = N_i(\xi, \eta)$ ,  $i \in [1, 2, 3, 4]$  funciones elegidas de acuerdo a los apartados precedentes.

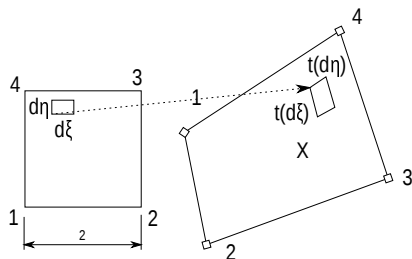


Figura 6.5: Transformación del diferencial de área

### Integración en el elemento

Para proceder ahora a la integración en el elemento tenemos que considerar que al estar definidas las funciones en el espacio de coordenadas naturales  $\xi$  hay que tener en consideración como se recorre la totalidad del área en las coordenadas reales  $x$ , para lo que nos puede ayudar la figura 6.5.

En dicha figura vemos que el diferencial de área real puede interpretarse como el área abarcada por la transformación al espacio real del área delimitada por los vectores  $d\xi$ ,  $d\eta$  en el espacio natural:

$$d\xi \rightarrow \vec{t}(d\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} d\xi; \quad d\eta \rightarrow \vec{t}(d\eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\eta$$

de tal modo que en el espacio real el diferencial de área puede medirse recorriendo el espacio natural en la forma

$$dA = \|\vec{t}(d\xi) \times \vec{t}(d\eta)\| = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (6.20)$$

De este modo, la rigidez del elemento, que de acuerdo a 5.48 es la integral

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega} (\partial \mathbf{N})^T \boldsymbol{\kappa} \partial \mathbf{N} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{b} d\Omega \quad (6.21)$$

adoptará, al realizarse dicha integración en forma numérica por el procedimiento de los puntos de Gauss, la forma siguiente:

$$\mathbf{k}_e = \sum_{i \in \text{Gauss}} \Omega_{\xi_i} |\mathbf{J}_i| \left( \frac{\mathbf{G}_i}{|\mathbf{J}_i|} \partial_{\xi} \mathbf{N}(\xi_i) \right)^T \boldsymbol{\kappa}_i \left( \frac{\mathbf{G}_i}{|\mathbf{J}_i|} \partial_{\xi} \mathbf{N}(\xi_i) \right) \quad (6.22)$$

Obtenida la rigidez local de cada elemento, su ensamblaje en la estructura completa, la identificación y aplicación de las condiciones de contorno –cargas y sustentación– y la obtención de los desplazamientos nodales como solución al problema matricial resultante, así como la posterior evaluación de dichos resultados son pasos comunes a lo ya establecido en apartados anteriores.

En las secciones siguientes empleamos la metodología descrita para el estudio de los tipos de elementos apropiados a estados de esfuerzos de tipo axial, o de flexión.

## 6.2. Elementos finitos en problemas axiales

Abordamos en esta sección la formulación de los problemas de esfuerzos axiales, sean lineales, de barras en tracción o compresión en la directriz de la pieza, sean superficiales, por es-

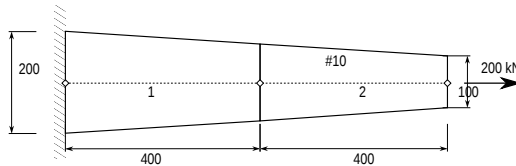


Figura 6.6: Estudio de caso: modelo uniaxial o lineal

fuerzos de membrana contenidos en el plano de la superficie. Realizamos todo el proceso a través de un estudio de caso.

El ejemplo se aborda desde perspectivas de formulación alternativas, con el fin de aportar una visión panorámica completa de toda la formulación, en la que se consideran

1. los modos de discretización de las ecuaciones fundamentales del problema,
2. la construcción de las funciones de forma (o de interpolación),
3. el planteamiento de las condiciones de contorno y
4. la solución e interpretación de los resultados obtenidos y de su calidad.

En una sección posterior se abordarán los problemas que requieren modelar estados de flexión, en general más complejos que los considerados en esta.

La forma de abordar el problema corresponde al siguiente esquema: tras considerar los elementos teóricos disponibles, es decir las ecuaciones y operadores apropiados al problema, se definen los parámetros de la discretización y las funciones de

forma, explorando las cualidades requeridas y los tipos disponibles (polinomios, Lagrange, isoparamétricas...) Con todo ello se abordan las soluciones aproximadas, sea a través de modelos de barra, sea mediante modelos planos, para finalizar con la comparación de las soluciones obtenidas.

### 6.2.1. Ecuaciones y parámetros del problema; modelo lineal

Se trata de un sencillo problema de tracción sobre una chapa de sección variable, en el que los datos corresponden a consideraciones globales: la geometría, una carga aplicada de la que se aporta el valor resultante, aunque no el detalle de la forma de aplicación, y una condición de sustentación que supone que ninguno de los puntos del contorno sustentado es susceptible de moverse o de cambiar de orientación.

La elección de un modelo tan trivial permite ilustrar fácilmente las virtudes y limitaciones del método y las diversas alternativas de modelado que ofrece.

En tanto que se trata de definir el estado de tensión en todo punto de la chapa, el modelo apropiado sería considerar tensión plana para cualquiera de sus puntos. Una alternativa de representación más sencilla e inmediata, y que es la que se adopta en esta sección, es la del modelo lineal de sección variable que exige alguna hipótesis sobre la distribución de la tensión en cada sección, siendo la más sencilla la hipótesis de tensión idéntica en todos los puntos de la misma sección. Por tanto, las ecuaciones relevantes son las siguientes, empleando dos columnas, la primera para la descripción genérica de estas, y la segunda para su

detalle en el caso del ejemplo, considerando el modelo lineal.

$$\begin{array}{lll} \text{EQU} & \partial^* \sigma = \varphi & -\frac{dF}{dx} = p \\ \text{COM} & \partial v = \epsilon & \frac{du}{dx} = \epsilon \\ \text{MAT} & \kappa \epsilon = \sigma & EA \epsilon = F \end{array}$$

### Solución “exacta” del problema

Considerando el modelo de barra lineal, el desplazamiento resulta de la suma (integral) de las deformaciones, de modo que  $u = \int_0^x \epsilon dx = \frac{Fl}{EA_0} \int_0^x \frac{d(x/l)}{1-(1-\alpha)x/l}$ ; donde se usa  $\alpha = \frac{A_1}{A_0}$ ;

Por tanto la solución analítica sería  $u(x) = \frac{Fl}{EA_0} \frac{\log(1-(1-\alpha)x/l)}{-(1-\alpha)}$ .  
En el extremo de la barra,  $u(l) = 0,5545$  mm

### 6.2.2. Discretización de barra: funciones de forma

Consideramos ahora la discretización de la barra para ese mismo modelo lineal.

Hemos de tener en cuenta que hay que representar, a partir de condiciones discretas (nodales), tanto el continuo de las funciones de campo (desplazamientos, deformaciones y tensiones) como el de la propia geometría (la ley de secciones en este caso). Y para ello usamos las funciones de interpolación (o de forma) que nos parezcan más adecuadas.

Consideramos el doble sistema de coordenadas, el sistema *natural* con coordenadas en el intervalo  $[-1, 1]$ ,  $\xi$ , y el *real*, con coordenadas de valores en unidades del espacio real,  $x$ , de tal modo que la geometría del espacio *real* se construye igualmente

a partir del sistema de coordenadas *naturales* por interpolación desde estas. De tal modo que la geometría se interpola con

$$\begin{aligned} x(\xi) &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \\ A(\xi) &= N_1(\xi)A_1 + N_2(\xi)A_2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

y los desplazamientos con;

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \quad (6.24)$$

expresiones en las que estamos usando idénticas funciones de forma para ambos grupos de interpolaciones. Podríamos no hacerlo así, y usar un número y posiciones diferentes de parámetros para geometría y mecánica, pero es bastante usual el empleo de este tipo de elementos *isoparamétricos*, que usan el mismo número y significado de los parámetros empleados para ambos cometidos. La figura 6.7 muestra los dos sistemas de coordenadas y las funciones de forma que se han adoptado.

Las funciones de forma isoparamétricas adoptadas resultan muy sencillas

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1(\xi) \ N_2(\xi)] \\ N_1 &= \frac{1 - \xi}{2} \\ N_2 &= \frac{1 + \xi}{2} \end{aligned}$$

La expresión puede generalizarse en la forma

$$N_i = \frac{1 + \xi_i \xi}{2} \quad (6.25)$$

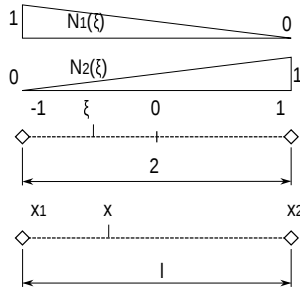


Figura 6.7: Elemento de barra y funciones de forma

### Operador diferencial

El operador diferencial que permite deducir las deformaciones a partir de los desplazamientos, o su adjunto que deriva las cargas distribuidas a partir de las tensiones, es un operador en el espacio de coordenadas reales. Para el que liga las variables cinemáticas:

$$\boldsymbol{\partial} = \frac{d}{dx}(\cdot) \quad (6.26)$$

Ahora bien, dado que las expresiones derivadas de las funciones de forma terminarán siendo expresiones en el espacio de coordenadas naturales, es necesario darle forma en estas, lo que resulta factible considerando las transformaciones de coordenadas entre

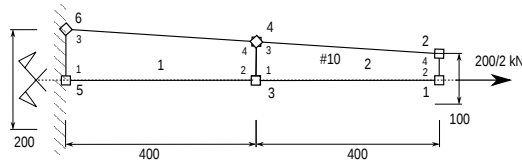


Figura 6.8: Estudio de caso: modelo superficial

uno y otro espacio:

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\xi},$$

$$\frac{df}{dx} = \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \frac{df}{d\xi} \quad (6.27)$$

Puede verse la relación con la expresión 6.18, si además de identificar  $\boldsymbol{\partial}_x$  con  $d/dx$  consideramos en este caso las identidades

$$\frac{1}{|J|} \equiv \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1}, \quad G \equiv 1 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\partial}_\xi \equiv \frac{d}{d\xi}.$$

### 6.2.3. Ecuaciones y parámetros del problema; modelo superficial

Una alternativa al modelo concebido como una sucesión de piezas lineales de sección variable es el de considerar la chapa como un elemento superficial de espesor constante en el que la geometría queda definida por la asociación de elementos planos trapezoidales. En la figura 6.8 se representa esta alternativa, considerando en el modelado la simetría del problema en torno

a la directriz de la pieza: se modela por ello solo la mitad de la sección.

Las ecuaciones de campo son ahora las correspondientes al estado plano de tensión, de modo que en cada unidad del espesor tendremos:

$$\begin{aligned}
 \text{EQU } \varphi = \partial^* \sigma \quad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \\
 \text{COM } \epsilon = \partial v \quad \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
 \text{MAT } \sigma = \kappa \epsilon \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

y en un espesor diferente a la unidad bastará considerar el producto de tensión por el espesor.

Ahora no disponemos de una solución exacta. Para formular esta de acuerdo a las expresiones de la teoría de la elasticidad consideraríamos, no solo las condiciones internas de acuerdo a expresiones como la definida en 5.25, sino que habría que establecer las condiciones de contorno del tipo de Dirichlet, 5.18, en el borde empotrado: imposibilidad de movimiento, y del tipo Neumann, 5.19, de equilibrio de tensiones con la carga aplicada, tanto en el borde en el que se aplica la carga distribuída, como en los bordes libres encima y debajo de la chapa sobre los que la carga es nula. En el modelo simétrico de media pieza las condiciones en el eje de simetría exigirían condiciones mixtas, en las que el desplazamiento vertical estaría impedido (Dirichlet) pero

no el horizontal, siendo necesario para este grado de libertad establecer la condición de que la carga aplicada tangencialmente desde la otra mitad de la chapa es nula (Neumann).

### 6.2.4. Discretización de la chapa: funciones de forma

Vamos a analizar en primer lugar la posibilidad de establecer las funciones de forma en el sistema de coordenadas reales,  $x, y$  donde  $x$  es la directriz de la barra e  $y$  la dirección ortogonal, en el canto de la chapa.

Considerando las cuestiones señaladas en los apartados 5.2.4.2 y 6.1.2.2, desacoplamos los movimientos en las dos direcciones del plano y usamos para cada uno de estos funciones polinómicas de cuatro términos, pues estarán asociadas a cuatro nudos, con un parámetro por nudo.

La organización del conjunto sería como sigue:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 & N_4(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 & N_4(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

con  $N_i(x_i, y_i) = 1; N_i(x_j, y_j) = 0$ , cuando  $i \neq j$ , siendo  $i, j$  índices a los nudos, de coordenadas  $x_i, y_i$ , y siendo los parámetros  $u_i, v_i$  sus respectivos desplazamientos.

Cada una de las funciones tendrá por tanto la forma polinómica:  $N_i = a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}y + a_{i4}xy$ , de modo que

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{a}\mathbf{x} \quad (6.30)$$

donde la matriz  $\mathbf{a}$  que contiene los dieciséis coeficientes numéricos requeridos puede resolverse si establecemos las condiciones ya señaladas de  $N_i(x_i, y_i) = 1$ ;  $N_i(x_j, y_j) = 0$ ,  $i \neq j$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{a}\mathbf{x}_n; \quad \mathbf{a} = \mathbf{x}_n^{-1} \quad (6.31)$$

donde, como se ve, la matriz  $\mathbf{x}_n$  agrupa los valores de los términos polinómicos apropiados a las coordenadas reales de los nodos, siendo  $\mathbf{a}$  su inversa.

### 6.2.5. Resumen de las alternativas de discretización

En la figura 6.9 pueden verse cuatro alternativas para el modelado de la pieza, considerando variantes en el tipo de elemento y el orden de los polinomios con que se abordan sus funciones de forma.

Se trata de dos modelos de barra, y dos de membrana. Los dos de barra son modelos de dos elementos cada uno, donde el primero atribuye dos nodos a cada elemento, por tanto con funciones lineales, de dos parámetros, y el segundo elementos tres nodos por elemento, y por lo tanto elementos que requerirán funciones de interpolación cuadráticas. Los modelos de membrana representan condiciones de simetría y usan ambos dos elementos para media pieza, el primero con cuatro nodos, en los vértices de cada elemento, y el segundo con ocho nodos, al añadir nodos en el centro de cada uno de los cuatro bordes.

Los desplazamientos aproximados, representados en el espacio de coordenadas naturales de cada elemento, se obtendrían de la manera siguiente, a partir de los desplazamientos de los nudos del elemento considerado:

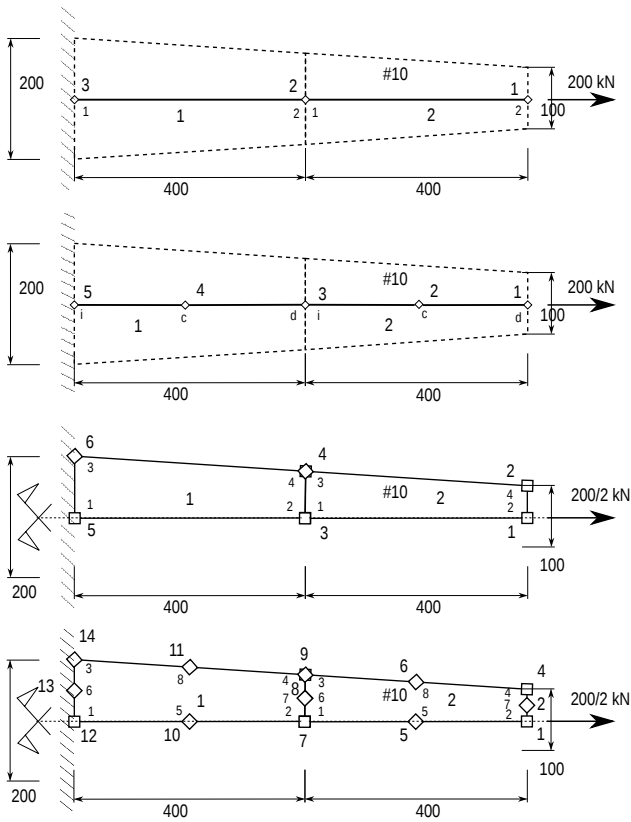


Figura 6.9: Alternativas de discretización de la pieza: dos modelos de elemento (lineal o superficial) y dos estrategias para sus funciones (lineal o cuadrática). Las figuras indican en grande la numeración global de nodos y elementos (un orden arbitrario no altera el modelo), y en pequeño la local (el orden debe seguir estrictamente al de la formulación adoptada).

**a: barra lineal**

$$u(\xi) = u_1 N_1 + u_2 N_2 = u_1 \frac{1-\xi}{2} + u_2 \frac{1+\xi}{2}$$

**b: barra cuadrática**

$$u(\xi) = u_i N_i + u_c N_c + u_d N_d =$$

$$u_i \left( \frac{1-\xi}{2} - \frac{1-\xi^2}{2} \right) + u_c (1 - \xi^2) + u_d \left( \frac{1+\xi}{2} - \frac{1-\xi^2}{2} \right)$$

**c: membrana lineal**

$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 \\ v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3 + v_4 N_4 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix};$$

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, N_3 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4},$$

$$N_4 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}. \quad N_i = \frac{(1+\xi_i \xi)(1+\eta_i \eta)}{4}.$$

**d: membrana cuadrática**

$$N_1 = N_{--} = \frac{1}{4}(-\xi + \xi^2)(-\eta + \eta^2); \quad N_2 = N_{+-} = \frac{1}{4}(\xi + \xi^2)(-\eta + \eta^2)$$

$$N_3 = N_{-+} = \frac{1}{4}(-\xi + \xi^2)(\eta + \eta^2); \quad N_4 = N_{++} = \frac{1}{4}(\xi + \xi^2)(\eta + \eta^2)$$

$$N_5 = N_{0-} = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2); \quad N_6 = N_{-0} = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)^2(1 - \eta^2)$$

$$N_7 = N_{+0} = \frac{1}{4}(1 + \xi^2)^2(1 - \eta^2); \quad N_8 = N_{0+} = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta^2)$$

La aproximación en este último modelo vuelve a ser  $\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N} \mathbf{u}$ , donde  $\mathbf{u}$  agrupará los dieciséis desplazamientos nodales y  $\mathbf{N}$  los treinta y dos términos que, como en el caso anterior, reiteran el uso de las ocho funciones en la interpolación separada

de los movimientos en los ejes  $x$  e  $y$ . Cabe comprobar que las funciones, elegidas al modo serendípito, cumplen la condición  $\sum_1^8 N_i(\xi, \eta) = 1$ .

También puede verse que, en este caso, los monomios de los polinomios resultantes son nueve frente a los ocho nodos, al incluir el término de cuarto grado, como puede verse en el triángulo de Pascal, 6.4, a diferencia del caso **c**, en el que el número de nodos y monomios coincide. Esto significa que, así como en el caso **c** las funciones serendípitas elegidas coinciden con las que resultan de la aproximación vista en 6.2.4, no resulta lo mismo en el caso **d** en el que no se usaría el término  $\xi^2\eta^2$  al elegir para cada función los ocho monomios de menor grado estrictamente necesarios para casar los correspondientes coeficientes con las ocho condiciones que resultan de los valores que la función debe adoptar en cada nudo.

La diferencia entre una y otra familia de funciones de forma es un término de la forma  $1/4(\xi+1)(\xi-1)(\eta+1)(\eta-1)$ , que está sumando en las cuatro primeras funciones serendípitas, y restando en las cuatro últimas, y que coacciona en cierta medida la geometría de la interpolación resultante: la estrategia adoptada está forzando que las funciones de los nodos situados en los vértices se anulen en todos los puntos de los ejes de coordenada nula, y no solo en los nodos ajenos al vértice considerado, forzando como contrapartida la geometría de las funciones de los nodos centrales, al ser obligado que la suma de las ocho funciones sea la unidad en todo el dominio. Ese término es exactamente la cuarta parte de la función de forma que correspondería a un nodo en el centro del elemento si eligiésemos un modelo de nueve nodos, lo que liberaría por tanto ese grado de libertad y eliminaría la

coacción señalada. Pero en este caso, si considerásemos que ese nodo central no está cargado ni conectado y condensásemos sus grados de libertad en los ocho nodos de borde, volveríamos al resultado aportado por la estrategia de 6.2.4. Para los modelos de membrana de ocho nodos del ejemplo de la siguiente sección, definidos en la página 505, pueden verse las diferencias en los resultados del uso de ambas estrategias en páginas 507 y ss.

Establecida la discretización, vamos a desarrollar ahora el proceso que permite obtener la solución aproximada.

### 6.2.6. Soluciones y evaluación

El procedimiento exige construir las matrices de rigidez de cada elemento  $\mathbf{k}_e$ , usando 6.22, ensamblarlas en el modelo completo, de acuerdo a 2.1.2.2, lo que exige asociar los parámetros de carga y desplazamiento locales de cada elemento a los correspondientes globales del modelo, aplicar las condiciones de contorno, sustentación y cargas, y resolver el sistema de ecuaciones resultante  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$ .

Recorremos a continuación estos pasos en los dos tipos de elemento que se han considerado: los lineales (barras) o superficiales (membrana)

#### 6.2.6.1. Elementos de barra

Recuperamos la formulación disponible y las expresiones de la integrales numéricas (5.59, 6.21, 6.18, 6.22) para los dos casos, a: de elemento con funciones lineales, o b: con funciones

cuadráticas.

$$\partial_x \mathbf{N} = \mathbf{b} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_\xi \mathbf{N}; \quad \mathbf{k}_e = \sum \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i \quad (6.32)$$

Considerando que son elementos isoparamétricos, la geometría se interpola con las mismas funciones que los desplazamientos, tal como se recogen en la página 490. Para ambos tipos de elemento tenemos solo una dimensión, que transforma  $\xi$  en  $x$  de modo que en ambos casos

$$\mathbf{J} = \frac{dx}{d\xi}; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\mathbf{J}};$$

y por tanto en el caso a:

$$x = x_1 \frac{1 - \xi}{2} + x_2 \frac{1 + \xi}{2}; \quad \mathbf{J} = \frac{-x_1 + x_2}{2} = \frac{l}{2}$$

(el lector podría determinar  $\mathbf{J}$  para el caso b: como ejercicio)

Por otro lado  $\mathbf{G}$  corresponde a la transformación entre operadores diferenciales correspondientes a los dos espacios coordenados:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}; \quad \text{luego ahora } \frac{d\xi}{dx} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|}; \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{|\mathbf{J}|}{\mathbf{G}};$$

y por tanto, comparando con las expresiones precedentes

$$\begin{aligned} \text{a: } \mathbf{J} &= \frac{l}{2}; \quad \mathbf{G} = 1, \\ \text{b: } \mathbf{J} &= \frac{l}{2} + \xi(x_i + x_d - 2x_c); \quad \mathbf{G} = 1. \end{aligned} \quad (6.33)$$

**Deformaciones y rigidez**

En el caso a: tenemos 2 nodos y basta 1 punto de Gauss:  $\xi_g = 0$ .  
Aplicando las expresiones precedentes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{b}\mathbf{u}; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{2}{l} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_e &= 2\frac{2}{l} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{E(A_1 + A_2)}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{EA_c}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.34)$$

En el caso b: tenemos 3 nodos. Bastarán 2 puntos de Gauss:  
 $\xi_g = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ .

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{2}{l} \begin{bmatrix} \xi - \frac{1}{2} & -2\xi & \xi + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_c \\ u_d \end{bmatrix};$$

Usando 6.32 nuevamente:

$$\begin{aligned} \partial_x N &= \mathbf{b} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_\xi N; \quad \mathbf{k}_e = \sum \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i, \quad \text{con} \\ \mathbf{J} &= \frac{l}{2} + \xi(x_i + x_d - 2x_c) = \frac{l}{2}, \quad x_c = \frac{x_i + x_d}{2}; \quad \mathbf{G} = 1. \end{aligned}$$

expresiones que nos permiten determinar

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_e &= \frac{2}{l} \sum_{i \in \text{Gauss}} \begin{bmatrix} \xi_i - \frac{1}{2} \\ -2\xi_i \\ \xi_i + \frac{1}{2} \end{bmatrix} EA_i \begin{bmatrix} \xi_i - \frac{1}{2} & -2\xi_i & \xi_i + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{EA_c}{3l} \begin{bmatrix} 7 + 4\alpha & -(8 + 4\alpha) & 1 \\ -(8 + 4\alpha) & 16 & -(8 - 4\alpha) \\ 1 & -(8 - 4\alpha) & 7 - 4\alpha \end{bmatrix}, \\
 &\quad \text{con } A_c = \frac{A_i + A_d}{2}; \alpha = \frac{A_i - A_d}{2A_c}. \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

Vemos en la última expresión que la matriz de barra resultante es de 3x3 al haberse usado tres parámetros para esta, aunque la barra sólo va a estar conectada en sus dos extremos, de tal modo que el parámetro asociado a su nodo central no resulta relevante en el modelo global. Por esto podemos recordar lo que ya abordábamos en el apartado 2.1.2.1, en el que buscábamos la matriz de rigidez condensada para una pieza en la que no nos interesaba considerar aisladamente algunos de los grados de libertad, que condensábamos para obtener la ecuación 2.57.

Aunque se trata de una técnica que ya hemos empleado varias veces, por su interés la repasamos nuevamente en forma general. Se descomponen los grados de libertad entre los “internos”,  $i$ , y los “conectados”,  $c$ . Las expresiones de rigidez locales son, en el formato de bloques correspondientes a la ordenación de los grados de libertad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{e,cc} & \mathbf{k}_{e,ci} \\ \mathbf{k}_{e,ic} & \mathbf{k}_{e,ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}$$

donde, sin alterar la mecánica de la pieza, nos interesa mantener visibles solo las relaciones entre los parámetros de desplazamiento y carga sobre los nodos conectados. Podemos deducir

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i &= \mathbf{k}_{e,ii}^{-1}(\mathbf{f}_i - \mathbf{k}_{e,ic}\mathbf{u}_c); \\ \mathbf{f}_c &= \mathbf{k}_{e,cc}\mathbf{u}_c + \mathbf{k}_{e,ci}(\mathbf{k}_{e,ii}^{-1}(\mathbf{f}_i - \mathbf{k}_{e,ic}\mathbf{u}_c)) = \\ &\quad (\mathbf{k}_{e,cc} - \mathbf{k}_{e,ci}\mathbf{k}_{e,ii}^{-1}\mathbf{k}_{e,ic})\mathbf{u}_c + \mathbf{k}_{e,ci}\mathbf{k}_{e,ii}^{-1}\mathbf{f}_i.\end{aligned}$$

y buscando representar  $\mathbf{f}_c - \mathbf{k}_{e,ci}\mathbf{k}_{e,ii}^{-1}\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_c^* = \mathbf{k}_{e,c}\mathbf{u}_c$ ,

$$\mathbf{k}_{e,c} = \mathbf{k}_{e,cc} - \mathbf{k}_{e,ci}\mathbf{k}_{e,ii}^{-1}\mathbf{k}_{e,ic}$$

de modo que en caso que estamos considerando, para el que el grado de libertad a condensar es el del nodo central, tendremos

$$\mathbf{k}_{e,c} = \frac{EA_c}{l} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha^2}{3} & -\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \\ -\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) & 1 - \frac{\alpha^2}{3} \end{bmatrix} = \frac{EA_c^*}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

con  $A_c^* = A_c(1 - \alpha^2/3)$ ,  $\alpha = (A_i - A_d)/A_i$ .

Vemos, pues, que obtenemos en ambos modelos expresiones de rigidez de barra apropiadas al problema, si bien en el modelo cuadrático el área equivalente resulta algo menor que la media obtenida en el modelo lineal.

### 6.2.6.2. Elementos de membrana

En este caso, aunque estudiamos los modelos alternativos c: y d: de la página 490, vamos a comprobar que el proceso es idéntico a los casos de los modelos de barra: tras analizar

las componentes de la formulación y la transformación entre ambos espacios coordenados, vamos a mostrar el procedimiento de construcción de la matriz de rigidez, que vamos a ver en detalle para el elemento de 4 nodos. El resumen sería el siguiente.

### Proceso de construcción de la matriz de elemento

Para la formulación isoparamétrica adoptada cabe considerar el siguiente esquema:

- Para cada elemento  $e$ 
  - se conocen las expresiones para  $\partial_{\xi}N$
  - se conocen las expresiones para  $\mathbf{J}(\mathbf{x}(\xi))$  y para  $\mathbf{G}(\mathbf{J})$
  - se inicializa la matriz  $\mathbf{k}_e$  a  $\mathbf{0}$
  - para cada punto de Gauss  $g$ 
    - Calcula  $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}(\xi))$
    - Monta  $\mathbf{G}_g$  a partir de los elementos de  $\mathbf{J}_g$
    - Calcula  $\mathbf{b}_g = \frac{\mathbf{G}_g}{|\mathbf{J}_g|} \partial_{\xi}N|_g$
    - Determina  $\boldsymbol{\kappa}_g$
    - Calcula  $\Delta \mathbf{k}_{eg} = \Omega_g |\mathbf{J}_g| \mathbf{b}_g^T \boldsymbol{\kappa}_g \mathbf{b}_g$
    - Acumula  $\Delta \mathbf{k}_{eg}$  en  $\mathbf{k}_e$
  - ensambla  $\mathbf{k}_e$  en la matriz global  $\mathbf{K}$

### Elementos de membrana, cuatro u ocho nodos

Tenemos las expresiones generales

$$\partial_{\mathbf{x}}N = \mathbf{b} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_{\xi}N; \quad \mathbf{k}_e = \sum \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i \quad (6.32)$$

aunque ahora la transformación geométrica es de de dos dimensiones, de modo que, considerando los operadores diferenciales

para estado plano ya vistos en el apartado 6.1.3.2, resulta, tanto para el modelo c: como para el d:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Tenemos por lo tanto que, siguiendo con el caso c: de cuatro nodos, la transformación y su jacobiano corresponden a las expresiones siguientes:

$$\begin{bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 & N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

es decir

$$x = \sum x_i \frac{(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)}{4}; \quad y = \sum y_i \frac{(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)}{4};$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sum x_i \xi_i (1 + \eta_i \eta) & \sum y_i \xi_i (1 + \eta_i \eta) \\ \sum x_i \eta_i (1 + \xi_i \xi) & \sum y_i \eta_i (1 + \xi_i \xi) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Para el caso d de ocho nodos: tendríamos

$$x = \sum x_i N_i(\xi, \eta); \quad y = \sum y_i N_i(\xi, \eta);$$

$$\mathbf{J}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \sum x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \sum y_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \sum x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \sum y_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

siendo  $i$  un índice a cada uno de los ocho nodos del elemento, y  $N_i$  cada una de las ocho funciones de la página 490.

La integral numérica por Gauss requiere en el modelo c: un único punto de integración, centrado,  $(\xi, \eta)_g = (0, 0)$ , de modo que, en ese punto,

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)/4 & (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4)/4 \\ (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)/4 & (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)/4 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

en tanto que en el modelo d: se necesita una combinación de dos puntos para cada dirección, cuatro puntos por tanto, en las coordenadas  $(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}})$ , de modo que tendríamos los cuatro valores de  $\mathbf{J}$  correspondientes a cada uno de los  $g$  puntos de Gauss

$$\mathbf{J}_g = \mathbf{J}(\xi_g, \eta_g) = \begin{bmatrix} \sum x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \sum y_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \sum x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \sum y_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Bigg|_g. \quad (6.40)$$

### Matriz del elemento de cuatro nodos

Vamos a continuar ejemplificando el caso c:, elemento plano de cuatro nodos cuyas ecuaciones de campo relevantes son las 6.28.

Las funciones de interpolación  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$  son las del apartado c: de la página 490:  $N_i = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)/4$ .

El cambio de coordenadas  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}))$ , y la transformación entre operadores de 6.18,  $\mathbf{G}(\mathbf{J})$ , tal como se recogen en 6.17 y

6.37, corresponden a la transformación geométrica definida en 6.38, y cuyo jacobiano podemos desarrollar:

$\mathbf{J} =$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)(1 - \eta) + (x_4 - x_3)(1 + \eta) & (y_2 - y_1)(1 - \eta) + (y_4 - y_3)(1 + \eta) \\ (x_3 - x_1)(1 - \xi) + (x_4 - x_2)(1 + \xi) & (y_3 - y_1)(1 - \xi) + (y_4 - y_2)(1 + \xi) \end{bmatrix}$$

Consideramos para construir la matriz la expresión 6.32.

Hemos visto que solo hay un punto de Gauss:  $(0, 0)$ , para el que el valor de jacobiano es el de 6.39, que podemos aplicar a la expresión para  $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{N}$ , que adopta la forma

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_{\xi} \mathbf{N}|_0 \\ &= \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \eta) & 0 & 1 - \eta & 0 & -(1 + \eta) & 0 & 1 + \eta & 0 \\ -(1 - \xi) & 0 & -(1 + \xi) & 0 & 1 - \xi & 0 & 1 + \xi & 0 \\ 0 & -(1 - \eta) & 0 & 1 - \eta & 0 & -(1 + \eta) & 0 & 1 + \eta \\ 0 & -(1 - \xi) & 0 & -(1 + \xi) & 0 & 1 - \xi & 0 & 1 + \xi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que, siendo  $(\xi, \eta)_0 = (0, 0)$ , resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{N}|_0 = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_{\xi} \mathbf{N}|_0 = \frac{\mathbf{G}_0}{|\mathbf{J}_0|} \partial_{\xi} \mathbf{N}|_0 = \frac{1}{4|\mathbf{J}_0|} \times \\ & \left[ \begin{array}{cccccccc} J_{12} - J_{22} & 0 & J_{12} + J_{22} & 0 & -J_{12} - J_{22} & 0 & -J_{12} + J_{22} & 0 \\ J_{21} - J_{11} & J_{21} - J_{11} & J_{12} - J_{22} & -J_{21} - J_{11} & J_{12} + J_{22} & J_{21} + J_{11} & -J_{12} - J_{22} & -J_{21} + J_{11} \\ J_{21} - J_{11} & J_{12} - J_{22} & -J_{21} - J_{11} & J_{12} + J_{22} & J_{21} + J_{11} & -J_{12} - J_{22} & -J_{21} + J_{11} & -J_{12} + J_{22} \end{array} \right] \Big|_0 \\ &= \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} y_3 - y_2 & 0 & y_1 - y_4 & 0 & y_4 - y_1 & 0 & y_2 - y_3 & 0 \\ x_2 - x_3 & x_2 - x_3 & x_4 - x_1 & x_4 - x_1 & x_1 - x_4 & x_1 - x_4 & x_3 - x_2 & x_3 - x_2 \end{bmatrix}; \\ & \alpha = -8|\mathbf{J}_0| = x_3 * y_4 - x_2 * y_4 - x_4 * y_3 + x_1 * y_3 + \\ & \quad x_4 * y_2 - x_1 * y_2 - x_3 * y_1 + x_2 * y_1. \end{aligned}$$

donde las coordenadas  $(x_i, y_i)$  serán las reales de cada elemento considerado.

En el cálculo final de la rigidez,  $\mathbf{k}_e = \sum \Omega_g |\mathbf{J}_g| \mathbf{b}_g^T \boldsymbol{\kappa}_g \mathbf{b}_g$ , se usará  $\Omega_g = \Omega_1 = 4$  para una suma que consta del solo punto,  $g = 1$ , de coordenadas  $(0, 0)$ , que recoge el peso de todo el elemento.

La matriz de rigidez material local  $\boldsymbol{\kappa}_g$  será la del estado plano (6.28), en la que cabe considerar la tensión (por unidad de espesor), aunque en general es mejor considerar la fuerza unitaria tensión  $\times$  espesor:

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{E t}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

De modo que realizando el proceso completo obtendríamos las matrices de rigidez para los dos elementos.

### Soluciones

Construidas las rigideces y ensambladas, y determinados los términos de carga, es de aplicación la secuencia común para determinar todos los parámetros de la solución:  $\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b}\mathbf{u} = \boldsymbol{\partial}_x \mathbf{N}\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}$ .

Vemos a continuación el desarrollo del proceso completo con Maxima.

### Uso de Maxima. Elemento plano de cuatro nodos

Es posible seguir la secuencia precedente con Maxima, lo que hacemos para el elemento de 4 nodos. La mayor dificultad podría

estar en la aplicación del operador matricial  $\partial_{\xi}$ , pero puede solventarse con sencillez usando la variable `matrix_element_mult` que establece como se interpreta la operación de multiplicación de matrices: en la lista siguiente se declaran nombres en la matriz de operadores, y se define como se aplican los operadores correspondientes en la definición de esa variable. El proceso es sencillo: creación de la matriz  $\mathbf{N}=\mathbf{Nmat}$ :

```
n1 : (1-xi)*(1-eta)/4;
n2 : (1+xi)*(1-eta)/4;
n3 : (1-xi)*(1+eta)/4;
n4 : (1+xi)*(1+eta)/4;
Nmat :
  matrix([n1,0,n2,0,n3,0,n4,0],[0,n1,0,n2,0,n3,0,n4]);
```

La geometría real, a partir de la del elemento:

```
xyr : Nmat . [x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4];
```

y para la construcción del jacobiano creamos una matriz `nabla` con los nombres de los operadores y una interpretación del producto de estos operadores en el producto matricial en `matrix_element_mult`:

```
nabla : matrix([ddxi],[ddeta]);
matrix_element_mult :
  lambda([x,y],if x = ddxi then diff(y,xi)
             elseif x = ddeta then diff(y,eta)
             else x * y);
```

de modo que el jacobiano, y su valor en las coordenadas naturales (0,0) son

```
Jac : nabra . transpose(xyr) ;
Jaco : subst([xi=0,eta=0],Jac);
```

La matriz  $\mathbf{G}(\mathbf{J})$  será

```
GJ : matrix([ Jac[2,2],-Jac[1,2], 0 , 0 ],
            [ 0 , 0 ,-Jac[2,1], Jac[1,1]],
            [-Jac[2,1],Jac[1,1],Jac[2,2],-Jac[1,2]]);
```

y el operador  $\partial_{\xi}$  y su aplicación a la matriz  $\mathbf{N}$ :

```
dd : matrix([ddxi, 0],[ddeta,0],[0,ddxi],[0,ddeta]);
ddN : dd . Nmat;
```

con lo que la matriz  $\mathbf{b}$  y su particularización en el punto de Gauss será

```
matrix_element_mult : "*" ;
bmat : factor(1/(4*determinant(Jaco))*
             subst([xi=0,eta=0],4*GJ . ddN));
```

donde hemos devuelto previamente el significado original a la multiplicación entre términos en el producto de matrices.

La expresión para la matriz de rigidez resulta así inmediata de obtener

```
kappa : t*e/(1-nu*2)*matrix([1 , nu , 0 ],
                            [nu, 1 , 0 ],
                            [0 , 0 ,(1-nu)/2]);
ke : factor(4*determinant(Jaco)*
            transpose(bmat) . kappa . bmat);
```

donde, para los valores correspondientes al problema,

```
vars: [nu=0.25,t= 10, e= 210000];
coor1: [x1=0,y1=0,x2=400,y2=0,x3=0,y3=100,x4=400,y4=75];
coor2: [x1=400,y1=0,x2=800,y2=0,x3=400,y3=75,x4=800,y4=50];
```

obtendremos, sustituyendo:

```
k1: subst(append(coor1,vars),ke);
k2: subst(append(coor2,vars),ke);
```

Para construir la matriz completa  $\mathbf{K}$  ensamblaríamos los grados de libertad de los nodos 1,2,3 y 4 del primer elemento en los globales 5,3,6 y 4, y los del segundo en los 3,1,4 y 2. Por otro lado tendremos que los nodos 5 y 6 tienen condiciones de sustentación de Dirichlet (desplazamiento nulo) por lo que no se incluirán en el modelo final, al igual que, por simetría, los desplazamientos verticales  $y$  de los nudos 1 y 3. El resto de los grados de libertad tienen condiciones de Neumann (carga externa conocida) y serán por tanto los que se consideran en el ensamblaje. El modelo completo  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$  sería, considerando la coincidencia de las direcciones de los ejes reales de los elementos con los ejes globales, y ordenando los grados de libertad por nudo global y dirección:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{2,x2,x2} & k_{2,x2,x4} & k_{2,x2,y4} & k_{2,x2,x1} & k_{2,x2,x3} & k_{2,x2,y3} \\ k_{2,x4,x2} & k_{2,x4,x4} & k_{2,x4,y4} & k_{2,x4,x1} & k_{2,x4,x3} & k_{2,x4,y3} \\ k_{2,y4,x2} & k_{2,y4,x4} & k_{2,y4,y4} & k_{2,y4,x1} & k_{2,y4,x3} & k_{2,y4,y3} \\ k_{2,x1,x2} & k_{2,x1,x4} & k_{2,x1,y4} & k_{1,x1,x1} & k_{2,x1,x3} & k_{2,x1,y3} \\ k_{2,x3,x2} & k_{2,x3,x4} & k_{2,x3,y4} & k_{1,x2,x2} & k_{1,x2,x4} & k_{1,x2,y4} \\ k_{2,y3,x2} & k_{2,y3,x4} & k_{2,y3,y4} & k_{2,x3,x1} & k_{2,x3,x3} & k_{2,x3,y3} \\ k_{2,y3,x2} & k_{2,y3,x4} & k_{2,y3,y4} & k_{1,x4,x2} & k_{1,x4,x4} & k_{1,x4,y4} \\ k_{2,y3,x2} & k_{2,y3,x4} & k_{2,y3,y4} & k_{2,y3,x1} & k_{2,y3,x3} & k_{2,y3,y3} \\ k_{1,y4,x2} & k_{1,y4,x4} & k_{1,y4,y4} & k_{1,y4,x2} & k_{1,y4,x4} & k_{1,y4,y4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{x4} \\ U_{y4} \end{bmatrix}$$

El vector de cargas será  $\mathbf{F}^T = [50000 \ 50000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,

### Elemento plano de ocho nodos

Para el modelo de ocho nodos cabe usar las funciones serendípitas indicadas en la página 490, si bien, como se comenta allí, la elección de funciones polinómicas con el mínimo grado posible aporta resultados menos coaccionados. En el fichero adjunto (matrixCuatroOchoNodos.wxm) se incluye un desarrollo comentado para Maxima, empleando ambos grupos de funciones, y cuyos resultados se usan para las comparaciones del apartado siguiente.



#### 6.2.6.3. Resultados comparados

##### Modelos de barras

En ambos modelos, las expresiones a emplear son semejantes,

salvo por el área equivalente  $A^*$  empleada en los elementos:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} \boxed{A_{c2}^*} & \boxed{-A_{c2}^*} & 0 \\ -A_{c2}^* & \boxed{A_{c2}^* + A_{c1}^*} & \boxed{-A_{c1}^*} \\ 0 & \boxed{-A_{c1}^*} & \boxed{A_{c1}^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los resultados para el modelo de dos nodos (leyes de desplazamientos lineales, por tanto con deformación y tensión constante en el elemento) son:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2286 \\ 0,5486 \end{bmatrix} \text{ mm}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_2 \\ U_1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{b}\mathbf{u}; \quad \boldsymbol{\sigma}_i \approx E \frac{2}{l} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160,00 \\ 114,29 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

El error entre tensiones interpoladas o alisadas entre elementos,  $\hat{\sigma}$  (ver sección 6.4.1.2) y las tensiones constantes del elemento,  $\bar{\sigma}$ , puede medirse:

$$e = \frac{1}{E} \int_v (\hat{\sigma} - \bar{\sigma})^2 dv \approx \frac{1}{E} \left( \frac{2}{3} (114,29 - 91,44)^2 \times 200 \cdot 1750 + \frac{2}{3} (160,00 - 137,14)^2 \times 200 \cdot 1250 \right) = 1,044J$$

La medida relativa del error resulta ser:  $e/(E + e) = 1,87\%$ .

Los resultados para el modelo de tres nodos (con leyes de desplazamientos cuadráticas y por tanto con deformación y ten-

sión variando linealmente en el elemento) son:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2317 \\ 0,5538 \end{bmatrix} \text{ mm}; \mathbf{u} = \mathbf{BU} = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1c} \\ u_{1d} \\ u_{2i} \\ u_{2c} \\ u_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{1c} \\ U_2 \\ U_2 \\ u_{2c} \\ U_1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varepsilon} \approx \boldsymbol{\kappa}\mathbf{bu}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i \approx E \frac{2}{l} \left[ \xi_i - \frac{1}{2} \quad -2\xi_i \quad \xi_i + \frac{1}{2} \right] \begin{bmatrix} u_{ii} \\ u_{ic} \\ u_{id} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1^T \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 174,4 & 147,8 \\ 129,2 & 102,5 \end{bmatrix},$$

con los valores de tensión en los dos puntos de Gauss de cada elemento en  $\text{N/mm}^2$ . Los resultados de tensiones se trazan en la figura 6.10.

Se observa en los desplazamientos que el modelo con más grados de libertad es levemente menos rígido aunque las diferencias en las leyes de tensión alisadas son muy limitadas.

Se observa asimismo que los valores de tensión en los puntos de Gauss coinciden exactamente en el modelo lineal con los valores analíticos, si bien cabe considerar que aquí es consecuencia de la sencillez del problema: pues aunque las aproximaciones en estos puntos sea en general mejor que en el resto del elemento, no dejan por ello de ser aproximaciones, tal como se observa en el caso de los elementos cuadráticos.

### Modelos de membrana

El elemento de membrana de 4 nodos aporta desplazamientos de 0,528 y 0,519 mm. en eje y borde del elemento en el punto de

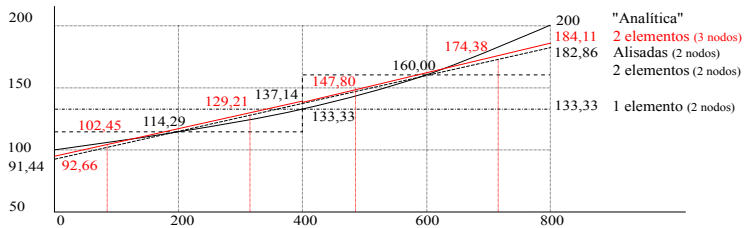


Figura 6.10: Valores y leyes de tensiones en los dos modelos de barras, lineal (en negro, considerando uno o dos elementos) y cuadrático (en rojo, para dos elementos). Para el modelo lineal de dos elementos se trazan las tensiones alisadas considerando los valores en ambos. La ley curva corresponde a la solución analítica del problema de la pieza en tracción con área variable linealmente.

aplicación de la carga, y de 0,219 0,217 mm. respectivamente en la sección media, con tensiones normales horizontales de 160,0 y 114,3 N/mm<sup>2</sup> en los respectivos puntos de Gauss, lo que coincide con el modelo de barras de dos nodos, si bien el modelo preve, dada la geometría de la pieza, la existencia de leves tensiones tangenciales, de -5,0 y -3,57N/mm<sup>2</sup> respectivamente en dichos puntos. La distribución de tensiones en los elementos no resulta exactamente constante y es de limitada calidad.

Para el caso del elemento de 8 nodos, resulta relevante la consideración de cual deba ser el vector de cargas: la carga es tensión distribuida sobre todo el extremo del elemento 2, entre los nodos numerados con 1, 2 y 4. Dada la equidistancia entre

estos resulta tentador repartir los 100 kN entre 25 para los nudos de vértice y 50 para el central, pero esto está en contradicción con la aplicación rigurosa de la teoría empleada: de acuerdo con la expresión 5.47, la carga distribuida  $\varphi$  debe aplicarse en cada nodo de acuerdo a lo que expresa la integral a lo largo del borde de su producto con la función de forma del nodo considerado, lo que, al estar usando funciones parabólicas, supone atribuir dos tercios de la carga total al nodo central y un sexto a cada nodo de vértice: 66,66 y 16,66 kN respectivamente. Llamamos a estas cargas consistentes.

Los desplazamientos obtenidos para la sección extrema y a mitad de la pieza son, de eje a borde, de 0,539 0,522 0,535 y 0,225 0,214 0,222 mm con las cargas no consistentes y de 0,533 0,523 0,528 y 0,223 0,215 0,219 con las consistentes en el modelo serendípito de ocho nodos y funciones polinómicas de nueve monomios. Para el modelo de funciones polinómicas de ocho monomios, los desplazamientos para las cargas consistentes resultan ser de 0,534 0,529 0,522 y 0,222 0,219 0,216 mm respectivamente. Véanse los comentarios acerca de la diferencia entre ambos modelos en páginas 490 y ss.

Puede observarse en las diferencias entre modelos el leve efecto de distorsión que supone la incorrecta aplicación de las cargas, así como la sobrerigidización en la región del inexistente noveno nodo central que suponen las funciones de forma de nueve monomios frente a las de solo ocho, si bien son diferencias leves.

Para este último modelo, de ocho nodos y funciones polinómicas de ocho monomios, con aplicación consistente de las cargas, las tensiones en los nodos de empotramiento y de extremo son, en el mismo orden, de 105,1 104,1 102,1 y 215,9 204,1

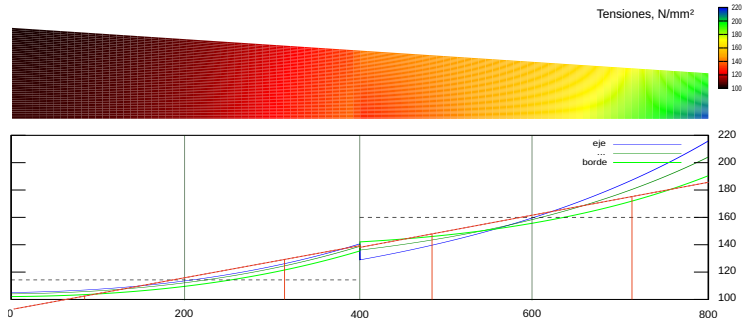


Figura 6.11: Estado y diagramas de tensión normal horizontal en el modelo simétrico de media chapa con dos elementos de ocho nodos, funciones polinómicas de grado mínimo y carga aplicada de modo consistente. Se trazan como referencia las tensiones de Gauss y su extrapolación por elemento en los modelos de dos barras de dos y tres nodos.

190,5 N/mm<sup>2</sup> y las gráficas resultantes las recogidas en 6.11, que se comparan con las de los elementos de barra.

### 6.3. Elementos finitos en problemas de flexión

El objetivo de este apartado es doble: por una parte se trata de proporcionar herramientas para la formulación de elementos capaces de aproximar soluciones a los problemas de flexión, de

acuerdo a las alternativas teóricas disponibles y las correspondientes ecuaciones diferenciales, y por otra parte presentar y analizar los campos de aplicación de tales formulaciones, considerando los problemas que surgen en ellas dado el acoplamiento entre las distintas funciones que describen los desplazamientos y la forma elegida para representarlos.

En ese análisis recorreremos el modelado de las teorías de vigas y placas, empezando con las formulaciones más sencillas, las teorías de Navier y Kirchoff respectivamente, que no tienen en cuenta las distorsiones por cortante, y extendiéndolas a las que sí lo hacen, Timoshenko y Reissner–Mindlin, para acabar presentando alguna idea sobre como formular los elementos de lámina –o de cáscara– que, además de incluir acoplados tanto los efectos axiales como los de flexión, deben describir geometrías curvas.

### 6.3.1. Flexión de vigas

La figura 6.12 muestra, además de las variables estáticas involucradas en el equilibrio de una rebanada entre dos secciones cercanas de una viga, las dos formas alternativas de interpretar la deformación de la rebanada. La primera de ellas, la más habitual, presenta el modelo de Navier, en el que se desprecia la deformación tangencial debida al cortante y, por consiguiente, las secciones permanecen ortogonales a la deformada de la directriz, de tal modo que la curvatura  $c$  y el giro  $\theta$  de la sección quedan acoplados, al identificarse el giro de la rebanada con la rotación de la directriz. En la segunda aproximación, la rebanada sufre distorsiones derivadas de la tensión tangencial,

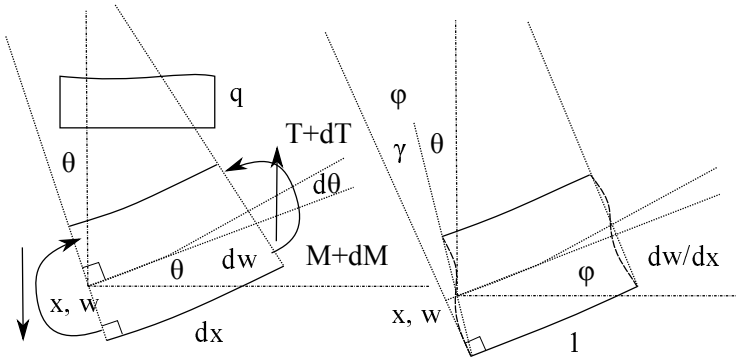


Figura 6.12: Modelos de flexión de vigas. Deformada de la rebanada sin o con distorsión por cortante

distorsiones que varían en el canto de la pieza, pero que aportan una distorsión  $\gamma$  que desacopla la rotación de la rebanada  $\theta$ , medida respecto a su posición inicial, de la rotación de la directriz  $\varphi$ . Esta segunda aproximación responde al modelo de Timoshenko. Mientras que el primer modelo es apropiado para vigas relativamente esbeltas, el segundo lo será, aunque con problemas, para la flexión de vigas cortas o poco esbeltas.

Siguen las ecuaciones diferenciales apropiadas a cada modelo.

### **Euler-Bernoulli-Navier**

Se supone a la sección una deformada plana, siendo el modelo

adecuado para vigas esbeltas:

$$\begin{aligned} {}^N \theta &= \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \varepsilon_x(z) = z \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad c = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ M &= EI c; \quad \left( T = \frac{\partial M}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Siendo  $I$  la inercia de la sección. La función de deformación es, pues, la curvatura  $c$  a la que se asocia el esfuerzo momento,  $M$ , derivándose giros y cortantes de los anteriores. La curvatura deriva directamente del desplazamiento  $w$ .

**Timoshenko** Para vigas poco esbeltas se considera la distorsión por cortante:

$$\begin{aligned} {}^T \theta &= \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma; \quad \varepsilon_x(z) = z \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad c = \frac{\partial \theta}{\partial x} \neq \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c + \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \\ M &= EI c; \quad T = GA^* \gamma = GkA \gamma; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Siendo  $A^* = kA$  el área eficaz frente a la distorsión por cortante. Ahora hay dos funciones para describir la deformación,  $\gamma$  y  $c$ , a las que se asocian las dos de esfuerzo,  $T$  y  $M$ . Ahora el desplazamiento  $w$  proviene del efecto combinado de ambas componentes de la deformación.

### 6.3.1.1. Navier

Aunque conocido como modelo de Navier, se trata de un modelo para piezas esbeltas en flexión desarrollado progresiva-

mente por Leonhard Euler, Jacques Bernoulli y Claude-Louis Henry Navier.

Su aproximación por elementos finitos exige describir el desplazamiento vertical  $w$  y asegurar la continuidad en los nudos tanto de este como de los giros  $\theta$ . De modo que los parámetros nodales deben ser desplazamiento y giro para expresar la función de desplazamiento en el elemento a partir de estos. Bastarán por tanto, para elementos con dos nodos,  $i, d$ , y dos grados de libertad por nudo,  $w, \theta$ , funciones polinómicas de cuatro términos –de tercer grado– que ya hemos visto en 2.29. En coordenadas reales entre 0 y  $l$  tenemos

$$w = \left( \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \right) w_i + \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \right) \theta_i + \left( -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \right) w_d + \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) \theta_d.$$

y el proceso de construcción de la matriz de rigidez del elemento, las cargas equivalentes, etc. ya ha sido desarrollado con integración algebraica en la sección 2.1.1.7.

Ahora vamos a considerar el uso de las coordenadas *naturales*, tal como hemos hecho con los problemas axiales, para facilitar los procesos con integración numérica. Tendremos  $x = x_0 + \frac{l}{2}(\xi + 1)$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{l} \frac{\partial w}{\partial \xi}$ .

Las funciones de forma, para elementos de coordenadas  $\xi$  en

el intervalo  $[-1, 1]$  serán

$$\begin{aligned} N_{1,w} &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3); N_{1,\theta} = \frac{l}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_{2,w} &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3); N_{2,\theta} = \frac{l}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned}$$

El procedimiento es idéntico a los ya usados, donde las componentes del proceso se resumen en

$$\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{N} = \mathbf{b} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|}\partial_{\xi}\mathbf{N}; \mathbf{k}_e = \sum \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i; \quad (6.32)$$

y donde podemos particularizar para las ecuaciones del modelo de viga adoptado:

$$\begin{aligned} J &= \frac{dx}{d\xi}; \quad \partial_{\mathbf{x}}w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \partial_{\xi}^2 w = \\ &= \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_{\xi}^2 w \implies G = \frac{1}{dx/d\xi} \\ \partial_{\xi} N &= \frac{d^2 N}{d\xi^2} = N''; \quad J = \frac{l}{2}; \quad G = \frac{2}{l}; \end{aligned} \quad (6.43)$$

de tal modo que, considerando dos puntos de Gauss para la integración, cada uno con un peso  $\Omega_i$  de 1, tendremos

$$\mathbf{k}_e = \sum_{\xi=\pm\sqrt{1/3}} 1 \left(\frac{l}{2}\right)^{-3} \begin{bmatrix} N''_{1,w} \\ N''_{1,\theta} \\ N''_{2,w} \\ N''_{2,\theta} \end{bmatrix} EI [N''_{1,w} \quad N''_{1,\theta} \quad N''_{2,w} \quad N''_{2,\theta}] \quad (6.44)$$

siendo  $[N''_{1,w} \quad N''_{1,\theta} \quad N''_{2,w} \quad N''_{2,\theta}] = [\frac{6\xi}{4} \quad \frac{-2+6\xi}{8} \quad -\frac{6\xi}{4} \quad \frac{2+6\xi}{8}]$ , de modo que

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Como vemos, resulta las mismas relaciones de rigidez en flexión que las que ya obtuvimos por vía algebraica, en 2.42 o 2.44.

### 6.3.1.2. Timoshenko

Hemos visto que la inclusión de la distorsión en vigas no esbeltas desacopla el descenso de la directriz  $w$  del giro de la sección,  $\theta$ , ecuaciones 6.42. De modo que se necesitan dos parámetros de movimiento y por concordancia, dos conjugados para la carga: los parámetros de carga aplicada sobre la rebanada infinitesimal que producirían trabajo en cada uno de esos movimientos de la misma. Por ello aparece en la figura 6.13 una densidad de momento  $m$  como carga aplicada, que se añade a la densidad de carga  $q$ . Las ecuaciones relevantes se aplican mediante expresiones que adoptan ahora la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\partial}\mathbf{v}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\partial}^*\boldsymbol{\sigma}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\epsilon}; \quad \mathbf{v} \approx \mathbf{N}\mathbf{a} \\ \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} c \\ \gamma \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\kappa} &= \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GkA \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.46)$$

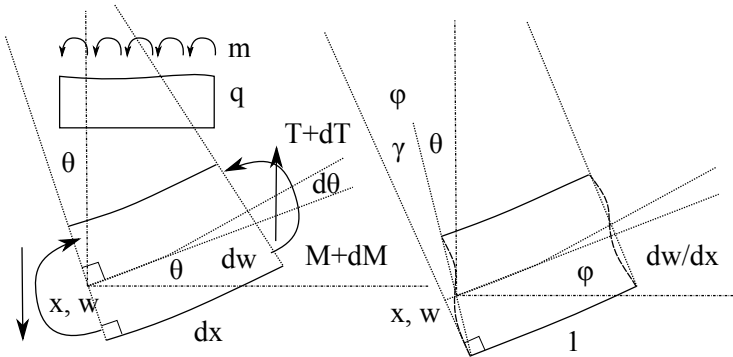


Figura 6.13: Flexión de vigas de Timoshenko. La deformada con distorsión por cortante exige dos parámetros de movimiento, y por tanto también de carga.

### Funciones de forma

Consideramos el caso de elementos de dos nodos, en ambos extremos del tramo de pieza que se trate de modelar, y consideramos como parámetros nodales los desplazamientos y giros de ambos extremos:

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T; \mathbf{N} = ?$$

Se seleccionan las funciones de forma considerando desacoplados los desplazamientos y giros, y siendo el operador diferencial de primer grado, bastarán funciones lineales separadas para ambos movimientos, por lo que, en coordenadas naturales, se usan las funciones ya conocidas:

$$N_i = (1 + \xi_i \xi)/2, \quad i \in [1, 2]; \quad \xi \in [\xi_1, \xi_2] = [-1, 1].$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix};$$

**Matriz de rigidez**

Las diferentes partes del problema son como siempre

$$\mathbf{b} = \partial \mathbf{N}; \quad \partial_x \mathbf{N} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_\xi \mathbf{N}; \quad \mathbf{k}_e = \sum \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i; \quad (6.32)$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{l}{2}; \quad \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_\xi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} & -1 \end{bmatrix};$$

y las deformaciones pueden aproximarse con

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c \\ \gamma \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} = \mathbf{b} \mathbf{u} = \partial \mathbf{N} \mathbf{u} = \\ &\left( \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} & -1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{N} \mathbf{u} = (\mathbf{b}_c + \mathbf{b}_\gamma) \mathbf{u}. \\ \mathbf{b}_c &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{b}_\gamma &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & -N_1(\xi) & \frac{1}{l} & -N_2(\xi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

de modo que cabe desacoplar los efectos en la rigidez de las componentes de curvaturas y de distorsiones, dado que, siendo  $\boldsymbol{\kappa}$  diagonal, resulta  $\mathbf{b}_c^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{b}_\gamma = \mathbf{0}$ . Puede hacerse por lo tanto

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_{e,c} + \mathbf{k}_{e,\gamma} = \sum_{c,\gamma} \sum_i \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i \quad (6.47)$$

La componente  $\mathbf{k}_{e,c}$  puede integrarse con un punto de Gauss. La componente  $\mathbf{k}_{e,\gamma}$ , con términos cuadráticos, exige dos. Resulta:

$$\mathbf{k}_{e,c} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{k}_{e,\gamma} = \frac{kAG}{l} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} \\ -1 & -\frac{l}{2} & 1 & -\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Podemos ahora probar el resultado en un problema sencillo: la aproximación al comportamiento de un voladizo, con carga  $P$  a la derecha. Consideramos un solo elemento y restringimos los grados de libertad al nudo libre, cargado.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{kAG}{l} & -\frac{kAG}{2} \\ -\frac{kAG}{2} & \frac{EI}{l} + \frac{2kAGl}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{k}_e^{-1} = \frac{l}{EI + kAGl^2/12} \begin{bmatrix} \frac{EI}{kAG} + \frac{l^2}{3} & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{1 + \frac{kAGl^2}{12EI}} \begin{bmatrix} \frac{l}{kAG} + \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Vemos ahora un efecto inesperado e indeseado.

**Bloqueo de cortante.** Si el coeficiente  $\alpha = \frac{kAGl^2}{12EI} = \frac{k\lambda^2}{24(1+\nu)}$  tiende a 0, la flexibilidad tiende a la teórica en teoría de barras,  $w = Pl^3/3EI + (Pl/kAG)$ ,  $\theta = Pl^2/2EI$ , ... pero si  $\alpha$  tiende a  $\infty$ , o lo que es lo mismo, si la esbeltez de la pieza  $\lambda \rightarrow \infty$ , la flexibilidad desaparece ¡ $\mathbf{k}_e^{-1} \rightarrow \mathbf{0}!$  o lo que es lo mismo, se produce un exceso inesperado de rigidez.

Comparamos con la viga de Navier. Tendríamos

$$\begin{aligned} w_N &= \frac{Pl^3}{3EI}; w_T = \frac{1}{1+\alpha} \left( \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{kAG} \right) P; \\ \frac{w_T}{w_N} &= \frac{1}{1 + \frac{k\lambda^2}{24(1+\nu)}} \left( 1 + \frac{6(1+\nu)}{k\lambda^2} \right) = \\ &= \frac{24(1+\nu)(6(1+\nu) + k\lambda^2)}{k\lambda^2(24(1+\nu) + k\lambda^2)} \end{aligned} \quad (6.50)$$

El cociente debería tender a 1 si la esbeltez tiende a  $\infty$ . De modo que hay un exceso de rigidez que cabe atribuir a la componente de cortante–distorsión. Para comprobarlo veamos una expresión normalizada de los esfuerzos de extremo locales:  $\bar{\mathbf{f}} = \frac{l^3}{3EI} \mathbf{f}$ , esfuerzos asociados a los desplazamientos de extremo  $\mathbf{u}$  a través de la rigidez  $\mathbf{k}$ , que desagregamos y normalizamos en sus dos componentes:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}} &= \frac{l^3}{3EI} \mathbf{f} = \frac{l^3}{3EI} \mathbf{k} \mathbf{u} = \frac{l^3}{3EI} (\mathbf{k}_c + \mathbf{k}_\gamma) \mathbf{u} = \\ &= \frac{l^3}{3EI} \left( \frac{3EI}{l^3} \bar{\mathbf{k}}_c + \frac{kAG}{l} \bar{\mathbf{k}}_\gamma \right) \mathbf{u} = (\bar{\mathbf{k}}_c + 4\alpha \bar{\mathbf{k}}_\gamma) \mathbf{u}\end{aligned}$$

Vemos que es la componente de cortante la que aporta ese exceso. La respuesta habitual a este problema es hacer esa componente,  $\bar{\mathbf{k}}_\gamma$  o  $\mathbf{k}_\gamma$  singular. Y el modo de hacerlo es hacer una integración reducida: usar un punto de Gauss en vez de los dos requeridos para la integración exacta.

Ahora tendríamos

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_\gamma &= 2 \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{l} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & kAG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{l} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{k}_\gamma &= \frac{kAG}{l} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \\ -1 & -\frac{l}{2} & 1 & -\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{k}_e &= \mathbf{k}_{e,c} + \mathbf{k}_{e,\gamma}.\end{aligned}\tag{6.51}$$

Se deja como trabajo para el lector verificar las consecuencias de esta corrección.

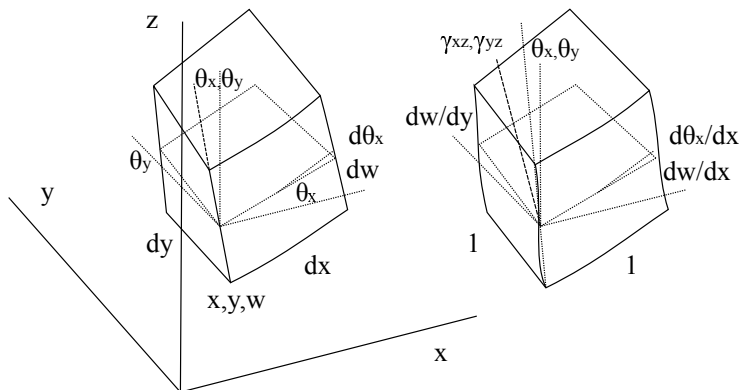


Figura 6.14: Flexión de placas. Los modelos consideran o no la distorsión, que implica la pérdida de la perpendicularidad al plano medio de la línea material que lo era antes del movimiento.

### 6.3.2. Flexión de placas

La formulación de placas sigue, en una geometría de dos dimensiones, un desarrollo semejante a la de las vigas en una dimensión: nuevamente se plantea la disyuntiva entre considerar las deformaciones derivadas de la distorsión por tensiones tangenciales o no, de acuerdo a su importancia relativa: en placas esbeltas se desprecia por irrelevante ese efecto: tenemos el modelo de Kirchoff, que supone que la línea material perpendicular al plano de la placa se mantiene perpendicular en el movimiento, en tanto que el modelo alternativo, de Reisner–Mindlin, supo-

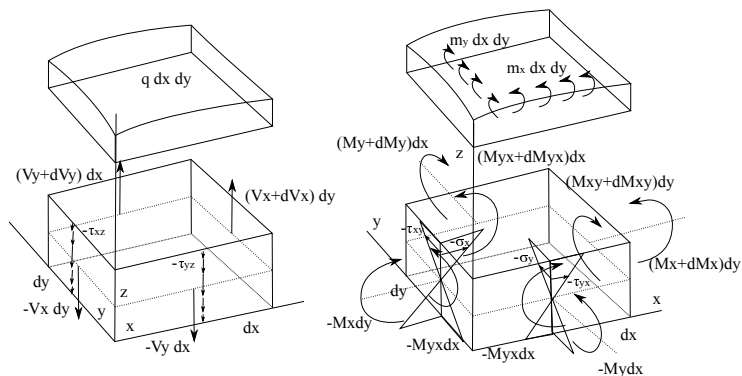


Figura 6.15: Estática de la flexión de placas: componentes de los equilibrios con la carga perpendicular y de los esfuerzos internos, entre sí, y tal vez con momentos aplicados exteriormente.

ne que cabe perder esa perpendicularidad por efecto de dichas distorsiones, tal como muestra la figura 6.14.

Vamos, como en los demás casos, a plantear las bases del modelado, a partir de las funciones que representan la estática y la cinemática del problema.

### 6.3.2.1. Modelado de la flexión de placas

la figura 6.15 identifica las distintas componentes de los equilibrios: se trata, como en todos los casos, de identificar las cargas  $\varphi$ , los esfuerzos internos  $\sigma$ , y el operador diferencial que liga a ambos en el equilibrio  $\mathcal{D}^*$ , sin olvidar la necesaria correspon-

dencia con los correlativos cinemáticos, desplazamientos  $\mathbf{u}$ , deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y operador correspondiente a la compatibilidad,  $\boldsymbol{\partial}$ .

Usamos como cargas  $\boldsymbol{\varphi} = [q(x, y), m_x(x, y), m_y(x, y)]^T$ , (donde  $m_x, m_y$  son usualmente = 0, dependiendo del modelo).

Para la identificación de los esfuerzos internos empleamos las resultantes de las tensiones  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  considerando que las tensiones normales verticales  $\sigma_z$  son aproximadamente nulas, tal y como lo son igualmente las tensiones  $\sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \tau_{xy0}$ , donde el 0 indica que son las correspondientes al plano medio.

Dichas resultantes pueden obtenerse con las expresiones

$$\begin{aligned} M_x &= - \int_t z \sigma_x dz, \quad M_y = - \int_t z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = - \int_t z \tau_{xy} dz; \\ V_x &= \int_t \tau_{xz} dz, \quad V_y = \int_t \tau_{yz} dz; \end{aligned} \quad (6.52)$$

siendo las tensiones positivas las de dirección creciente en la cara creciente de los cortes, las tracciones en el caso de las tensiones normales.

Están agrupadas en los distintos cortantes y momentos:  $\boldsymbol{\sigma} = [V_x, V_y, M_x, M_y, M_{xy}]^T$ , y las condiciones de equilibrio con las cargas externas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q &= 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + V_x + m_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + V_y + m_y &= 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

donde los signos positivos son los de la figura en las caras crecientes.

Los parámetros cinemáticos de interés corresponderían al desplazamiento de los puntos de la superficie media, donde cabe suponer nulos los horizontales, siendo solo necesario considerar el vertical ( $u = v = 0, w \neq 0$ ). Sin embargo, puntos en la profundidad del canto distintos de esta sí tienen movimientos horizontales  $u, v$  que cabe deducir a partir de las desviaciones respecto a la dirección original de la línea material *normal* a la superficie media, compuesta de las rotaciones de dicha perpendicular  $\theta_x, \theta_y$  y las distorsiones angulares  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  que reflejan el alejamiento de la línea material respecto a la dirección de la línea perpendicular al plano medio,

Consideramos ahora las deformaciones; Las del estado plano de cada plano paralelo al medio,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  pueden ser deducidas de los movimientos  $u, v$  en el espesor de la placa y de las cualidades de dicho estado plano en cada capa:  $[\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)]$  por ser estados planos de tensión. Las distorsiones angulares,  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , están ligadas a las correspondientes tensiones tangenciales, de las que usamos las vistas verticales:  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ .

Tenemos con ello herramientas para comparar los dos modelos alternativos clásicos.

### 6.3.2.2. Kirchoff versus Reissner–Mindlin

En el modelo de Kirchoff, semejante al de Navier para vigas, se ignoran las distorsiones, lo que impide modelar separadamente las tensiones tangenciales verticales y por tanto los esfuerzos cortantes, que deben por ello deducirse a partir de los momen-

tos. Las expresiones para el movimiento de la normal a la placa son, por ello:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6.54)$$

Sin embargo en el modelo de Reissner–Mindlin se desliga la rotación de la normal al plano medio de la placa del cambio de dirección de la línea material inicialmente coincidente con esa normal:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz}; \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz}. \quad (6.55)$$

Se desarrollan a continuación ambos modelos.

### Modelo de Kirchoff

Para los desplazamientos  $\mathbf{v}$  basta  $w$ , que permite deducir  $\theta_x, \theta_y$ , de las que a su vez se deducen las deformaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = -z 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (6.56)$$

donde nuevamente se consideran signos de acuerdo a las direcciones de la deformación local en las caras crecientes de la sección.

Estas deformaciones responden a los estados planos de tensión en el espesor, y como se ve en las ecuaciones, son deducibles de tres funciones únicas que cabe interpretar como curvaturas, y que constituyen el grupo necesario y suficiente para describir

las deformaciones  $\epsilon$ :

$$c_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad c_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad c_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.57)$$

De las deformaciones pueden derivarse las tensiones de los correspondientes estados planos, y los momentos resultantes de estas tensiones en las secciones, momentos que bastan como funciones de esfuerzo  $\sigma$ , y están en concordancia con las funciones que describen las deformaciones

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Finalmente cabe deducir por equilibrio la carga  $\varphi = q$  derivada de estos y por tanto quedan completadas las relaciones entre carga y desplazamiento ( $q \leftrightarrow w$ )

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = q \quad (6.59)$$

El conjunto es, pues:

$$\varphi = q; \quad \mathbf{v} = w; \quad \epsilon = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_{xy} \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}; \quad \partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix};$$

$$\epsilon = \partial \mathbf{v}; \quad \varphi = \partial^* \sigma = \partial^T \sigma; \quad \sigma = \kappa \epsilon, \quad (6.60)$$

con  $\kappa$  tal como consta en 6.58 para las relaciones momentos-curvaturas.

La cuestión ahora es construir la aproximación a las funciones de desplazamiento:  $\mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{u}$ ;  $\mathbf{N} = ?$ ;  $\mathbf{u} = ?$ . Deben elegirse contando con la estrategia ya usada repetidamente, que supone imaginar una partición de la estructura en elementos, y establecer las cualidades de rigidez de cada elemento a través de las expresiones:

$$\partial_x \mathbf{N} = \mathbf{b} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{J}|} \partial_\xi \mathbf{N}; \quad \mathbf{k}_e = \sum \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i \quad (6.32)$$

Los elementos típicos pueden ser triangulares, rectangulares o trapezoidales, con nodos en los vértices y tal vez en los lados, y con parámetros de movimiento en cada nodo que faciliten la interpolación deseada para  $\mathbf{v} = w$ . En general, y dado que el operador diferencial  $\partial$  a aplicar es de segundo grado, se necesitarán funciones de tercer o mayor grado lo que exige varios parámetros por nudo. Uno evidente es su desplazamiento, y por razones de simetría de comportamiento, las rotaciones en torno a los dos ejes del plano resultan también parámetros evidentes. No lo es tanto la necesidad o no de emplear parámetros adicionales, lo que implicaría añadir las derivadas cruzadas. Más adelante veremos que hay razones por las que algunos modelos las incorporan en su formulación.

Resulta con ello

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \theta_{yi} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \Gamma_i = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_i ? \end{bmatrix}; \quad (6.61)$$

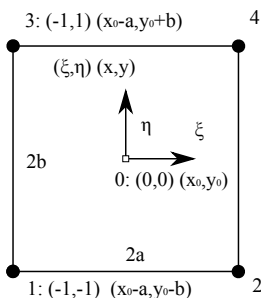


Figura 6.16: Elemento rectangular de placa MZC.

A partir de estos deben imaginarse funciones de interpolación que, cumpliendo las condiciones consideradas en la sección 6.1.2.2, aproximen adecuadamente los desplazamientos en el modelo. Dadas las dificultades geométricas añadidas en este problema vamos a considerar exclusivamente un modelo muy sencillo, el de Melosh–Zienkiewicz–Cheung (MZC), tal como se representa en la figura 6.16.

Se trata de un elemento rectangular en que las coordenadas y los parámetros nodales son

$$x = \xi a + x_0; \quad y = \eta b + y_0$$

$$\mathbf{u}_i = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T \quad (6.62)$$

donde se han empleado coordenadas naturales  $\xi, \eta$  entre -1 y 1, y reales dadas por las dimensiones de los lados del rectángulo,  $2a, 2b$ , y en los que se usan como funciones de forma las

siguientes:

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{i=1}^4 \left( N_i w_i + \bar{N}_i \theta_{xi} + \bar{\bar{N}}_i \theta_{yi} \right) \\
 N_i &= \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \\
 \bar{N}_i &= \frac{a}{8} (\xi^2 - 1) (\xi + \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \\
 \bar{\bar{N}}_i &= \frac{b}{8} (\eta^2 - 1) (\eta + \eta_i) (1 + \xi \xi_i)
 \end{aligned} \tag{6.63}$$

donde el índice se refiere al nodo al que corresponde la función.

En las siguientes expresiones, el segundo índice se refiere al nodo a cuyas coordenadas se aplica la función, y la comilla a la derivada parcial a aplicar a la función, de acuerdo a la dirección expresada por la letra que le sigue. Dadas las relaciones lineales y separadas por ejes entre las coordenadas naturales y las reales es fácil comprobar que se cumplen las condiciones precisas:

$$\begin{aligned}
 N_i(i) &= N_{ii} = 1, N_{ik \neq i} = 0, \\
 N_{ij'x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_j} = 0, N_{ij'y} = 0, \\
 \bar{N}_{ij} &= 0, \bar{N}_{ij'y} = 0, \\
 \bar{\bar{N}}_{ii'x} &= 1, \bar{\bar{N}}_{ik'x} = 0, \\
 \bar{\bar{N}}_{ij} &= 0, \bar{\bar{N}}_{ij'x} = 0, \\
 \bar{\bar{N}}_{ii'y} &= 1, \bar{\bar{N}}_{ik'y} = 0.
 \end{aligned}$$

A las que cabe añadir tanto la condición  $\sum_{i=1}^4 N_i = 1$ , necesaria para asegurar movimiento rígido en caso de desplazamiento

común de todos los nodos sin rotación, como las de rotación rígida, que no desarrollamos aquí.

Cabe construir ahora la rigidez de elemento considerando que, dadas las relaciones geométricas entre ambos sistemas de coordenadas, tendremos

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}; \quad \partial_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

teniendo como siempre

$$\mathbf{b} = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{N}; \quad \mathbf{k}_e = \sum \Omega_i |\mathbf{J}_i| \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\kappa}_i \mathbf{b}_i \quad (6.32)$$

y donde la suma se haría para  $2 \times 2 = 4$  puntos de Gauss.

Hay que considerar que, puesto que se manejan doce parámetros por elemento al ser tres por nudo, las funciones elegidas seleccionan doce monomios en el triángulo de Pascal que, para permitir simetría entre las dos direcciones del plano, no coinciden exactamente con un rombo completo de los asociados a la altura del triángulo. En el caso de haber empleado un parámetro más, a saber las derivadas cruzadas, se trataría de dieciséis términos, que cabe elegir de distintas formas, aunque ahora sí es posible emplear ese rombo en torno a la altura. La posible ventaja de emplear esta segunda aproximación queda patente si consideramos la figura 6.17: el elemento considerado es un elemento no conforme, en el que, dado que la deformación en los bordes se genera a partir de los movimientos y sus gradientes de todos los nodos, incluyendo los que no están en el borde considerado, se produce discontinuidad en las pendientes (en los giros),

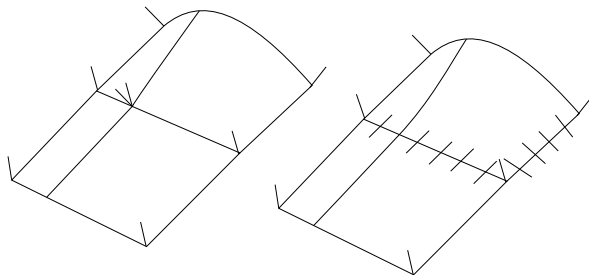


Figura 6.17: Elementos no conformes: si la deformación de un borde no se genera exclusivamente por los parámetros de los nodos de ese borde, se producen discontinuidades en las derivadas a lo largo del borde común. Forzar la continuidad en estas en el borde común implica la no existencia o singularidad de las derivadas cruzadas en los nodos.

con pérdida, por tanto, de energía de deformación (momento por giro) al no medirse esta a través del borde. La alternativa exige más parámetros, pero a su vez implica la generación de singularidades en las derivadas segundas, al no coincidir  $\partial^2 w / \partial x \partial y$  con  $\partial^2 w / \partial y \partial x$ , tal como se puede ver en esa misma figura.

Este problema puede sin embargo no afectar a la convergencia si se cumple el criterio de la parcela enunciado en la sección 6.1.2.2, lo que es cierto en este modelo.

### **Modelo de Reissner–Mindlin**

En este caso, correspondiente a la segunda imagen de la figura

6.12, se manejan las funciones de campo en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= [w \ \theta_x \ \theta_y]^T, \quad \boldsymbol{\varphi} = [q \ m_x \ m_y]^T, \\ \boldsymbol{\epsilon} &= [c_x \ c_y \ c_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy}]^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= [M_x \ M_y \ M_{xy} \ V_x \ V_y]^T.\end{aligned}\quad (6.65)$$

Las deformaciones en la profundidad del canto son

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z c_x = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = -z c_y = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= -z c_{xy} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (6.66)$$

Las relaciones funcionales son las siguientes:

Las ecuaciones de compatibilidad serán:

$$\begin{aligned}c_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad c_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y.\end{aligned}\quad (6.67)$$

Las ecuaciones de constitución material, para el caso isótropo, son:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} &= ktG \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned}\quad (6.68)$$

Las ecuaciones de equilibrio son las 6.53.

De modo que

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\partial}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

Los parámetros nodales pueden establecerse como

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \theta_{yi} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \end{bmatrix}; \quad (6.70)$$

y como  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$  y los campos asociados son independientes, valen funciones  $C^0$  con la aproximación siguiente:

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i w_i \\ N_i \theta_{xi} \\ N_i \theta_{yi} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}; \quad (6.71)$$

### 6.3.3. Láminas

Las láminas, o cáscaras, son tipos estructurales, en general curvos, en los que no cabe ignorar, ni los esfuerzos contenidos en el propio plano tangente a la superficie local, los esfuerzos de membrana, ni los transversales a dicho plano, los esfuerzos de placa. Tal como muestra la figura 6.18, en la medida en que

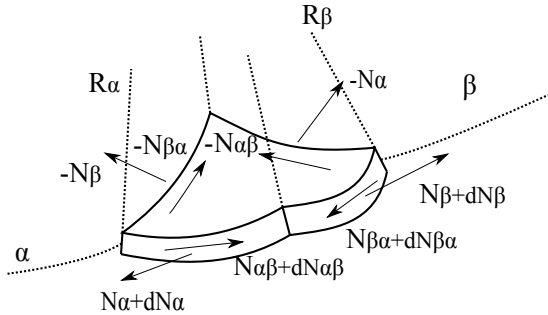


Figura 6.18: Equilibrio local en láminas. Aun cuando se representan solo los esfuerzos de membrana, se hace evidente el acoplamiento entre los esfuerzos de membrana y los de placa en la geometría curva.

ambos tipos de esfuerzo contribuyen al equilibrio frente a cargas transversales, su acoplamiento en el comportamiento general es inevitable. Y aun cuando en láminas delgadas sea posible que la contribución al equilibrio global de la componente de flexión resulte de pequeña magnitud, dicha flexión puede resultar clave en la comprobación de la resistencia local en amplias regiones de la estructura.

Para representar estas cuestiones en el modelado de una estructura es preciso, por tanto, considerar la representación conjunta de ambos tipos de esfuerzos.

Por otra parte resulta necesario hacer posible la representación de la curvatura en la geometría de la estructura. Para

ello cabría considerar una primera aproximación mediante una descripción facetada o poliédrica de dicha geometría, a través de elementos planos de tamaño reducido, respetando adecuadamente la conexión en tres dimensiones de dichos elementos en el espacio. Esta aproximación permitiría igualmente emular el comportamiento laminar mediante la superposición en el modelo de elementos de lámina y de placa conectados en el mismo espacio, restringiendo la compatibilidad de deformación a la forzada por la coincidencia de desplazamientos nodales.

Una aproximación más elegante y coherente exige la creación de modelos de elementos laminares, capaces de representar adecuadamente, tanto la geometría de la región ocupada por el elemento, como la combinación de esfuerzos y deformaciones en esa geometría.

En los siguientes apartados consideramos, sin desarrollarlas completamente, cuestiones relevantes en la formulación de tal tipo de elementos.

### **6.3.3.1. Condiciones del equilibrio local en láminas**

En el plano tangente a un punto de la superficie de la lámina cabe considerar el equilibrio de las fuerzas resultantes en las direcciones del plano, y la dirección transversal. La curvatura de la región implica que en ese equilibrio están involucrados tanto los esfuerzos de placa, de flexión, capaces como hemos visto de equilibrar cargas normales a esta, como los de membrana.

Veamos el aporte al equilibrio en la dirección normal a la superficie de las componentes de membrana, o de placa, de acuerdo a la nomenclatura de la figura 6.18. Para ello consideramos ejes

curvos, ortogonales entre sí y tangentes a la superficie en una región diferencial de dimensiones  $R_\alpha d\alpha \times R_\beta d\beta$ , donde  $R_i$  representa la curvatura en la dirección considerada y  $di$ ,  $i \in (\alpha, \beta)$  representa el ángulo entre los dos cortes considerados en dicha dirección. El equilibrio de membrana sería, considerando el efecto de los esfuerzos unitarios  $N_i$  en las longitudes  $R_i di$ , para el cambio de ángulo  $dj$ :

$$\begin{aligned}
 N_\alpha R_\beta d\beta d\alpha + N_\beta R_\alpha d\alpha d\beta + N_{\alpha\beta} R_\beta d\beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha \partial \beta} d\alpha + \\
 N_{\beta\alpha} R_\alpha d\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha \partial \beta} d\beta + p R_\alpha d\alpha R_\beta d\beta = 0; \\
 \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} + 2 \frac{N_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}} + p = 0 \quad (6.72)
 \end{aligned}$$

expresión final en la que se usan la igualdad  $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$  y la definición  $2/R_{\alpha\beta} = 1/R_\alpha \frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha \partial \beta} + 1/R_\beta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha \partial \beta}$ .

El aporte del cortante, por ejemplo el contenido en las caras  $\alpha$ , sería

$$-V_\alpha R_\beta d\beta + \left( V_\alpha + \frac{\partial V_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left( R_\beta + \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta \quad (6.73)$$

De modo que la ecuación del equilibrio normal a la superficie resulta ser

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} + 2 \frac{N_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}} + \frac{1}{R_\alpha R_\beta} \frac{\partial(V_\alpha R_\beta)}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_\alpha R_\beta} \frac{\partial(V_\beta R_\alpha)}{\partial \beta} + p = 0 \quad (6.74)$$

expresión que muestra con claridad el acoplamiento entre los esfuerzos de membrana y los de flexión.

Análogamente encontraremos este tipo de expresiones acopladas para las otras cinco condiciones del equilibrio en el espacio de ese elemento diferencial, si bien, una de ellas, la del equilibrio rotacional del plano tangente deriva en la usual igualdad de esfuerzos tangentes medidas en cortes ortogonales,  $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ , si no hay momento aplicado.

### 6.3.3.2. Parámetros para un modelo de elemento laminar

Para su formulación, será preciso considerar las cuestiones geométricas, en tanto que los elementos de longitud se miden como producto de los radios de curvatura por los diferenciales de ángulo:  $dl_\alpha = R_\alpha d\alpha$ ,  $dl_\beta = R_\beta d\beta$ .

Si recorremos los posibles componentes de las distintas funciones de campo tendríamos para las diferentes parejas:

Cargas y desplazamientos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi} &= [p \ p_\alpha \ p_\beta \ m_\alpha \ m_\beta]^T, \\ \boldsymbol{v} &= [w \ u_\alpha \ v_\beta \ \theta_\alpha \ \theta_\beta]^T;\end{aligned}\tag{6.75}$$

Esfuerzos y deformaciones:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= [N_\alpha \ N_\beta \ N_{\alpha\beta} \ V_\alpha \ V_\beta \ M_\alpha \ M_\beta \ M_{\alpha\beta}], \\ \boldsymbol{\epsilon} &= [\varepsilon_\alpha \ \varepsilon_\beta \ \gamma_{\alpha\beta} \ \gamma_\alpha \ \gamma_\beta \ c_\alpha \ c_\beta \ c_{\alpha\beta}];\end{aligned}\tag{6.76}$$

El operador diferencial  $\boldsymbol{\mathcal{D}}$  requerido la construcción de la matriz de rigidez sería el correspondiente a las condiciones de compatibilidad y tendrá una dimensión de  $8 \times 5$ . Las condiciones de

equilibrio nos permiten construir el operador adjunto, del que solo mostraremos aquí la primera fila  $\boldsymbol{\theta}_1^*$ , la correspondiente a la primera de las condiciones de equilibrio, que es la única que hemos mostrado, aunque sirve para mostrar la complejidad de la formulación resultante.

$$\boldsymbol{\theta}_1^* = \left[ \frac{1}{R_\alpha} \frac{1}{R_\beta} \frac{2}{R_{\alpha\beta}} \left( \frac{1}{R_\alpha R_\beta} \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{1}{R_\alpha R_\beta} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) 0 0 0 \right];$$

Construido  $\boldsymbol{\theta}$ , usaríamos nuevamente la cadena de expresiones de 6.32 para construir la matriz de rigidez que condensa las propiedades del elemento.

### 6.3.3.3. Variantes en las formulaciones de elementos de lámina

De lo reflejado hasta aquí se deducen varios grupos de cuestiones sobre los que fijar la atención

#### Cuestiones relevantes a decidir

- “planos” o curvos
- la métrica: ángulos y longitudes (arcos, radios),
- delgados (Kirchoff) o gruesos (Mindlin–Reissner)
- triangulares, rectangulares, trapezoidales
- número de nodos por lado

- parámetros anodales o nodos interiores
- técnicas de eliminación de bloqueos
  - de compresión (volumétrico o de membrana)
  - de cortante
- mejoras de continuidad
- distribución de tensiones en el canto
- la representación de la geometría

### **Variantes alternativas**

- Elementos sólidos adaptados
- Elementos isogeométricos (NURBS)
- ...

Se deriva de todo ello un conjunto de recomendaciones básicas antes de emplear alguno de los tipos de elemento aportados por el software que se desee usar.

### **Recomendaciones**

- Leer la documentación del elemento usado
  - bases teóricas
  - campo de aplicación
  - ejemplos de convergencia
- Probar el elemento en problemas sencillos y documentados teóricamente

- con mallas regulares
  - con mallas irregulares
  - con refinamiento variable
- En caso de que existan parámetros de usuario, probar su influencia en problemas sencillos y contrastar los valores aportados por defecto en el programa.

## 6.4. Convergencia y control de resultados

Se han tratado sucintamente algunos de los potenciales problemas asociados a la convergencia y a la aparición de errores en la sección 6.1.2.

En esta sección se analizan con algo más de detalle las posibles estrategias para la validación y mejora de los resultados de los modelos.

### 6.4.1. Refinamiento, extrapolación y alisado de tensiones

Todo modelo implica la elección de un número definido de parámetros para la descripción del movimiento posible, número que, aun pudiendo ser muy elevado, resulta inevitablemente finito, por lo que en cierto modo supone una restricción a los modos de deformación capaces de ser representados. Por lo que cabe interpretar parte de los posibles errores del modelo como errores forzados por esta restricción que, en cierta medida, representa

una soberrrigidez forzada del modelo respecto del objeto teórico que trata de representar al real.

Así pues, una vía de reducción de esta fuente de error es la introducción de más grados de libertad en la representación, de más parámetros para la descripción de los campos de desplazamiento posibles.

Para esto cabe usar dos estrategias alternativas,

- estrategia  $h$ : refinamiento de la malla
- estrategia  $p$ : aumento del orden de las funciones (grado del polinomio)

En la primera de ellas lo que se busca es reducir el tamaño típico  $h$  de las malla, aumentando por tanto el número de elementos y por lo mismo el número de parámetros totales del modelo. En la segunda estrategia, manteniendo el tamaño típico y el número de elementos se busca aumentar la complejidad del movimiento que pueden representar aumentando el grado  $p$  de los polinomios empleados en las funciones de interpolación del movimiento empleadas en el elemento, incremento que requerirá más nodos por elemento y, como hemos visto en el apartado 5.3.1.2, más puntos de Gauss para asegurar la correcta realización numérica de las integrales requeridas por el método.

De ambas estrategias posibles resulta más habitual la primera dado que no exige reformulaciones de los elementos. Y es por ello que una cuestión habitual en el análisis y control de error reside en la calidad del mallado.

En tanto que los resultados globales del análisis aportan básicamente los desplazamientos del modelo a partir de los cuales se realiza la deducción local —elemento por elemento— del res-

to de las variables de campo, deformaciones y tensiones, una consecuencia inmediata es la menor calidad o precisión en estas variables derivadas, en las que cabe detectar diferencias en los valores atribuidos a los puntos en contacto entre elementos diferentes, particularmente en los vértices donde confluyen varios elementos.

De modo que una vía de evaluación de la calidad del mallado reside en la comparación de tales valores.

Puesto que un mallado más refinado aporta una mejor descripción del comportamiento buscado, el orden de error esperado entre dos mallados diferentes es diferente. Así pues, los resultados del más refinado, aun sin llegar a los esperados exactos, se apartarán de los resultados del menos refinado en el sentido correcto, de tal modo que cabe considerar en qué medida combinar ambos resultados para alcanzar una mejor aproximación aún. Esta reflexión está en el origen a la siguiente extrapolación.

#### 6.4.1.1. Extrapolación de Richardson

Para un orden de polinomio  $p$  y tamaño de malla  $h$  cabe caracterizar el error entre los valores exacto<sup>3</sup>  $u_{\text{ex}}$  y el aportado por el modelo  $u_1$  en un orden de magnitud dado por  $O(h_1^{p+1})$ , donde  $p + 1$  contabiliza el número de parámetros empleados en la representación polinómica y  $h_1$  representa el tamaño de malla del primer modelo. Análogamente cabe determinar el orden de error para el segundo modelo.

---

3. El valor que correspondería a la solución “exacta” de las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno del problema.

Por tanto

$$\begin{aligned} 1: \quad u_{\text{ex}} - u_1 &= O(h_1^{p+1}) \\ 2: \quad u_{\text{ex}} - u_2 &= O(h_2^{p+1}) \approx O(h_1^{p+1}) \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{p+1} \end{aligned}$$

Eliminando  $O(h_1^{p+1})$  entre las dos expresiones tendremos

$$\begin{aligned} u_{\text{ex}} \left( \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{p+1} - 1 \right) &\approx \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{p+1} u_2 - u_1 \\ u_{\text{ex}} &\approx \frac{\alpha u_2 - u_1}{\alpha - 1}; \quad \alpha = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{p+1}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

#### 6.4.1.2. Alisado de tensiones

Puesto que las deformaciones se deducen a partir de diferenciales de los desplazamientos, y las tensiones a partir de aquellas, la continuidad en los desplazamientos no asegura la continuidad de tensiones que, como hemos visto, no cabe esperar coincidan en valor en los nodos compartidos por varios elementos. Pues los valores nodales se obtienen desplegando en el elemento los obtenidos para los puntos de integración, puntos en los que la aproximación es más exacta que en el resto del elemento. De tal manera que una acción habitual es *alisar* sus valores para eliminar los saltos de valor entre elementos. Esto puede hacerse de forma local, llevando las leyes de tensión a las que hacen coincidir los valores en los nodos con la media ponderada de

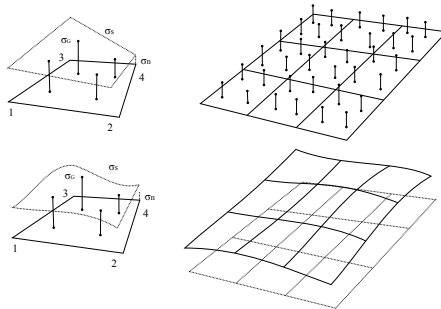


Figura 6.19: Alisado de tensiones. Las tensiones se evalúan en cada elemento a partir de sus valores en los puntos de Gauss, y su falta de coincidencia nodal en los contactos entre elementos se corrige (se alisa), sea localmente, o globalmente.

los obtenidos en estos en todos los elementos que los comparten. También de forma global, interpolando los valores de toda una región a partir de los de los puntos de Gauss de todos los elementos de dicha región.

De esta forma, una vía de calibrar el error obtenido en una solución puede estar ahora en la diferencia entre el valor aportado por el modelo de cada elemento y el valor resultante del alisado, siendo tanto mayor el error cuanto mayores sean dichas diferencias. Pero ¿cómo medirlo?

### 6.4.2. Medidas del “error”

El objetivo es comparar los campos “exactos”  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ , y aproximados  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  de las variables del problema y aportar una medida del error de la aproximación. Tenemos

$$\mathbf{v} \approx \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{N}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \approx \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{b}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} \approx \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\kappa}\mathbf{b}\mathbf{u} \quad (6.78)$$

donde  $\mathbf{u}$  representa los resultados del modelo en los valores de desplazamiento nodal obtenidos.

De tal modo que los campos que describen los errores serán

$$\mathbf{e}_v = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{e}_\epsilon = \boldsymbol{\epsilon} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6.79)$$

A partir de estos cabe concebir una medida global del error, a través de una “norma energética” del mismo, basada bien en las deformaciones, bien en las tensiones, de acuerdo con la descripción contenida en el modelo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_\epsilon\| &= \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{e}_\epsilon^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{e}_\epsilon \, d\Omega} \\ \|\mathbf{e}_\sigma\| &= \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{e}_\sigma^T \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{e}_\sigma \, d\Omega} \end{aligned} \quad (6.80)$$

El problema estriba en que los valores exactos son desconocidos, de tal modo que la medida del error se basa en la diferencia entre deformaciones (tensiones) locales y deformaciones (tensiones) alisadas. La medida habitual se hace con las tensiones alisadas  $\boldsymbol{\sigma}_s$  y la medida del error global busca limitarse en la forma

siguiente:

$$\begin{aligned} \|e_\sigma\| &\leq \eta \|W\|, \quad e_\sigma = \sigma_s - \bar{\sigma}; \\ \|W\| &= \sqrt{\int_\Omega \sigma_s^T \kappa^{-1} \sigma_s d\Omega} \end{aligned} \quad (6.81)$$

donde  $\eta$  representa un límite de tolerancia en el error global.

Puede considerarse por ello como parámetro descriptivo del error al cociente

$$\xi_g = \frac{\|e_\sigma\|}{\eta \|W\|} \quad (6.82)$$

El problema con esta representación consiste en que el error está habitualmente distribuido de manera no uniforme sobre el modelo, de tal forma que pueden darse localmente errores muy relevantes aun cuando globalmente el error medio sea reducido.

Por ello es de gran interés la medida de las densidades de error, local y global, de tal modo que no sólo interesa un error reducido, sino también una densidad de error relativamente uniforme en todo el modelo.

Una distribución uniforme exigiría que la densidad en cada elemento sea semejante y por tanto semejante a la media global.

$$\begin{aligned} \|\text{Dens}(e_\sigma)\|^e &= \sqrt{\frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} e_\sigma^T \kappa^{-1} e_\sigma d\Omega} = \frac{\|e_\sigma\|^e}{\sqrt{\Omega_e}} \\ \text{con el objetivo } \frac{\|e_\sigma\|^e}{\sqrt{\Omega_e}} &= \frac{\|e_\sigma\|}{\sqrt{\Omega}} \end{aligned}$$

No entramos aquí en más detalles, que exceden ampliamente los objetivos de este texto.



## Capítulo 7

# Modelado de la incertidumbre: fiabilidad

En este capítulo se presenta una muy somera introducción a los métodos estadísticos aplicados a la evaluación de la seguridad estructural, métodos habitualmente denominados con el rótulo *fiabilidad*.

El contenido del capítulo se adapta a la estructura de la parte final del curso sobre “Fundamentos de las teorías de estructuras y de su cálculo numérico” a que se refiere todo el libro, tal como se señala en la presentación, si bien está desarrollado con más detalle y bibliografía en Cervera [2019](#).

El hilo conductor consiste en la caracterización de las fuentes de incertidumbre relevantes y su incidencia en la determinación del grado de fiabilidad con que puede afirmarse la seguridad de un elemento estructural concreto, a través del recorrido sobre un ejemplo que estudia el pórtico ya visto en la figura 2.22 del apartado 2.2.1.3, aunque por sencillez, solo se van a considerar los mecanismos de fallo por flexión.

En ese recorrido se analiza la medida de la influencia de las diferentes incertidumbres en la determinación de los modos y parámetros de fallo, las variables aleatorias empleadas para esa medida, y se aporta una introducción a los modelos probabilistas empleados en la caracterización de las condiciones de seguridad estructural y a su materialización en los códigos, a través de los coeficientes parciales de seguridad.

## 7.1. Fuentes y factores de incertidumbre

Ni la realidad, ni la información obtenida a través de su observación pueden considerarse deterministas. Cualquier medida, imprescindible para conocer o actuar sobre la realidad, está impregnada de incertidumbres procedentes, en general, de dos tipos de fuente. El primer tipo corresponde a la propia naturaleza de la realidad, en la que la interacción compleja de muy diversas variables impide la repetición exacta e idéntica de un mismo fenómeno. El segundo responde a factores humanos, ya sea por una escasa comprensión del fenómeno a medir y su de-

fectuoso modelado, ya sea por defectos en los procedimientos o instrumentos de medida.

De tal modo que la incertidumbre en la descripción del comportamiento real a través de su modelado teórico procede de factores diferenciados

- las incertidumbres físicas o mecánicas (la variabilidad en el tiempo y el espacio de las cualidades consideradas)
- las incertidumbres en la medición (por errores o sesgos en la medición de tales cualidades)
- las propias incertidumbres estadísticas (al disponerse de información limitada, muestras finitas, etc...)
- las incertidumbres debidas al propio modelado de la realidad (en nuestro caso de las estructuras) lo que conlleva limitaciones en las capacidades predictivas de este.

De modo que una correcta comprensión del comportamiento real de las estructuras implica considerar sus cualidades probabilísticas, derivadas de la aleatoriedad de cada una de las variables consideradas al modelarlas.

En el caso de ejemplo, para el que los casos de fallo estudiados desde una perspectiva determinista con el enfoque plástico son los de la figura 7.1, no sólo hay incertidumbre en la geometría real  $h, l$ , las acciones  $F_1, F_2$ , o en los valores de las resistencias de las piezas (pilar y viga) frente a la flexión,  $M_p, M_v$ , sino que estos últimos pueden ser diferentes en cada extremo dependiendo de las condiciones de ejecución de las uniones, o de la variabilidad (aun pequeña) en las capacidades resistentes de los perfiles empleados... de tal modo que la caracterización de los *modos de fallo* puede exigir considerar la potencial correlación entre

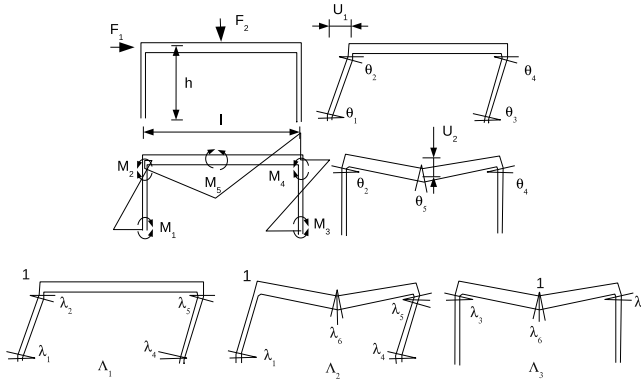


Figura 7.1: Componentes de la estática y la cinemática de rotura en pórtico simple, y los correspondientes mecanismos de colapso.

estas resistencias en las diferentes regiones de la estructura, tal como expresan las alternativas de la figura 7.2.

De tal modo que, si formulamos la condición de fallo mediante algún tipo de expresión en la que resulten valores positivos si no hay fallo y negativos si sí lo hay, las expresiones para ambas alternativas en la formulación plástica podrían ser las siguientes para los tres mecanismos de colapso de la figura (desplazamiento lateral, combinado, y de rotura del tablero):

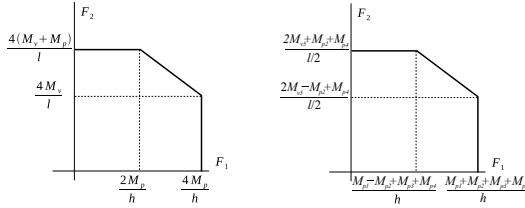


Figura 7.2: Cargas límite en pórtico simple, dependiendo de que se consideren relacionados o no los límites de resistencia en los extremos de las distintas piezas

**valores de resistencia idénticos**

$$\begin{aligned}
 4M_p - F_1 h &< 0 \\
 (4M_p + 2M_v) - (F_1 h + F_2 l/2) &< 0 \\
 2(M_p + M_v) - F_2 l/2 &< 0
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

**valores de resistencia diferentes pero correlacionados**

$$\begin{cases}
 1 : Z_1 < 0 \\
 2 : Z_2 < 0 \\
 3 : Z_3 < 0, \text{ con}
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= M_{p1} + M_{p2} + M_{p3} + M_{p4} - F_1 h \\
 Z_2 &= M_{p1} + M_{p3} + 2M_{p4} + 2M_{p5} - F_1 h - F_2 l/2 \\
 Z_3 &= M_{p2} + 2M_{v5} + M_{p4} - F_2 l/2
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

En las expresiones anteriores estaríamos considerando aleatorias las distintas variables  $M_i = W_i f_{y,i}$ ,  $F_j$ ,  $h$ ,  $l$ , de tal modo

que el evento (o conjunto de eventos) que caracteriza la posibilidad de fallo se expresa con la variable aleatoria de tres dimensiones  $\mathbf{Z} = [Z_1 \ Z_2 \ Z_3]^T$  y la condición de fallo con el cumplimiento de alguna de las condiciones  $\mathbf{Z} < \mathbf{0}$ .

Más en general, recordemos las formulaciones que usábamos en los análisis plásticos, en los que establecíamos las condiciones de límite (o estado límite) a través de alguna *superficie límite* o *superficie de rotura*, formulaciones en la que esta superficie está definida en los espacios que representan las variables de comprobación, con expresiones que hemos visto adoptan la forma  $\psi \mathbf{f} \leq d\mathbf{r}$ , ver 1.33, o 1.40, y que podemos también escribir como  $d\mathbf{r} - \psi \mathbf{f} \geq 0$ . En estas expresiones establecíamos que la capacidad resistente  $d\mathbf{r}$  deba ser mayor que el efecto de las cargas,  $\psi \mathbf{f}$ , es decir, la comprobación buscaba asegurar resistencia suficiente, en un formato que podríamos generalizar:

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) \geq 0; \quad \mathbf{X} = (G_i, Q_j, f_k, T_l, \dots) \quad (7.3)$$

donde la expresión  $\mathbf{G}$  depende de las cargas, permanentes  $G_i$  o variables  $Q_j$ , de las resistencias de los materiales  $f_k$ , de la topología y geometría de secciones, piezas y sus enlaces  $T_l$ , etc.

Estas comprobaciones también se formulan en formatos como los siguientes, donde  $R$  representa la capacidad resistente y  $E$  el efecto de las acciones frente a dicha capacidad:

$$\begin{aligned} R_i &\geq E_i; \quad R_i - E_i \geq 0 \\ \frac{R_i}{E_i} &\geq 1; \quad \log(R_i) - \log(E_i) \geq 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

En este marco, caracterizar el fallo en vez de la resistencia supone establecer una variable para el evento a medir,  $Z$ , (donde

puede ser  $Z = R - E$ ) y formular la condición que expresa el fallo, lo que se hace con la expresión  $Z < 0$ , lo que, llevado a los términos del análisis, supone considerar que el fallo se produce cuando se produce alguna de las condiciones expresadas en  $\mathbf{dr} - \psi \mathbf{f} < \mathbf{0}$ . Por tanto la variable  $\mathbf{Z}$  que expresa la posible condición de fallo tiene el mismo número de dimensiones que las ecuaciones de comprobación, al ser  $\mathbf{Z} = \mathbf{dr} - \psi \mathbf{f}$ .

La formulación determinista del fallo puede expresarse en el formato

$$Z_i = R_i - E_i < 0 \quad (7.5)$$

### 7.1.1. Variables aleatorias. Tipos y distribuciones

Tenemos que considerar cualquier posible medida no determinista como una variable aleatoria. Denotaremos con  $X$  a dicha variable, de la que sólo podemos obtener estimaciones o mediciones  $X_i$  diferentes para cada caso  $i$  de “ensayo” o “realización”, de tal modo que  $X$  representa el fenómeno, del que solo conocemos un conjunto finito de observaciones,  $X_i$ , que incluirán valores, tal vez repetidos, que se distribuyen en un cierto rango de valores  $x$ . Ahora  $x$  representa rangos de valores posibles para el fenómeno que denotamos con  $X$ , pero un valor de  $x$  no necesariamente responde a valores observados en el conjunto  $X_i$ . De tal modo que, por precisión en el lenguaje, debemos distinguir entre la *frecuencia* con que se observa un cierto valor (o conjunto de valores)  $X_i$  en el total de las observaciones, y la *probabilidad* para un valor  $x$  (o para valores comprendidos en un rango o intervalo de valores  $[x_a \dots x_b]$ ) de ser observado. En el primer caso

estamos contabilizando casos de una secuencia de experimentos u observaciones, en el segundo, estamos proyectando a futuro expectativas de observación.

#### 7.1.1.1. Variables básicas y derivadas

En nuestros modelos algunas de las variables corresponderán a propiedades medibles directamente: dimensiones, pesos, resistencias en ensayos de materiales, etc. Denominamos *básicas* a este tipo de variables.

Por el contrario, todo un segundo grupo de variables puede corresponder a propiedades definidas a partir de las anteriores, a propiedades construídas mediante algún modelo teórico. Se trata ahora de variables *derivadas*. Un ejemplo sencillo serían las propiedades resistentes de secciones concretas: si bien podemos pensar en ensayar y medir todas y cada una de dichas secciones, lo habitual es construir sus propiedades a partir de las propiedades de la geometría y de los materiales con que se construyen.

En general tendremos que las cualidades de interés (los modos de fallo de una estructura) están definidas por variables derivadas, de tal modo que su incertidumbre deberá evaluarse a partir de la combinación de las incertidumbres en las variables básicas y en el modelo con que se definen.

### 7.1.1.2. Variables por su efecto en relación a la condición de fallo

Una diferencia importante en las variables relativas a la seguridad estructural deriva de su efecto en el fallo: denominaremos *acciones* aquellas variables cuyo incremento aumenta la probabilidad de fallo, y *resistencias* aquellas otras cuyo incremento reduce en una reducción de la probabilidad de fallo.

Esta distinción es esencial en la determinación de la probabilidad de fallo dada la incertidumbre de tales variables, pero hay que ser conscientes de que se trata de una clasificación que depende seriamente del modo de fallo considerado, de tal modo que una misma fuente o variable puede exigir ser considerada como acción en unos casos y como resistencia en otros: un ejemplo es el caso de las cargas en una marquesina en doble voladizo sobre un pilar central, en el que la carga en el lado derecho puede ser parte del efecto de resistencia frente a la flexión del pilar, sometido a carga en el vuelo izquierdo, mientras que ambas cargas son acciones para la flexión de cualquiera de los enlaces de los voladizos contra el nudo.

### 7.1.1.3. Distribuciones de variables aleatorias

La medida repetida de una variable aleatoria aporta valores diferentes aun cuando puedan ser cercanos entre sí. Los histogramas aportan una visión gráfica de la distribución (figura 7.3 a): en una gráfica cartesiana representamos en abscisas un conjunto dado de intervalos iguales de valores posibles para la medida y en ordenadas el número de valores obtenidos para la

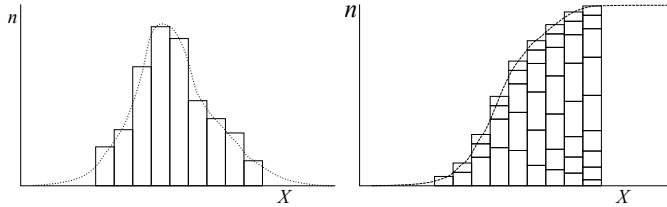


Figura 7.3: Histograma: número  $n$  de ocurrencias de valores observados de  $X$  en el intervalo indicado en abscisas. Distribución (acumulada): número  $n$  de ocurrencias de valores observados de  $X$  en el intervalo indicado en abscisas o intervalos anteriores. Ambas figuras incluyen gráfica “suave” aproximada a las cualidades de la gráfica experimental.

variable en cada uno de dichos intervalos. La suma de los valores del histograma representará el número de medidas realizadas y, si las barras del histograma cubren la anchura del intervalo, la proporción del área correspondiente a cada intervalo en relación con el área encerrada en la figura completa, aporta la proporción entre el número de medidas observadas en este intervalo respecto del número total, o lo que es lo mismo, la frecuencia de observaciones correspondiente al intervalo.

Otra gráfica de interés (figura 7.3 b) emplea los mismos intervalos en abscisas, pero contabiliza en ordenadas el número acumulado de valores obtenidos tanto en dicho intervalo como en todos los anteriores: para una variable dada, la gráfica estará expresando el número de casos en que la variable ha tenido valores iguales o menores a los del intervalo. Dicha gráfica acaba

en los valores máximos de la variable con una horizontal en la ordenada correspondiente al número total de observaciones. Esta segunda gráfica, de distribución acumulada no es más que la integral de la anterior.

Si en vez de medir el número de casos medimos la frecuencia, la función de distribución pasa a ser una función monótona creciente, que cabe suavizar manteniendo las propiedades globales de la distribución, y que se sitúa en el rango de valores  $[0, 1]$ , y el histograma se transforma en una función derivada de la de distribución que, dimensionalmente, expresa la densidad de esa distribución para cada posible valor  $x$  del rango observado, y donde, suponiendo que la distribución es estable en el tiempo, cabe atribuir a eventos futuros dicha densidad de probabilidad.

De modo que tenemos las funciones y relaciones siguientes:

Función de densidad de probabilidad:

$$f(x); \quad \Pr(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (7.6)$$

Función de distribución:

$$F(x) = \Pr(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (7.7)$$

Si suponemos que el valor de  $X$  está relacionado directamente con la capacidad de supervivencia de la estructura (por ejemplo, expresa la carga observada para la que la estructura colapsa) la función de distribución  $F(x)$  puede denominarse función o curva de *fragilidad* porque expresa la probabilidad

de fracaso (o de superación de un cierto límite de daño) de la estructura al alcanzarse el valor de carga dado por  $x$ .

Puesto que las estructuras que no fracasan sobreviven, podemos definir

Función de supervivencia:

$$S(x) = 1 - F(x) = \Pr(X \geq x) = \int_x^{\infty} f(x) dx. \quad (7.8)$$

La probabilidad de fracasar de estructuras que sobrevivieron se denomina tasa de fallo o

Función de riesgo:

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{1 - \int_{-\infty}^x f(x) dx} \quad (7.9)$$

**Principales distribuciones en fiabilidad estructural** En las figuras contenidas en 7.4 se muestran algunas de las distribuciones más habituales en seguridad estructural, que se reseñan a continuación

**Distribución normal**, también llamada distribución *gaussiana*, o distribución de la *campana de Gauss*. Es la distribución de una variable aleatoria  $X$  de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , representable como  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  y cuya función de densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (7.10)$$

Si los parámetros  $\mu, \sigma^2$  son respectivamente 0 y 1, la distribución  $\mathcal{N}(0, 1)$  para la correspondiente variable  $Z$  se denomina distribución normal estándar, cuya densidad de probabilidad es por tanto, si denotamos con  $\Phi(x)$  a la correspondiente distribución acumulada:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (7.11)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (7.12)$$

La distribución normal es simétrica, siendo iguales en esta las media, mediana y moda.

La función de distribución acumulada correspondiente a una distribución normal es, por tanto

$$F_{\mu, \sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (7.13)$$

o también

$$F_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right) \quad (7.14)$$

donde  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  es la función “error”.

Se trata de una distribución muy ubicua, pues es a la que tiende cualquier variable aleatoria que se configura como suma de un conjunto de variables aleatorias independientes<sup>1</sup>.

---

1. Por el teorema del límite central.

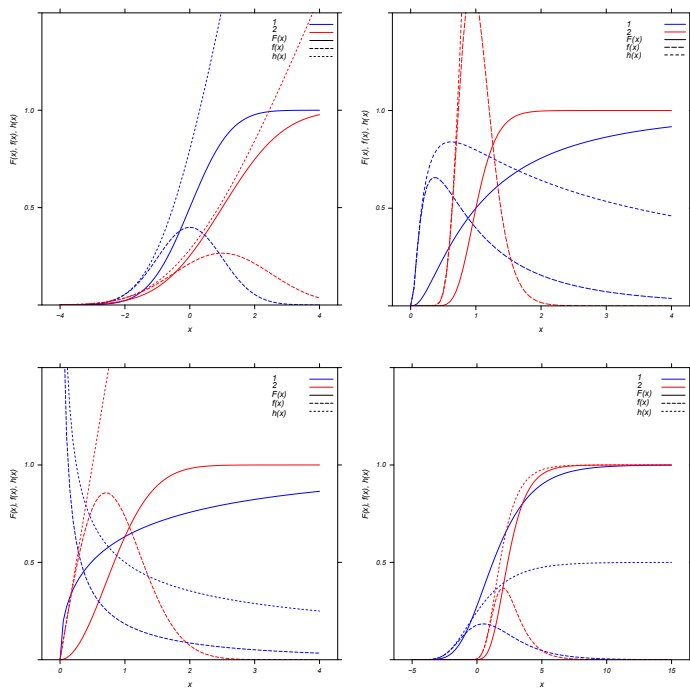


Figura 7.4: De izquierda a derecha y de arriba abajo, distribución normal, lognormal, de Weibull y de Gumbel. Están representadas, para dos casos en cada figura, las funciones de distribución  $F(x)$ , de densidad de probabilidad  $f(x)$  y de riesgo  $h(x)$ .

**Distribución lognormal.** Se trata de la distribución de una variable aleatoria  $X$  tal que el logaritmo natural (o neperiano) de dicha variable tiene una distribución normal: es decir, si  $X$  presenta una distribución lognormal,  $Y = \ln X$  tiene una distribución normal. Y de igual forma, si  $Y$  responde a una distribución normal, su exponencial  $X = e^Y$  tiene una distribución lognormal. Dicha distribución es a la que tiende la variable resultado del producto de muchas variables aleatorias independientes. El dominio de la variable  $X$  queda restringido a valores positivos:  $0 \leq X \leq \infty$ .

**Distribución de Weibull** Es una distribución definida para valores positivos de la variable, que responde a los tipos de distribución llamadas de *valores extremos*. Estas responden a la determinación de los valores extremos, máximos o mínimos, que se obtienen para una variable al obtener para esta un conjunto de valores en lotes de tamaños dados, o correspondientes a períodos de tiempo fijos, como pueden ser las menores resistencias de lotes de  $n$  probetas, o las mayores cargas superficiales medidas en un área dada en un período de referencia de un año.

**Distribución de Gumbel** Esta distribución (distribución generalizada de valores extremos, tipo-I) se usa para modelar como se distribuyen los valores máximos de una serie de muestras de valores de algún otro tipo de distribución. Se relaciona pues, como la precedente, con las teorías de valores extremos.

Se usa para la caracterización de los máximos anuales de una cierta acción variable medida en una muestra larga (de 25, 50, 100 años, ...). Es teóricamente la distribución que debe usarse para obtener el *valor característico* de una acción variable. Cuando este último valor se define coloquialmente, se habla del

fractil 95 %, es decir del valor que solo tiene una probabilidad del 5 % de ser superado en un año dado. O también, de una acción cuyo *período de retorno* es de  $20 = 1/0,05$  años. Es importante hacer notar que el *período de retorno* no debe ser considerado indicador temporal de un posible ritmo o ciclo en la acción de que se trate, es solo el inverso de una probabilidad anual.

#### 7.1.1.4. Parámetros o indicadores básicos de una distribución

Es útil resumir las propiedades de una distribución en valores o indicadores representativos de la misma. Se señalan a continuación los más usuales y su simbología.

##### Valores centrales:

**Media  $\bar{X}$  y valor esperado  $E(X)$**  de la variable. Para una distribución discreta, la media es la suma de los valores obtenidos en las diferentes observaciones dividida por el número de estas:

$$\bar{X} \approx E(X) = \mu \quad (7.15)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad i \in [1, n], \quad (7.16)$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (7.17)$$

La forma de la expresión 7.17 es idéntica a la de la distancia del centro de gravedad de la gráfica de la función de densidad

de probabilidad al origen de abscisas. Es por ello que también se llama *primer momento* a este parámetro —a semejanza del momento estático que usamos en geometría de masas para determinar la posición del centro de gravedad—

**Mediana.** Se denomina mediana de una variable  $X$  al valor  $m$  para el que la probabilidad de obtener valores menores es idéntica a la de obtener valores mayores. Es por tanto el valor para el que las áreas de las gráficas encerradas bajo la función de densidad de probabilidad antes y después de la vertical correspondiente al valor  $m$  son idénticas.

$$F(m) = \Pr(X \leq m) = \Pr(X \geq m) = S(m) = \int_{-\infty}^m f(x), dx = \frac{1}{2} \quad (7.18)$$

La mediana no resulta tan sesgada —y alejada del valor percibido como central— como lo es la media en distribuciones fuertemente asimétricas, tal como es la de los ingresos en una población, y además resulta siempre acotada cuando la media puede no estarlo. Es por ello un parámetro estadístico más robusto.

**Moda.** Se trata del valor  $M$  más probable en una distribución, correspondiendo por tanto al valor que hace máxima la ordenada en el histograma, o en la función de densidad de probabilidad.

$$M = x \left( x_M | f(x_M) = \max_x f(x) \right) \quad (7.19)$$

Es usual también la consideración de valores máximos locales, de modo que una distribución pueda tener más de un máximo

local en la función de densidad de probabilidad: un caso es el de las distribuciones bimodales, con dos modas, que tendrán dos máximos locales en  $f(x)$ , situación que a menudo se interpreta como efecto de la superposición de dos poblaciones diferentes, cada una con su distribución propia.

### Medidas de la dispersión:

**Desviación media absoluta.** Es la media del error cometido al considerar la media  $\mu = \bar{X}$  como valor de la variable cuando consideramos una observación dada  $X_i$ :  $|X_i - \mu|$  en valor absoluto. La desviación media absoluta será, pues

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu| \quad (7.20)$$

Pueden considerarse igualmente las desviaciones respecto de la mediana, o de la moda. Como el manejo de valores absolutos es matemáticamente laborioso, es más habitual la consideración de expresiones cuadráticas para eliminar los términos negativos de la suma anterior. Esto nos lleva al siguiente parámetro:

**Varianza.** Es la media de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y la media de estos:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad (7.21)$$

Si  $n$  contiene a toda la población (todas las observaciones posibles), la media  $\mu$  es la correcta, y la expresión no tiene fisuras. Pero si  $n$  es sólo una muestra de la población, la esti-

mación de la media es solo aproximada, por lo que la estimación anterior es potencialmente incorrecta. Es decir, la diferencia  $X_i - \mu = X_i - \bar{X}$  no sería el error sino solo una estimación de este, que es habitual denominar residuo. Es fácil ver que si tenemos  $n$  observaciones, sólo podemos estimar su variabilidad a través de  $n - 1$  diferencias entre una observación y las restantes: con sólo una observación es imposible saber si habrá o no variabilidad alguna. De modo que si estamos tratando solo con muestras representativas pero que no cubren la población completa, la varianza se determina usando la *corrección de Bessel* —o incluyendo el *factor de Bessel*— a través de la expresión:

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad (7.22)$$

Para una distribución continua descrita por una función de distribución de probabilidad  $f(x)$ , tendremos, al igual que vimos para el cálculo de la media, la expresión siguiente:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (7.23)$$

Cabe señalar que la expresión es el *segundo momento* que, en geometría de masas, estaría midiendo la inercia respecto del centro de gravedad.

Dicha expresión puede desarrollarse y escribirse también como

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\mu + \mu^2) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 \quad (7.24)$$

expresión muy próxima a la del teorema de Steiner en geometría de masas.

**Desviación estándar, o desviación típica.** Para tener una medida de la desviación dimensionalmente comparable a la métrica de la variable se usa la raíz cuadrada de la varianza, con idénticas consideraciones que en esta, según sea la categoría de la muestra considerada.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2} \quad (7.25)$$

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx} \quad (7.26)$$

La expresión continua es equivalente a la determinación, en geometría de masas, del radio de giro para la figura de la función de densidad de probabilidad  $f(x)$ , cuya media se situaría en su centro de gravedad<sup>2</sup>.

**Coefficiente de variación** (a veces denotado por COV, y para el que no existe un símbolo unánime: pueden encontrarse variantes como  $\rho$ ,  $V$ , ...). Cuando la variable tiene predominantemente valores de igual signo puede tener sentido estadístico considerar la proporción entre los valores de la desviación respecto de los valores medios de la variable: es el caso, por ejemplo de las resistencias en muestras de materiales, en las que no tendría sentido la “observación” de una resistencia negativa

---

2. y cuyo área total es como ya sabemos la unidad.

para un ensayo dado.

$$\rho = \frac{\sigma}{|\mu|} \quad (7.27)$$

Las distribuciones con coeficientes de variación mayores que la unidad se denominan distribuciones de alta varianza.

#### 7.1.1.5. Problemas de dos o más variables aleatorias.

Los problemas habituales exigen considerar variables aleatorias diferentes: por ejemplo acciones y resistencias en los problemas de resistencia estructural.

Cada una de las variables  $X_i$  del conjunto  $\mathbf{X}$  —aquí el índice  $i$  se refiere a la lista de variables posibles— tendrá sus propiedades: los espacios de evolución respectivos  $x_i$ , y sus cualidades en estos (distribución, densidad, media, etc.) existen separadamente de la consideración relativa al resto. Pero resulta importante además considerar sus propiedades conjuntas si, en vez de analizar su variación aislada, analizamos la del conjunto para eventos o experimentos en las que medimos todas las variables simultáneamente, considerando así la distribución conjunta.

En el espacio que contiene todas las dimensiones o variables del problema considerado,  $\mathbf{x}$ , con  $\mathbf{X} \in \mathbf{x}$ , tendremos, además de las densidades de probabilidad para cada dimensión  $x_i$ , las correspondientes al espacio conjunto  $\mathbf{x}$ , o para subespacios  $\mathbf{x}^*$

de este:

$$\Pr(X_i = x_i) = \sum_{\mathbf{x}^*} \Pr(X_i = x_i, \mathbf{X}^* = \mathbf{x}^*) \quad (7.28)$$

$$f(x_i) = \int_{x_i=\text{cte.}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^* \quad (7.29)$$

donde la integral se realiza para todas las dimensiones (subespacios, o variables) salvo la dimensión o variable considerada (el subespacio indicado por  $\mathbf{x}^*$  es decir, todas las dimensiones diferentes de las indicadas en  $i$ ).

A las distribuciones o las densidades de probabilidad de un subconjunto de variables, medidas independientemente del resto, como en la expresión precedente, se les denomina en la literatura funciones de distribución, o de densidad, *marginal*. Puede verse que son densidades referidas a dimensiones diferentes: en el caso de dos variables la densidad conjunta es por unidad de área del espacio de dos dimensiones mientras que la marginal es lineal, por unidad de longitud de la dimensión de la variable considerada.

A las distribuciones de probabilidad de una variable o un subconjunto de ellas  $X_i$ , medidas para valores prefijados del resto de las variables  $\mathbf{X}^*$  se las denomina probabilidades *condicionadas*, y se denotan con el formalismo  $\Pr(X_i|\mathbf{X}^*)$ .

Para estos problemas, además de los parámetros individuales pueden medirse parámetros conjuntos, de los que vamos a señalar los más importantes, para lo que partimos del caso de dos variables en el que  $\mathbf{X} = [X, Y]$  y  $\mathbf{x} = [x, y]$ . Nótese que se usa un vector fila para el conjunto: cada columna es una varia-

ble y pueden usarse filas separadas para mediciones sucesivas de cada pareja de valores.

En este caso la densidad de probabilidad conjunta  $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$  y las marginales  $f(x)$ ,  $f(y)$  o condicionadas  $f(x|y)$ ,  $f(y|x)$ , —donde por ahorro de notación representamos todas con la misma  $f()$  aunque como hemos visto se refieren a espacios diferentes— quedan relacionadas por las expresiones

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_y f(x, y) dy = \int_y f(x|y)f(y) dy \\ f(y) &= \int_x f(x, y) dx = \int_x f(y|x)f(x) dx. \end{aligned} \quad (7.30)$$

**Covarianza.** En un problema de dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  es el valor esperado del producto  $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$  para todos los eventos en los que se miden conjuntamente ambas variables:  $[X_i, Y_i]$ ,  $i \in (1 : n)$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \text{cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Puede verse que la varianza  $\sigma_x^2$  para una de las variables aislada no es más que una “auto-covarianza” considerando parejas de esa misma variable:  $\sigma_x^2 = \sigma_{xx}$ .

**Matriz de covarianza.** Es la matriz que agrupa las covarianzas correspondientes a una lista de variables aleatorias. En el caso

de dos variables (dos dimensiones):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[(X_i - \mu_x)(X_i - \mu_x)] & E[(X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y)] \\ E[(Y_i - \mu_y)(X_i - \mu_x)] & E[(Y_i - \mu_y)(Y_i - \mu_y)] \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

lo que puede generalizarse a espacios de múltiples dimensiones, en los que también se usa la denominación *varianza* en sentido multidimensional, al tratarse de una generalización del concepto de varianza unidimensional, extendiendo la fila de variables utilizadas  $\mathbf{X}$ :

$$\Sigma = \text{var}(\mathbf{X}) = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])] = E[\mathbf{X}^T \mathbf{X} - 2\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}] = E[\mathbf{X}^T \mathbf{X}] - \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}. \quad (7.33)$$

Se trata de una matriz simétrica.

**Correlación.** Correlación lineal, o de Pearson. Entre dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , es el cociente entre su covarianza y el producto de sus desviaciones:

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (7.34)$$

Es un valor entre -1 y 1, en el que el valor absoluto es un indicador del grado de relación lineal entre las dos variables referenciadas.

**Matriz de correlación.** Es la matriz (simétrica) constituida

por las correlaciones de las variables consideradas en el conjunto.

$$\text{cor}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

Es fácil ver que la diagonal está formada por valores unidad.

El interés de covarianzas y correlación está en la aproximación lineal de los valores de una variable a partir de los de otra, en el caso de correlación no nula, como se muestra en Cervera 2019, apartado 2.4.2 y ss.:

$$Y_i = \bar{Y} + \rho_{xy} \sigma_y \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_x} + \varepsilon_i, \quad (7.36)$$

La expresión determina el desplazamiento o distancia respecto de la media en la variable dependiente  $Y$  que hay que añadir a dicha media para explicar  $Y$  a partir de la distancia en la variable independiente  $X$  respecto de su propia media. En dicha expresión deben interpretarse las desviaciones estándar como parámetros de escala o de unidad de medida para tales distancias.

**Operaciones con variables aleatorias** La combinación de los efectos de dos o más variables aleatorias mediante operaciones matemáticas da lugar a variables derivadas, cuyos parámetros estadísticos dependen de aquellas, y de la propia operación. Vemos algunos casos.

**Negativo** de una variable aleatoria:

$$\begin{aligned}
 Y &= -X \\
 \bar{Y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-X_i) = -\bar{X} \\
 \sigma_y &= \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{E[(Y - \bar{Y})^2]} = \\
 &\quad \sqrt{E[(-X + \bar{X})^2]} = \sigma_x \qquad (7.37)
 \end{aligned}$$

**Suma** de dos variables aleatorias:

$$Z = X + Y \qquad (7.38)$$

$$\begin{aligned}
 \mu_z &= \bar{Z} = E[Z] = E[X + Y] = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) = \bar{X} + \bar{Y} \qquad (7.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^2 &= E[(Z - \bar{Z})^2] = E[Z^2 + \bar{Z}^2 - 2Z\bar{Z}] = \\
 &= E[(X + Y)^2 + (\bar{X} + \bar{Y})^2 - 2(X + Y)(\bar{X} + \bar{Y})] \\
 &= E[(X - \bar{X})^2 + (Y - \bar{Y})^2 + 2(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] \\
 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \qquad (7.40)
 \end{aligned}$$

En el caso de variables no correlacionadas será  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ , pero para una correlación positiva completa, con  $\rho_{xy} = 1$  tendremos  $\sigma_z^2 = (\sigma_x + \sigma_y)^2$ .

**Diferencia** de dos variables aleatorias: procediendo análoga-

mente

$$\begin{aligned} Z &= X - Y \\ \mu_z &= \bar{Z} = E[Z] = E[X - Y] = \bar{X} - \bar{Y} \\ \sigma_z^2 &= E[(Z - \bar{Z})^2] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y. \end{aligned} \quad (7.41)$$

**Producto** de dos variables aleatorias: Recuperando la expresión 7.33 para dos variables  $X$  e  $Y$  tenemos que

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])], \\ &= E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] \end{aligned} \quad (7.42)$$

de modo que podemos establecer

$$Z = X \cdot Y \quad (7.43)$$

$$E[Z] = \mu_Z = \mu_X\mu_Y + \text{cov}(X, Y) \quad (7.44)$$

Asimismo, la varianza puede determinarse con

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= E[(X \cdot Y)^2 - (E(X \cdot Y))^2] \\ &= E(X^2Y^2) - (\mu_X\mu_Y + \text{cov}(X, Y))^2 \\ &= \text{cov}(X^2, Y^2) + (\mu_X^2 + \sigma_X^2) \cdot (\mu_Y^2 + \sigma_Y^2) - \\ &\quad - (\mu_X\mu_Y + \text{cov}(X, Y))^2 \\ &= \text{cov}(X^2, Y^2) + (\mu_X^2 + \sigma_X^2) \cdot (\mu_Y^2 + \sigma_Y^2) - \mu_Z^2 \end{aligned} \quad (7.45)$$

Para obtener  $\sigma_Z^2$  es por tanto necesario conocer momentos superiores al segundo, requeridos para determinar  $\text{cov}(X^2, Y^2)$ , la covarianza entre los cuadrados de los valores de ambas variables.

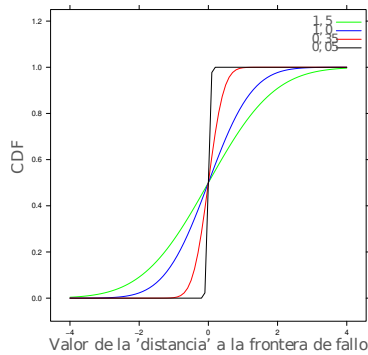


Figura 7.5: Función de probabilidad de fallo interpretada como “frontera” entre regiones con o sin condición de fallo (signo de  $F$ ), donde se mide la distancia a la frontera en unidades relevantes para una distribución normal de la condición de fallo  $F_i = R_i - E_i$ . Se representan las variantes probabilistas para las desviaciones  $\sigma = [0,05; 0,35; 1,0; 1,5]$ .

La versión determinista corresponde a  $\sigma = 0$ .

## 7.2. Modelos de seguridad frente al fallo

En esta sección damos un somero repaso a los modelos de seguridad. Los modelos clásicos son los deterministas, que consideran la no aleatoriedad de las variables y de los modelos con que se representan los diferentes factores que inciden en la determinación de si la estructura es segura o no, si fallará o no. En la medida en que este determinismo no es exacto, se busca en este modelo alejar los efectos desfavorables de los favorables mediante coeficientes de seguridad que reduzca la estimación de estos últimos, a fin de alejar la posibilidad de fallo. Los modelos en tensiones admisibles son una forma clásica de estos.

Sin embargo la diferente variabilidad de los diferentes tipos de variables ha llevado desde antiguo a considerar la necesidad de adaptar tales coeficientes a estos tipos, dando lugar en los códigos modernos a los coeficientes parciales de seguridad, basados en modelos semi probabilistas para su calibración. Estos modelos operan como los deterministas, pero con valores *de cálculo* para las variables involucradas, que se establecen a partir de valores estadísticos aceptados y modificados por los coeficientes parciales, que se calibran para alcanzar una tasa de fallo probable aceptada y normalizada.

Finalmente los modelos probabilistas operan con la variabilidad aleatoria en modelos y variables buscando asegurar que los valores adoptados en el proyecto aporten una tasa de fallo menor que la que se adopta en la normativa como aceptable para cada tipo de proyecto.

En lo que sigue lo estudiamos con más detalle.

### 7.2.1. Modelos deterministas y semiprobabilistas de seguridad

Desde una aproximación determinista a los modelos de comportamiento y de fallo de las estructuras se usa una doble consideración:

los problemas pueden caracterizarse por varios grupos de variables,

- de geometría de la estructura, que incluye dimensiones, secciones, formas de enlace etc.
- de cualidades de los materiales que conforman dicha geometría: capacidades resistentes y deformabilidades para distintas combinaciones de tensiones, etc.
- de acciones sobre la geometría estructural, las cargas o acciones, de cualidades y orígenes diversos: permanentes o variables, gravitatorias o térmicas, etc.

y las teorías de estructuras, resistencia de materiales, etc. permiten establecer modelos de fallo en los que las comprobaciones comparan los efectos  $E_i$  de las acciones  $Q_j$  en toda la geometría estructural  $\mathcal{E}$  con las capacidades resistentes  $R_i$  frente a tales efectos aportadas por dicha geometría y las cualidades  $f_k$  de los materiales dispuestos en esta.

Para aceptar la validez de tales supuestos —o lo que es lo mismo, que el uso de estos permite confiar en la validez de los resultados de la evaluación (habrá o no fallo estructural)— se prescriben para las acciones los valores superiores de entre los

observados o calculados, y para las capacidades resistentes de los materiales “valores admisibles” menores que los que provocan efectivamente su rotura.

De modo que las verificaciones adoptan formatos del tipo siguiente, que suponemos por ahora comunes en su aplicación  $\mathcal{P}_j$  por los  $j$  diferentes profesionales<sup>3</sup>:

$$R_i(\mathcal{E}, f_1, f_2, \dots, f_m) \geq E_i(\mathcal{E}, Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \quad i \in [1..k] \quad (7.46)$$

siendo  $k$  el número de condiciones de fallo evaluadas, que se supone acotan o comprenden todas las posibles para el problema considerado.

Dichas expresiones pueden escribirse igualmente en los formatos alternativos siguientes:

$$R_i(\mathcal{E}, f_1, f_2, \dots, f_m) - E_i(\mathcal{E}, Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \geq 0 \quad (7.47)$$

$$\frac{R_i(\mathcal{E}, f_1, f_2, \dots, f_m)}{E_i(\mathcal{E}, Q_1, Q_2, \dots, Q_n)} \geq 1; \quad (7.48)$$

La condición de fallo  $i$  quedaría por tanto caracterizada por expresiones como<sup>4</sup>

$$F_i = R_i - E_i < 0 \quad (7.49)$$

Desde este enfoque, pues, puede caracterizarse la condición de fallo como una hipersuperficie, una *superficie límite* en el espacio de los valores posibles para las variables del problema,

---

3. En caso contrario cada aplicación  $\mathcal{P}_j$  podría suponer un conjunto diferente de verificaciones  $R_{i,j} \geq E_{i,j}$ , tal vez incluso con variables no coincidentes.

4. tomando logaritmos en la última

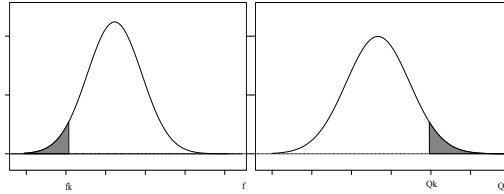


Figura 7.6: Selección de valores “sesgados” del lado de la seguridad para resistencias o acciones: los valores nominales “característicos”.

hipersuperficie que separa estas combinaciones de valores posibles en dos regiones, la región en la que, por cumplirse todas las desigualdades del sistema, puede asegurarse la inexistencia de fallo, y la región de fallo asegurado, regiones separadas por la superficie para la que se da alguna de las condiciones de fallo.

Cabe señalar que, si consideramos una evolución en los valores de las variables de un problema acercándose a la superficie de fallo, cruzándola, y alejándose de esta, podemos imaginar esta evolución como una función de distribución para la probabilidad de fallo muy particular: antes de llegar a la frontera la probabilidad de fallo es 0, y pasa a ser 1 tras cruzar la frontera. La figura 7.5 expresa con claridad la diferencia entre esta aproximación determinista y una aproximación probabilista en la que la variable  $F_i$  que señala el evento de fallo es aleatoria.

Podemos, por tanto, ver la necesidad de elegir valores sesgados del lado de la seguridad como valores nominales para las resistencias o las acciones (figura 7.6) pero esto solo no es sufi-

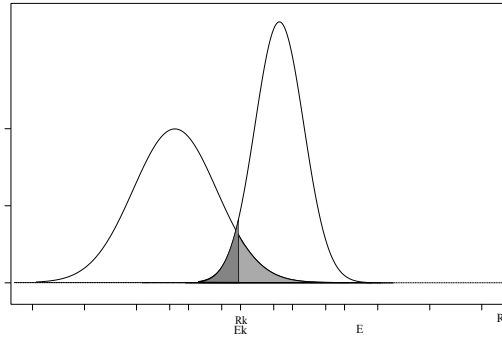


Figura 7.7: La comparación entre valores nominales o característicos es insegura.

ciente, dado que el sesgo no elimina la probabilidad de fallo en la comparación, figura 7.7, de modo que al sesgo nominal debe añadirse un aumento en las acciones y una reducción en las resistencias que permita reducir suficientemente la probabilidad de encontrar simultáneamente bajas resistencias con altas acciones que produzcan el indeseado fallo. Se trata del uso de valores de cálculo, procedentes de los nominales afectados de coeficientes que amplíen o reduzcan el efecto desfavorable o favorable considerado en el modelo de fallo pertinente, ver figura 7.8.

### 7.2.1.1. Modelo semiprobabilista de la seguridad

Desde una perspectiva probabilista el objetivo es establecer una suficientemente reducida probabilidad de fallo. La perspec-

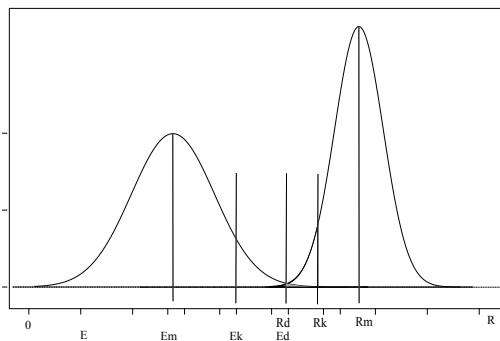


Figura 7.8: Coeficientes parciales de seguridad, y valores de cálculo para la comparación, en una aproximación semiprobabilista de la seguridad.

tiva semiprobabilista busca añadir a los modelos deterministas unos coeficientes de seguridad que resulten adecuados para asegurar esa misma reducida probabilidad de fallo.

Dicha probabilidad de fallo es, en abstracto, fácil de determinar: si frente a un determinado tipo de fallo  $i$  las funciones de probabilidad de los efectos de las acciones y de las capacidades resistentes frente a estos son conocidas, la probabilidad de fallo es

$$\Pr(R - E < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(x)F_R(x) dx \quad (7.50)$$

puesto que  $F_R(x) = \Pr(R < x)$  es la probabilidad de tener resistencias menores que  $x$ ; y siendo  $f(x)$  la función de densidad

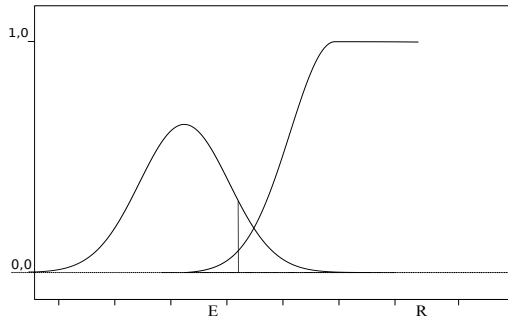


Figura 7.9: Cálculo de la probabilidad de fallo. Para cualquier valor  $x$ ,  $F_R(x)$  indica la probabilidad acumulada de resistencias menores y  $f_E(x)$  la densidad de probabilidad de efectos iguales a dicho valor  $x$

de probabilidad de tener efectos equivalentes a  $x$ , el producto  $f_E(x) dx = \Pr(x < E < x + dx)$  es la expresión de la probabilidad de efectos entre  $x$  y  $x + dx$ , iguales o mayores que  $x$ . De modo que el producto de ambas evalúa la probabilidad de fallo en el intervalo  $[x, x + dx]$ , y su integral la probabilidad de fallo total.

Dado que el objetivo es asegurar que esa probabilidad es suficientemente reducida, y admisible, se establece el fallo como un estado límite que no debe ser alcanzado con un grado de

probabilidad determinado.

$$\Pr(R - E < 0) \leq P_{\text{adm.}} \quad (7.51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_E(x)F_R(x) dx \leq P_{\text{adm.}} \quad (7.52)$$

Ahora bien, no es igual un fallo que produzca daños personales que otro que solo involucre daños materiales, de modo que esa probabilidad admisible dependerá del tipo de fallo o estado límite considerado. Se establecen por tanto categorías a dichos límites:

- Estado Límite Último
- Estado Límite de Servicio
- *Estado Límite Accidental...*

Y para cada uno de ellos se normalizan las probabilidades admisibles, mediante índices establecidos en paralelo a otras posibles consideraciones sobre seguridad o probabilidad de daño.

### 7.2.1.2. Tipos de fallo e índice de fiabilidad

Es evidente que las consecuencias de un fallo dependen del grado de daño que este pueda causar, de tal modo que cabe asignar *índices de fiabilidad* diferentes a la estructura en relación con los fallos, de acuerdo a que sus consecuencias sean más o menos graves. Estos índices no serían más que valores de referencia, ligados de alguna forma a medidas de la probabilidad de fallo asociada, con mayor fiabilidad (mayor índice) cuanto menor sea la probabilidad de fallo.

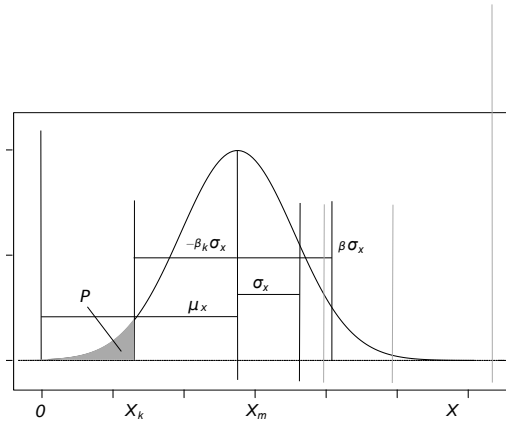


Figura 7.10: Función de la densidad de probabilidad de las resistencias, y valores o puntos significativos en esta: media  $\mu = \bar{X} = X_m$ , desviación típica  $\sigma$ , o desviación de índice  $\beta$  positiva o negativa  $\beta\sigma$ . Las áreas bajo la curva señalan la probabilidad  $P$  de encontrar resistencias en ese rango de valores de  $x$ . El valor característico  $X_k$  se establece usualmente para que los valores inseguros tengan una probabilidad de darse menor al 5% (correspondan al fractil 5%) o lo que es igual, alcancen el índice de fiabilidad  $\beta_k$  correspondiente a dicha probabilidad.

Dada la multiplicidad de distribuciones estadísticas vista antes, y al objeto de manejar de forma estable las referencias a las probabilidades de fallo, o los índices correspondientes a los puntos significativos de la distribución, las definiciones se establecen

sobre el modelo de la distribución normal, o gaussiana ya vista, y cuyos puntos o parámetros más significativos destacamos sobre la figura 7.10.

Media  $\mu$ , o Valor Esperado  $E(X)$ :

$$\bar{X} = \mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1..n} X_i \quad (7.53)$$

$$\mu_x = \int x f(x) dx \quad (7.54)$$

Varianza  $\sigma^2$  y desviación  $\sigma$ :

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1..n} (X_i - \bar{X})^2 \quad (7.55)$$

$$\sigma_x^2 = \int (x - \mu_x)^2 f(x) dx \quad (7.56)$$

(El divisor para la desviación estándar emplea la corrección de Bessel, considerando si la estimación se hace a partir de una muestra,  $1/(n-1)$ , o de la población completa,  $1/n$ )

Coefficiente de Variación  $V_X$ :

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (7.57)$$

La estandarización del lenguaje lleva al empleo de las definiciones siguientes, descritas en página 560 y ss.:

**Distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ :**

$$X \sim \mathcal{N}[\mu, \sigma^2]$$

$$F_X(x) = \Pr(X < x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right); \bar{X} = \mu_X = \mu, \sigma_X = \sigma \quad (7.58)$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución normal estándar

**Distribución normal estándar:**  $X \sim \mathcal{N}[0, 1]$ ,  $F_X(x) = \Phi(x)$ .

De este modo, el índice de fiabilidad  $\beta$  queda asociado a cierta probabilidad  $P = \Phi(-\beta)$ , tal como se representa gráficamente en la figura 7.10:

$$P = \Phi(-\beta) = \Pr(X < \mu_X - \beta\sigma_X) \quad (7.59)$$

### 7.2.1.3. ¿Que probabilidad de fallo se considera admisible?

La decisión resulta normativa, está contenida en los códigos, y se establece por comparación con otros tipos de riesgo.

Una tabla clásica en la literatura es la 7.1. Partiendo de referencias como esta, los códigos establecen los índices de fiabilidad  $\beta$  o las probabilidades de fallo aceptables dependiendo del período a considerar.

En el caso de la edificación esa estimación del riesgo y esa atribución de la probabilidad aceptable depende, tanto del tipo de uso al que se destina la construcción (y el grado de ocupación a lo largo de su vida), como del tiempo previsto de vida de esta,

Fumar 10 cigarrillos al día	1 en 200
Todas las causas naturales, 40 años de edad	1 en 850
Cualquier violencia o envenenamiento	1 en 3300
Gripe	1 en 5000
Accidente en la carretera (en Europa)	1 en 8000
Leucemia	1 en 12500
Terremoto, viviendo en Irán	1 en 23000
Deportes de equipo	1 en 25000
Accidente doméstico	1 en 26000
Accidente de trabajo	1 en 43500
Inundaciones, viviendo en Bangladesh	1 en 50000
Radiación, trabajadores industria nuclear	1 en 57000
Homicidio, en Europa	1 en 100000
Inundaciones, viviendo en el norte de China	1 en 100000
Accidente de ferrocarril (en Europa)	1 en 500000
Terremoto, viviendo en California	1 en 2000000
Muerte por rayo	1 en 10000000
Tormenta y vientos fuertes, norte de Europa	1 en 10000000

Tabla 7.1: Fenómeno considerado y probabilidad de mortalidad anual  $P_a$ . British Medical Association 1987, tabla 10.1

como del impacto en daños en personas o bienes correspondiente al tipo de fallo considerado.

Para considerar el tiempo previsto de vida de la edificación resulta útil una expresión clásica en estadística que relaciona la probabilidad anual  $P_a$  de un evento  $E$  (cuyo inverso se denomina, por definición, período de retorno,  $T_R$ ) con su probabilidad en un período de tiempo (de vida) dado  $T_v$ , suponiendo que la ocurrencia de cada caso de dicho tipo de evento es independiente:

$$T_R = \frac{1}{P_a} = \frac{T_v}{-\ln(1 - P_{E,T_v})} \quad (7.60)$$

En relación con el tipo y gravedad en los daños que cabe esperar para cada posible fallos se han establecido las clasificaciones de los posibles estados límite para un uso normal, distinguiendo entre los que pueden provocar colapsos y, por tanto afecta a la seguridad de las personas y de la propia edificación (estados límite últimos que es imperativo evitar) y los que sólo causan daños materiales que afectan a la funcionalidad, al confort, o al aspecto de la edificación (estados límite de servicio). Se consideran asimismo las implicaciones en los requisitos exigibles frente al fallo en posibles situaciones o escenarios de riesgo accidental, el incendio por ejemplo (a veces con la denominación de estados límite accidentales) por sus diferentes probabilidades respecto de las del uso habitual, y su dependencia de los correspondientes sistemas preventivos y de mitigación.

Finalmente se asignan requisitos de fiabilidad requeridos diferentes a los distintos tipos de construcción y el riesgo que entrañan por su forma de uso.

Clase	valores límite			
	1 año		50 años	
	$\beta$	Prob	$\beta$	Prob.
RC3	5,2	$10^{-7}$	4,3	$8,5 \cdot 10^{-6}$
RC2	4,7	$1,3 \cdot 10^{-6}$	3,8	$7,2 \cdot 10^{-5}$
RC1	4,2	$1,3 \cdot 10^{-5}$	3,3	$4,8 \cdot 10^{-4}$

Tabla 7.2: Clase de riesgo y fiabilidad, o probabilidad de fallo de referencia, requeridas para los estados límite últimos, de acuerdo a Tablas B.2 en Anejo B de EN-1990 y en Apéndice B del Anejo 18 del Código Estructural de 2021. Véase también el Apéndice C de este.

Todos estos requisitos se miden finalmente a través de los índices de fiabilidad, índices que cabe relacionar, a través de la distribución normal estándar, con probabilidades de fallo normalizadas para cada caso. Cabe señalar que la elección de esta distribución es meramente normativa: las distribuciones apropiadas al fenómeno de fallo pueden ser otras, en particular las de valores extremos, por lo que la probabilidad de fallo de referencia computada con la distribución normal puede no ser una buena medida de la probabilidad en el caso real.

En la normativa estructural se clasifican las construcciones en *clases* según su riesgo de daño:

RC1 bajo en vidas y coste

RC2 medio en vidas o coste

RC3 alto en vidas o coste

y se establecen para cada una de estas los índices de fiabilidad

requeridos. Un ejemplo para estados límite últimos es el de la tabla 7.2<sup>5</sup>.

Los modelos semiprobabilistas establecen los coeficientes parciales de seguridad de la normativa buscando que su efecto permita ajustar los resultados de las comprobaciones a los índices de fiabilidad prefijados, tal como se ilustra en la sección 7.2.1.2.

### 7.2.2. Modelos probabilistas de seguridad

Los modelos probabilistas abordan la determinación directa de la probabilidad de fallo, de tal modo que las comprobaciones, en las que se maneja el problema aleatorio completo, permitan asegurar que no se supera en el proyecto la probabilidad de fallo establecida por la normativa o, lo que es lo mismo, que la estructura cumple con la fiabilidad requerida.

Para ello se analiza el evento de fallo y su probabilidad, siendo el cómputo de la probabilidad de fallo, formalmente, sencillo,

---

5. Nótese que el valor para RC2 supone una relación entre el llamado período de retorno del fallo  $T_R = 1/P_a$  y el tiempo de vida del edificio  $T_V$  que se establece entre 14000 y 15000 para un período de servicio de 50 años, siendo 10 veces menor para el caso RC1 y 8 veces mayor para el RC3. Es habitual establecer la fiabilidad requerida para un período de un año y derivar de esta la necesaria para períodos diferentes. De modo que la fiabilidad referida a un año resulta ser un valor fijo por clase de riesgo. Un caso diferente es el de la tabla C2 del Anejo C de CTE-DB-SE, que establece la fiabilidad requerida según las consecuencias del fallo y el orden de coste requerido para reducir sus efectos, si bien la fija para todo el período de vida de la estructura, de modo que la fiabilidad requerida para el período de un año dependerá del tiempo de servicio previsto. El valor objetivo de  $T_R/T_V$  fijado en este caso para situaciones medias coincide con el establecido en EN1990 para RC2 a 50 años.

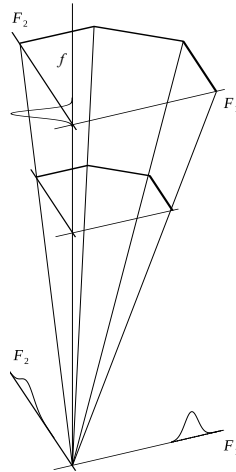


Figura 7.11: Fallo en el espacio de las variables aleatorias. Se representan tres de ellas,  $F_1$ ,  $F_2$ , y  $f$ , y sus funciones de densidad de distribución, así como el límite o frontera entre las condiciones sin o con fallo. La figura 7.2 expresaría esa frontera para valores definidos de dichas variables, aunque cabe interpretarla como una frontera “difusa” para las variables aleatorias, expresada sobre la mediana de estas, y considerando la interpretación que aporta la figura 7.5.

aunque complejo en la práctica. Pues basta integrar, para el espacio de los valores de las variables para el que se produce el fallo, el producto de las funciones de densidad de probabilidad

de dichas variables en cada punto de esa región del espacio por el elemento de “volumen” en dicho punto.

Por ejemplo, en el caso del pórtico de la figura 7.1, para el que la figura de límites de resistencia sería alguna de las de la 7.2, si consideramos las distribuciones para todos los posibles valores de las cargas límite  $F_1$  y  $F_2$ , y para las posibles resistencias del acero  $f$ , tal como se expresan en la figura 7.11, tendríamos como evento y probabilidad de fallo las expresiones

$$\begin{aligned} Z(f, F_1, F_2, \dots) &= R(f, \dots) - E(F_1, F_2, \dots) < 0 \\ \Pr(Z < 0) &< P_{\text{adm}}; \end{aligned} \quad (7.61)$$

donde el cómputo de la probabilidad sería

$$\Pr(Z < 0) = \iiint F_c(f, F_1, F_2) f(f) f(F_1) f(F_2) df dF_1 dF_2 \quad (7.62)$$

$$\begin{aligned} &= \iint f(F_1) f(F_2) dF_1 dF_2 \int F_c(f, F_1, F_2) f(f) df \\ &= \iint F_c(F_1, F_2) f(F_1) f(F_2) dF_1 dF_2 \end{aligned} \quad (7.63)$$

expresión en la que  $F_c \in [0, 1]$  indica la probabilidad de colapso para los valores de las variables de que depende en el punto considerado en el espacio al que se aplica, que es el contiene todos los valores posibles para cada variable (primera y segunda filas de la precedente lista de expresiones), o en su “proyección” (en la tercera fila) al plano en el que se condensa la distribución de resistencias  $f$  mediante la frontera “difusa” que se señala en la

figura 7.11. Préstese atención a que en las expresiones precedentes,  $f$  como argumento de una función es resistencia, pero como nombre de función es función de densidad de probabilidad, y  $F$  como argumento es carga, aunque como nombre de función es la función de distribución acumulada de la probabilidad de fallo. En esta representación,  $F_c$  tiene valores 0 o 1 en las dos filas en las que depende de las tres variables aleatorias considerada en el modelo ( $F_c(f, F_1, F_2)$ ) y tiene valores dentro del rango continuo entre 0 y 1 en la tercera fila, en la que ya solo depende de los valores de las cargas ( $F_c(F_1, F_2) = \int F_c(f, F_1, F_2) f(f) df$ ), al haberse evaluado la probabilidad de fallo condicionada a dichos valores concretos de  $F_1$  y  $F_2$  y derivada de la incertidumbre en la resistencia  $f$ .

La lógica de la expresión no oculta la dificultad de su obtención práctica, para la que a menudo suele recurrirse a métodos indirectos, como puede ser el de Monte Carlo.

### 7.3. Métodos para determinar la fiabilidad

Por lo visto hasta aquí, el índice de fiabilidad  $\beta$  aporta una importante información, al menos cualitativa, sobre la probabilidad de fallo, información que es también cuantitativa si la distribución pertinente es la normal. De modo que la determinación de ese índice resulta clave.

Supondremos en lo sucesivo que disponemos de modelos para caracterizar el fallo estructural (deterministas), que somos capa-

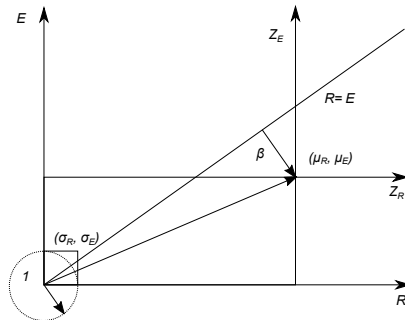


Figura 7.12: Fiabilidad en el espacio de las variables normalizadas: Interpretación geométrica del índice de fiabilidad

ces de establecer el período de vida de la estructura y que, para ese período, somos capaces de establecer las variables aleatorias relevantes y sus distribuciones. En esas condiciones buscamos determinar el índice de fiabilidad y su sensibilidad, es decir los tipos y magnitudes posibles de error en su estimación.

### 7.3.1. El problema básico de fiabilidad y su generalización

Vamos a describir la estrategia más sencilla de estimación de la fiabilidad, habitualmente referenciada como First Order Reliability Method (FORM).

Consideramos un problemas con solo dos variables  $E$  y  $R$ , efectos de las acciones y resistencia frente a estos. Suponemos

distribuciones normales en ambas, de parámetros  $\mu_E, \sigma_E$  y  $\mu_R, \sigma_R$  respectivamente. La condición de fallo se expresará como

$$F = R - E < 0 \quad (7.64)$$

donde la distribución  $F$  es también normal, de parámetros

$$\mu_F = \mu_R - \mu_E \quad (7.65)$$

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_R^2 - 2\rho_{ER}\sigma_E\sigma_R} \quad (7.66)$$

en la que  $\rho_{ER}$  sería la correlación entre los efectos de las cargas y las capacidades resistentes. Si consideramos que no están correlacionadas<sup>6</sup>,  $\rho_{ER} = 0$  y por tanto  $\sigma_F = \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_R^2}$ .

Recordando las expresiones 7.58 y 7.59

$$\begin{aligned} \Pr(F < x) &= \Phi\left(\frac{x - \mu_F}{\sigma_F}\right) \\ \Phi(-\beta) = \Pr(F < 0) &= \Phi\left(-\frac{\mu_F}{\sigma_F}\right). \end{aligned} \quad (7.67)$$

con

$$\beta = \frac{\mu_F}{\sigma_F} = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \quad (7.68)$$

---

6. Debe llamarse la atención al hecho de que en ese caso podemos estar ignorando situaciones en las que haya correlación negativa:  $\rho_{ER} = -1$ . Tendríamos en ese caso que  $\sigma_F^2 = (\sigma_E + \sigma_R)^2$ . Piénsese, por ejemplo, en situaciones de bajo o muy bajo control en las que cabe asociar condiciones de superación de las cargas habituales con bajas en las resistencias de la construcción ejecutada.

Consideramos ahora normalizadas las variables  $E$  y  $R$  a sus transformadas  $Z_E$  y  $Z_R$ , de distribución normal estándar, y donde la transformación implica para ambas un traslado y un cambio de escala.

$$Z_E = \frac{E - \mu_E}{\sigma_E}; Z_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (7.69)$$

Podemos representar el límite entre regiones de no fallo y fallo en la gráfica  $Z_R, Z_E$  (ver figura 7.12) en las que los valores originalmente  $X$  ( $R, \mu_R, \dots$ ) en el eje de abscisas y los  $Y$  ( $E, \mu_E, \dots$ ) en el de ordenadas, están a escalas  $X/\sigma_R, Y/\sigma_E$ . El vector desde el origen inicial  $(R, E) = (0, 0)_o$  al trasladado o normalizado  $(Z_R, Z_E) = (0, 0)_n$  es, en la escala del normalizado

$$\boldsymbol{\mu} = \left( \frac{\mu_R}{\sigma_R}, \frac{\mu_E}{\sigma_E} \right) \quad (7.70)$$

y a su vez, los puntos de corte de la recta límite  $R = E$  sobre los ejes de abscisas  $Z_E = 0$  y ordenadas  $Z_R = 0$  pueden determinarse a partir de 7.69, siendo respectivamente

$$\left( -\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_R}, 0 \right); \left( 0, \frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_E} \right). \quad (7.71)$$

De este modo la dirección de la recta límite queda determinada y el vector unitario (versor) perpendicular a esta es

$$\left( \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}, -\frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \right) \quad (7.72)$$

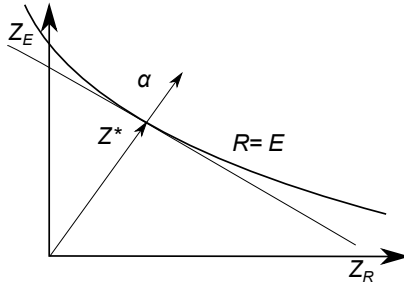


Figura 7.13: Índice de Hashofer-Lind: fiabilidad en el espacio de las variables normalizadas como distancia del origen al “punto de proyecto”

Si proyectamos el vector  $\mu$  de 7.70 sobre dicha normal a la recta límite obtenemos

$$\frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \beta \quad (7.73)$$

donde la identificación con  $\beta$  proviene de la expresión ya vista, 7.68.

Por lo que el índice de fiabilidad puede interpretarse como la distancia  $\beta$  hasta el punto de la media de la variable que expresa la condición de fallo ( $[Z_R, Z_E] = [0, 0]$ ) desde la posición más cercana de dicha condición de fallo (punto de “proyecto”) en el espacio de las *variables normalizadas*.

Considerando ahora la figura en el espacio las variables normalizadas (figura 7.13), esa misma distancia puede computarse desde el origen al punto de proyecto,  $Z^*$ , el más cercano de los

que expresan cualquiera de las condiciones de fallo. El índice es válido para condiciones cualesquiera, tanto si son lineales como si no, y para espacios de mayor número de dimensiones:

$$\beta = |\mathbf{Z}^*| = \min_{\mathbf{Z} \in \text{Fallo}} \sqrt{\sum_i^n Z_i^2} = \min_{\mathbf{Z} \in \text{Fallo}} \sqrt{\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z}} \quad (7.74)$$

La expresión 7.68 resulta, pues, de gran utilidad para estimar la fiabilidad.

### Sensibilidad

Es interesante ahora considerar la sensibilidad de dicho índice a las alteraciones en alguna de las variables  $Z_i$ , mediante las correspondientes derivadas parciales:

$$\alpha_i = \frac{\partial \beta}{\partial Z_i} \quad (7.75)$$

El signo de  $\alpha_i$  indica si  $Z_i$  es “acción” o “resistencia”, pues cambios del mismo signo entre  $Z_i$  y  $\beta$  ( $\alpha_i$  positivo) implican crecimiento en la fiabilidad con el aumento del valor de la variable, y por tanto señalan variables que actúan como resistencias, frente al caso contrario en el que el aumento de la variable reduce la fiabilidad, señalando acciones.

#### 7.3.2. Coeficientes parciales de seguridad

El empleo de coeficientes de seguridad tiene un amplio historial, desde la inicial estrategia de aplicarlos solo a las resistencias, a través de las tensiones admisibles, pasando por las más

refinadas iniciadas por ingenieros como Rankine o Maillart de diferenciar por tipo de origen (cargas y tipos en estas o resistencias) a su estrategia contemporánea probabilística basada en coeficientes parciales (Pugsley), ver Cervera Bravo [2022](#), de tal forma que en los códigos vigentes se mantienen, como vías en paralelo para su definición, sea la de su experiencia a lo largo de décadas de empleo, sea la de procedimientos estadísticos como los aquí descritos.

Abordamos ahora la manera contemporánea de asegurar la fiabilidad para eventos aleatorios. El procedimiento exige la fijación y calibración de coeficientes parciales de seguridad de modo que comprobaciones de fallo de formato deterministas, en la forma [7.5](#), y usando valores de cálculo  $E_d = \gamma_E E$ ,  $R_d = R/\gamma_R$  obtenidos a partir de valores nominales sesgados para las variables básicas (sus valores característicos), y con el sesgo incrementado en el sentido de la seguridad por el correspondiente coeficiente parcial, aseguren la fiabilidad o la probabilidad de fallo admisible fijada a priori.

En Cervera [2019](#) se analizan dos vías, dependientes del tipo de distribución considerada, de las que resumimos aquí, por sencillez, la segunda, siguiendo a Văcăreanu, Aldea y Lungu [2007](#), aplicable a distribuciones lognormales que evitan la existencia de valores negativos en las variables de interés (¿resistencias negativas?).

### 7.3.2.1. Modelos para las acciones y las resistencias

La definición de las acciones como variables aleatorias es todo un mundo, véanse apartados 4.4 y 4.5 en Cervera [2019](#), pero

cabe simplificarlas agrupando sus efectos  $E$  en distribuciones de tipo lognormal, de parámetros  $\mu_E$  y  $V_E = \sigma_E/\mu_E$  con valores para este último coeficiente de variación de

- $\approx 0,10$  para cargas permanentes
- $\approx 0,30$  para (los máximos de) cargas variables

Y usando como valores nominales los característicos, definidos como aquellos con probabilidad del 95% de **no** ser superados. Hay que señalar que con esta definición no se refleja la variabilidad temporal de las cargas, aun siendo estas variables con el tiempo. Cabe entender que las definiciones adoptadas por las normas se refieran al período de vida de 50 años que es el de referencia habitual para las estructuras estándar.

La resistencias tienen menor variabilidad, pudiendo condensarse de forma aproximada sus efectos en la capacidad resistente  $R$  en distribuciones de tipo lognormal de parámetros  $\mu_R$  y  $V_R = \sigma_R/\mu_R$ , con este último coeficiente de variación de valores

- $< 0,10$  para hormigones
- $< 0,05$  para aceros

Ahora se usan como valores nominales los característicos, es decir aquellos con probabilidad del 5% de **no** ser superados, y nuevamente no se consideran aquí los efectos de degradación temporal, cabiendo referirse a ese mismo período estándar de 50 años.

Puede observarse el diferente sesgo en los valores nominales para las acciones o las resistencias aunque en ambos casos se trata de dejar fuera solo el 5% de los valores más inseguros.

### 7.3.2.2. Condición de fallo

Consideramos la siguiente variable para medir la condición de fallo y evaluar su probabilidad:

$$Z = \ln \frac{R}{E} \quad (7.76)$$

con valor nulo en caso de alcanzarse el límite de colapso, negativo para situaciones que suponen colapso, y positivo para situaciones en las que este no se produce. La media y el coeficiente de variación de  $Z$  son

$$\mu_Z = \mu_{\log \frac{R}{E}} \approx \log \frac{\mu_R}{\mu_E} \quad (7.77)$$

$$\sigma_Z = \sigma_{\log \frac{R}{E}} \approx V_{\frac{R}{E}} = \sqrt{V_R^2 + V_E^2} \quad (7.78)$$

donde se usan aproximaciones suficientemente válidas en casos de variabilidad reducida (ver Cervera 2019 apartado 2.3.2).

La probabilidad de fallo, y la fiabilidad correspondiente, serán, de acuerdo a 7.67:

$$\Pr(Z < 0) = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta)$$

$$\beta = \frac{\log \frac{\mu_R}{\mu_E}}{\sqrt{V_R^2 + V_E^2}} \approx \frac{\log \frac{\mu_R}{\mu_E}}{\alpha_R V_R + \alpha_E V_E} \quad (7.79)$$

donde los valores de  $\alpha_R$  y  $\alpha_E$  usados en la aproximación pueden interpretarse como los cosenos de los ángulos de la proyección de los lados  $V_R$  o  $V_E$  de un rectángulo sobre su diagonal  $\sqrt{V_R^2 + V_E^2}$ ,

valores que cabe aproximar. Puede, pues, escribirse

$$\frac{\mu_R}{\mu_E} = e^{\beta(\alpha_R V_R + \alpha_E V_E)} = e^{\beta \alpha_R V_R} e^{\beta \alpha_E V_E}$$

$$\frac{\mu_R}{e^{\beta \alpha_R V_R}} = \mu_E e^{\beta \alpha_E V_E} \quad (7.80)$$

La última expresión puede interpretarse como que, dada una cierta fiabilidad  $\beta$ , cabe comparar los valores medios de los efectos de resistencias y acciones reduciendo los primeros y aumentando los segundos con coeficientes dependientes, tanto de la fiabilidad considerada, como de los coeficientes de variación de las correspondientes distribuciones.

Como los valores nominales no son los valores medios, sino los característicos, sesgados a la probabilidad de valores inseguros de solo el 5%, cabe reescribir la expresión 7.80:

$$\frac{R_k}{\gamma_R} = E_k \gamma_E;$$

donde  $R_k = \mu_R e^{-\beta_{k,R} V_R}$ ;  $E_k = \mu_E e^{\beta_{k,E} V_E}$  (7.81)

donde  $\beta_{k,R}$ ,  $\beta_{k,E}$  son las fiabilidades asociadas a dejar fuera solo ese 5% de valores inseguros (el factor con que debe desplazarse la desviación estandar respecto de la media para ello), y de donde cabe deducir, finalmente como coeficientes necesarios para alcanzar la fiabilidad objetivo  $\beta$  los siguientes:

$$\gamma_R = e^{(\alpha_R \beta - \beta_{k,R}) V_R}; \quad \gamma_E = e^{(\alpha_E \beta - \beta_{k,E}) V_E} \quad (7.82)$$

## 7.4. Ejemplo: Fiabilidad de pórtico

Abordamos ahora la determinación de la fiabilidad para un caso práctico: el pórtico de la figura 7.1, para el que hemos visto el espacio de comprobación de la condición de fallo en la figura 7.11, correspondiente a las condiciones de límite determinista de la figura 7.2.

Consideramos las condiciones de fallo descritas en las expresiones 7.2, siendo las variables aleatorias  $M_i = W_i f_{y,i}$ , con  $i \in [1 \dots 5]$ ,  $F_j$ ,  $j \in [1, 2]$ ,  $h$  y  $l$ .

La probabilidad de fallo descrita en 7.61 se determinaría de modo directo mediante las expresiones 7.62 o 7.63, pero aquí lo haremos por vía indirecta determinando el índice de fiabilidad correspondiente a las distribuciones de las variables del problema.

### 7.4.1. Variables básicas

Consideramos en lo que sigue que las dimensiones del pórtico son variables deterministas, con  $h = 4\text{m.}$ ,  $l = 8\text{m.}$

Consideramos igualmente que las condiciones de proyecto proponen para la Viga y el pilar perfiles IPE 330 y HEB 180 respectivamente, ambos de acero S275.

Como variables aleatorias establecemos inicialmente la tabla siguiente, en la que hemos señalado en **negrita**, como valores de referencia, los valores nominales, sean los medios  $\bar{X}$  o los característicos  $X_k$  de cada variable  $X$ , de acuerdo a los criterios habituales y a los códigos o a las tablas de propiedades geométricas de los perfiles, de las que se recogen los módulos plásticos,

y asimismo sus coeficientes de variación  $V_x$ , de acuerdo a tablas como las recogidas en Cervera 2019, junto con los coeficientes de seguridad  $\gamma_X$  habituales para estas variables, en el caso de  $F_2$  considerando que contiene parte de carga permanente y parte variable.

A partir de estos se han determinado el resto de parámetros, así como correspondientes valores de cálculo  $X_d$ . Nótese la diferencia, en el caso de las cargas, entre los valores nominales (característicos) y los valores medios.

En el caso de las cualidades geométricas de los perfiles hay una inconsistencia usual: se manejan los valores medios, pero la variabilidad en estos implicaría considerar valores característicos menores que los medios y, aun con coeficientes de seguridad unidad, implicarían valores de cálculo menores a dicha media. Y sin embargo se usan habitualmente en el cálculo dichos valores medios, razón por la que estos valores se señalan en color.

$X$	$\bar{X}$	$V_X$	$\sigma_X$	$X_k$	$\gamma_X$	$X_d$
$F_1$ kN	24,1	<b>0,45</b>	10,9	<b>42</b>	1,5	63
$F_2$ kN	76,2	<b>0,35</b>	26,7	<b>120</b>	1,4	168
$W_{1:4}$ cm <sup>3</sup>	<b>481,4</b>	<b>0,09</b>	43,3	419,3	1,0	<b>481,4</b>
$W_5$ cm <sup>3</sup>	<b>804,3</b>	<b>0,05</b>	40,2	743,2	1,0	<b>804,3</b>
$f_{1:5}$ MPA	310,8	<b>0,07</b>	21,8	<b>275</b>	1,05	261,9

En la tabla siguiente se señalan en rojo los valores característico y medio que corresponderían a los valores de cálculo de los módulos plásticos empleados. Finalmente las dos últimas columnas detallan los valores que se emplean definitivamente para

caracterizar las variables de cálculo pertinentes, con sus medias y varianzas adecuadas a las correspondientes distribuciones.

$X$	$X_k$	$\bar{X}$	$\bar{X}$	$\sigma_x^2$
$F_1$ kN			24,1	118,8 k <sup>2</sup> N <sup>2</sup>
$F_2$ kN			76,2	712,9 k <sup>2</sup> N <sup>2</sup>
$W_{1:4}$ cm <sup>3</sup>	481,4	565,1	481,4	1874,9 cm <sup>6</sup>
$W_5$ cm <sup>3</sup>	804,3	876,4	804,3	1616,0 cm <sup>6</sup>
$f_{1:5}$ MPA			310,8	475,2 MPA <sup>2</sup>

En el caso de las variables asociadas a las resistencias del pórtico,  $[W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, f_{y,1}, f_{y,2}, f_{y,3}, f_{y,4}, f_{y,5}]$ , estamos considerando que se trata de variables independientes, pero realmente no lo son completamente. Se trata de variables que están correlacionadas, pues las procedencias de los perfiles son probablemente de fabricantes comunes, de tal modo que si hay un alza o baja de calidad en alguno de ellos lo habrá probablemente en los otros, etc. La correlación es más alta entre perfiles semejantes y más aún entre los extremos del mismo perfil, aun cuando puedan considerarse ambos extremos con cualidades aleatorias diferentes al depender su resistencia de la ejecución diferenciada de ambos nudos.

Con todas estas consideraciones se plantea la matriz de correlaciones siguientes entre las variables, tal como se han orde-

nado en el párrafo anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,7 & 0,75 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 1 & 0,6 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,6 & 1 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,75 & 0,7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,95 & 0,85 & 0,75 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,95 & 1 & 0,75 & 0,85 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,85 & 0,75 & 1 & 0,95 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0,85 & 0,95 & 1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,7 & 0,7 & 0,7 & 1 \end{bmatrix}$$

### 7.4.2. Variables derivadas

Consideramos ahora las variables correspondientes a las capacidades resistentes,  $M_i = W_i f_i$ .

Consideramos distribuciones normales de variables  $X$  e  $Y$ , de parámetros conocidos, y buscamos los parámetros de la distribución de variables derivadas de estas,  $Z = Z(X, Y)$ .

De acuerdo a lo considerado en la sección 7.1.1.5 para la combinación de dos variables  $X, Y$  de distribuciones

$$\begin{aligned} X &\sim \mathcal{N}(\bar{X}, \sigma_X^2); \\ Y &\sim \mathcal{N}(\bar{Y}, \sigma_Y^2); \end{aligned}$$

tendremos las distribuciones siguientes para sus combinaciones:

**Suma de dos variables**

$$\begin{aligned}
 Z &= X + Y \\
 \bar{Z} &= \bar{X} + \bar{Y} \\
 \sigma_Z^2 &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y = \sum \Sigma_{XY} = \sum \text{cov}(X, Y).
 \end{aligned}$$

**Producto de dos variables**

$$\begin{aligned}
 Z &= X \cdot Y \\
 \bar{Z} &= \bar{X} \cdot \bar{Y} + \sigma_{XY} = \bar{X} \cdot \bar{Y} + \text{cov}(X, Y) \\
 \sigma_Z^2 &= (\bar{X}^2 + \sigma_X^2)(\bar{Y}^2 + \sigma_Y^2) + \text{cov}(X^2, Y^2) - \bar{Z}^2
 \end{aligned}$$

De modo que, considerando la matriz de correlación precedente tenemos como estadísticos para las resistencias ( $M_1 \dots M_5$ ) las distribuciones siguientes, y su matriz de correlación

**Distribuciones de  $M_1 \dots M_5$  :**

$$\begin{array}{l|ll}
 R : & M_1..M_4 & M_5 \\
 \bar{R} & 175,61 & 272,37 \\
 \sigma_R & 20,05 & 23,45
 \end{array}$$

**Correlaciones entre  $M_1 \dots M_5$  :**

1,000	0,794	0,787	0,656	0,349
0,794	1,000	0,656	0,787	0,349
0,787	0,656	1,000	0,794	0,349
0,656	0,787	0,794	1,000	0,349
0,349	0,349	0,349	0,349	1,000

Para el cómputo de esta última matriz se ha evaluado para cada pareja  $M_i, M_j$ , donde  $M_i = W_i f_i$ , la covarianza y su correspondiente correlación tal como sigue.

Las variables derivan de sendos productos:  $Z_i = X_i Y_i$ ,  $Z_j = X_j Y_j$ , cuyas medias  $\bar{Z}_i, \bar{Z}_j$  y varianzas  $\sigma_{Z_i}^2, \sigma_{Z_j}^2$  se determinan con las expresiones precedentes.

La covarianza es el valor esperado del producto entre las diferencias de los valores de cada pareja de medidas con sus respectivas medias. En el cómputo siguiente  $X$  será la geometría  $W$ , e  $Y$  la resistencia  $f$ , variables no correlacionadas.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{Z_i Z_j} &= \text{cov}(Z_i, Z_j) = E[(Z_i - \bar{Z}_i)(Z_j - \bar{Z}_j)] \\
 &= E[Z_i Z_j] - \bar{Z}_i \bar{Z}_j = E[(X_i Y_i X_j Y_j)] - \bar{X}_i \bar{Y}_i \bar{X}_j \bar{Y}_j \\
 &= E[(X_i X_j)(Y_i Y_j)] - \bar{X}_i \bar{X}_j \bar{Y}_i \bar{Y}_j = \sigma_{(X_i X_j)(Y_i Y_j)} \\
 &= E(X_i X_j) E(Y_i Y_j) - \bar{X}_i \bar{X}_j \bar{Y}_i \bar{Y}_j \\
 &= (\bar{X}_i \bar{X}_j + \text{cov}(X_i, X_j)) + (\bar{Y}_i \bar{Y}_j \text{cov}(Y_i, Y_j)) - \bar{X}_i \bar{X}_j \bar{Y}_i \bar{Y}_j \\
 &= \text{cov}(X_i, X_j) \bar{Y}_i \bar{Y}_j + \bar{X}_i \bar{X}_j \text{cov}(Y_i, Y_j) + \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{cov}(X_i, X_j) \text{cov}(Y_i, Y_j)
 \end{aligned} \tag{7.83}$$

Las correlaciones pueden determinarse a partir de estas.

$$\rho_{Z_i Z_j} = \frac{\sigma_{Z_i Z_j}}{\sigma_{Z_i} \sigma_{Z_j}} \tag{7.84}$$

### 7.4.3. Probabilidad de fallo

Considerando todo lo anterior, podemos ahora determinar los estadísticos para las tres condiciones de fallo planteadas en

7.2:

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
$\bar{Z}$	605,91	846,03	591,34
$\sigma_Z$	84,23	133,39	165,47
$\beta_Z$	7,19	6,34	3,57
$P(Z < 0)$	3,15 E-13	1,13 E-10	1,76 E-4

El cálculo muestra que la condición de fallo más probable es la 3, la rotura de tablero, tanto por la mayor cercanía al cero en la media de la diferencia entre capacidad resistente y efecto de las cargas, como por la mayor varianza en esa diferencia. Frente a ese modo de fallo la estructura tiene una fiabilidad de 3,57, fiabilidad que resulta ser algo menor que la establecida por normativa para los edificios de clase de riesgo RC2 a 50 años, y corresponde a una probabilidad de fallo levemente mayor que el doble de la de referencia para esa clase y período, pero que cumpliría sobradamente la exigible para clase RC1 a 50 años, o que podría resultar válida para un cociente entre el período de retorno del fallo y el plazo de vida de la edificación de 5680 veces frente al valor aproximado de entre 14000 y 15000 exigido a la clase de riesgo RC2. Véase la nota asociada a la tabla 7.2.

Un cálculo determinista con los coeficientes de seguridad adoptados arriba emplearía la comprobación  $Z_3 = R - E = M_2 + 2M_5 + M_4 - F_2l/2$ , para la que los valores de cálculo (los característicos afectados de los coeficientes parciales) aportarían para  $R$  y para  $E$  los valores respectivos de 673 y 672 mkN, que suponen la validez del proyecto.

## 7.5. Conclusiones

Aunque el capítulo aporta una visión cuyos detalles no son, en general, necesarios para el proyecto de estructuras fiables, pueden, sin embargo, extraerse un conjunto de conclusiones que sí lo son, y que se resumen a continuación.

### 7.5.1. Sobre la variabilidad, probabilidad y consecuencias del fallo

- Las magnitudes que se manejan en el cálculo estructural presentan variabilidad espacial y en su caso temporal, por lo que, para proyecto, solo se cuenta con una descripción estadística de su valor o su máximo probable.
- No es por tanto posible la seguridad absoluta, deben admitirse probabilidades de fallo muy bajas (que están establecidas en los códigos)
- Con la adecuada descripción estadística de dichas magnitudes es posible y admisible, pero complejo, comprobar las estructuras por procedimientos estadísticos que permitan asegurar que no se superan dichas probabilidades de fallo.
- La probabilidad de fallo aceptada depende de las consecuencias asociadas al tipo de fallo: de ahí la clasificación de los Estados Límite en:
  - Estados Límite Últimos (ELU)
  - Estados Límite de Servicio (ELS) (reversibles o irreversibles)

- Otros (estados límite accidentales, o asociados a grados de daño, etc...)

### 7.5.2. Sobre el sesgo en los valores nominales y coeficientes parciales

- Para reducir la posibilidad de fallo al combinar los valores probables de estas magnitudes, para cada variable se adoptan valores sesgados del lado adecuado en relación con el fallo: acciones o resistencias. Estos valores (*característicos*) son habitualmente los que solo dejan fuera el 5 % de los casos.
- Además de ello, para controlar la probabilidad de fallo y acotarla al valor deseado, de cada variable se modifican del lado adecuado esos valores por un coeficiente adicional de seguridad, en función de la dispersión de la distribución estadística: son los coeficientes parciales de seguridad y los correspondientes valores para comprobación, los valores *de cálculo*.
- La cualidad de la variable en la comprobación considerada (por su efecto en pro o en contra del fallo) es el factor que define el carácter amplificador o reductor del coeficiente parcial de seguridad adoptado.
- Los Códigos *calibran* dichos coeficientes parciales a la probabilidad de fallo deseada considerando simultáneamente las incertidumbres asociadas a:
  - Los modelos estadísticos aceptados para las variables de acción y de capacidad resistente (y por tanto las especi-

caciones para aceptación o rechazo de los correspondientes productos)

- El modelo profesional: los modelos de representación del comportamiento y las expresiones de comprobación de fallo establecidos o admitidos en el propio código.
- ... por ello no resulta sensato la mezcla de criterios de códigos diferentes.

### **7.5.3. Sobre los coeficientes de simultaneidad y otra terminología derivada de los métodos semiprobabilistas**

- Si se consideran simultáneamente varias acciones independientes, como los registros temporales no están sincronizados, el máximo de una no sucede cuando acaece el de la otra, por lo que el máximo probable de la suma es menor que la suma de los máximos probables, y de ahí que se puedan introducir coeficientes de reducción.
- Si un elemento debe soportar acciones en varios puntos que no tienen sincronización espacial, sucede lo mismo, y el efecto de la suma de varias no es la suma de los efectos de cada una, por lo que se pueden introducir coeficientes de reducción.
- Si varios elementos o puntos colaboran para resistir conjuntamente el efecto de una misma causa, se puede asimismo adoptar un valor de resistencia que se aproxime más al valor medio.

De todo ello se derivan, pues, términos como los de las agrupaciones siguientes

- valor medio y característico,
- efecto *favorable* o *desfavorable*,
- coeficientes parciales, mayoración, minoración, valor de cálculo,
- simultaneidad, reducción por superficie, número de alturas o tipo de uso, carga compartida, etc.

# Apéndice A

## Planos de estados límite de resistencia

### A.1. Plano por tres puntos

La ecuación genérica del plano es  $a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0$ , que también puede escribirse como  $xa_0 + yb_0 + zc_0 = 1$ , donde  $a_0 = a_1/d_1 \dots$  de modo que pueden establecerse las condiciones

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ \frac{1}{\Delta} &\begin{bmatrix} y_1 z_2 + y_2 z_3 + y_3 z_1 - y_1 z_3 - y_2 z_1 - y_3 z_2 \\ z_3 x_1 + z_1 x_2 + z_2 x_3 - z_3 x_2 - z_1 x_3 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_1 - x_3 y_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

$$\Delta = x_1 y_2 z_2 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_1 y_3 z_2 - y_1 z_3 x_2 - z_1 x_3 y_2;$$

que puede también expresarse en el formato canónico

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}; d = \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2}}, \quad (\text{A.3})$$

formato en el que  $\mathbf{g} = [a \ b \ c]^T$  es el versor del plano, de módulo unidad, y donde para un punto cualquiera  $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$ , la sustitución  $\mathbf{g}^T \mathbf{p} - d = ax + by + cz - d = d_p$  mide la distancia del punto al plano, positiva: desde el *exterior*, o negativa: desde el *interior*. Esto es así dado que  $d$  es la distancia desde el origen al plano medida en la dirección de  $\mathbf{g}$  y el producto escalar  $\mathbf{g}^T \mathbf{p}$  la proyección del vector de posición  $\mathbf{p}$  sobre dicha dirección.

Conocida la expresión del plano límite cabe determinar la existencia o no de colapso para un estado de esfuerzos dado, o caracterizar el grado de seguridad en relación con la condición de rotura descrita por este.

## A.2. Casos de diferentes criterios de seguridad

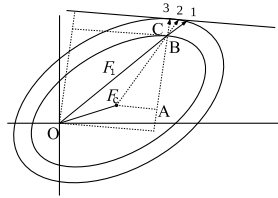


Figura A.1: Límites y coeficientes de seguridad

### A.2.1. Coeficiente clásico de seguridad

Como puede observarse en la figura A.1 la determinación del coeficiente de seguridad para un estado de esfuerzos dados por las coordenadas de un punto como el B es sencilla, de acuerdo al teorema de Tales, si consideramos la elipse externa como límite(s) de resistencia, y la interna como la que define las situaciones representativas de condiciones de esfuerzo suficientemente alejadas de dichos límites.

$$\gamma = \frac{d}{an + bm_y + cm_z} = \frac{|[OB] + [B1]|}{|[OB]|} \geq \gamma_{\text{ref}} \text{ con}$$

$$an = \frac{N_k}{A f_{yd}}, \quad bm_y = \frac{M_{yk}}{W_{ply} f_{yd}}, \quad cm_z = \frac{M_{zk}}{W_{plz} f_{yd}}, \quad d = 1 \quad (\text{A.4})$$

donde se ha usado la comprobación para la superposición lineal de tensiones del modelo elástico.

La situación es segura si el coeficiente resultante supera al de referencia para el problema en cuestión, en este caso el de la sección sometida a flexocompresión esviada. Podemos también considerar su formato inverso:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{an + bm_y + cm_z}{d} \leq \frac{1}{\gamma_{\text{ref}}} \quad (\text{A.5})$$

Pero en cualquier caso es evidente que en los caso en que el origen  $O$  no está centrado en relación con la superficie límite de resistencia, el cociente  $\gamma/\gamma_{\text{ref}}$  puede no ser representativo de la seguridad en situaciones de esfuerzo cercanos a las del origen (o situación de esfuerzo nulo), lo que nos lleva a considerar el nuevo coeficiente.

### A.2.2. Coeficiente robusto de seguridad

En este caso se trata de considerar igualmente seguros todos los casos de alejamiento semejante a las condiciones de rotura, casos dados por una contracción —centrada— de la superficie límite, en torno al punto  $F_c$  que representa el estado de esfuerzos más alejado de cualquiera de las condiciones de rotura imaginables, en la misma figura A.1. Ahora tendremos

$$\gamma = \frac{d - d_c}{an + bm_y + cm_z - d_c} = \frac{|[AB] + [B3]|}{|[AB]|} = \frac{|[F_cB] + [B2]|}{|[F_cB]|}$$

$$\gamma \geq \gamma_{\text{ref}}; \quad d_c = an_c + bm_{yc} + cm_{zc} \quad (\text{A.6})$$

donde ahora  $d_c$  es la distancia del punto *central* dado por  $F_c$  al origen  $O$  medida en la proyección ortogonal al plano límite, con  $an_c = N_c/Af_{yd}$ ,  $bm_{yc} = M_{yc}/W_{ply}f_{yd}$ ,  $bm_{zc} = M_{zc}/W_{plz}f_{yd}$ .

De modo que cabe expresar la condición a comprobar de alguna de estas otras formas, que nos llevan en cualquier caso al formato típico de las ecuaciones de resistencia en análisis límite:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{ref}}(an + bm_y + cm_z) &\leq d + (\gamma_{\text{ref}} - 1)d_c \\ an + bm_y + cm_z &\leq \frac{d}{\gamma_{\text{ref}}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_{\text{ref}}}\right) d_c \\ \boldsymbol{\psi f} &\leq \mathbf{dr} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Cabe comparar la versión siguiente con la A.5 para verificar la diferencia entre ambos criterios (aunque la expresión no es particularmente intuitiva)

$$\frac{an + bm_y + cm_z}{d} \leq \frac{1}{\gamma_{\text{ref}}} + \left(1 - \frac{1}{\gamma_{\text{ref}}}\right) \frac{d_c}{d} \quad (\text{A.8})$$



# Apéndice B

## Rigidez equivalente en hormigón armado

### B.1. Introducción y advertencia

Este apéndice recoge la información aportada como hoja informativa nº 6 en las clases de Proyecto de Estructuras en la ETSAM para la estimación de las flechas en hormigón armado. Aunque las primeras versiones de este apéndice datan de la primera década de los 2000, esta versión incorpora alguna revisión menor posterior y, aunque sería útil actualizarla a fin de adaptarla a las alteraciones introducidas por el Código Estructural de 2021 (Anejo 19, apartado 7.4), no resulta imprescindible para validar el fondo del asunto, que consiste en

1. sostener la preferencia de establecer la aproximación a la rigidez de las piezas flectadas en base al armado de acero y el canto, mejor que en base a correcciones sobre la sección bruta de hormigón, y
2. obtener la aproximación a la ley deformada de la pieza fisurada con armadura variable a partir de la sección decidida por lo que denominamos *momento de proyecto* o *momento de diseño*.

## B.2. Rigidez equivalente

Se analiza en primer lugar como estimar la rigidez de una sección, extendiendo posteriormente el análisis al conjunto de la pieza.

### B.2.1. Sección

Consideramos una sección cuyo armado  $A_s$  se ha prescrito a partir del momento sollicitación previsto,  $M_d$ , y de criterios que asignan para el correspondiente Estado Límite Último (ELU) una profundidad definida,  $\gamma d$ , al bloque de compresión del hormigón. En esas condiciones

$$\begin{aligned}
 A_s &= \frac{f_{cd}}{f_{sd}} \gamma b d \\
 M_d &= f_{cd} \gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) b d^2
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

La rigidez de la sección para la condición de uso depende de la situación de fisuración de esta. La rigidez bruta convencional  $K_b = E_c I_b$  no considera la armadura y como aproximación es excesivamente grosera. Es de más interés la rigidez fisurada  $K_f$ , cuya expresión aproximada en función del área de acero sería sencillamente igual a la rigidez del acero  $E_s$  por el área de la armadura  $A_s$  por el producto del brazo de palanca tracción-compresión, por la profundidad de las tracciones —distancia de la armadura a la fibra neutra— es decir  $K_f \approx E_s A_s \times 0,8h \times 0,6h \approx 0,5E_s A_s h^2$ . Dado que las aproximaciones al brazo y a la profundidad de tracciones pueden parecer burdas vamos a revisar el problema más cuidadosamente.

Aunque consideramos rectangular al bloque comprimido en el análisis de los ELU, en Estado Límite de Servicio (ELS) y en el análisis por tanto de las implicaciones de la rigidez, es más realista la suposición de un bloque triangular con tensiones crecientes desde la línea neutra, bloque de compresiones cuya profundidad representamos ahora por  $\chi d$ . En estas condiciones tenemos en servicio un comportamiento marcadamente lineal en el que igualando tracciones y compresiones resultará

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_c E_c}{\varepsilon_s E_s} \chi b d \\ M &= \frac{1}{2} \varepsilon_c E_c \chi \left(1 - \frac{\chi}{3}\right) b d^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

con la condición adicional de que la sección deformada es plana:

$$\frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\chi d} \quad (\text{B.3})$$

Aislando  $\chi$  en las primera de las ecuaciones B.2 y en B.3 e igualando tendremos

$$2 \frac{\varepsilon_s E_s A_s}{\varepsilon_c E_c b d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} = \frac{1}{1 + \epsilon}$$

que puede escribirse, usando  $\epsilon = \varepsilon_s / \varepsilon_c$

$$2\epsilon \frac{E_s A_s}{E_c b d} = \frac{1}{1 + \epsilon}$$

ecuación de segundo grado en  $\epsilon$  cuya solución —positiva— explícita es

$$\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2E_c b d}{E_s A_s}}$$

en la que podemos sustituir  $A_s$  que es conocido, según B.1:

$$\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2 E_c f_{sd}}{\gamma E_s f_{cd}}} \quad (\text{B.4})$$

Como  $\chi$  se deduce de la B.3 podemos ahora obtener  $\chi$  a partir de  $\gamma$  y de los materiales empleados.

De este modo conocemos la región potencialmente fisurada del hormigón y podemos determinar la rigidez de la sección. La curvatura en servicio es  $c = (\varepsilon_c + \varepsilon_s)/d = \varepsilon_c(1 + \epsilon)/d$  para un momento  $M$ . Contando con la expresión B.2 para  $M$  y recordando B.1 para  $A_s$ , la rigidez puede expresarse en alguna de las

dos formas siguientes,

$$\begin{aligned}
 K_f &= \frac{1}{2} \frac{\chi \left(1 - \frac{\chi}{3}\right)}{1 + \epsilon} E_c b d^3 = \psi_c E_c I_c \\
 K_f &= \frac{1}{2} \frac{\chi \left(1 - \frac{\chi}{3}\right)}{1 + \epsilon} \frac{1}{\gamma} \frac{E_c f_{sd}}{E_s f_{cd}} E_s A_s d^2 = \psi_s E_s A_s h^2
 \end{aligned}
 \tag{B.5}$$

Vemos que la rigidez fisurada puede expresarse en términos de la sección de hormigón o en términos de la sección de acero, a través de dos coeficientes alternativos  $\psi_c$ ,  $\psi_s$  de modo que para las evaluaciones rápidas y aproximadas de las fases de concepción del proyecto la elección preferible será la que corresponda a la menor variabilidad —o mayor estabilidad— en dicho coeficiente.

$$\begin{aligned}
 \psi_c &= 6\chi^2 \left(1 - \frac{\chi}{3}\right) \frac{d^2}{h^2} \\
 \psi_s &= \frac{1}{2}\chi^2 \left(1 - \frac{\chi}{3}\right) \mathcal{N} \frac{d^2}{h^2}
 \end{aligned}
 \tag{B.6}$$

con

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{1}{1 + \epsilon}; \\
 \epsilon &= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 2\mathcal{N}}) \\
 \mathcal{N} &= \frac{E_c f_{sd}}{\gamma E_s f_{cd}}
 \end{aligned}
 \tag{B.7}$$

El parámetro básico es  $\mathcal{N}$  que depende de decisiones generales de diseño, a saber, la selección de materiales y criterios de seguridad y las profundidades comprimidas a que corresponden los armados. Las tablas siguientes clarifican el panorama para los

criterios habituales de seguridad y un recubrimiento mecánico de un décimo del canto.

Valores para  $\psi_c$ :

	$\gamma$	0,25	0,35	0,45
BS H	25	35	25	35
400	0,55	0,65	0,70	0,82
500	0,47	0,55	0,60	0,70

Valores para  $\psi_s$ :

	$\gamma$	0,25	0,35	0,45
BS H	25	35	25	35
400	0,46	0,43	0,41	0,38
500	0,48	0,46	0,44	0,41

En las tablas se comprueba la mayor estabilidad de  $\psi_s$ .

Se establece habitualmente la rigidez de la sección a partir de una media ponderada de las fisurada y bruta mediante la expresión<sup>1</sup>

$$K_e = \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 K_b + \left(1 - \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3\right) K_f \quad (\text{B.8})$$

dependientes de los momentos aplicado  $M_a = M$  y de fisuración  $M_f = f_{ctm,fl}W_b$  de la sección, rigidez que es sólo levemente mayor que la fisurada en los casos analizados, y en la que no nos detendremos. De este modo, la rigidez de la sección será la fisurada, medida con

$$K_f = \psi_s E_s A_s h^2 \quad (\text{B.9})$$

1. El Código Estructural, Anejo 19, usa en su expresión 7.18 el exponente 2 en vez del 3 de la fórmula clásica.

### B.2.2. Viga

Se comprende que la rigidez de una viga de hormigón armado debe integrar las rigideces variadas de sus secciones. Esto suele hacerse mediante algún tipo de integral —Branson— de la que puede deducirse una media ponderada equivalente. Las normas aceptan simplificaciones a la vista de las estrategias habituales de armado, como considerar la sección de momento dominante en las piezas isostáticas o, en los casos de piezas —continuas— con cambio de signo en los momentos, considerar la sección de momento mayor para cada región ponderada por una aproximación a la fracción de la luz que ocupa la región —se considera convencionalmente el 25 % de la luz en las regiones de apoyo—

Podemos caracterizar las vigas continuas con flector variable de acuerdo a su proximidad a los casos canónicos: biempotrada o empotrada–apoyada. En ambos casos, la decisión sobre las dimensiones de la sección se adopta para un momento intermedio de los de la viga —es sencillo considerar el conocido como *momento plástico*— aun cuando el armado se realice de acuerdo a los resultados del análisis. En tales casos, llamamos *momento de diseño*  $M_D$  al valor de cálculo seleccionado, o *sección de diseño* a la que sirve para caracterizar la pieza. La decisión de diseño implica una profundidad en el bloque comprimido  $\gamma_D$  para este. Los armados finales corresponderán a los valores de cálculo en apoyo(s) y vano  $M_{ad}$ ,  $M_{vd}$ , a los que corresponderán

profundidades del bloque  $\gamma_a$ ,  $\gamma_v$  fáciles de deducir

$$\begin{aligned}\gamma\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{M}{M_{\mathcal{D}}}\gamma_{\mathcal{D}}\left(1 - \frac{\gamma_{\mathcal{D}}}{2}\right) \\ \gamma &= 1 - \sqrt{1 - 2\frac{M}{M_{\mathcal{D}}}\gamma_{\mathcal{D}}\left(1 - \frac{\gamma_{\mathcal{D}}}{2}\right)}\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

profundidad limitada por  $\gamma \leq 0,45$  a partir de la que se añade armado de compresión. Análogamente, los armados resultantes para apoyo y vano serán los que resulten de los momentos de apoyo y vano, y pueden deducirse de su relación con el usado para el *diseño*, para la misma sección. Es decir, pueden determinarse las profundidades, armados, y rigideces de apoyo y vano, y por tanto la rigidez media de la pieza, a partir de los valores correspondientes a la que hemos llamado *sección de diseño*:

$$\begin{aligned}\alpha K_v + (1 - \alpha K_a) &= \alpha\psi_v E_s A_{sv} h^2 + (1 - \alpha)\psi_a E_s A_{sa} h^2 \\ K &= \psi_{eq} E_s A_{s\mathcal{D}} h^2 \text{ con } \psi_{eq} = \alpha\psi_v \frac{A_{sv}}{A_{s\mathcal{D}}} + (1 - \alpha)\psi_a \frac{A_{sa}}{A_{s\mathcal{D}}}\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Las tablas siguientes aportan el coeficiente  $\psi_{eq}$  correspondiente a la rigidez media equivalente de la pieza coeficiente que, junto con la armadura de la sección de diseño, caracteriza dicha rigidez.

$\gamma_D$	BS	H	BiEmp.		EmpAp.	
			25	35	25	35
0,25	400		0,45	0,42	0,45	0,42
	500		0,48	0,45	0,48	0,45
0,35	400		0,42	0,39	0,41	0,38
	500		0,45	0,42	0,44	0,41
0,45	400		0,39	0,36	0,38	0,35
	500		0,41	0,39	0,41	0,38

Los resultados anteriores podrían matizarse —aumentando en valor— si consideramos que en piezas de escaso canto —vigas planas— habría que contar con mayor rigidez en vanos dada la colaboración a momentos positivos de la capa de compresión, y contando con que en vigas de canto apreciable el recubrimiento es proporción menor de la usada para las tablas. Por todo ello, y por su sencillez, parece razonable aproximar la rigidez de la pieza con la expresión que habíamos propuesto —aplicada a la sección de diseño— de enorme interés para la fase correspondiente a las decisiones iniciales

$$K_f = 0,5E_s A_s h^2 \quad (\text{B.12})$$

### B.3. Flechas de vigas

Establecida la rigidez media de las secciones de la viga, resulta elemental plantear el cumplimiento del estado límite de deformación: la expresión de la flecha instantánea es sencillamente

$$\delta = \frac{\alpha}{384} \frac{qsl^4}{K} \quad (\text{B.13})$$

para la carga  $q$  por metro cuadrado aplicada a vigas de luz  $l$  a distancias  $s$  y siendo  $\alpha$  un coeficiente que expresa las condiciones de extremo a partir de los momentos de extremo  $M_i$ , y  $M_d$  — negativos — y el isostático  $M_I$ :

$$\alpha = 5 + 3 \frac{M_i + M_d}{M_I} \quad (\text{B.14})$$

Dimensionando con el acero estrictamente necesario

$$\delta = \frac{\alpha}{384} \frac{qsl^4}{0,5E_sA_s h^2} \quad \text{con } A_s \approx \frac{\beta qsl^2 \gamma_f}{0,72hf_{sd}}$$

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{3}{100} \frac{\alpha}{\beta} \frac{f_{sd}}{\gamma_f E_s} \lambda = \frac{3}{100} \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon_s \lambda \quad (\text{B.15})$$

expresión en la que —para redondear— se ha empleado un criterio habitual de dimensionado  $\gamma \approx 0,4d \implies z \approx 0,72h$  y siendo  $\lambda = l/h$  la esbeltez de la viga,  $\gamma_f$  el coeficiente parcial de seguridad de las cargas y  $\beta = M_D/M_I$  la fracción entre el momento empleado para el diseño de la pieza y el isostático. Otros criterios de armado alterarían simultáneamente los coeficientes que expresan  $\psi_{eq}$  y el canto, reduciendo la flecha para cuantías más reducidas.

### B.3.1. Flecha activa

La flecha activa a considerar en uso de vivienda y considerando formas estándares de puesta en obra es próxima a la flecha instantánea para la carga total, por lo que usamos la expresión

**B.15.** El análisis aproximado usualmente admitido implica descontar de la flecha acumulada total la instantánea de las cargas permanentes más las sobrecargas de tabiquería, junto con las diferidas correspondientes al peso propio, tabiques y solados, en los tiempos transcurridos desde su desencofrado o acopio, respectivamente, hasta el cierre de la tabiquería.

## B.4. Condiciones de comprobación

Las esbelteces límite que aseguran que no se superan las condiciones límite de deformación dependen de estas, y pueden deducirse con facilidad de **B.15**. Para un límite de  $\delta/l \leq 1/400$  y acero B400S se deducen los valores siguientes —similares a los de EHE—

voladizo	6	doble apoyo	14
apoyo-continuidad	17	apoyo-empotramiento	24
doble continuidad	22	doble empotramiento	35



# Bibliografía

- Addis, Bill. 2007. *Building: 3000 Years of Design Engineering & Construction*. London, New York: Phaidon.
- Bathe, Klaus Jürgen. 1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall.
- British Medical Association. 1987. *Living with risk*. London: John Wiley & Sons.
- Cervera, Jaime. 1982. «Cálculo de estructuras y resistencia de materiales: Origen y desarrollo histórico de los conceptos utilizados». Tesis doctoral, Escuela Técnica Superior de Arquitectura. <http://oa.upm.es/850/>.
- . 1989. «Tres teoremas fundamentales de la teoría del diseño de estructuras». *Informes de la Construcción* 40, n.º 399 (febrero): 57-66. <https://doi.org/DOI:10.3989/ic.1989.v40.i399.1517>. <http://oa.upm.es/3828/>.

- Cervera, Jaime. 1990. «Las estructuras y el peso propio». *Informes de la Construcción* 42, n.º 407 (mayo): 73-85. <https://doi.org/doi:10.3989/ic.1990.v42.i407.1450>. <http://oa.upm.es/3830/>.
- . 2001. *Forma y esfuerzos estructurales*. Cuadernos para la docencia 110. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- . 2010a. *Concebir y analizar estructuras*. Versión 3.0. <http://oa.upm.es/3691>. Madrid: UPM. <http://oa.upm.es/189>.
- . 2010b. «Un criterio robusto para la medida del margen-coeficiente- de seguridad». *Informes de la Construcción* 62 (518): 33-42. <http://oa.upm.es/3838/>.
- . 2019. «Fiabilidad. Estadística aplicada a la seguridad estructural». *Difusión interna, Departamento de Estructuras y Física de Edificación* (septiembre). <https://oa.upm.es/82051/>.
- Cervera Bravo, Jaime. 1993. «Panorama tipológico de grandes estructuras de cubierta.» En *Estructuras ligeras para grandes luces. I encuentro internacional. Sevilla 1992*. Editado por Fundación Emilio Pérez-Piñero, 137-177. Sevilla 6 a 9 de julio de 1992. Murcia. <https://oa.upm.es/9605/>.
- . 2022. *Historia de la Teoría y Construcción de Estructuras*. Noviembre. <https://www.youtube.com/watch?v=Ah7zR.RMRm8>.

- Cervera Bravo, Jaime, y Laura Navas-Sánchez. 2021. «Prestress behaviour and ductility requirements in structures: solutions from a unified algebraic approach». *R. Soc. open sci.* 8 (12). <https://doi.org/10.1098/rsos.210459>.
- Cervera Bravo, Jaime, Jesús Ortiz Herrera, Mariano Vázquez Espí y Antonio Aznar López. 2013. «Dimensionado en compresión en acero: el peso del pandeo». *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* (Barcelona) 29 (2): 79-91.
- Cervera Bravo, Jaime, y Mariano Vázquez Espí. 2011. «Galileo, Maxwell, Michell, Aroca: Measuring the structural efficiency.» En *Structural Milestones in Architecture and Engineering. Int. Conf. on Research in Construction*. Madrid: IETcc-UPM, Instituto de Ciencias de la Construcción (CSIC), octubre. <http://oa.upm.es/9931/>.
- Clough, Ray W., y Joseph Penzien. 1975. *Dynamics of structures*. McGraw Hill.
- Dantzig, George B. 1963. *Linear programming and extensions*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Descartes, René. 1637. *Carta a Huygens 5 oct...* Çh. Adam & Paul Tannery 1897... tI, p. 431", octubre.
- . 1638a. *Carta a Mersenne de 12 sept.* Çh. Adam & Paul Tannery 1897... tII, p. 332", septiembre.
- . 1638b. *Carta a Mersenne de 13 julio..* Çh. Adam & Paul Tannery 1897... tII, p. 221", noviembre.

- Descartes, René. 1638c. *Carta a Mersenne de 15 nov.* Çh. Adam & Paul Tannery 1897... tII, p. 432”, noviembre.
- Duhem, Pierre. 1905–06. *Les Origines de la Statique*. 2 vols. Paris: A. Hermann.
- Galileo. 1638. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze: attenenti alla meccanica & i movimenti local*. Leyden: Ezelvirii.
- Heyman, Jacques. 1966. «The Stone Skeleton». *International Journal of Solids and Structures* 2 (2): 249-279.
- . 1995. *El esqueleto de piedra: Mecánica de la arquitectura de fábrica*. Editado por e Instituto Juan de Herrera CEHOPU. Traducido por Santiago Huerta. Madrid.
- Kurrer, Karl Eugen. 2018. *The History of the Theory of Structures: Searching for Equilibrium*. 2.<sup>a</sup> ed. Berlin: Wiley, Wilhelm Ernst & Sohn. ISBN: 978-3-433-03229-9.
- Luhmann, Niklas. 1996. *Introducción a la teoría de sistemas*.
- Magdalena Layos, Fernando. 2013. «El problema del rozamiento en el análisis de estructuras de fábrica mediante modelos de sólidos rígidos». Trabajo fin de máster, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, abril. <http://oa.upm.es/15447/>.
- Maxwell, John Clerk. 1870. «On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces». *Trans. R. Soc. Edinburgh* 7:160-208. <https://doi.org/10.1017/s0080456800026351>.

- Parkes, E. W. 1974. *Braced Frameworks; an introduction to the theory of structures*. 2. edition. Oxford, New York: Pergamon Press.
- Pellegrino, S., y C.R. Calladine. 1985. «Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks». *Int. J. Solids Structures* 22 (4): 409-428. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(86\)90014-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(86)90014-4).
- Roux, Sophie. 2004. «Los Retos de la filosofía mecánica en el siglo XVII: el caso de Descartes». En *Los Orígenes de la ciencia moderna Actas - Año XI-XII*, 427-441. Tenerife: Fundación Canaria de Historia de la Ciencia. [https://fundacionrotava.org/media/web/publication\\_files/publication\\_29\\_18.pdf](https://fundacionrotava.org/media/web/publication_files/publication_29_18.pdf).
- Schelter, William, y col. 1982–2022. «Maxima, a Computer Algebra System». Visitado 9 de diciembre de 2022. <https://maxima.sourceforge.io/>.
- Tannery, Charles Adam & Paul, ed. 1897..1913. *René Descartes, Oeuvres*. 12 volumes. Charles Adam & Paul Tannery. <https://fr.wikisource.org/wiki/%C5%92uvres.de.Descartes/%C3%89dition.Adam.et.Tannery>.
- Văcăreanu, Radu, Alexandru Aldea y Dan Lungu. 2007. *Structural Reliability and Risk Analysis: Lecture notes*. Bucharest: Technical University of Civil Engineering of Bucharest, Reinforced Concrete Department.

- Wilson, E.L. 2002. *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures: A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering*. 3.<sup>a</sup> ed. Berkeley, California: Computers / Structures, Inc.
- Zienkiewicz, O. C. 1977. *The finite element method*. 3rd exp. and rev. edition. London, New York: McGraw Hill. ISBN: 0070840725.
- . 1980. *El método de los elementos finitos*. Barcelona: Reverté.

# Índice de figuras

1.1. Geometría y parámetros de modelos estructurales	9
1.2. Modelos estructurales típicos . . . . .	11
1.3. Equilibrio de cortantes y cargas en un tramo de viga . . . . .	33
1.4. Equilibrio de esfuerzos de barras y cargas en un nudo de una cercha . . . . .	35
1.5. Compatibilidad entre desplazamientos y alargamiento longitudinal de una barra. . . . .	36
1.6. Deformaciones de las barras compatibles con los desplazamientos de nudos de una cercha. . . . .	37
1.7. Relaciones de rigidez momento–giro en una barra.	38
1.8. Masa sustentada en cuatro pilas articuladas . . . .	39
1.9. Geometrías del equilibrio. . . . .	43
1.10. Geometrías de la compatibilidad. . . . .	44
1.11. Holgura en un pilar, que no llega a entrar en carga	46
1.12. Respuesta elástica para carga horizontal . . . . .	48
1.13. Modos de colapso . . . . .	50

1.14. Teorema estático . . . . .	62
1.15. Modelado plástico de un pórtico: cinemática y estática . . . . .	84
1.16. Relaciones momento–giro plástico y resistencias límite de barra con momentos flectores en ambos extremos. . . . .	86
1.17. Resistencias límite de barra con esfuerzo axial y momentos flectores en ambos extremos. . . . .	87
2.1. Tensiones normales en una sección de una barra y sus correspondientes esfuerzos y deformaciones	101
2.2. Torsión de sección cerrada hueca . . . . .	105
2.3. Torsión con alabeo de sección abierta . . . . .	109
2.4. Movimientos de la sección, y cargas distribuídas.	111
2.5. Equilibrio de fuerzas verticales y momentos de flexión vertical de una rebanada . . . . .	112
2.6. Cargas nodales equivalentes . . . . .	126
2.7. Diagonalizando la rigidez en flexión de vigas . . .	133
2.8. Subestructura . . . . .	136
2.9. Solución elástica en subestructuras . . . . .	142
2.10. Transformación de ejes coordenados . . . . .	146
2.11. Solución elástica como superposición . . . . .	151
2.12. Métodos de Newton, Newton–Rapshon, Incremen- tal, o de Longitud de arco . . . . .	153
2.13. Pórtico de cinco plantas con vigas acarteladas . .	156
2.14. Modelo de subestructura de la pieza acartelada .	159
2.15. Funciones de forma para piezas de sección cons- tante o variable . . . . .	165
2.16. Pórtico de cinco plantas: movimientos de planta .	176

2.17. Identificación de las deformaciones de las piezas de una planta genérica $i$ . . . . .	177
2.18. Modelo plástico en acero . . . . .	183
2.19. Modelo plástico en fábrica . . . . .	186
2.20. Criterios de seguridad para sección rectangular . . . . .	187
2.21. Modelado plástico de piezas metálicas . . . . .	190
2.22. Modelo plástico de pórtico de acero . . . . .	193
2.23. Modelo de bloques indeformables . . . . .	194
2.24. Quiralidad de los esfuerzos en una sección . . . . .	196
2.25. Resistencia de fábrica “de Heyman” . . . . .	201
2.26. Resistencia de fábrica “de Heyman acotada” . . . . .	202
2.27. Resistencia de fábrica . . . . .	204
2.28. Resistencia de secciones de fábrica . . . . .	205
2.29. Violación de la regla de flujo . . . . .	208
2.30. Resistencia de fábrica y su “centro” . . . . .	210
2.31. Factores de carga en fábricas . . . . .	213
2.32. Arco con carga excéntrica . . . . .	220
2.33. Hoja de cálculo para solución plástica . . . . .	226
3.1. Tipos de equilibrio . . . . .	228
3.2. Estabilidad de pórtico . . . . .	230
3.3. Arriostramiento de pórtico . . . . .	232
3.4. Tipos de comportamiento postcrítico . . . . .	234
3.5. Pandeo de Euler: equilibrio . . . . .	235
3.6. Pandeo de Euler: potencial . . . . .	239
3.7. Curvas de resistencia de piezas comprimidas . . . . .	243
3.8. Estabilidad de pórtico con imperfecciones . . . . .	246
3.9. Ampliación de flecha . . . . .	252
3.10. Ampliación de flecha y cambio de rigidez . . . . .	254

3.11. Curvas de pandeo . . . . .	259
3.12. Interpretaciones del factor de pandeo . . . . .	261
3.13. Proporcionalidad en problemas de pandeo . . . . .	262
3.14. Mapa de pandeo . . . . .	265
3.15. Pandeo con torsión . . . . .	267
3.16. Abolladura . . . . .	268
3.17. Desplome de pórtico de nudos rígidos . . . . .	270
3.18. Desplome de pórtico articulado, arriostrado . . . . .	271
3.19. Cortante de nudo . . . . .	272
3.20. Cargas equivalentes en desplome de pórtico . . . . .	273
3.21. Cargas aplicadas por desplome de pórtico . . . . .	274
3.22. Barra articulada con esfuerzo axial . . . . .	277
3.23. Barra flectada con esfuerzo axial . . . . .	280
3.24. Alargamiento unitario por desplazamiento plano . . . . .	281
3.25. Modos de pandeo de ménsula comprimida . . . . .	288
4.1. Convencionalidad de las acciones . . . . .	303
4.2. Optimización . . . . .	306
4.3. Ciclo de Proyecto . . . . .	307
4.4. Huesos de persona y de gigante según Galileo . . . . .	309
4.5. Estrategias de tipificación de las estructuras . . . . .	313
4.6. Solución de planta adintelada . . . . .	315
4.7. Costes unitarios de soluciones adinteladas . . . . .	323
4.8. Parámetros de la forma . . . . .	336
4.9. Concepto de cantidad de estructura . . . . .	338
4.10. Identidad entre estructuras mínimas . . . . .	346
4.11. Tipos de estructura . . . . .	347
4.12. Estructuras de Michell en flexión . . . . .	349
4.13. Flecha ponderada . . . . .	350

4.14. Energías de deformación y complementaria . . . . .	351
4.15. Estructuras equivalentes en flexión . . . . .	352
4.16. Efectos del cambio de canto . . . . .	353
4.17. Estructura con ambos cordones curvos . . . . .	355
4.18. Problema de flexión y funciones básicas . . . . .	366
4.19. Tipos de estructura para flexión . . . . .	367
4.20. Estimación de costes en vigas . . . . .	369
4.21. Estimación de costes en arcos . . . . .	373
4.22. Estimación de costes en cerchas . . . . .	376
4.23. Estimación de costes en cerchas (2) . . . . .	377
4.24. Formas mejoradas de cercha . . . . .	379
4.25. Red de vigas en contorno circular . . . . .	380
4.26. Leyes de cargas y esfuerzos para contorno circular	380
4.27. Formas comparables de cubierta . . . . .	383
4.28. Viga . . . . .	384
4.29. Emparrillado . . . . .	385
4.30. Arco . . . . .	386
4.31. Catenaria . . . . .	386
4.32. Arcos cruzados . . . . .	387
4.33. Arcos radiales . . . . .	387
4.34. Cúpula . . . . .	388
4.35. Tambor . . . . .	389
4.36. Cesta . . . . .	389
4.37. Voladizo . . . . .	390
5.1. Estados planos, de deformación y de tensión . . . . .	401
5.2. Triedro de equilibrio en la superficie . . . . .	407
5.3. Diferencias finitas . . . . .	412
5.4. Aproximaciones nodales . . . . .	414

5.5. Integración de Gauss . . . . .	428
5.6. No linealidad material . . . . .	432
5.7. Newton–Raphson . . . . .	435
6.1. Fases del análisis en el MEF . . . . .	441
6.2. Continuidad del campo de desplazamientos . . . . .	454
6.3. Suma de funciones de forma en el elemento . . . . .	457
6.4. Funciones de forma e interpolación . . . . .	469
6.5. Transformación del diferencial de área . . . . .	477
6.6. Estudio de caso: modelo uniaxial o lineal . . . . .	479
6.7. Elemento de barra y funciones de forma . . . . .	483
6.8. Estudio de caso: modelo superficial . . . . .	484
6.9. Alternativas de discretización de la pieza . . . . .	489
6.10. Tensiones para dos modelos de barra . . . . .	508
6.11. Tensión normal de chapa, modelo de membrana . . . . .	510
6.12. Modelos de flexión de vigas. . . . .	512
6.13. Flexión de vigas de Timoshenko. . . . .	517
6.14. Flexión de placas . . . . .	522
6.15. Estática de la flexión de Placas. . . . .	523
6.16. Elemento rectangular de placa MZC. . . . .	529
6.17. Elementos no conformes . . . . .	532
6.18. Equilibrio local en láminas . . . . .	535
6.19. Alisado de tensiones . . . . .	545
7.1. Mecanismos de colapso de un pórtico simple . . . . .	552
7.2. Cargas límite en pórtico simple . . . . .	553
7.3. Histograma y distribución . . . . .	558
7.4. Distribuciones usuales . . . . .	562
7.5. Probabilidad de fallo . . . . .	576

7.6. Sesgo en valores de acciones y resistencias . . . . .	580
7.7. Valores nominales inseguros . . . . .	581
7.8. Valores de cálculo, por seguridad . . . . .	582
7.9. Cálculo de la probabilidad de fallo . . . . .	583
7.10. Densidad de probabilidad de resistencias . . . . .	585
7.11. Fallo en el espacio de las variables aleatorias . . . . .	592
7.12. Índice de fiabilidad: interpretación geométrica . . . . .	595
7.13. Índice de fiabilidad de Hashofer-Lind . . . . .	598
A.1. Límites y coeficientes de seguridad . . . . .	617



# Índice de tablas

7.1. Fenómeno considerado y probabilidad de mortalidad anual $P_a$ . British Medical Association 1987, tabla 10.1 . . . . .	588
7.2. Clase de riesgo y fiabilidad en códigos . . . . .	590



# Índice alfabético

- acoplamiento
  - de esfuerzos en plastificación, 280
  - en la matriz de rigidez, 131
  - estructural, 2
- alcance, 334, 360
- ampliación
  - de carga, por peso propio, 333, 361
  - de flecha, 245
  - de imperfección, 245
- análisis, 6, 99
  - elástico, 21, 28
  - límite, 49, 181
  - teoremas, 61
  - plástico, 49, 68
- bicortante, 108
- bimomento, 108
- cálculo
  - errores numéricos, 464
  - valor de  $\nu$ , 577
  - variacional, 240
- campana de Gauss, *véase* distribución normal
- cantidad de estructura, 42, 300, 337
- capacidad
  - resistente, 53, 55
- carga
  - central, *véase* central, - crítica, 279, 284
  - de Euler, 237
  - de rotura, 53
  - factor de, 69
  - $\gamma$ , *véase* carga,  $\gamma$
  - lateral, 230
  - equivalente, 271, 297
  - límite, 209
  - útil, 333, 361
- central
  - carga, 222
  - esfuerzo, 209
- cinemática, 4, 9, 13
  - de colapso, *véase* colapso, -
- coeficiente
  - de alabeo, 108
  - de tensión, *véase* densidad, de fuerza
  - de variación, 568
- coeficientes
  - de restricción, 95
  - de seguridad, 188
  - parciales, 577, 599
  - de simultaneidad, 613
  - del plano, *véase* versor
- colapso
  - cinemática, 50
  - condición de  $\nu$ , 57
  - equilibrio, 50
- compatibilidad, *véase* ecuaciones, -
- condicionamiento
  - mal  $\nu$ , 465
- conforme, *véase* elemento, -
- contorno
  - condiciones de  $\nu$ , 100
  - libre, 8
  - sustentado, 8
- coordenadas
  - naturales, 470
  - reales, 470
- corrección de Bessel, 567
- correlación, 572
  - matriz de  $\nu$ , 572
- COV, *véase* coeficiente de variación
- covarianza, 571
  - matriz de  $\nu$ , 571
- criterio de la parcela, 460
- criterios
  - de seguridad, *véase* coeficientes, de  $\nu$ , 617
- crítica
  - carga, *véase* carga, -
  - condición, 230
  - situación, 228
- defectos
  - seampliación, de imperfección, 245
- deformaciones, 10
- densidad
  - de carga, 33, 395, 397
  - de fuerza, 41
  - de probabilidad, 559
  - marginal, 570
- desplazamientos, 9
- desviación
  - estándar, 568
  - media absoluta, 566
  - típica, 568

- determinista  
 modelo, 578  
 seguridad, 578
- diagramas de interacción, 54
- diferencial  
 ecuación, *véase* ecuación,  
 -
- disipación, *véase* regla de flujo
- distribución  
 bimodal, 566  
 gaussiana, *véase* distribución normal  
 Gumbel, 563  
 lognormal, 563  
 marginal, *véase* densidad  
 -  
 normal, 560  
 normal estándar, 561  
 valores extremos, 563  
 Weibull, 563
- dualidad, 19, 73, 214, 216
- ductilidad, 180
- ecuaciones  
 compatibilidad, 13  
 equilibrio, 14  
 materiales, 14
- ecuación  
 diferencial, 118, 408
- eficiencia, 362
- elemento  
 conforme, 456
- empotramiento perfecto, 118
- energía  
 complementaria, 17, 350  
 de deformación, 16, 350  
 disipada, *véase* regla de flujo  
 potencial, 16
- ensamblaje, 147
- equilibrio, *véase* ecuaciones, -
- error  
 función - , 561  
 numérico, *véase* cálculo, -  
 -
- esfuerzo  
 central, *véase* central, esfuerzo  
 interno, 5  
 see\_ interno, 5
- estática, 5, 10, 14  
 de colapso, *véase* colapso,  
 equilibrio
- estructa
- estructura, *véase* estructura, -
- estructura  
 estricta, 342  
 tipos, *véase* tipo estructural
- fábrica  
 modelo  
 de bloques, *véase* indeformable, bloque  
 resistencia, 201, 205
- factor  
 de Bessel, 567  
 de carga crítica, 231, 284, 289  
 de imperfección, 257  
 de pandeo, *véase* pandeo,  
 factor de -
- fallo  
 determinista, 555  
 frontera, 576  
 probabilista, 591  
 variables, 557
- fiabilidad, 549  
 índice, 584
- flexibilidad  
 matriz, *véase* matriz, de -  
 flujo, *véase* regla de -
- fragilidad  
 curva de, 559
- fuerzas externas  
 cargas, 10  
 reacciones, 10
- funciones de forma, 119
- geometría, 4, 8  
 grados de libertad, 15, 23
- histéresis, 431
- histograma, 557
- holgura, 57  
 máxima, *véase* central,  
 carga  
 variable, *véase* variable,  
 de -
- imperfección, *véase* ampliación, de -  
 previsión, 291
- incertidumbre, 549  
 análisis  
 elástico, 32  
 plástico, 63
- pandeo, *véase* ampliación, de imperfección
- indeformable  
 bloque, 192
- índice  
 de fiabilidad, *véase* fiabilidad, -  
 insuperable  
 tamaño, *véase* alcance
- intraslacional, *véase* pórtico,  
 intraslacional
- isótropo, 400
- límite  
 análisis, *véase* análisis, -  
 condiciones, 13  
 de rotura, *véase* cargas,  
 de rotura  
 superficie, *véase* superficie, -
- lognormal, *véase* distribución  
 -
- marginal  
 densidad, *véase* densidad,  
 -
- matriz  
 de flexibilidad, 25  
 de rigidez, 24  
 condensada, 140  
 geométrica, 278
- media, 564  
 mediana, 565
- métrica  
 de coste, *véase* cantidad  
 de estructura
- moda, 565
- modelo  
 determinista, *véase* determinista, -  
 modelo de cortante, 178
- modo  
 de colapso, *véase* colapso,  
 cinemática, *véase* condición de colapso  
 de fallo, 551  
 de pandeo, 236, 286, 289
- multiplicador  
 plástico, 57
- nodo, 37, 190
- objetivos  
 de comparación, 96

- profesionales, 5
- operador
  - adjunto, 116
  - autoadjunto, 397
- optimación, 299
  - métricas, 340
- optimización, *véase* optimación
  
- pandeo
  - de Euler, 234, 238
  - factor de -, 245, 251
  - global, 269
  - lineal, 284
  - modo, *véase* modo, de -
- penalización, 371
- plasticidad
  - asociada, 60
- pórtico
  - intraslacional, 276
  - plástico, 83, 193, 552
  - traslacional, 276
- potencial
  - de disipación, 60
  - energía, *véase* energía, -
- principio
  - de Saint-Venant, 32
  - de superposición, 31
- probabilidad
  - condicionada, 570
  - de fallo, 576
    - aceptable, 587
- probabilista
  - seguridad, *véase* seguridad, -
- producto escalar, 240
- proyecto, 6
  - elástico, 21, 29
  - plástico, 49, 73
  - teoremas, *véase* teoremas, -
- pushover*, 447
  
- quiralidad, 195
  
- regla de flujo, 58
- relaciones
  - constitutivas, 10, 14
  - materiales, 5, 10, 14
- rendimiento, *véase* eficiencia
- residuo, 153, 154
- retorno
  - período de -, 564
- riesgo
  - clases, 590
  - función de -, 560
- rigidez
  - completa (nudos), 157
  - matriz, *véase* matriz, de -
  - teorema, *véase* teoremas, -
  
- seguridad
  - criterios, *véase* coeficientes de -
  - determinista, *véase* determinista, -
  - probabilista, 591
  - semiprobabilista, 581
- sesgo, 612
- simplex*, 70
- superficie
  - de rotura, 554
  - límite, 56, 60, 554, 579
  
- talla, 361
- tamaño
  - insuperable, *véase* alcance
- teorema
  - seguridad, 64
- teoremas
  - plástico, *véase* análisis límite, -
  - proyecto, 345
  - rigidez, 349
  - trabajo, *véase* trabajo, -
- tipo
  - contorno, 406, 445
  - de equilibrio, 227
  - en flexión, 367
  - estructural, 313
  - adinteladas, 314
  - cubiertas, 365
  - fallo, 584
- trabajo
  - externo, 12
  - interno, 12
  - teoremas, 18
  - virtual, 18
- traslacional, *véase* pórtico, translacional
  
- valor
  - característico, 563
  - esperado, 564
- variable
  - aleatoria, 555
  - de decisión, 69, 71
  - de holgura, 211
- varianza, 566
- versor, 56, 90
- volumen estructural, 300





UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID 2025  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA  
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y FÍSICA DE LA EDIFICACIÓN



CAMPUS  
DE EXCELENCIA  
INTERNACIONAL

