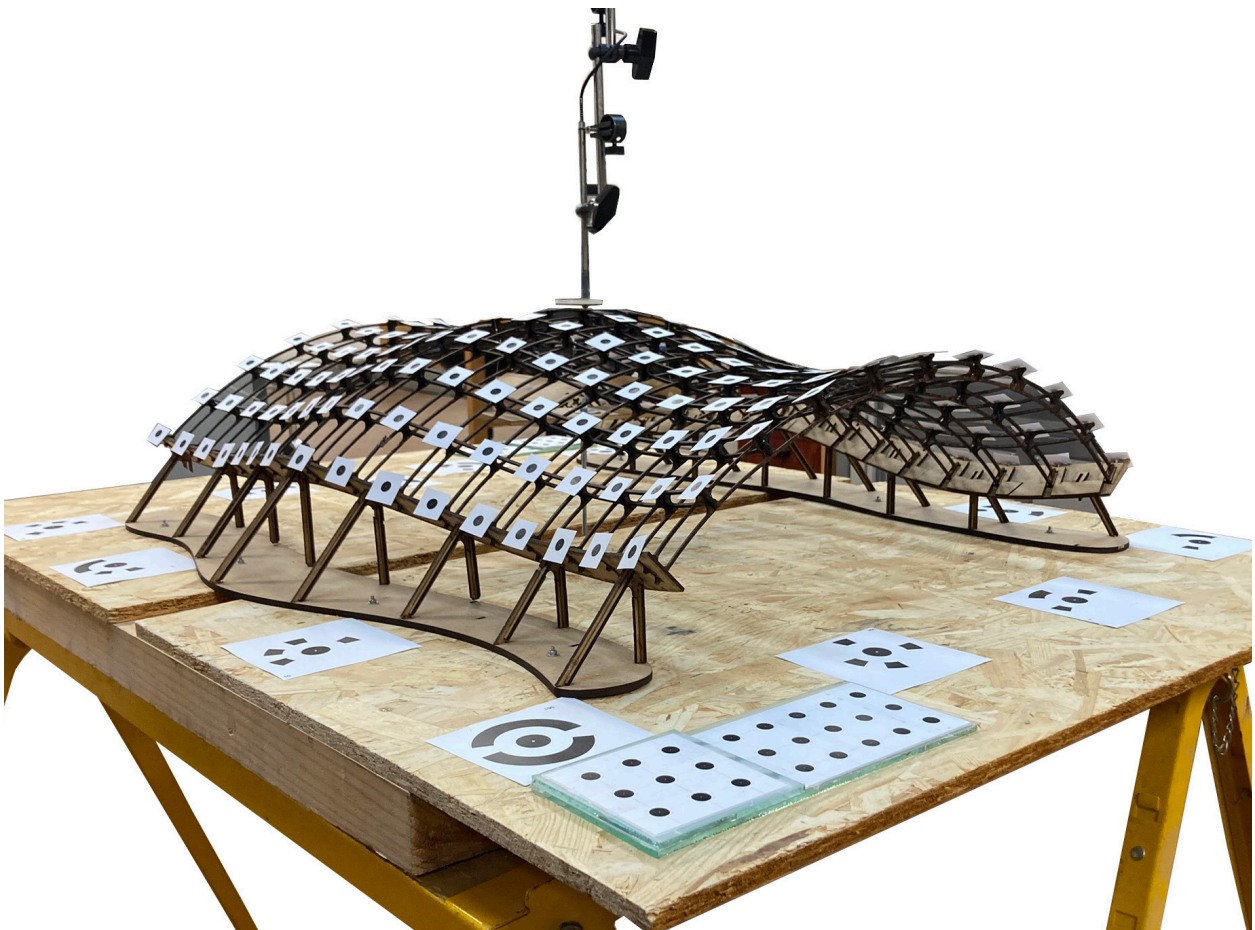


Ana Gracia Mayans

## Fotogrametría aplicada al análisis estructural de láminas reticulares:

Desarrollo de un método para la evaluación de deformaciones en  
pruebas de carga de modelos a escala





UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA



TRABAJO FIN DE GRADO

**Ana Gracia Mayans**

*Fotogrametría aplicada al análisis estructural de láminas reticulares:  
Desarrollo de un método para la evaluación de deformaciones en  
pruebas de carga de modelos a escala*

FOTOGRAMETRÍA APLICADA AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LÁMINAS RETI-  
CULARES:  
DESARROLLO DE UN MÉTODO PARA LA EVALUACIÓN DE DEFORMACIONES EN  
PRUEBAS DE CARGA DE MODELOS A ESCALA

*Estudiante*

Ana Gracia Mayans

*Tutor*

Antonio José Lara Bocanegra

Departamento de Estructuras y Físicas de Edificación

*Aula TFG 7*

Eduardo Javier Gómez Pioz, *coordinador/a*

Pilar Horna Almazán, *adjunto/a*

Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid

Universidad Politécnica de Madrid

## AGRADECIMIENTOS

A mi tutor, Antonio Lara, por guiarme y por su apoyo durante todo el proceso.

A Juan Ortiz, experto en fotogrametría de la Universidad de Santiago de Compostela, por compartir su conocimiento a lo largo del trabajo.

A Manuel Viscasillas, técnico del Laboratorio de Estructuras de la ETSAM, por su ayuda y colaboración.

A Carlos Martínez por sus consejos y apoyo.

A mi familia, Antonio, Cristina, Teresa y Eko, por el constante apoyo y confianza a lo largo de este camino.

A todos mis amigos, en especial a mi grupo Pentagon Squad por su apoyo y por estar siempre a mi lado.

Todos habéis aportado vuestro grano de arena para que este trabajo fuera posible, y por ello estoy profundamente agradecida.



# Índice

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

OBJETIVO

1. PRUEBAS DE CARGA EN GRIDSHELLS DEFORMADAS ELÁSTICAMENTE  
(1962-2024)

Essen model (1962)

Multihalle model (1975)

Mannheim Multihalle (1975)

Cylindrical ribbed shell (2002)

Geodesic ribbed shell (2006)

Triaxial elastic gridshell (2022)

Spherical cap gridshell (2024)

2. SISTEMAS DE MEDICIÓN DE DESPLAZAMIENTOS

Comparador

Escáner

Estación total

Fotogrametría

Ventajas e inconvenientes de los sistemas analizados

3. DESARROLLO DE MÉTODO DE MEDICIÓN DE DESPLAZAMIENTOS PARA  
PRUEBAS DE CARGA EN MODELOS A ESCALA

Modelo a escala utilizado

Programas utilizados

Pruebas preliminares

Método propuesto

4. CREACIÓN DE ALGORITMO PARA VISUALIZACIÓN DE DEFORMADAS

CONCLUSIONES

FUENTES

Bibliografía y recursos digitales

Procedencia de las ilustraciones

ANEJO



## Resumen

Las láminas reticulares de madera, conocidas en inglés como *timber gridshell*, son estructuras laminares formadas por una red de elementos de madera que, por lo general, configuran superficies de doble curvatura. Estas formas aportan resistencia y rigidez, permitiendo cubrir grandes espacios utilizando una cantidad mínima de material, lo que las hace muy eficaces en términos de costos y sostenibilidad. Su ligereza y esbeltez, junto con el uso de conexiones semirrígidas, las hacen muy flexibles y sensibles a las deformaciones, lo que requiere el uso de modelos numéricos avanzados y bien calibrados para su análisis estructural. Por este motivo, es fundamental realizar pruebas de carga en modelos físicos que permitan evaluar su comportamiento y validar los modelos de cálculo.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un método económico y preciso que permita medir los desplazamientos de todos los nodos en pruebas de carga realizadas a modelos a escala de este tipo de estructuras.

Para lograrlo, en primer lugar, se lleva a cabo una revisión del estado del arte sobre las pruebas de carga más relevantes realizadas en *gridshells* de madera, prestando especial atención a las técnicas y procedimientos empleados para aplicar y medir las cargas y los desplazamientos, finalizando con un análisis de las ventajas e inconvenientes de cada uno de los métodos utilizados, concluyendo que la fotogrametría es una de las técnicas más apropiadas para el objetivo perseguido.

En segundo lugar, se desarrolla un método específico para medir los desplazamientos de los nodos en modelos a escala de *gridshells* utilizando fotogrametría. Para ello, se realizan varias pruebas de carga implementando diversas estrategias y mejoras sucesivas que permiten reducir los errores en la medición, como la aplicación de la carga mediante control de deformación, la optimización del tamaño y ubicación de las dianas y el uso de elementos auxiliares como comparadores. El procedimiento que obtiene los mejores resultados, con un error de la mitad que la primera prueba realizada y en el orden de las décimas de milímetro, se describe en detalle para su posible aplicación en futuros trabajos.

Por último, se crea un algoritmo en Grasshopper capaz de representar gráficamente los resultados de la medición, superponiendo las geometrías inicial y deformada y mostrando los valores de todos los desplazamientos nodales.

### PALABRAS CLAVE

Gridshell · Fotogrametría · Modelos a escala · Análisis estructura · Metashape



# Introducción

Las estructuras laminares reticulares de madera, conocidas en inglés como *timber gridshells*, son estructuras laminares formadas por una retícula de elementos de madera que, generalmente, definen superficies de doble curvatura, la cual proporciona resistencia y rigidez. Este tipo de estructuras permite cubrir medias y grandes luces utilizando una cantidad mínima de material, lo que hace que sean muy eficaces en términos de costos y sostenibilidad. Según el tipo de elemento utilizado para su construcción se pueden clasificar en tres tipos:

[Fig. 0.01] *The Pods Sports Academy, Buro Happold Engineering (izq.).*

-Barras y nudos (Fig. 0.01): construidas a partir de piezas rectas de madera (aserrada o laminada) de gran sección, unidas generalmente elementos de acero (Fig. 0.02), conformando una superficie curva mediante triangulación.

[Fig. 0.02] *Unión. (dcha.).*



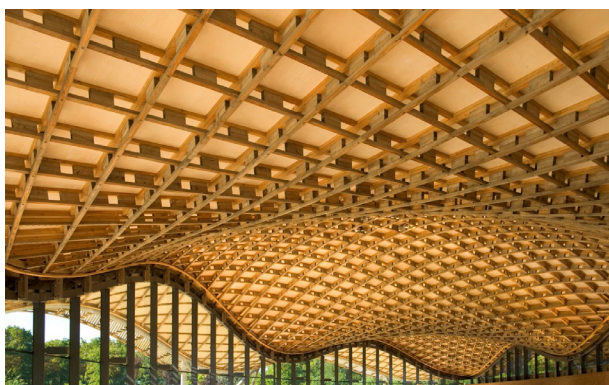
[Fig. 0.03] *Centre Pompidou-Mertz, Shigeru Ban (izq.).*

-De piezas curvas (Fig. 0.03): se utilizan piezas de madera laminada encolada de gran sección, fabricadas en taller, cuya curvatura se logra mediante el uso de prensas especiales o cimbras durante el proceso de encolado. Dependiendo del trazado de la retícula, las piezas de madera laminada pueden llegar a tener una doble curvatura y alveo (Fig. 0.04) por lo que puede ser necesario la fabricación de cimbras de gran complejidad para el laminado de cada una de las piezas.

[Fig. 0.04] *Lámina precurvada (dcha.).*



- De piezas rectas curvadas elásticamente (Fig. 0.05): construidas a partir de piezas inicialmente rectas, que se curvan en obra en régimen elástico hasta conseguir la forma del objeto (Fig. 0.06). Para poder flectar estas láminas es necesario utilizar secciones pequeñas. La rigidez necesaria se logra mediante un sistema multicapa, el cual consiste en curvar de modo independiente dos o más niveles de láminas y conectarlos rígidamente tras el proceso de curvado, logrando un perfil compuesto de gran inercia. Este es el tipo de estructura que se utilizará en el trabajo.



[Fig. 0.05] Savil Building, Glenn Howells Architects (izq.).

[Fig. 0.06] Curvado de lámina (dcha.).

Debido a su diseño estructural innovador, complejidad formal y elevada esbeltez geométrica (mayor que 100) de las estructuras laminares reticulares deformadas elásticamente, desde los años 60 se han llevado a cabo diversas pruebas de carga, en laboratorio y en obras construidas (Fig. 0.07) con el objetivo de evaluar su rigidez y comprender mejor como responde la estructura a diferentes situaciones de carga.

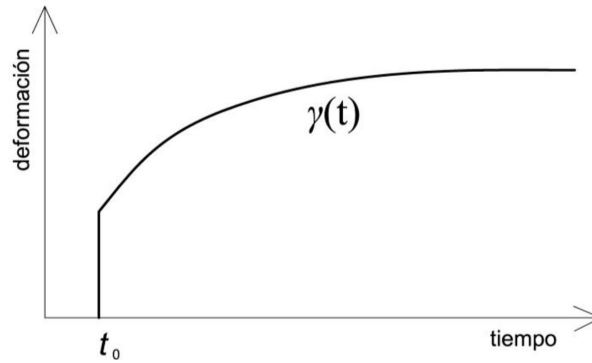


[Fig. 0.07] Prueba de carga en la estructura final. Mannheim Multihalle.

Hay que tener en cuenta que la madera presenta un comportamiento reológico lo que hace necesaria una comprensión de sus propiedades elás-to-plásticas a lo largo del tiempo, y que es preciso considerar en las pruebas de carga.

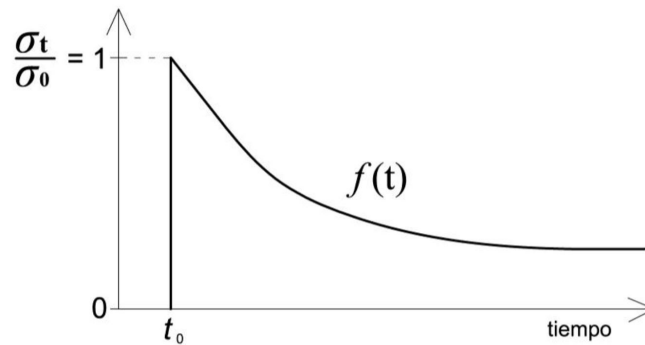
Un primer fenómeno derivado de este comportamiento es conocido como fluencia. Éste consiste en el aumento de deformación a lo largo del

tiempo producido en un elemento sujeto a carga constante (Fig. 0.08). En otras palabras, una estructura cargada con carga constante tendrá una deformación inicial que irá aumentando en el tiempo hasta estabilizarse. Por tanto, la magnitud de la deformación durante una prueba de carga depende del instante en el que se realice la medición y, en general, será mayor cuanto más tiempo transcurra desde la entrada en carga.



[Fig. 0.08] Gráfico curva típica de fluencia en madera.

Otro fenómeno relacionado con el comportamiento reológico de la madera es la relajación de tensiones. Éste consiste en la reducción en el tiempo de las tensiones iniciales producidas en un elemento sometido a deformación constante (Fig. 0.09). Dicho de otro modo, para generar una deformación de magnitud constante en el tiempo en una estructura, la carga necesaria a aplicar se va reduciendo con el paso del mismo.



[Fig. 0.09] Gráfico curva típica de relajación de tensiones

Ambas consideraciones implican que no es posible realizar una prueba de carga en la que ambas mediciones, fuerza y desplazamientos, se mantengan constantes en el tiempo por lo que se hace necesario elegir cual de las dos magnitudes se quiere mantener constante durante la prueba. Esta decisión influye en el diseño de la prueba de carga y tiene una repercusión directa sobre los métodos elegidos para la aplicación de la fuerza y la medición de los desplazamientos.



## Objetivo

El objetivo del presente trabajo es desarrollar un método de bajo coste que permita medir con suficiente precisión los desplazamientos de todos los nodos en pruebas de carga de modelos a escala de gridshells, así como crear un algoritmo para representar gráficamente la geometría inicial y deformada del modelo.

Para desarrollar el método de medición de desplazamientos nodales en gridshells se lleva a cabo, en primer lugar, un análisis del estado del arte de las pruebas de carga realizadas en este tipo de estructuras, analizando las técnicas de aplicación y medición de cargas y desplazamientos utilizadas y seleccionando una de las más apropiadas para el propósito perseguido. Una vez elegida la técnica de medición de desplazamientos se desarrolla y refina el método, adaptando los procedimientos al problema específico planteado a partir de la implementación de estrategias y elementos concretos y mejoras sucesivas.

Para el desarrollo del algoritmo se utiliza el plugin Grasshopper de Rhinoceros, los datos de las coordenadas nodales obtenidos en las diferentes mediciones y principios de álgebra vectorial.

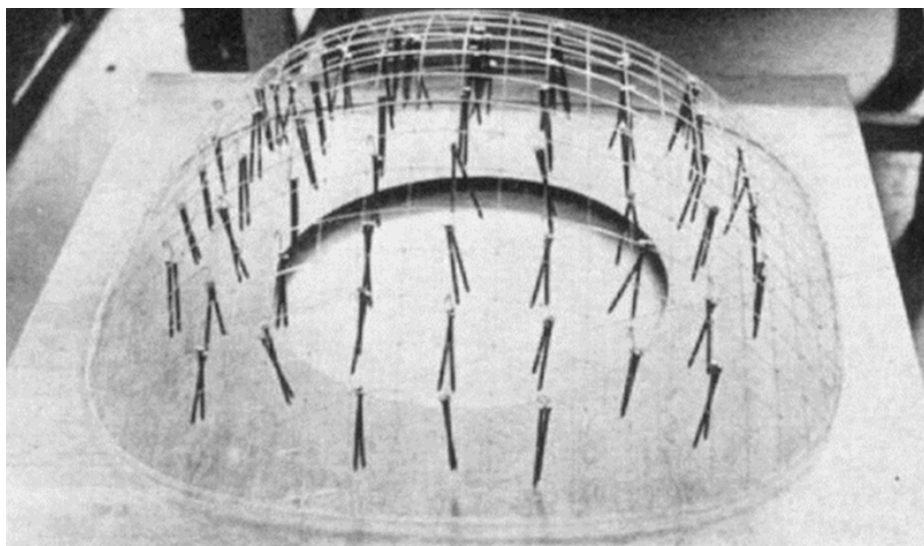


# 1 Pruebas de carga en gridshells deformadas elásticamente (1962-2024)

En este capítulo se presenta una revisión de las principales pruebas de carga realizadas a lo largo de la historia para el análisis de estructuras laminares reticulares de madera deformadas elásticamente, centrandó el estudio en los procedimientos empleados y la evaluación de su comportamiento. Este análisis busca comprender las principales estrategias utilizadas, haciendo énfasis en los métodos empleados para la aplicación de la carga y medición de los desplazamientos.

## 1.1 Essen model

Prueba de carga realizada en 1962, como parte de las investigaciones iniciales sobre gridshells llevadas a cabo por Frei Otto y su equipo en el Instituto de Estructuras Ligeras de Stuttgart. (Liddell. I., 2020). La prueba de carga (Fig. 1.01) pretendía analizar con un modelo físico a escala el comportamiento estructural de uno de las primeras gridshells deformadas elásticamente construidos hasta la fecha, conocida como The Essen Gridshell (Fig. 1.02).



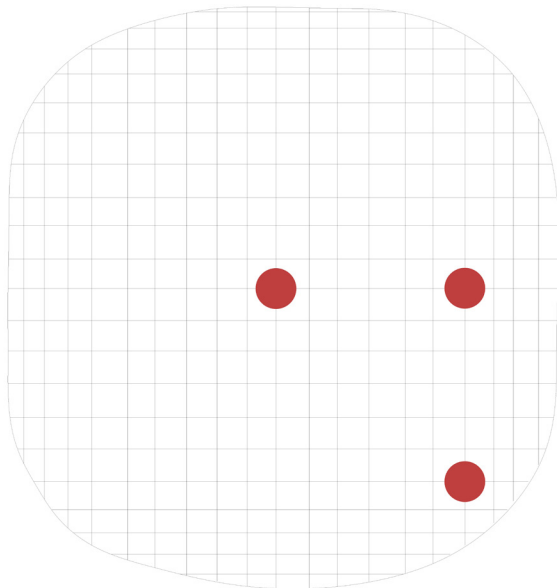
[Fig. 1.01] Prueba de carga en el modelo de Essen



[Fig. 1.02] Estructura de prueba en Essen.

*Datos básicos del modelo*

- Maqueta de Perspex a escala 1/16.
- Dimensiones del modelo: 93 x 93 x 30.5 cm<sup>3</sup>.
- Secciones de las láminas: 3 x 1.7 mm<sup>2</sup>.
- Uniones: diferentes configuraciones según la prueba de carga
- Método de aplicación de la carga: mediante clavos de 12.5 g colgados en todos los nudos, combinados con carga puntual adicional en puntos concretos (Fig. 1.03).
- Método de medición de la deformación: comparador analógico.



[Fig. 1.03] Esquema en planta del pabellón de Essen mostrando los puntos donde se aplicó la carga adicional.

*Descripción de la prueba de carga*

El objetivo fue evaluar el comportamiento estructural de la estructura bajo cargas distribuidas y puntuales, con diferentes soluciones de unión y triangulación, midiendo la deformación y llevándola al colapso.

Se probaron diferentes configuraciones de unión, con diferente rigidez rotacional, y la inclusión o no de la triangulación de los recuadros:

- Uniones con pasadores, rotación libre.
- Uniones pegadas, sin rotación.
- Uniones con pasadores y tirantes que permitían la rotación.
- Uniones pegadas con tirantes de nailon en los nudos.

Las cargas incluyeron una carga distribuida uniformemente constante y una carga puntual que se incrementaba progresivamente, aplicada en los tres puntos a estudiar: centro, esquina y lateral.

Las deformaciones se midieron en cada incremento de carga hasta el colapso de la estructura.

En la configuración con uniones con pasadores y la carga aplicada en el punto de esquina presentó la carga de colapso más baja debido a grandes desplazamientos laterales que produjeron el fallo prematuro. Al añadir rigidez diagonal en los recuadro mediante tirantes, la estructura se fortale-

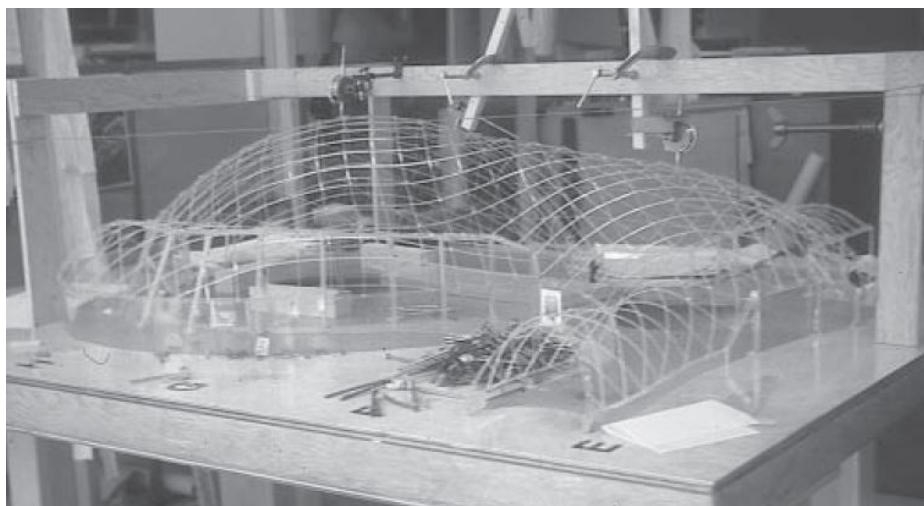
ció en este punto, aumentando la capacidad de carga y reduciendo las deformaciones previas al colapso.

La adición de rigidez diagonal incrementó la carga última y disminuyó las deformaciones previas, haciendo que el colapso fuese más repentino. La configuración con la fuerza aplicada en el punto central mostró cargas de colapso más uniformes, siendo menos propensa a grandes desplazamientos.

La prueba de carga del modelo permitió identificar los puntos críticos de aplicación de carga y estimar las cargas críticas.

### 1.2 Multihalle model

Prueba de carga sobre modelo a escala (Fig. 1.04) diseñada por Frei Otto y su equipo para el análisis estructural del *Multihalle* en Mannheim (Fig. 1.05) construido en 1975 para la Bundesgartenschau (Liddell. I., 2020), una de las gridshells de mayor tamaño construida hasta la fecha, alcanzando 60 m de luz en el espacio central.



[Fig. 1.04] Prueba de carga en la maqueta del Multihalle

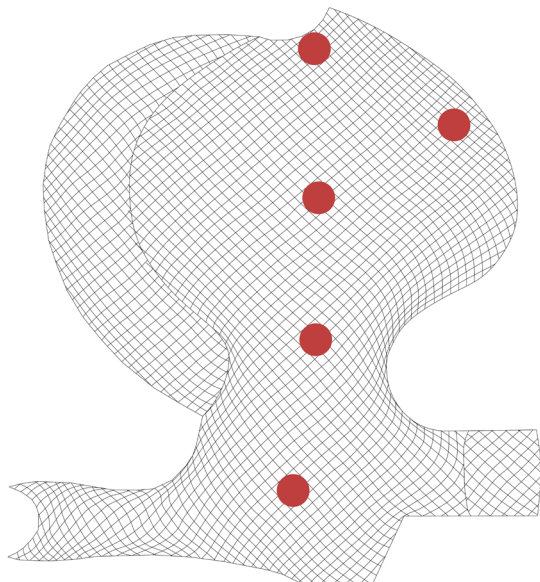


[Fig. 1.05] Vista aérea del Multihalle completado.

#### *Datos básicos del modelo*

- Maqueta de Perspex a escala 1/60.
- Dimensiones del modelo: 140 x 140 cm<sup>2</sup>.

- Sección de las láminas:  $1.4 \times 2.6 \text{ mm}^2$ .
- Uniones: diferente según el caso, con pasadores sin tirantes y pasadores con tirantes.
- Método de aplicación de la carga: mediante clavos de 12.5 g colgados en los nudos, combinados con carga puntual en 5 puntos estratégicos (Fig. 1.06).
- Método de medición de la deformación: comparador analógico.



[Fig. 1.06] Esquem en planta del Multihalle mostrando los puntos donde se aplicó la carga.

#### Descripción de la prueba de carga

El objetivo fue predecir la carga de colapso utilizando la maqueta y simulaciones computacionales, sin hacer colapsar el modelo físicamente. Fue un proceso similar a la prueba de carga del *Essen model*.

Se probaron dos tipos de nudos: con pasadores sin tirantes y con pasadores con tirantes.

Las cargas se incrementaron progresivamente, formadas por una carga distribuida uniformemente y una carga puntual aplicada en los puntos a estudiar.

Las pruebas compararon la respuesta estructural con y sin tirantes diagonales, evaluando la influencia de estos en la capacidad de carga y en la deformación.

Los resultados mostraron que el modelo sin tirantes presentó una carga uniforme crítica de  $63 \text{ kgf/m}^2$ , mucho más pequeña que la que mostró el modelo con tirantes, cuya carga crítica aumentó a  $280 \text{ kgf/m}^2$ , destacando la importancia de la rigidez adicional proporcionada por los tirantes diagonales.

Las pruebas de carga sobre el modelo a escala demostraron ser muy útiles para validar y complementar los modelos computacionales, proporcionando información cualitativa sobre los modos de fallo y áreas críticas de la estructura.

### 1.3 Mannheim Multihalle

Prueba de carga realizada en 1975 durante la construcción del *Multihalle* en Mannheim diseñada por Frei Otto (Fig. 1.05). Tras la prueba de carga en el modelo a escala, se realizó otra a escala real una vez construida la estructura (Figs. 0.07 y 1.07), con el objetivo de validar el comportamiento estructural previsto. (Happold & Liddell, 1975).

[Fig. 1.07] Prueba de carga en la estructura construida del *Multihalle* Mannheim.



#### *Datos básicos*

- Estructura de madera a tamaño real.
- Dimensiones: 160 x 115 m<sup>2</sup>. Solo se utilizaron 500m<sup>2</sup> para la prueba.
- Sección de las láminas: 50 x 50 mm<sup>2</sup>.
- Uniones: nudos articulados con tirantes diagonales en algunas áreas para mayor rigidez.
- Método de aplicación de la carga: mediante bidones de 90kg colgados cada 9 nudos.
- Método de medición de la deformación: en pesos colgados a lo largo de la superficie. Se registró la cota a la que se situaba antes y después de la carga. Medición en 14 puntos seleccionados.

#### *Descripción de la prueba de carga*

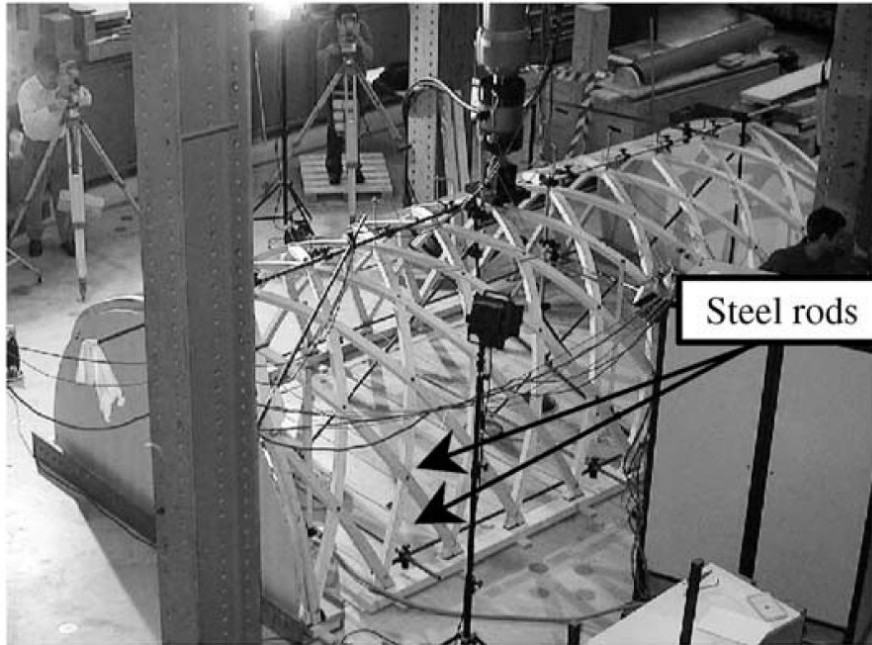
El objetivo fue verificar la estabilidad global y predecir la carga de colapso sin comprometer la estructura real.

Las pruebas se realizaron en condiciones controladas para observar las respuestas locales y globales de la estructura.

Los resultados de la prueba predijeron modos de colapso relacionados con la falta de rigidez en algunas zonas, lo que se corrigió reforzando las conexiones diagonales. El uso de pruebas físicas junto con simulaciones computacionales permitió ajustar los parámetros de diseño, aumentando la capacidad de carga y reduciendo las deformaciones.

### 1.4 Cylindrical ribbed shell

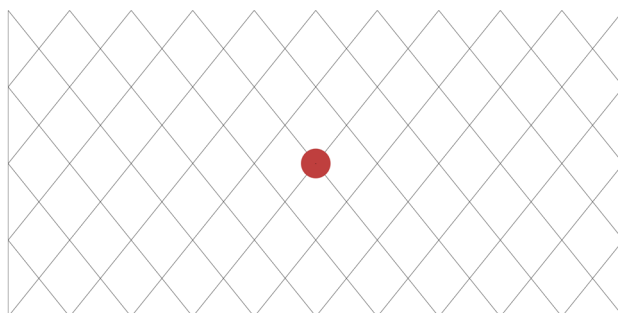
Prueba de carga realizada en el IBIOS (Laboratory for Timber Constructions) de la EPFL (École polytechnique fédérale de Lausanne) en la década de los 90 sobre una estructura de superficie cilíndrica (Fig. 1.08). Se llevó a cabo como parte de investigaciones para el desarrollo y validación de modelos computacionales para gridshells. La investigación incluyó experimentos físicos y simulaciones computacionales para evaluar el comportamiento estructural bajo cargas controladas. (Natterer et al, 2002).



[Fig. 1.08] Prueba de carga de la estructura Cylindrical Ribbed shell

#### Datos básicos

- Prototipo de madera.
- Dimensiones: 500 x 250 cm<sup>2</sup>.
- Sección de las láminas: 70 x 8 mm<sup>2</sup>.
- Uniones: varias láminas de madera superpuestas atornilladas con tornillos de 3.5 mm y pasadores de 8 mm en los crucesas.
- Método de aplicación de la carga: carga puntual en el nodo central de la estructura aplicada con un Pistón (Fig. 1.09).
- Método de medición de la deformación: estaciones totales. Medición para los nudos de un cuarto de la estructura, aprovechando la doble simetría de la estructura.



[Fig. 1.09] Esquema en planta de la estructura Ribbed Shell mostrando el punto de aplicación de la carga.

### *Descripción de la prueba de carga*

El objetivo fue validar los modelos computacionales desarrollados previamente para predecir deformaciones y modos de fallo.

Se realizaron ciclos de cargas progresiva de 1.2kN hasta 1.76kN para evaluar el comportamiento en régimen elástico del sistema.

Se tomaron medidas desde 3 posiciones diferentes, pero siempre sobre el mismo cuarto de estructura.

Los resultados de la prueba de carga fueron similares a los que se habían previsto en las simulaciones, con un error máximo del 12.4%. Se identificaron deslizamientos no lineales en las uniones bajo máximas deformaciones, mientras que las uniones cerca de los soportes mantuvieron un comportamiento lineal. Los resultados confirmaron la validez del modelo computacional.

### **1.5 Geodesic ribbed shell**

Prueba de carga realizada en el IBOIS en 2006. Como continuación de las investigaciones anteriores, se desarrolló un programa llamado GEOS para diseñar estructuras laminadas reticulares de madera de formas libres construidas mediante curvas geodésicas. La estructura ensayada (Fig. 1.10) formó parte de un estudio para demostrar la fiabilidad del programa. (Pirazzi & Weinand, 2006).



[Fig. 1.10] Prueba de carga de la estructura Geodesic Ribbed shell.

### *Datos básicos*

- Prototipo de madera.
- Dimensiones de la estructura: 8 x 3 x 2.06 m<sup>3</sup>.
- Sección de las láminas: 12 x 60 mm<sup>2</sup>.
- Uniones: varias capas de láminas continuas superpuestas, conectadas con tornillos de 4 mm cada 50 mm y pernos de 10 mm en los nudos.
- Método de aplicación de la carga: mediante un cabrestante (Fig. 1.12) conectado a puntos específicos en la estructura, con fuerzas normales a la superficie (Fig. 1.14).

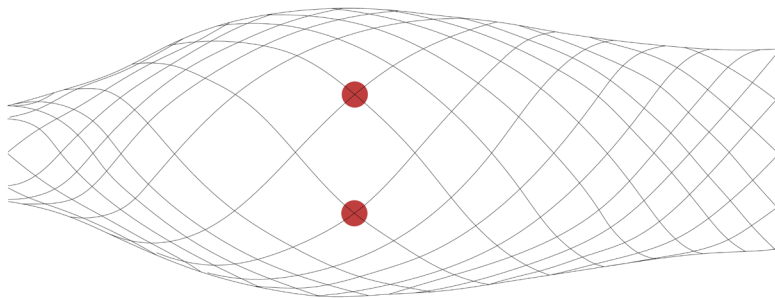
- Método de medición de la deformación: Se utilizaron comparadores (Fig. 1.11) para medir la deformación en 7 nudos.



[Fig. 1.11] Comparador como sistema de medición de los desplazamientos. (izq.)

[Fig. 1.12] Prueba de carga con dos cargas puntuales. (ctro.)

[Fig. 1.13] Medición de la carga. (dcha.)



[Fig. 1.14] Esquema en planta de la Geodesic Timber Rib Shell mostrando uno de los puntos donde se aplicó la carga.

### Descripción de la prueba de carga

El objetivo fue evaluar el comportamiento estructural del prototipo bajo condiciones reales y compararlas con el *software* GEOS. Para ello: se realizaron pruebas de carga en dos etapas de la construcción: antes y después de instalar las capas intermedias de relleno.

En ambas etapas, se aplicaron tres casos de carga simétrica con fuerzas puntuales en diferentes nudos.

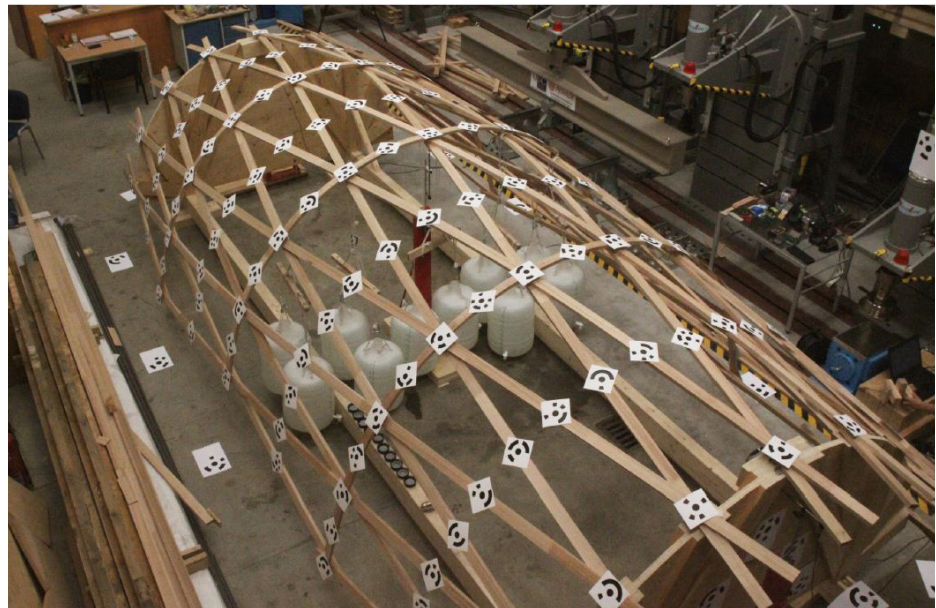
Las mediciones se centraron en 7 nudos alrededor de los puntos cargados, registrando la deformación normal a la superficie y la paralela a los puntos de carga.

Las conclusiones a las que se llegaron fueron relevantes. Antes de la instalación de las capas intermedias, la estructura mostró una deformación uniforme con considerable. Después de instalar las capas intermedias de relleno, la rigidez estructural aumentó significativamente, reduciendo las deformaciones a la mitad en la mayoría de los casos. Se concluyó que la doble curvatura de la cáscara mejoró la transmisión de las fuerzas normales, maximizando la estabilidad general. Se observó una buena concordancia entre la medición y el cálculo en GEOS, al menos para las cargas relevantes.

### 1.6 Triaxial elastic gridshell

Prueba de carga realizada en la Plataforma de Ingeniería de la Madera Estructural de la Universidad de Santiago de Compostela (Fig. 1.15) Lugo en 2022, como parte de investigaciones encaminadas a desarrollar un sis-

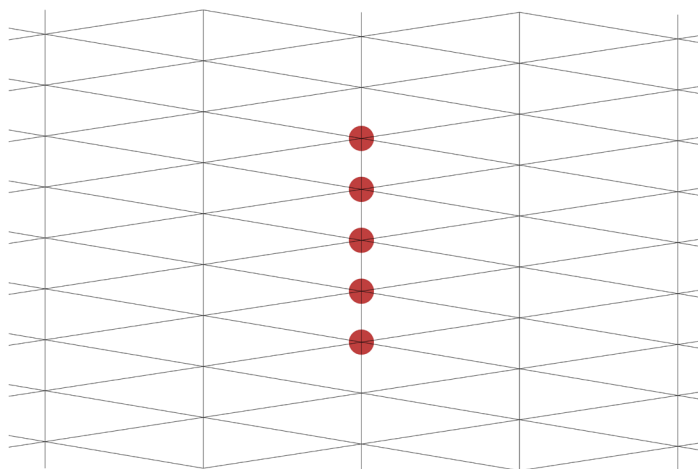
tema de estructuras laminares reticulares alargadas apoyadas sobre sus lados cortos, resueltas mediante tres direcciones de láminas flectadas (Lara-Bocanegra et al., 2022) (Ortiz-Sanz et al., 2022).



[Fig. 1.15] Prueba de carga de la Triaxial elastic gridshell.

#### Datos básicos

- Prototipo de madera.
- Dimensiones de la estructura: 4550 x 7000 mm<sup>2</sup>.
- Sección de las láminas: 60 x 25 mm<sup>2</sup>.
- Uniones: tornillos en los nudos.
- Método de aplicación de la carga: mediante bidones de 105 kg colgados en los 5 nudos centrales (Fig. 1.16).
- Método de medición de la deformación: mediante fotogrametría, utilizando los softwares comerciales PhotoModeler y Metashape.



[Fig. 1.16] Esquema en planta de la estructura TEL-gridshell mostrando los puntos de aplicación de la carga.

### Descripción de la prueba de carga

El objetivo fue medir los desplazamientos en todos los nudos de la estructura y los puntos medios de todas las barras para validar y ajustar el modelo numérico desarrollado.

Las pruebas se realizaron en dos etapas: sin carga, para disponer de la geometría real inicial y con carga, para disponer de la geometría deformada. En el proyecto fotogramétrico se capturaron imágenes desde dos trayectorias, alrededor de la estructura a nivel del suelo y desde un mástil para ángulos superiores.

Las mediciones registraron desplazamiento en 3D en los puntos seleccionados, utilizando dianas codificadas para maximizar la precisión.

Los resultados mostraron errores medios absolutos entre 0.46 y 1.98mm, con desviaciones estándar entre 0.22 y 1.08mm. Los modelos 3D obtenidos permitieron validar el comportamiento estructural y verificar el modelo numérico.

### 1.7 Spherical cap gridshell

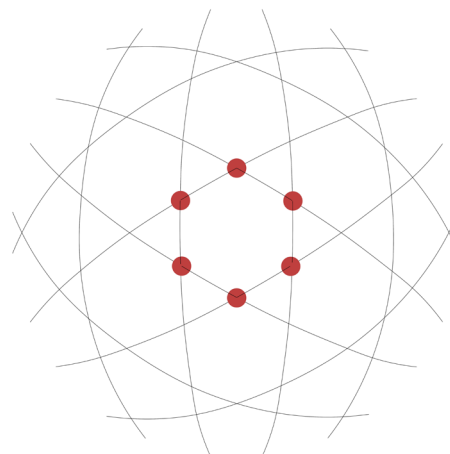
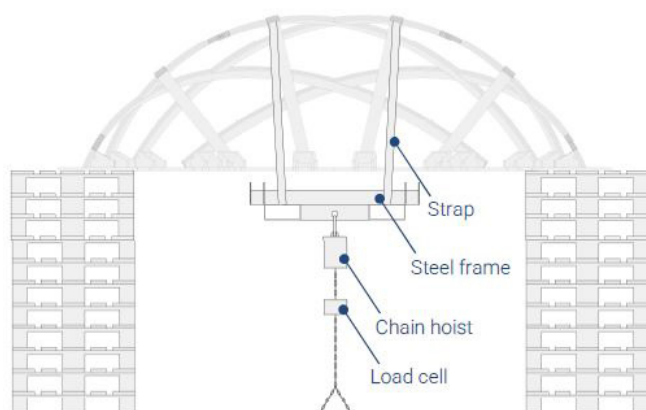
Prueba de carga realizada en el *Karlsruhe Institute of Technology* (Alemania) en 2024, sobre el modelo de un domo esférico, utilizando el sistema constructivo de las ribbed shells (Fig. 1.17). Esta prueba de carga se llevó a cabo para evaluar de la validez de dos modelos numéricos desarrollados (Andersson Largueche & La Manga, 2024).



[Fig. 1.17] Prueba de carga de la estructura spherical cap gridshell.

### Datos básicos

- Prototipo de madera.
- Dimensiones de la estructura: 3.2 x 3.2 x 1 m<sup>3</sup>.
- Sección de las láminas: 80 x 6 mm<sup>2</sup>.
- Uniones: dos capas de 10cm de espacio atornilladas entre sí mediante tornillos de 6mm en las uniones principales, y de 4mm en el resto.



[Fig. 1.18] Esquema explicativo de la aplicación de la carga. (izq.)

[Fig. 1.19] Planta de la estructura spherical cap gridshell mostrando los puntos de aplicación de la carga. (dcha.)

- Método de aplicación de la carga: mediante un sistema de poleas anclado al suelo y unido a la estructura mediante correas y un marco metálico (Figs. 1.17 y 1.18) en los 6 puntos más altos (Fig. 1.19). La carga se aplicó de modo gradual, añadiendo 1kN. Esta se controlaba mediante una célula de carga con monitor exterior para saber la carga aplicada.

- Método de medición de la deformación: escaneo mediante estación total, utilizando dos puntos de vista. Se analizaron puntos específicos en cada incremento y un escaneo completo cada 5 pasos.

#### *Descripción de la prueba de carga*

El objetivo fue evaluar la capacidad estructural y rigidez del prototipo bajo condiciones reales, analizando la influencia de las capas de relleno y verificando el ajuste de los modelos numéricos desarrollados. Para ello: se ensambló la estructura utilizando capas continuas, semicontinuas y de relleno.

La carga se aplicó gradualmente mientras se medía la deformación en los 6 nudos más altos del prototipo.

La medición continua de la deformación no fue posible debido a la técnica utilizada, por lo que la carga tuvo que aplicarse de forma incremental con pasos de carga de 1kN.

Después de la prueba, los resultados obtenidos se compararon con los del análisis numérico, revelando que el modelo inicial subestimó la capacidad de pandeo un 25%. Para explorar estas discrepancias, se ajustaron los parámetros del modelo, modificando la rigidez cortante de los acoplamientos a valores del 50% y 200% de la estimación inicial. Este ajuste mostró que la rigidez de las conexiones tiene un impacto directo en la capacidad de pandeo y subrayó la necesidad de modelar las conexiones con mayor precisión.



## 2 Sistemas de medición de desplazamientos

Según la revisión del estado de arte realizada en el capítulo anterior se ha comprobado que en las pruebas de carga de las gridshell se han utilizado diferentes sistemas y métodos de medición (comparador, escáner, estación total y fotogrametría), cada uno con características que los hacen más o menos adecuados según las necesidades específicas de cada una de las pruebas de carga. En este apartado, se analizan en mayor profundidad las características de los diferentes métodos de medición de deformaciones, prestando especial atención a los siguientes aspectos:

- Adecuación para el uso en maquetas: evaluación de su idoneidad para la utilización en modelos reducidos.
- Número de puntos a registrar: cantidad de puntos que nos permite registrar en una medición.
- Versatilidad de la técnica: capacidad de adaptarse a distintos tipos de objetos o contextos.
- Calidad de la medida: grado de precisión y resolución alcanzados.
- Preparación de la escena: requisitos previos necesarios para garantizar que el sistema de medición funcione correctamente antes de realizar las pruebas de carga.
- Coste del equipo: evaluación de la inversión económica necesaria para adquirir el equipo de medición.
- Tiempo medio por punto: tiempo necesario para la obtención de los datos de cada punto.

### 2.1 Comparador

Utilizado en las pruebas de carga de los modelos a escala de *Essen model* y *Mannheim Multihalle* y en la *geodesic ribbed shell*.

El comparador es un aparato de medición preciso para pequeñas diferencias de longitud, su tamaño lo hace idóneo para su utilización en maquetas. A parte de proporcionar una medida de gran precisión, la ofrece en tiempo real. Es un sistema de contacto sencillo que no necesita de preparación previa más allá de su sistema de apoyo. Sus principales limitaciones son la incapacidad de medir más de un punto a la vez y de registrar las coordenadas (solo mide distancias en una dirección), lo que hace que no sea útil para análisis estructurales en los que se necesita medir desplazamientos en el espacio en un gran número de puntos.

Existen dos tipos de comparadores, los analógicos (Fig. 2.01), que muestran la medición mediante una aguja en una escala graduada, y los digitales (Fig. 2.02) conocidos como LVDT (transductor de desplazamiento lineal), y

cuya medición se muestra en la pantalla de un ordenador. La precisión habitual de estos elementos es la centésima de milímetro o incluso mayor, en el caso de los digitales.



[Fig. 2.01] Comparador analógico (izq.).

[Fig. 2.02] Comparador digital, LVDT (dcha.).

## 2.2 Escáner

Utilizado en la prueba de carga *spherical cap gridshell*.

El escáner es un dispositivo que captura la geometría y color de objetos o entornos mediante la emisión de rayos láser, creando una nube de puntos 3D en cuestión de minutos, muy densa y con buena precisión, que se utiliza para generar modelos tridimensionales.

Puesto que cada punto es localizado en el espacio pueden obtenerse sus coordenadas.

Según el tamaño y aplicación pueden distinguirse dos tipos de escáneres, los escáneres de mano (Fig. 2.03) y los usados para la construcción (Fig. 2.04). Los escáneres de mano son portátiles y diseñados para capturar objetos de tamaño pequeño o mediano y pueden ser útiles para el escaneo de maquetas, con precisión de décima de milímetro o mayor. Los usados en la construcción son más robustos y diseñados para capturar estructuras y entornos más grandes.



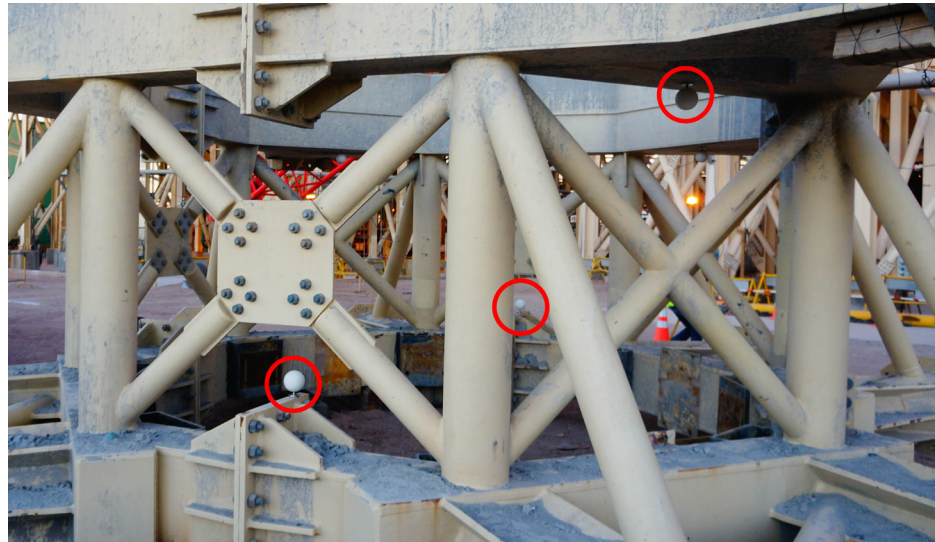
[Fig. 2.03] Escáner portátil (izq.)

[Fig. 2.04] Escáner para la construcción. (dcha.)

Se gran ventaja es que no necesita de preparación previa de la escena ni de elementos de soporte.

El gran inconveniente de este sistema para su aplicación en pruebas de carga radica en que al realizar dos escaneados diferentes del mismo objeto

(antes y después de aplicar la carga), los puntos obtenidos no son los mismos por lo que el cálculo de desplazamientos de puntos concretos no es un proceso trivial. Para evitar este inconveniente existen en el mercado diferentes elementos, como esferas de referencia y marcadores de puntos (Fig. 2.05), que permiten la localización en el espacio de puntos predeterminados. Estos elementos son muy costosos y tienen un tamaño demasiado grande para su uso en maquetas.



[Fig. 2.05] Objeto escaneado, señalado en rojo las esferas de referencia.

Además, dependiendo del tamaño del modelo (maqueta o pequeña estructura) el tipo de escáner y los elementos de referencia necesarios pueden ser diferentes lo cual reduce su versatilidad y aumenta el coste.

### 2.3 Estación total

Utilizado en la prueba de carga de *cylindrical ribbed shell*.

La estación total es un instrumento de medición (Fig. 2.06) que se emplea en topografía y construcción. Es capaz de medir ángulos horizontales y verticales y determinar distancias mediante láser u ondas electromagnéticas.

Es un sistema de medición versátil, con una alta precisión de medición,, utilizado para controlar puntos concretos que requieren ser marcados. Sus principales limitaciones son su elevado coste y su distancia mínima de trabajo de 0.9m, que puede implicar una distancia excesiva en pruebas de carga de modelos pequeños. Así mismo, el proceso de medición es más lento que otros sistemas.



[Fig. 2.06] Estación total.

## 2.4 Fotogrametría

Utilizado en la prueba de carga de *Triaxial elastic gridshell*.

La fotogrametría es una técnica utilizada para medir, mapear objetos o terrenos, creando modelos 3D (Fig. 2.07) a partir de múltiples fotografías tomadas desde diferentes ángulos.

Es una técnica económica, en cuanto a coste de equipos se refiere, que permite obtener coordenadas 3D de gran número de puntos con facilidad. Además, mediante el uso de dianas muy económicas (impresas en cartulina) pueden obtenerse las coordenadas de los mismos puntos en diferentes situaciones de carga, lo que confiere una gran ventaja en relación a los escáneres.

El mismo equipo (Fig. 2.08) se puede utilizar para medir objetos grandes y pequeños, teniendo gran versatilidad para su aplicación en pruebas de carga tanto de grandes estructuras como de maquetas. Se puede conseguir una buena precisión de medida, la cual es función del tamaño de la escena y la calidad de la cámara utilizada, sin necesidad de equipos complejos. No obstante, requiere de una planificación detallada del proceso de fotografiado, de la preparación previa de la escena y del procesado de datos, lo que supone un consumo de tiempo a considerar.



[Fig. 2.07] Nube de puntos que se crea tras la toma de fotos. (izq.)

[Fig. 2.08] Cámara de fotos, herramienta utilizada la fotogrametría. (dcha.)



## 2.5 Ventajas e inconvenientes de los sistemas analizados

En los apartados anteriores se han descrito los aspectos fundamentales de los diferentes sistemas de medición de desplazamientos en relación con su idoneidad para su aplicación en pruebas de carga de modelos a escala. La tabla 1 resume de modo cualitativo las ventajas y limitaciones de cada una de ellas.

[Tabla 2.1] Comparativa de los métodos de medición de desplazamientos para su aplicación en pruebas de carga. (★★★=alta), (★★=media), (★=baja).

	Comparador	Escáner	Estación total	Fotogrametría
Adecuación para modelos pequeños	★★★	★★	★	★★★
Facilidad para medir un elevado número de puntos	★	★★★	★★	★★
Versatilidad	★★	★★	★★	★★★
Calidad de la medida	★★★	★★★	★★★	★★★
Facilidad de preparación de la prueba	★★★	★★★	★★★	★
Economía de equipo	★★	★	★	★★★
Velocidad del proceso de medición por punto medido	★★★	★★★	★	★★

Tras el análisis realizado se decidió optar por la fotogrametría como técnica para desarrollar un método de medición específicamente desarrollado para pruebas de carga de modelos a escala de láminas reticulares de madera, al ofrecer un buen compromiso entre calidad de medición, tiempo invertido y economía, además de ofrecer la posibilidad de utilizar el método desarrollado, tanto para modelos de pequeño tamaño (maquetas) como para estructuras de mayores dimensiones.



### **3 Desarrollo de método de medición de desplazamientos para pruebas de carga en modelos a escala**

#### **3.1 Modelo a escala utilizado**

Para el desarrollo de este trabajo se ha utilizado una maqueta existente en el Laboratorio de Estructuras de la ETSAM, resultado del trabajo realizado por los alumnos Marcos López Filoso, Mariano Quijada García, Víctor Manuel García Fernández y Eduardo José Gómez Torres, en la asignatura de la ETSAM Taller Experimental 2: Diseño y Fabricación Digital de Estructuras de Madera, durante el curso 23-24.

#### **3.2 Programas utilizados**

En la implementación del método se han utilizado los siguientes programas:

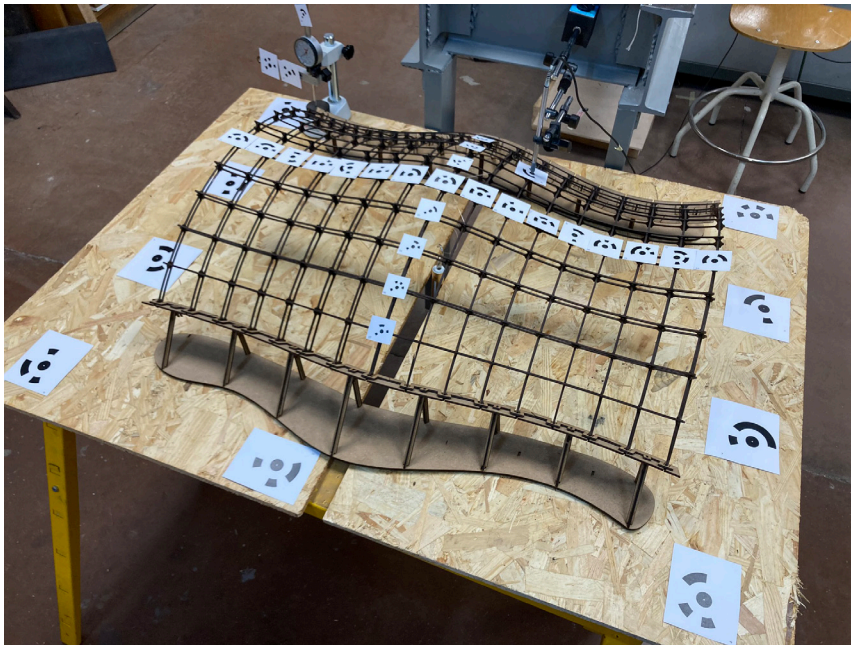
- Metashape, para la alineación y detección de las dianas y la respectiva generación y escalado de la nube de puntos en el espacio. Así mismo, se utiliza para la evaluación de los errores de medida.
- AutoCAD y Photoshop, se utilizaron para el elemento auxiliar (tiras de dianas calibradas).
- Cloud Compare, para referenciar y alinear las dos nubes de puntos correspondientes a los dos estados de las pruebas de carga (con y sin carga) es un mismo sistema de coordenadas.
- Rhinoceros, para la visualización de la nube de puntos, la reconstrucción de la estructura y la evaluación de errores de los elementos auxiliares utilizados.

#### **3.3 Pruebas preliminares**

A lo largo del trabajo se han llevado a cabo diferentes pruebas sobre el mismo modelo a escala, aplicando cambios sucesivos para mejorar el método y obtener el menor error posible. A continuación, se describen brevemente cada una de ellas.

- La primera prueba consistió en una evaluación inicial utilizando dianas de diversos tamaños ( $r = 0.3 \text{ cm}$ ,  $r = 0.5 \text{ cm}$  y  $r = 1 \text{ cm}$ ) con el propósito de determinar la dimensión que mejor se adaptaba a la estructura. Estas dianas se colocaron estratégicamente para cubrir los nudos de las láminas centrales, las cuales coincidían con los dos ejes de simetría de la estructura (Fig.3.01). Se incorporaron elementos auxiliares de medición, un transductor de desplazamiento lineal (LVDT) y un comparador que requería una manipulación cuidadosa para evitar el movimiento en ejes no deseados. La aplicación de carga se realizó mediante control por fuerza, mediante un

hilo de nylon para colgar un peso de los cuatro nudos centrales. Las imágenes se tomaron con un teléfono móvil (Iphone SE de segunda generación) sin el uso de un trípode.



[Fig. 3.01] Primera prueba.

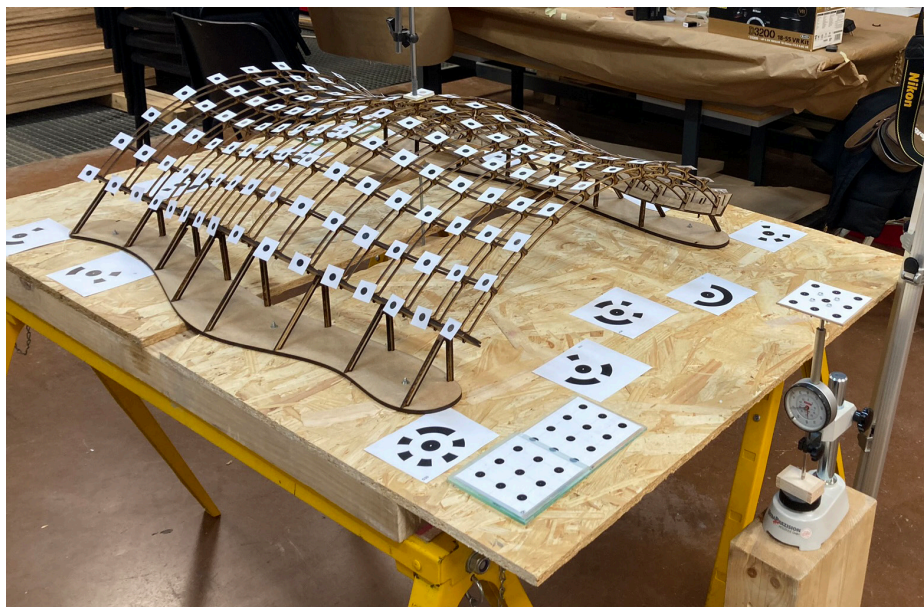
- En la segunda prueba se implementaron mejoras en la preparación del escenario. Se fijaron las bases de la maqueta a la mesa soporte para minimizar desplazamientos no deseados durante la aplicación de la carga. Además, se llevó a cabo una reorganización de las dianas, clasificándolas en codificadas y no codificadas según su ubicación. Las dianas colocadas sobre la maqueta necesitaban un tamaño más reducido ( $r = 0.5 \text{ cm}$ ) para su colocación en cada nudo por esto se optó por dianas no codificadas ( $r = 1 \text{ cm}$ ), mientras que las ubicadas en el tablero, se mantuvieron codificadas al ser importantes para el posterior proceso de escalado (Fig. 3.02).

El comparador se mejoró para evitar las rotaciones en ejes no deseados. La aplicación de carga se cambió a control por deformación, acortando un el hilo de nylon para inducir deformación, empleando un sistema primario. Para la toma de fotografías se usó una cámara y trípode.



[Fig. 3.02] Segunda prueba.

- En la tercera prueba se añadieron nuevos elementos auxiliares, se incorporaron tiras calibradas sobre vidrios. El método de aplicación de carga mejoró con un sistema mejor construido, contribuyendo a un control más preciso de la deformación. Se incrementó el número de imágenes tomadas y se aumentó el número de ángulos desde donde tomarlas (Fig. 3.03).



[Fig. 3.03] Tercera prueba.

### 3.4 Método propuesto

A continuación, se detalla el método desarrollado utilizando como referencia la última prueba de carga realizada, la cual fue la que obtuvo el menor error. De esta prueba a la prueba tres solo se modificó la cámara, cambiando el ajuste de profundidad de campo de 16 a 11, que mejoró la detección de dianas. La cámara utilizada fue una Nikon D3200 de 24 MP, con objetivo AF-S DX NIKKOR 18-55mm f/3.5-5.6G VR.

En la siguiente tabla se resume las fases del método.

Trabajos previos	Tamaño de las dianas
	Calibración de la cámara
	Aplicación de la carga
Preparación del escenario	Posicionamiento de las dianas
	Elementos auxiliares
Fotografiado y toma de datos	Estrategia de fotografiado
	Proyecto sin carga aplicada
	Proyecto con carga aplicada
	Toma de datos
Procesamiento de imágenes y evaluación de los resultados	Calibración de la cámara en Metashape
	Procesamiento de datos
	Escalado
	Evaluación de errores

[Tabla 3.1] Fases y subfases del método.

#### 3.4.1 Trabajos previos

Antes de estructurar el escenario, es necesario configurar algunos elementos externos que no implican el uso del modelo a escala que será utilizado.

### - Tamaño de las dianas

Las dianas son puntos de referencia visual utilizados para mejorar el procesamiento de imágenes. Estas dianas se utilizan para establecer posiciones conocidas. Su función es mejorar la precisión del modelo 3D generado al permitir que Metashape alinee las fotografías correctamente, determine escalas, orientaciones y coordenadas espaciales con mayor exactitud.

Según la distancia a la que se va a realizar el fotografiado, se debe determinar el tamaño mínimo de las dianas para que la cámara las capture con suficiente calidad, permitiendo al *software* Metashape detectarlas con precisión.

La tabla 3.2 contiene información para calcular el tamaño mínimo de las dianas en fotogrametría. En las primeras columnas se describen las dimensiones del sensor de la cámara en milímetros (ancho, largo y diagonal), junto con su resolución en píxeles, que determina el nivel de detalle que puede capturar. La focal real y mínima indican parámetros relacionados con el área de captura. La distancia fotográfica representa la separación entre la cámara y las dianas, mientras que el GSD (*Ground Sampling Distance*) define el tamaño que un píxel representa en el terreno. Finalmente, el número mínimo de píxeles especifica cuántos píxeles debe cubrir el diámetro de una diana para ser detectable, y el diámetro mínimo establece el tamaño requerido de las dianas.

[Tabla 3.2] Características de la cámara y del fotografiado para determinar la medida mínima de las dianas.

Sensor							GDS			Punto cental Diana	
Ancho mm	Largo mm	Diagonal mm	Píxeles Ancho	Píxeles Largo	Focal real mm	Focal min mm	Dist. Fotogr. m	GSD ancho	GSD largo	Núm. min. píxeles diámetro	Diámetro mínimo (cm)
23.2	15.4	27.85	6016	4000	24	37.3	0.5	0.008	0.008	60	0.48
23.2	15.4	27.85	6016	4000	24	37.3	2	0.032	0.032	10	0.32

Para usar la tabla, es necesario introducir las características del sensor y determinar la distancia de fotografiado. A partir de estos datos, se calcula el número mínimo de píxeles necesarios, lo que permite obtener el diámetro mínimo requerido para las dianas.

Durante la prueba, se trabajó con una distancia de fotografiado de 50cm a la diana más cercana, y se asumió una distancia de 2 m a la diana más alejada, dando como resultado un radio mínimo requerido de 0.32 cm para la diana más alejada y 0.48 cm para la más cercana. Sin embargo, se optó por un radio de 0.5 cm para garantizar una mayor precisión.

### - Calibración de la cámara

Para garantizar resultados óptimos, se deben calibrar los ajustes siguientes:

- La sensibilidad ISO: lo más baja que la cámara ofrezca.
- El enfoque: en modo manual, para evitar variaciones entre fotografías debido al movimiento del enfoque automático.

- La velocidad de obturación: En automático si la cámara dispone de esta opción; de lo contrario, se recomienda utilizar la velocidad más alta posible.

- La profundidad de campo (f): Los valores recomendados según el manual de *Metashape* son entre  $f/8$  y  $f/11$ , aunque pueden ajustarse según las necesidades específicas para obtener una imagen donde las dianas sean claramente nítidas.

Un elemento importante para la sesión de fotos es el trípode, que minimiza el movimiento al tomar fotografías. Lo ideal es utilizar un mando de disparo remoto para asegurarnos no mover la cámara en ningún momento, como se hizo en esta prueba. Si no se dispone de uno, se recomienda usar el temporizador de la cámara.

Tras la configuración de la cámara, se colocaron algunas dianas sobre la estructura para tomar fotos de prueba. Se revisaron en el ordenador para confirmar que las dianas son visibles con buena calidad. Si en las imágenes las dianas no son nítidas, se debe ajustar la configuración hasta la obtención la nitidez suficiente. Para evitar que el objetivo se mueva durante la sesión de fotos hay que bloquearlo con celo (Fig. 3.04).

Los ajustes de la cámara definidos en la prueba fueron:

- Sensibilidad a ISO 100.
- Enfoque manual.
- Velocidad en automático.
- Apertura con valor  $f/11$ .



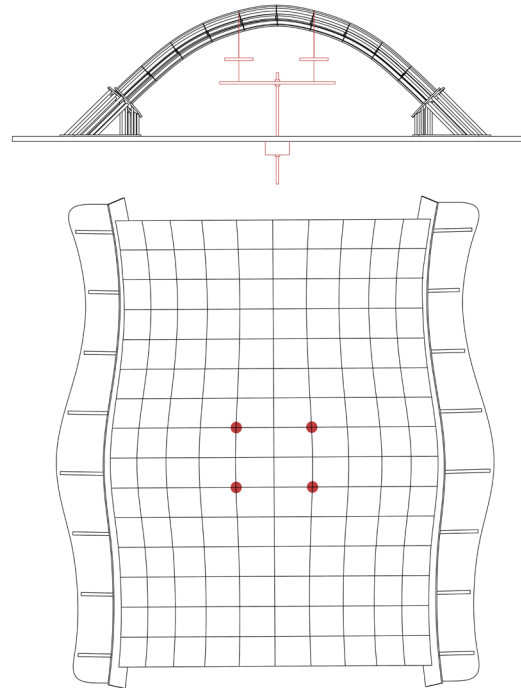
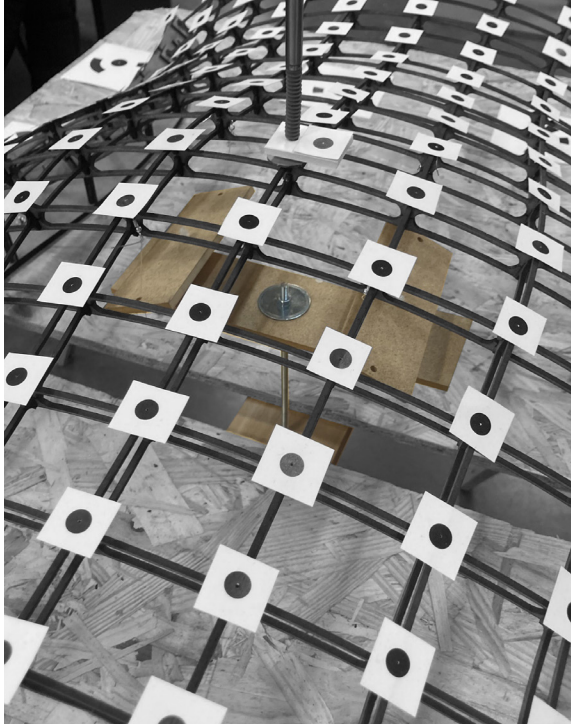
[Fig. 3.04] Cámara utilizada.

Cuando ya tenemos asegurada los ajustes de la cámara, es necesario hacer fotos de calibración. Ya que cada cámara ofrece unas distorsiones, que al ser identificadas por *Metashape*, ayudan a disminuir el error en la detección de las dianas (ver apartado 3.4.4 Calibración de la cámara en *Metashape*).

- Aplicación de la carga

Para esta prueba, se optó por aplicar la carga mediante control de deformación, de modo similar a como se hizo en geodesic ribbed shell (Fig.

1.12) y cap gridshell (Fig. 1.17), para asegurar que la posición de los puntos no varía durante la prueba de carga. Este proceso se llevó a cabo utilizando una barra roscada con topes (Fig. 3.05), que al acortarse, tensaba los cables conectados a los nudos de la estructura (Fig. 3.06), produciendo así la deformación deseada.



### 3.4.2 Preparación del escenario

Una vez que se determinan los tamaños de las dianas y tenemos los ajustes de la cámara iniciales, pasamos a la preparación del escenario.

#### - Posicionamiento de las dianas

Es imprescindible que las dianas tengan un recuadro blanco alrededor de ellas, no estén dobladas ni partidas para que no haya problemas en la detección en el Metashape. Se utilizaron dos tipos: codificadas y no codificadas (Fig. 3.07).

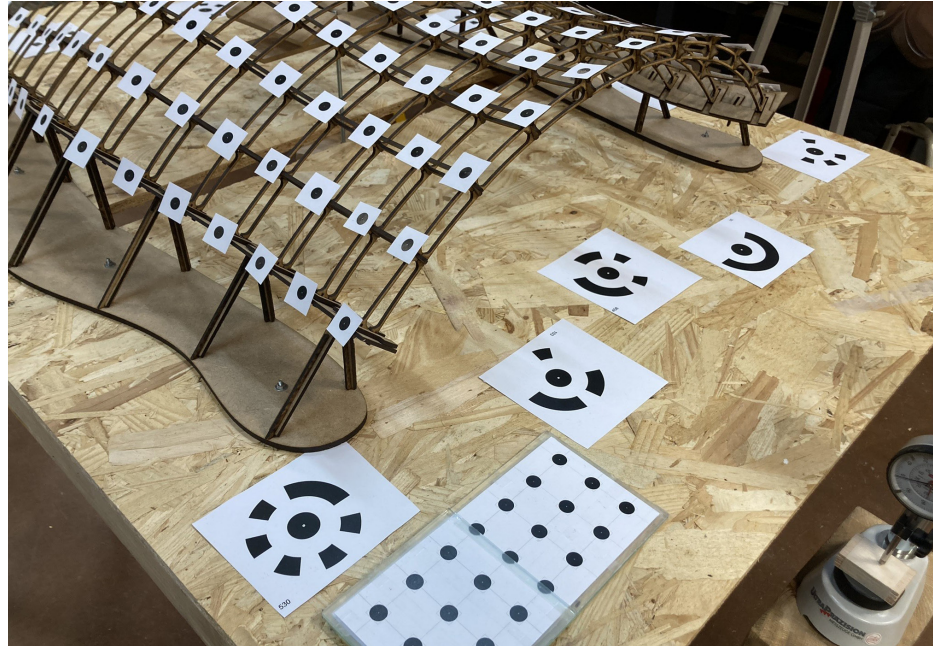
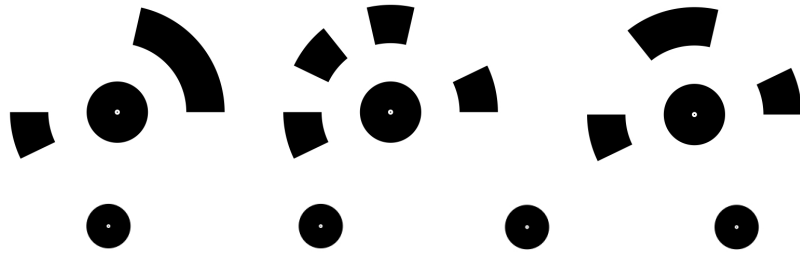
- Las dianas codificadas se utilizan para el escalado del modelo y la medición de distancias de control o chequeo. El software les asigna un nombre específico a cada diana codificada. Se colocan en el tablero (Fig. 3.08), al ser un elemento fijo no se mueve durante toda la sesión y no varía de posición durante la prueba. Estas dianas deben cubrir las dimensiones completas de la estructura, y las distancias entre ellas deben ser lo más larga posible para garantizar la precisión en las mediciones.

- Las dianas no codificadas se utilizan para marcar la posición de puntos específicos. En el escenario, se colocaron en cada nudo de la estructura (Fig. 3.09) y en elementos auxiliares que requerían dar una posición de puntos específicos.

[Fig. 3.05] Sistema de aplicación de la carga utilizado. (izq.)

[Fig. 3.06] Esquema del sistema de aplicación de la carga señalando los puntos donde se aplica. (dcha.)

[Fig. 3.07] Dianas codificadas. (arriba) y no codificadas. (abajo)



[Fig. 3.08] Dianas codificadas en el tablero de la escena.



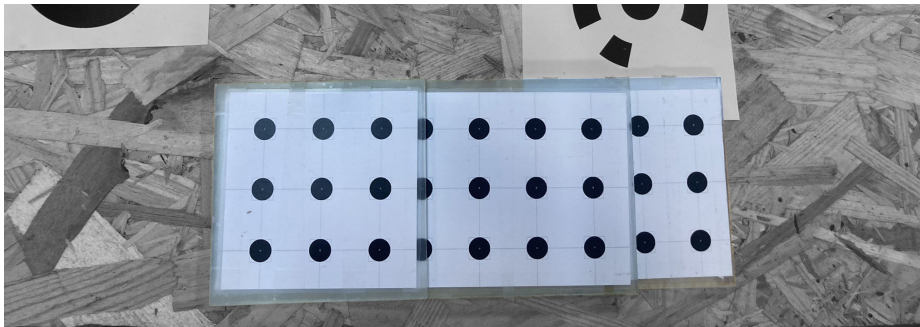
[Fig. 3.09] Dianas no codificadas sobre la estructura.

#### - Elementos auxiliares

Los elementos auxiliares se emplean para mejorar la precisión de las medidas y la comprobación de las mismas, por lo que son también elementos de chequeo.

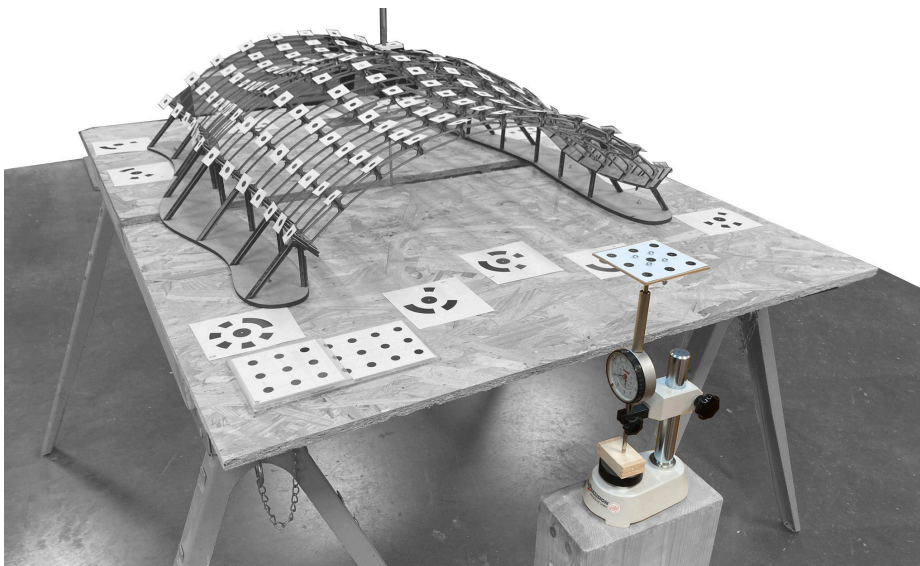
· Tiras calibradas: utilizando AutoCAD, se diseñan dianas situadas a distancias específicas. Posteriormente, se imprimen y se escanean nuevamente para medir, con ayuda de Photoshop, las distancias reales entre las dianas que se han impreso. Este elemento establece distancias de chequeo con mayor precisión en el plano XY. En la prueba, están posicionadas sobre otro elemento auxiliar, los vidrios (Fig.3.10).

· Vidrios: Se emplean como soporte de tiras calibradas. Estos vidrios de grosor uniforme y verificado mediante un calibre, proporcionan una referencia constante en el eje Z. Permite establecer puntos invariables en el plano vertical, completando las mediciones del plano XY obtenidas por las tiras calibradas.



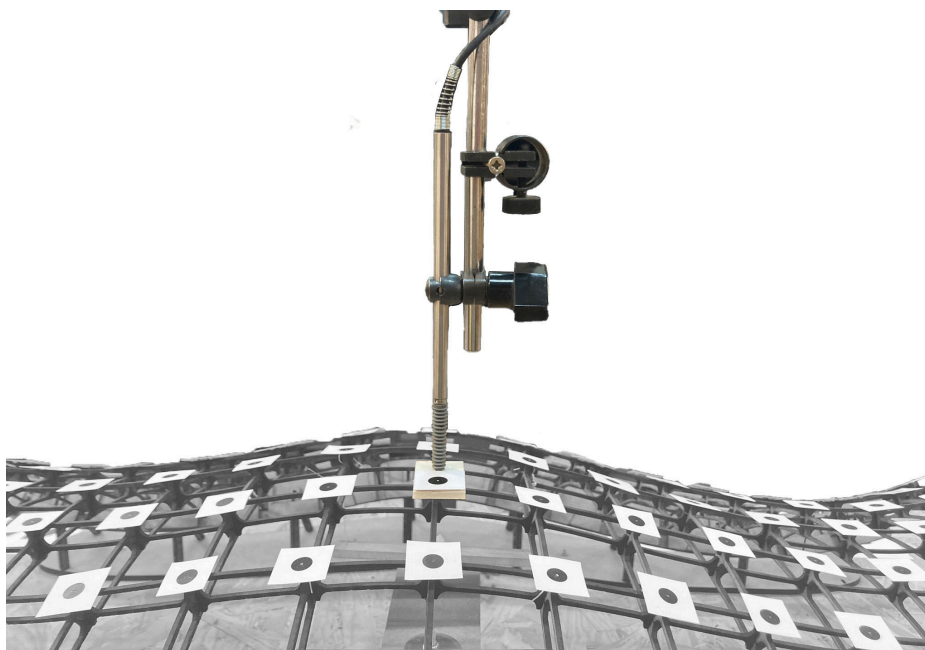
[Fig. 3.10] Elemento auxiliar:  
Tira calibrada sobre los vidrios.

· Comparador con dianas (Fig. 3.11): es un elemento fundamental para comparar las medidas entre los dos proyectos fotograméticos (sin carga y con carga). Proporciona una medida de gran precisión y permite verificar si, tras el procesamiento en el programa, dicha medida que recoge es correcta. Es decir, sirve como una referencia para la distancia de chequeo en el eje Z.

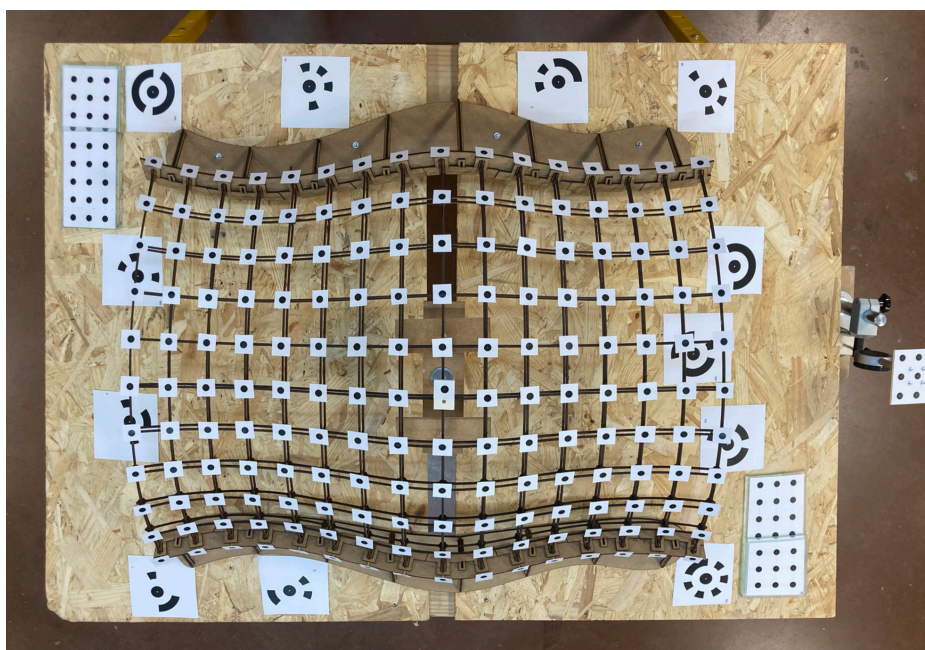


[Fig. 3.11] Elemento  
auxiliar: Comparador.

· LVDT: función similar que el comparador, pero se utiliza para medir puntos concretos de la estructura. En la prueba se colocó en el nudo central de la estructura (Fig. 3.12).



[Fig. 3.12] Elemento auxiliar: LVDT.



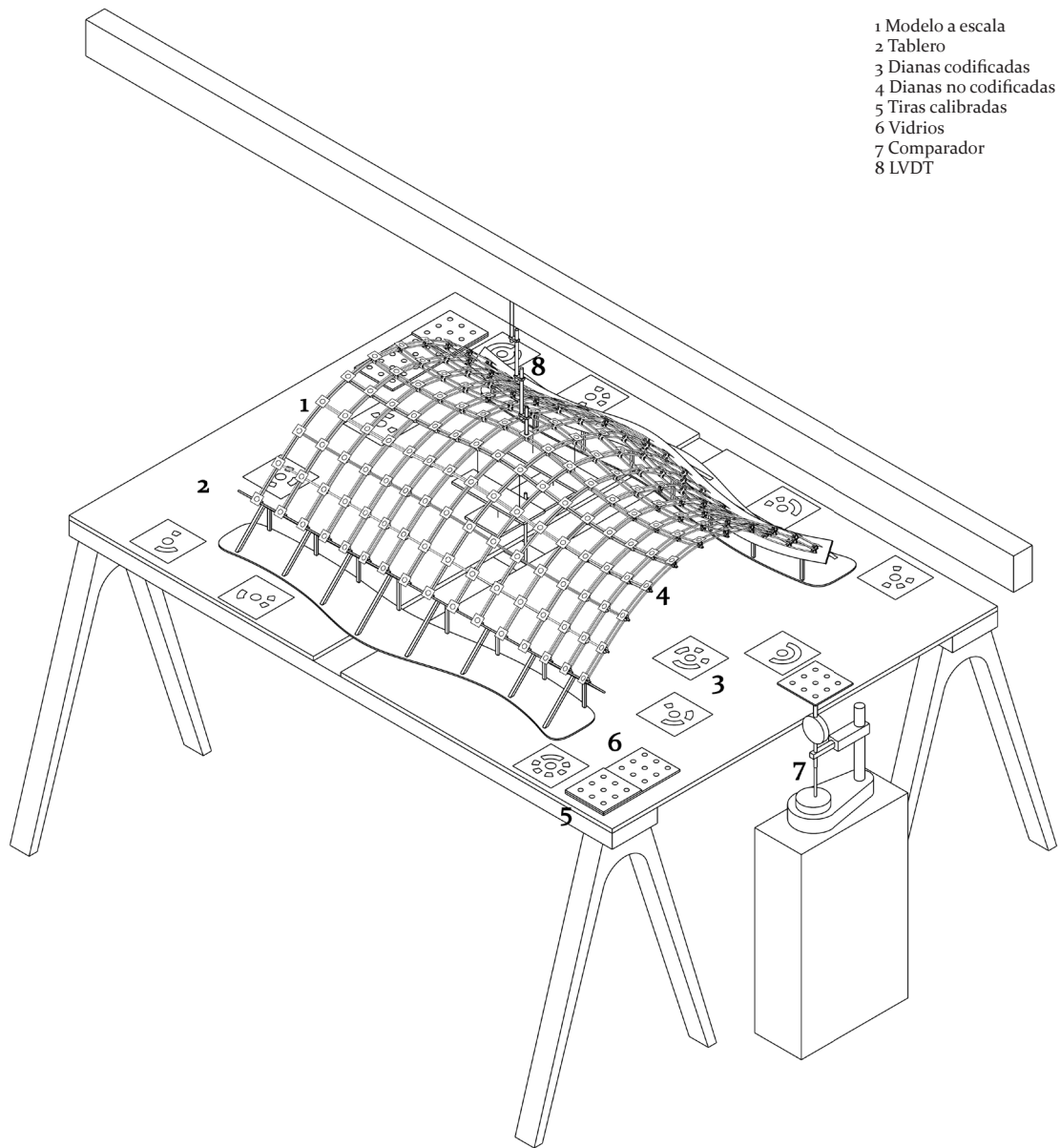
[Fig. 3.13] Resultado final de la preparación del escenario.

· Escenario diseñado

En el escenario para la prueba, se integraron los diversos elementos como se muestran en las Figs. 3.13 y 3.14.

1. Modelo a escala situado en el centro del escenario.
2. Tablero, soporte fijo durante toda la sesión que sirve como base para las dianas codificadas y los vidrios.
3. Dianas codificadas distribuidas en el tablero para cubrir las dimensiones de la estructura.
4. Dianas no codificadas ubicadas en los nudos de la estructura y en elementos auxiliares.
5. Tiras calibradas colocadas sobre los vidrios.
6. Vidrios distribuidos a ambos lados de la estructura y en una zona que no interfiere con ella, evitando confusiones en la detección de dianas.

7. Comparador apartado de la estructura para evitar las confusiones en la detección de dianas con las de la estructura
8. LVDT colocado en el nodo central de la estructura.



[Fig. 3.14] Representación gráfica del escenario.

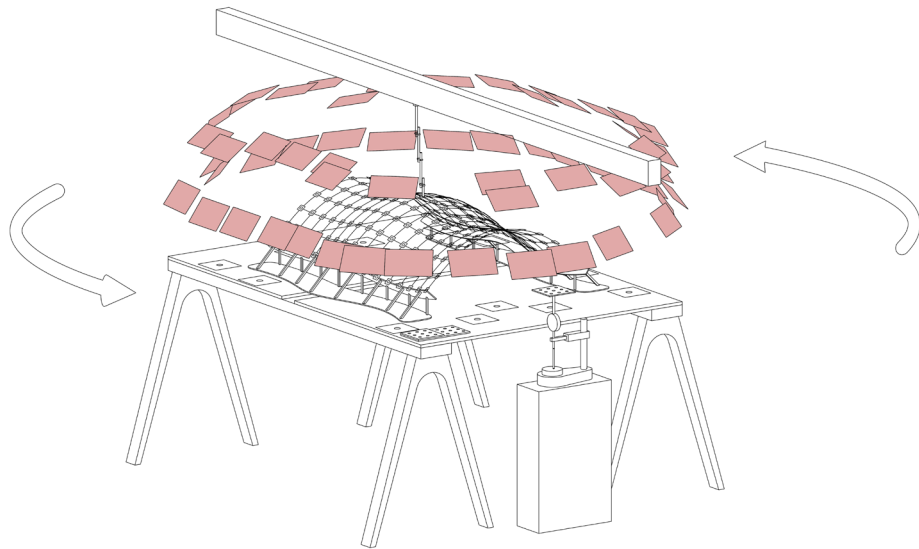
### 3.4.3 Fotografiado y toma de datos

Es necesario realizar dos proyectos fotogramétricos, es decir, dos sesiones de fotos completas y diferenciadas. Uno de la estructura sin carga y otro de la estructura cargada. Para cada proyecto se necesita un mínimo de 30 fotografías, asegurándose que las imágenes sean lo más superpuestas posibles.

#### - Estrategia de fotografiado

La trayectoria de fotografiado debe ser continua, con imágenes tomadas a intervalos próximos entre sí, asegurando un solapamiento entre fotografías consecutivas. Antes de lanzarse a hacer las imágenes, es necesario planificar el recorrido (Fig. 3.15) que se va a seguir con la cámara alrededor de

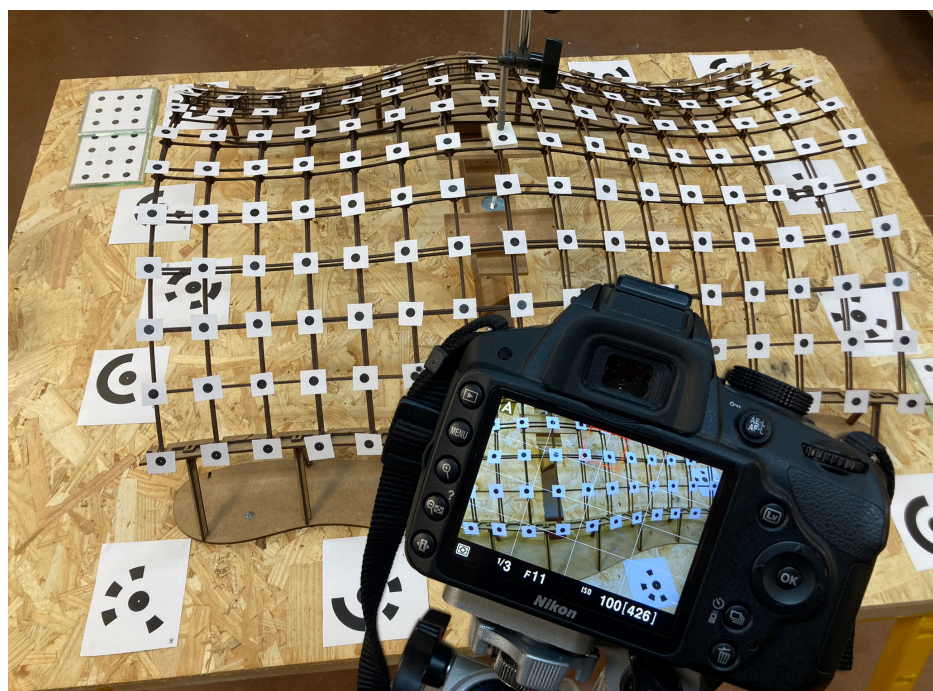
la estructura, definiendo el número de vueltas y los ángulos de inclinación de la cámara. Se recomienda mantener estos ángulos entre  $30-60^\circ$  respecto de los planos de las dianas.



[Fig. 3.15] Recorrido planteado para la toma de fotos.

#### - Proyecto sin carga aplicada

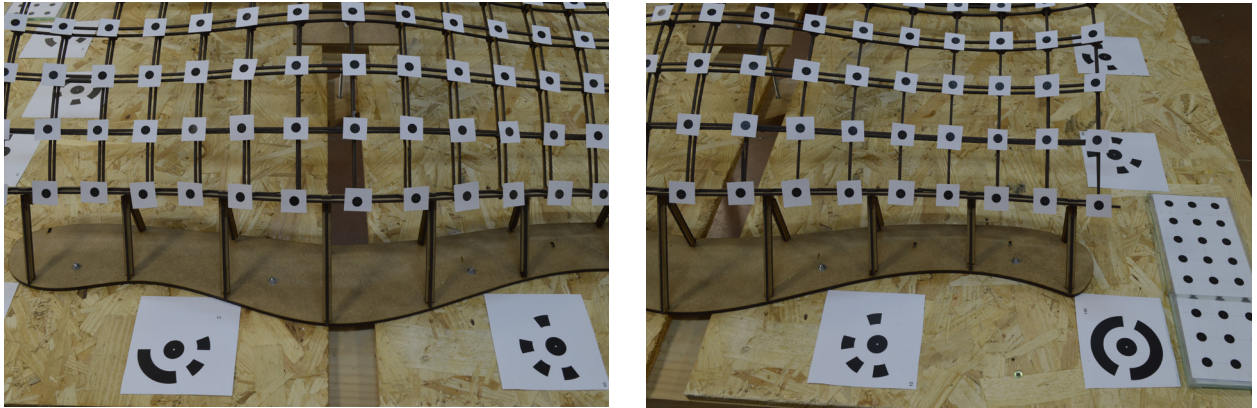
El primer paso consiste en la documentación fotográfica de los datos proporcionados por los elementos auxiliares de medición. En esta prueba se tomó fotografías de las lecturas del comparador y del LVDT. Posteriormente, se llevó a cabo la primera secuencia fotográfica (Fig. 3.16) siguiendo el recorrido previamente planificado, asegurándose en todo momento de mantener la distancia mínima de fotografiado de 50 cm entre la cámara y la diana más cerca. Una vez acabada la secuencia de fotos, se verifican nuevamente los datos registrados en los elementos auxiliares para asegurarse que no ha habido variación o, en caso de que estas existieran, saber el valor.



[Fig. 3.16] Fotografiado de la maqueta.

- Proyecto con carga aplicada

Tras la aplicación de la carga, se repiten los mismos pasos realizados en el proyecto anterior. Esto incluye el registro fotográfico inicial de datos de los elementos de apoyo, la secuencia de fotografías (Fig. 3.17) siguiendo de replicar el mismo recorrido planificado, y la posterior comprobación de las mediciones registradas por los elementos de apoyo para identificar posibles variaciones.



[Fig. 3.17] Imágenes de la maqueta mientras se realizaba el fotografiado del estado con carga.

- Toma de datos

Posterior a la captura de las imágenes, se procede a la recopilación de información proporcionada por los elementos auxiliares fundamentales para la validación del experimento. En esta prueba, se tomaron los siguientes datos:

- Las distancias entre las dianas que vamos a utilizar de control. Se miden utilizando una cinta métrica, asegurando pasar por el centro de cada diana. Para determinar el centro con más exactitud, en cada medición se toman dos lecturas por diana, una a cada lado del círculo, y se calcula el promedio para determinar el centro (Fig. 3.18). La distancia final se obtiene entre los centros calculados de ambas dianas.

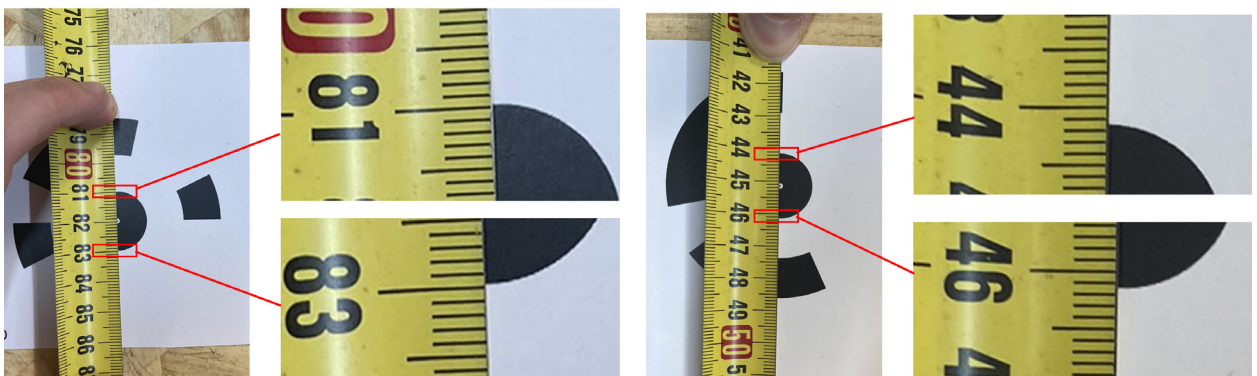
- Para las distancias entre las dianas que vamos a utilizar de chequeo se sigue el mismo proceso que las dianas de control.

- El grosor de los vidrios se mide mediante un calibre (Fig. 3. 19).

- Comprobación de los datos del LVT en el proyecto sin carga y en el proyecto con carga (Fig. 3.20).

- Comprobación de las medidas proporcionadas por el comparador en el proyecto sin carga y en el proyecto con carga (Fig. 3.21).

[Fig. 3.18] Medición de la distancia entre las dianas 10 (izq.) y 11 (dcha.).





[Fig. 3.19] Medición de los vidrios mediante un calibre. (izq.)

[Fig. 3.20] Medición del movimiento del comparador. Arriba el inicio del estado sin carga y abajo al final del estado con carga. (ctro.)

[Fig. 3.21] Medición del movimiento del LVDT. Arriba el inicio del estado sin carga y abajo al final del estado con carga. (dcha.)

[Fig. 3.22] Detección de distorsiones en las fotos de calibración de la cámara.

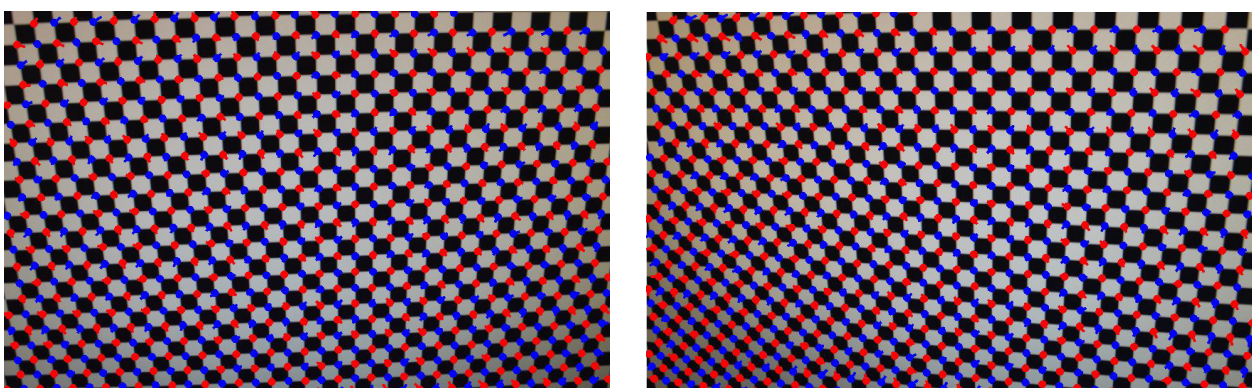
### 3.4.4 Procesado de imágenes y evaluación de datos

#### - Calibración de la cámara en Metashape

Tal como se menciona en el apartado 3.4.1 sobre la calibración de la cámara, cada dispositivo fotográfico presenta distorsiones propias que pueden afectar a la captura de información. El proceso de calibración de la cámara mediante fotos de calibración permite al *software* identificar y corregir, reduciendo así los errores asociados con la detección de imágenes.

Para realizar las fotos de calibración, se debe capturar una serie de fotografías de un tablero de ajedrez mostrado en una pantalla grande, preferentemente de televisión. En estas imágenes, el tablero debe ocupar el 100% del encuadre y debe incluir un mínimo de 10 cuadrados visibles en cada lado del marco. Es necesario tomar al menos 3 fotografías desde diferentes ángulos de perspectiva para garantizar una calibración adecuada.

Una vez tomadas las fotografías, estas se importan a Metashape. Es importante verificar que la configuración de la lente en el programa esté ajustada al modo «Frame». Durante el proceso, las esquinas de los cuadros del tablero deben aparecer alternando entre los colores rojo y azul (Fig. 3.22).



Este patrón indica que Metashape ha detectado correctamente las distorsiones de la lente y nos proporcionará los parámetros de calibración nece-

sarios, los cuales se aplicarán posteriormente al incorporar las imágenes al proyecto.

- Procesado de imágenes

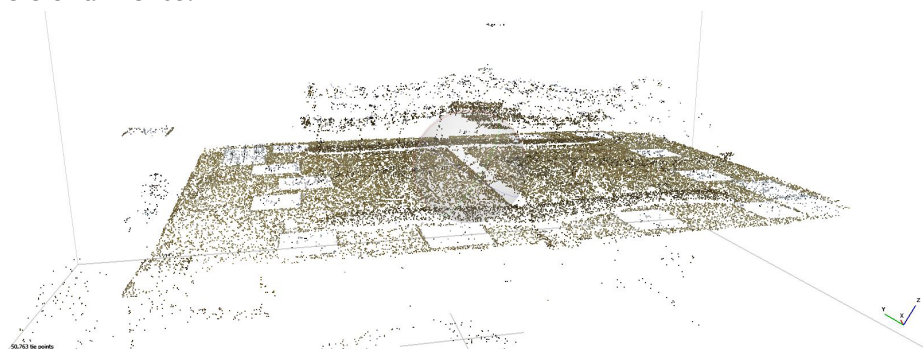
Se trabaja con los dos proyectos fotogramétricos de la maqueta por separado. El procesamiento de las imágenes sigue un procedimiento compuesto por los siguientes pasos:

- Se importan las imágenes y se cargan en Metashape, asegurándose de incluir los datos de la calibración de la cámara previamente obtenidos.

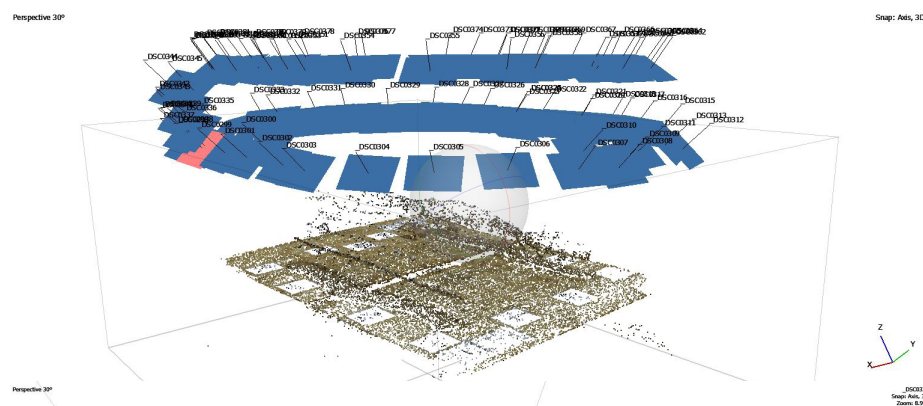
- Se lleva a cabo el proceso de alineación de las imágenes, que genera la nube de puntos (Fig. 3.23) situadas respecto desde donde se tomó la fotografía (Fig. 3.24 y Fig. 3.25).

- Una vez alineadas, se procede a la detección de las dianas codificadas y, posteriormente, las dianas no codificadas (Fig. 3.26 y Fig. 3.27).

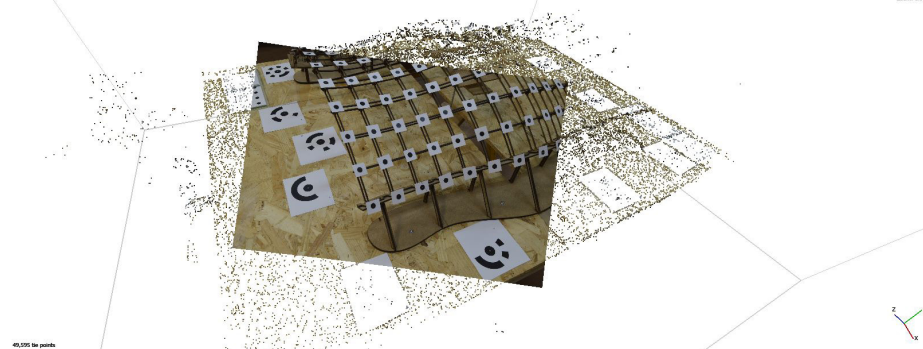
- Con todas las dianas detectadas y etiquetadas, es necesario realizar una limpieza de datos. Algunas dianas pueden presentar deformaciones, como formas elipsoidales en lugar de circulares, o deslumbramientos que interfieren con su correcta detección. Es importante eliminar de cada fotografía aquellas dianas que generen un aumento significativo en el error de posicionamiento.



[Fig. 3.23] Nube de puntos resultante de la alineación de las imágenes en Metashape.



[Fig. 3.24] Alineación de las imágenes en Metashape.

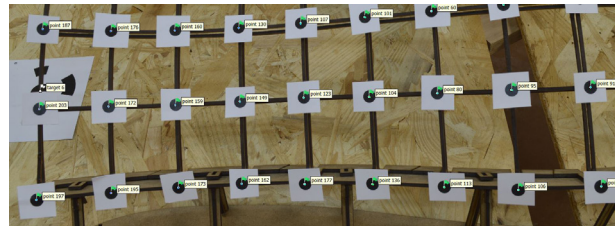
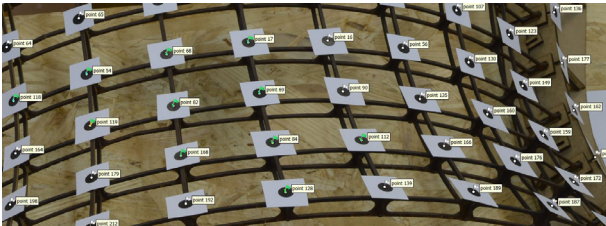


[Fig. 3.25] Nube de puntos desde la perspectiva de una cámara.

[Fig. 3.26] Detección de las dianas.



[Fig. 3.27] Captura de la detección de las dianas.

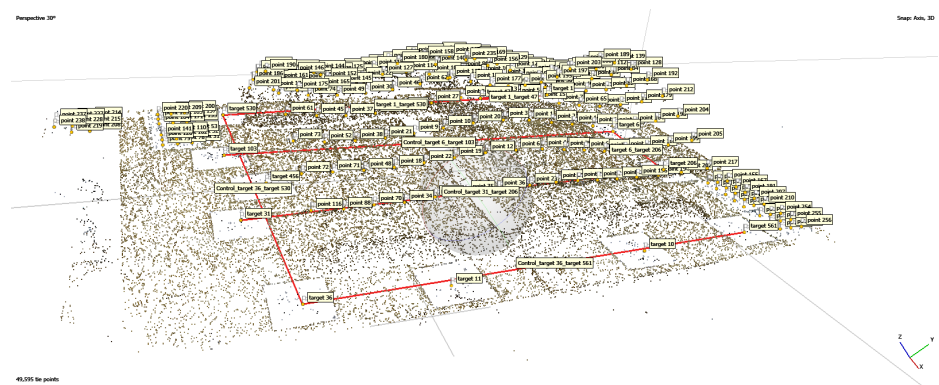


- Escalado

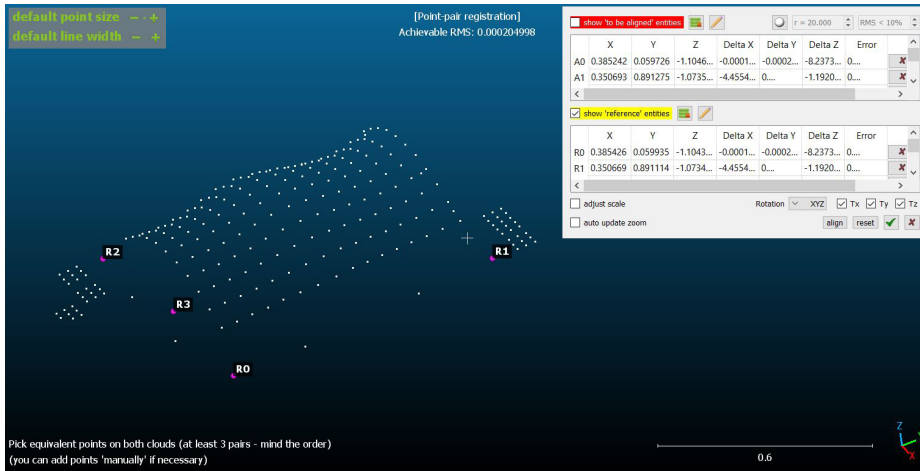
Tras la eliminación en cada fotografía de las dianas que incrementaban significativamente el error de posicionamiento, se procede al escalado de la nube de puntos obtenida. Este proceso se realiza utilizando las distancias de control de las dianas codificadas previamente registradas para dar dimensiones reales al modelo 3D (Fig. 3.28)

Una vez que las nubes de puntos de los dos proyectos escalados a las dimensiones reales, se realiza su alineación en un mismo sistema de coordenadas. Este paso se lleva a cabo en el *software* Cloud Compare, que permite seleccionar los puntos comunes de ambos proyectos y colocarlos en un sistema de coordenadas compartido (Fig. 3.29). La precisión aumenta al incrementar el número de puntos seleccionados. Es importante utilizar puntos que mantengan su posición invariable a lo largo de la prueba. En este caso, se emplean las dianas codificadas situadas en el tablero.

Las coordenadas de las nubes de puntos se encuentran en el Anejo.



[Fig. 3.28] Escalado en Metashape. En rojo las distancias de control y chequeo usadas para el escalado.



[Fig. 3.29] Unión del sistema de coordenadas en CloudCompare.

- Evaluación de errores

Una vez realizado todo el proceso solo nos queda valorar los errores para saber si el trabajo realizado es de buena calidad.

· Error de escalado

Indica la precisión en la representación de las dimensiones reales de la maqueta en el modelo digital (Tabla 3.3 y tabla 3.4).

Se calcula a través de la RMSE (Raíz del Error Cuadrático Medio), representa la desviación estándar entre los valores reales y los valores proyectados, es decir, mide la diferencia promedio entre estos valores. El RMSE es una medida que se acerca al cero cuanto más pequeños son los errores y penaliza más los errores grandes debido a su naturaleza.

Dianas (targets)	Medida real (mm)	Medidas Metashape (mm)	Error (mm)
36-530	755.9	755.71	-0.18
6-103	912.4	912.92	0.52
31-206	902.8	903.11	0.31
36-561	833.2	832.47	-0.73
6-206	224.1	223.95	-0.15
1-530	853.5	853.39	-0.11
1-47	204.5	204.48	-0.02
Error máximo			0.73
Error mínimo			0.02
Error medio			0.28
Error RMSE			0.11

[Tabla 3.3] Análisis de los errores en el escalado en el proyecto sin carga.

Dianas (targets)	Medida real (mm)	Medidas Metashape (mm)	Error (mm)
36-530	755.9	755.36	-0.54
6-103	912.4	912.78	0.22
31-206	902.8	903.15	0.35
36-561	833.2	832.85	-0.4
6-206	224.1	223.95	-0.15
1-530	853.5	853.19	-0.31
1-47	204.5	204.6	0.1
Error máximo			0.54
Error mínimo			0.1
Error medio			0.29
Error RMSE			0.21

[Tabla 3.4] Análisis de los errores en el escalado en el proyecto con carga.

Si observamos los diferentes valores de errores, se ven valores bajos, del orden de la décima de milímetro, lo cual es un indicador muy positivo de la precisión general del modelo.

El error medio tiene valores inferiores a 0.3 mm, lo que indica que las proyecciones están cerca de los puntos reales. Esto sugiere una alta exactitud de las estimaciones de la nube de puntos e implica que la desviación es muy pequeña.

Por otro lado, el RMSE también presenta errores aún más bajos, lo que indica que no hay errores de gran magnitud y que existe una variabilidad de los errores pequeña. Esto sugiere una alta consistencia en las predicciones. Su valor reducido implica que se mantiene una precisión de manera uniforme en toda la nube de puntos.

#### · Error de los elementos auxiliares

También se analizan los errores medios en los elementos auxiliares fijos, tanto en el primer estado como en el segundo. Además, se determinan los errores de la prueba gracias a los elementos auxiliares que nos proporcionan distancias de referencia, permitiendo una evaluación de la precisión global de la prueba (Tabla 3.5). Con estos errores calculados, se podrá evaluar el rendimiento del método.

Error	Proyecto sin carga	Proyecto con carga	Proyecto
Escalado	0.11 mm	0.21 mm	0.16 mm
Vidrios	0.6 mm	0.65 mm	0.63 mm
Tiras calibradas	0.12 mm	0.12 mm	0.12 mm
Comparador	-	-	0.5 mm
LVT	-	-	0.2 mm

[Tabla 3.5] Análisis de los errores de escalado y elementos auxiliares.

Se observa que todos los errores obtenidos son pequeños, más bajos que 1 mm, lo que indica un buen desarrollo del método. Esta precisión general sugiere que el proceso de medición y procesado ha sido altamente efectivo. Destaca que los errores más grandes se han producido en los vidrios y el comparador, ambos con el eje Z. Esta observación identifica áreas donde el método empleado tiene más dificultades y que sería positivo mejorar.

- Mejora respecto de la primera prueba de carga preliminar

En las tablas 3.6 y 3.7 se presentan los errores calculados en la primera prueba preliminar realizada para poder hacer un análisis completo de cuanto se ha mejorado respecto a esta prueba.

Dianas	Medida real (mm)	Medidas Metashape (mm)	Error (mm)
4-12	769.9	771.96	0.86
8-9	780.3	778.64	0.01
1-3	1017.5	1018.04	-0.70
8-12	1003.7	1004.14	0.64
Error máximo			0.86
Error mínimo			0.01
Error medio			0.55
Error RMSE			0.64

[Tabla 3.6] Análisis de los errores en el escalado en el proyecto sin carga de la primera prueba

Dianas	Medida real (mm)	Medidas Metashape (mm)	Error (mm)
4-12	769.9	771.96	2.06
8-9	780.3	778.64	-1.66
1-3	1017.5	1018.04	0.54
8-12	1003.7	1004.14	0.44
Error máximo			2.06
Error mínimo			0.44
Error medio			0.78
Error RMSE			0.44

[Tabla 3.7] Análisis de los errores en el escalado en el proyecto con carga de la primera prueba.

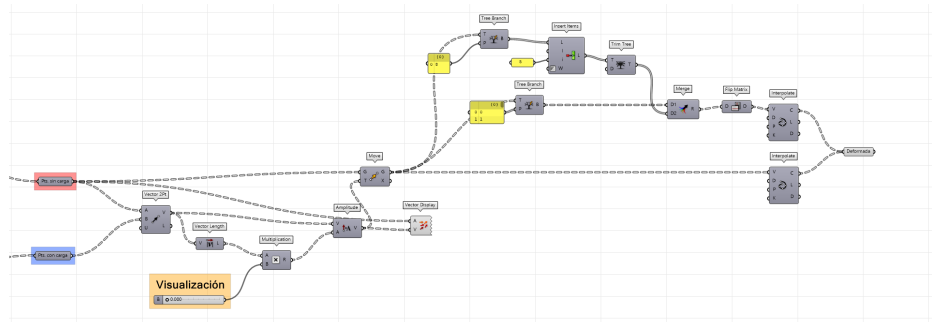
Con los errores de la primera prueba del trabajo (0.64 y 0.44 mm) y los errores de la última prueba realizada (0.11 y 0.21) podemos apreciar una reducción importante de la magnitud de los errores. Específicamente, los errores han disminuido en más de la mitad, lo que indica una mejora significativa en la precisión del método.

Esta reducción en los errores nos permite concluir que todas las mejoras implementadas han sido efectivas para minimizar el error, especialmente el error de escalado, que es el que se está comparando en este caso. El resultado es una mayor precisión y calidad en las medidas obtenidas.

## 4 Creación de algoritmo para la visualización de la deformada

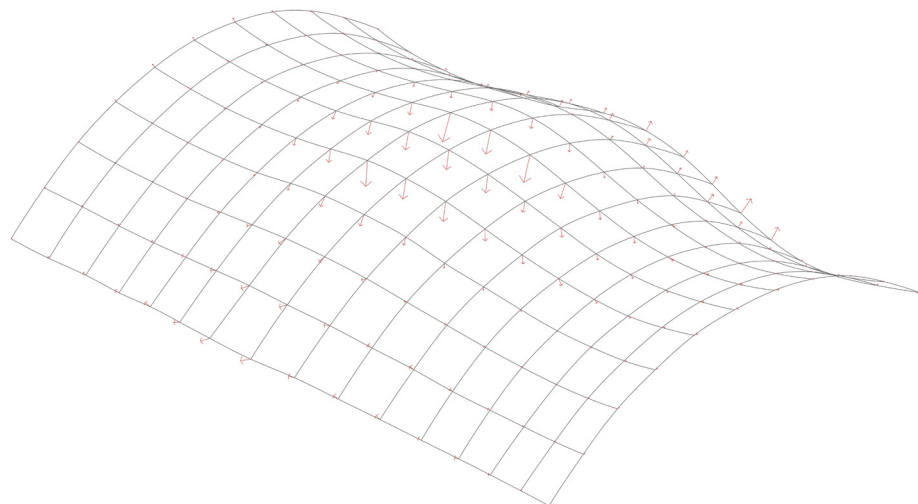
Una vez obtenido todos los puntos y sus coordenadas correspondientes en ambos estados, con carga y sin carga, mediante Rhinoceros y Grasshopper se desarrolla un algoritmo que tiene como objetivo facilitar la visualización y el análisis de la deformada de la estructura.

El algoritmo parte de calcular el vector desplazamiento de cada punto a partir de la diferencia de coordenadas de cada uno de ellos, en el estado sin carga y con carga. Tras obtener este vector, se utilizan los puntos del estado sin carga como puntos de referencia a los que se aplica un desplazamiento mediante el vector obtenido amplificado por un valor determinado por el usuario (Fig. 4.01).



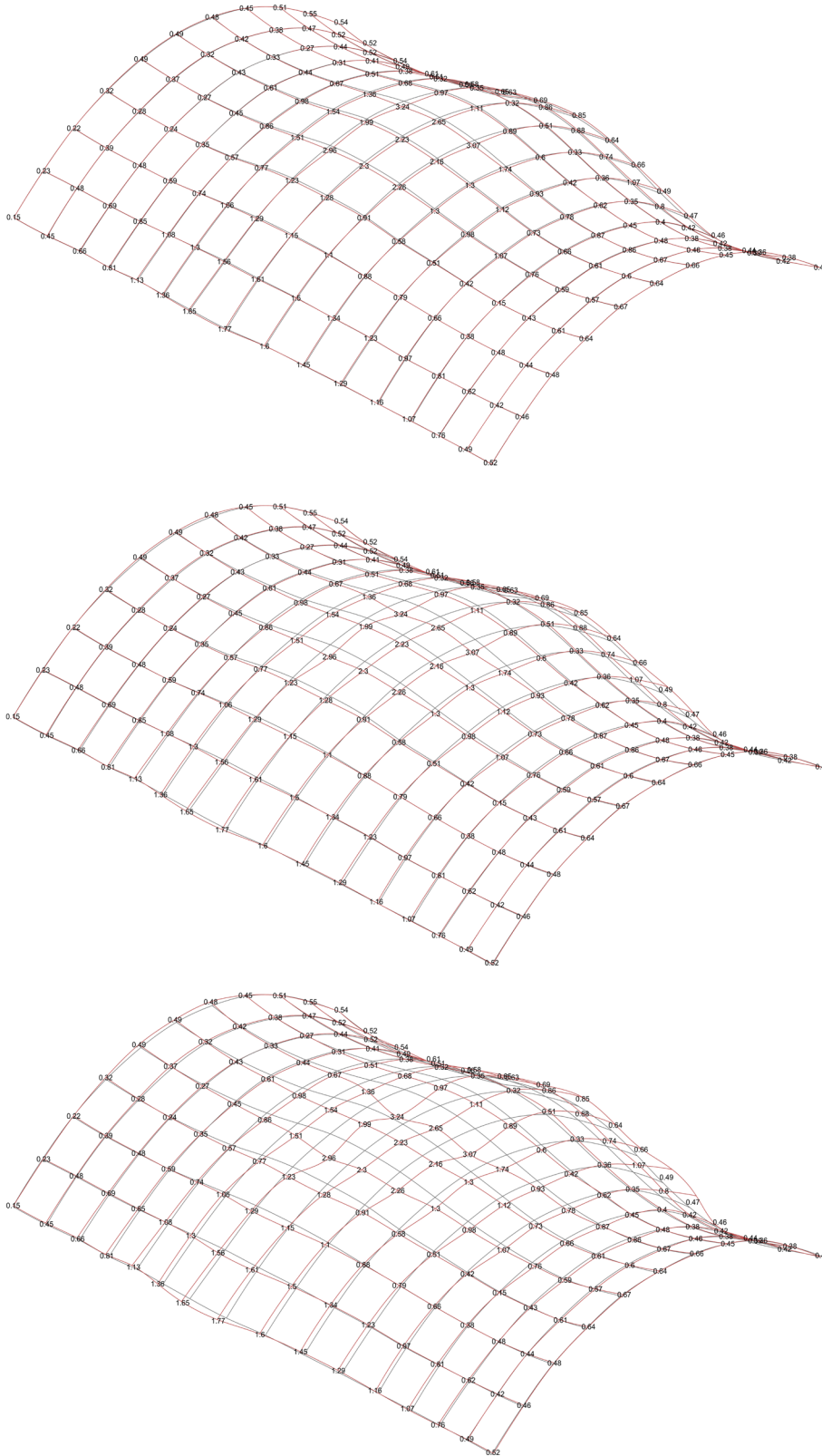
[Fig. 4.01] Algoritmo de Grasshopper utilizado.

La Fig. 4.02 muestra los valores vectores desplazamientos obtenidos en cada punto. A partir de la matriz de puntos, tanto de la posición inicial, como de la desplazada, se reconstruye la retícula de la estructura permitiendo visualizar simultáneamente la geometría original y la deformada.



[Fig. 4.02] Vectores desplazamientos obtenidos.

Mediante el cálculo del módulo del vector desplazamiento asociado a cada punto puede obtenerse la visualización de la magnitud de los movimientos asociados a cada nodo de la estructura. La Figura 4.03 muestra la geometría inicial del modelo con el valor en mm de los desplazamientos de cada nodo resultantes de la prueba de carga y la deformada para diferentes valores de amplificación de la deformada (2, 5 y 10 veces).



[Fig. 4.03] Visualización de la deformada (rojo) respecto al mallado inicial (gris). De arriba a abajo, el vector desplazamiento por valores  $x_2$ ,  $x_5$ ,  $x_{10}$ .

## Conclusiones

En el presente trabajo se desarrolla un método de bajo coste que permite medir con suficiente precisión los desplazamientos de todos los nodos en pruebas de carga de modelos a escala de *gridshells*. Así mismo, se crea un algoritmo que permite representar gráficamente la geometría inicial y deformada del modelo ensayado.

El análisis del estado del arte de las pruebas de carga más relevantes realizadas en *gridshells* de madera muestra que se han empleado técnicas y procedimientos muy diferentes para la aplicación y medición de fuerzas y desplazamientos.

La aplicación de la carga se ha llevado a cabo, fundamentalmente, mediante dos procedimientos: colgando elementos de los diferentes nudos o imponiendo desplazamientos en los nudos mediante tensores anclados a la base. El primero de ellos ofrece facilidad de ejecución, pero tiene el inconveniente de que las deformaciones crecen en el tiempo debido al comportamiento reológico de la madera, lo que dificulta su medición. El segundo, garantiza que la posición de los nudos se mantiene fija durante la ejecución de la prueba de carga, pero es más complejo y costoso de ejecutar.

Por su parte, para la medición de los desplazamientos se han utilizado técnicas muy dispares en las diferentes pruebas de carga analizadas, como comparadores, láser escáner, estaciones totales y fotogrametría. Un análisis comparativo, considerando diferentes aspectos como número de puntos a medir y tiempo empleado, precisión, economía de medios y versatilidad de aplicación en modelos de diferente tamaño pone de manifiesto que la fotogrametría ofrece una buena solución para el fin perseguido, el cual se toma como punto de partida en este trabajo.

El método de medición desarrollado basado en la fotogrametría se ha basado en la realización de diferentes pruebas, incorporando mejoras progresivas con el objetivo de reducir los errores de medición y facilitar la preparación de la escena. Los aspectos más importantes a cuidar para obtener buena precisión en la medición han sido: la aplicación de la carga mediante desplazamientos impuestos, la preparación de la escena con numerosos puntos de control redundantes en el plano XY y en Z, el incremento del número de fotografías y un gran solapamiento entre las mismas, y la inclusión de comparadores como elementos de control de gran precisión.

Los errores finales se han mantenido en rangos bajos, en el orden de las décimas de milímetros. Estos resultados muestran que el método desarrollado consigue una buena precisión y es adecuado para el objetivo perseguido.

Los mayores errores de medición se han producido en los elementos auxiliares colocados en la periferia de la escena (vidrios con dianas y comparador analógico) para no interferir en el fotografiado la estructura. Esto se debe, probablemente, a que estos elementos disponen de menos cantidad de fotografías y ángulos de fotografiado menos favorable. Sería deseable mejorar el método en este sentido para disminuir estos errores y aumentar más la precisión.

El algoritmo creado representa correctamente la deformada del modelo ensayado constituyendo una herramienta muy útil para la visualización de los datos y el análisis estructural.

Futuras líneas de trabajo podrían consistir en utilizar el método y el algoritmo desarrollado para el análisis de modelos a escala de diferentes geometrías, soluciones de unión y condiciones de carga.

# Bibliografía

- AGISOFT LLC. (2024). *Agisoft Metashape User Manual: Professional Edition, Versión 2.2*. [https://www.agisoft.com/pdf/metashape-pro\\_2\\_2\\_en.pdf](https://www.agisoft.com/pdf/metashape-pro_2_2_en.pdf)
- ANDERSSON LARGUECHE, D., & LA MAGNA, R. (2024). *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza.
- CHILTON, J. C. y TANG, G. (2016). *Timber Gridshells Architecture, structure and craft*. Routledge.
- FORTES, J. (2024). *Las gridshells de Frei Otto: revisión de los métodos de diseño*. [Trabajo Fin de Grado, Universidad Politécnica de Madrid].
- GLINIORZ, K.-U., MOSALAM, K. M., & NATTERER, J. (2002). *Modeling of layered timber beams and ribbed shell frameworks*. *Composites Part B: Engineering*, 33(5), 367-381. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(02\)00020-3](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(02)00020-3)
- HAPPOLS, E. y LIDDEL, W. I. (1975). *Timber lattice roof for the Mannheim Bundesgartenschau*. *The Structural Engineer*, 53(3), 99-135.
- KORTABERRIA, G. (2019). *Progress in industrial photogrammetry by means of Markerless solutions*. [Tesis doctoral, Universidad del País Vasco].
- LUHMANN, T. (2010). *Close range photogrammetry for industrial applications*. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 65(6), 558-569. <https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2010.06.003>
- LARA-BOCANEGRA, A. J., MAJANO-MAJANO, A. y GUAITA, M. (2017). *Relajación de tensiones en láminas curvadas de madera: Revisión de los procedimientos de ensayo y enfoques de análisis estructural aplicados a estructuras laminadas*. [Comunicación en congreso]. II Congreso Latinoamericano de Estructuras de Madera de Buenos Aires, Argentina.
- LARA-BOCANEGRA, A. J., MAJANO-MAJANO, A., GUAITA, M. y ORTIZ, J. (2022). *Structural Analysis and Form-Finding of Triaxial Elastic Timber Gridshells Considering Interlayer Slips: Numerical Modelling and Full-Scale Test*. *Applied Sciences*, 12(11), 5335. <https://doi.org/10.3390/app12115335>
- LIDDELL, W. I. (2015). *Frei Otto and the Development of Gridshells*. *Case Studies in Structural Engineering*, 4, 39-49. <https://doi.org/10.1016/j.csse.2015.08.001>
- LIDDELL, W. I. (2020). *Models for the design development, engineering and construction of the Multihalle for the 1975 Bundesgartenschau in Mannheim*. En K.-U. Bletzinger, E. Ramm & R. Wüchner (Eds.), *Form and Force: Proceedings of the IASS Symposium 2019 and Structural Membranes 2019* (pp. 1-10). Ernst & Sohn GmbH & Co. KG.
- ORTIZ, J., GIL-DOCAMPO, M. y BASTOS, G. (2022). *Inexpensive photogrammetry applied to displacement measurement of a gridshell*. *Measurement*, 198(5), 11365. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.11365>
- PIRAZZI, C., & WEINAND, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. 1.



# Procedencia de las ilustraciones

Portada - Imagen de elaboración propia

Figura 0.01 - Tomado de Harris, R, Gusinde, B & Roynon, J., (16 -19 JULIO, 2012). *Design and construction of the pods sports academy, Scunthorpe, England.* World Conference of Timber Engineering 2012, Auckland, New Zealand, figura 24, página 9.

Figura 0.02 - Tomado de Harris, R, Gusinde, B & Roynon, J., (16 -19 JULIO, 2012). *Design and construction of the pods sports academy, Scunthorpe, England.* World Conference of Timber Engineering 2012, Auckland, New Zealand, figura 23, página 8.

Figura 0.03 - Tomado de <https://shigerubanarchitects.com/works/cultural/centre-pompidou-metz/> consultado el 27-12-2024.

Figura 0.04 - Tomado de <http://www.echomar.de/centre-pompidou-metz/> consultado el 27-12-2024

Figura 0.05 - Tomado de <https://www.howells.uk/projects/savill-building> consultado el 27-12-2024

Figura 0.06 - Tomado de <https://www.fourthdoor.org/annular/annular-archive/britain/17-2/> consultado el 27-12-2024

Figura 0.07 - Tomado de <https://structure-geometry.eu/Berus2018.pdf> consultado el 30-12-2024.

Figura 0.08 - Tomado de Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A. y Guaita, M. (2017). *Relajación de tensiones en láminas curvadas de madera: Revisión de los procedimientos de ensayo y enfoques de análisis estructural aplicados a estructuras laminadas.* II Congreso Latinoamericano de Estructuras de Madera de Buenos Aires, Argentina, figura 2, página 3.

Figura 0.09 - Tomado de Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A. y Guaita, M. (2017). *Relajación de tensiones en láminas curvadas de madera: Revisión de los procedimientos de ensayo y enfoques de análisis estructural aplicados a estructuras laminadas.* II Congreso Latinoamericano de Estructuras de Madera de Buenos Aires, Argentina, figura 3, página 3.

Figura 1.01 - Tomado de Liddell, W. I. (2020). *Models for the design development, engineering and construction of the Multihalle for the 1975 Bundesgartenschau in Mannheim.* En K.-U. Bletzinger, E. Ramm & R. Wüchner (Eds.), *Form and Force: Proceedings of the IASS Symposium 2019 and Structural Membranes 2019* (pp. 1-10). Ernst & Sohn GmbH & Co. KG. Figura 22.11, página 11.

Figura 1.02 - Tomado de Liddell, W. I. (2020). *Models for the design development, engineering and construction of the Multihalle for the 1975 Bundesgartenschau in Mannheim.* En K.-U. Bletzinger, E. Ramm & R. Wüchner (Eds.), *Form and Force: Proceedings of the IASS Symposium 2019 and Structural Membranes 2019* (pp. 1-10). Ernst & Sohn GmbH & Co. KG. Figura 22.1, página 2.

Figura 1.03 - Imagen de elaboración propia a partir de originales tomados de Happols, E. y Liddell, W. I. (1975). *Timber lattice roof for the Mannheim Bundesgartenschau*. *The Structural Engineer*, 53(3), 99-135.

Figura 1.04 - Tomado de Liddell, W. I. (2020). *Models for the design development, engineering and construction of the Multihalle for the 1975 Bundesgartenschau in Mannheim*. En K.-U. Bletzinger, E. Ramm & R. Wüchner (Eds.), *Form and Force: Proceedings of the IASS Symposium 2019 and Structural Membranes 2019* (pp. 1-10). Ernst & Sohn GmbH & Co. KG. Figura 22.13, página 14.

Figura 1.05 - Tomado de Liddell, W. I. (2020). *Models for the design development, engineering and construction of the Multihalle for the 1975 Bundesgartenschau in Mannheim*. En K.-U. Bletzinger, E. Ramm & R. Wüchner (Eds.), *Form and Force: Proceedings of the IASS Symposium 2019 and Structural Membranes 2019* (pp. 1-10). Ernst & Sohn GmbH & Co. KG. Figura 22.18, página 20.

Figura 1.06 - Imagen de elaboración propia a partir de originales tomados de Liddell, W. I. (2020). *Models for the design development, engineering and construction of the Multihalle for the 1975 Bundesgartenschau in Mannheim*. En K.-U. Bletzinger, E. Ramm & R. Wüchner (Eds.), *Form and Force: Proceedings of the IASS Symposium 2019 and Structural Membranes 2019* (pp. 1-10). Ernst & Sohn GmbH & Co. KG.

Figura 1.07 - Tomado de Molina León, F. M. (2018). *Multihalle de Frei Otto. Una cubierta generada por compresión, como modelo*. *ZARCH* 11, 154-167. [https://doi.org/10.26754/ojs\\_zarch/zarch.2018113213](https://doi.org/10.26754/ojs_zarch/zarch.2018113213)

Figura 1.08 - Tomado de Gliniorz, K.-U., Mosalam, K. M., & Natterer, J. (2002). *Modeling of layered timber beams and ribbed shell frameworks*. *Composites Part B: Engineering*, 33(5), 367-381. Figura 21, página 12. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(02\)00020-3](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(02)00020-3)

Figura 1.09 - Imagen de elaboración propia a partir de originales tomados de Gliniorz, K.-U., Mosalam, K. M., & Natterer, J. (2002). *Modeling of layered timber beams and ribbed shell frameworks*. *Composites Part B: Engineering*, 33(5), 367-381. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(02\)00020-3](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(02)00020-3)

Figura 1.10 - Tomado de Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. Figura 3, página 3.

Figura 1.11 - Tomado de Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. Figura 5, página 4.

Figura 1.12 - Tomado de Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. Figura 5, página 4.

Figura 1.13 - Tomado de Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. Figura 5, página 4.

Figura 1.14 - Imagen de elaboración propia a partir de originales tomados de Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. 1.

Figura 1.15 - Tomado de Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A., Guaita, M. y Ortiz, J. (2022). *Structural Analysis and Form-Finding of Triaxial Elastic Timber Gridshells Considering Interlayer Slips: Numerical Modelling and Full-Scale Test*. *Applied Sciences*, 12(11), 5335. Figura 6, página 9. <https://doi.org/10.3390/app12115335>

Figura 1.16 - Imagen de elaboración propia a partir de originales tomados de Ortiz, J., Gil-Docampo, M. y Bastos, G. (2022). *Inexpensive photogrammetry applied to displacement measurement of a gridshell*. Measurement, 198(5). 11365. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.11365>

Figura 1.17 - Tomado de Andersson Largueche, D., *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza, figura 6, página 5.

Figura 1.18 - Tomado de Andersson Largueche, D., *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. . Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza, figura 5, página 4.

Figura 1.19 - Imagen de elaboración propia a partir de originales tomados de Andersson Largueche, D., *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. [Comunicado en congreso].

Figura 2.01 - Tomado de <https://www.simiranda.com/reloj-comparador-1mm-0001mm-proteccion-a-58-mm-b141f/> consultado el 27-12-2024

Figura 2.02 - Tomado de <https://es.farnell.com/c/sensores-transductores/sensores/sensores-de-movimiento-posicion/lvdt> consultado el 07-01-2025

Figura 2.03 - Tomado de <https://www.artec3d.com/es/portable-3d-scanners/artec-leo> consultado el 27-12-2024

Figura 2.04 - Tomado de <https://www.artec3d.com/portable-3d-scanners/laser-ray> consultado el 27-12-2024

Figura 2.05 - Tomado de <https://www.egv.cl/noticia/uso-del-escaner-laser/> consultado el 07-01-2025

Figura 2.06 - Tomado de <https://www.soluciontopografia.com/estacion-total-topcon-serie-es> consultado el 27-12-2024

Figura 2.07 - Tomado de <https://www.factum-arte.com/pag/1346/fotogrametria> consultado el 05-01-2025

Figura 2.08 - Tomado de <https://www.pccomponentes.com/camara-digital-nikon-d3200-camara-reflex-digital-242mp-objetivo-af-s-dx-nikkor-18-105mm> consultado el 27-12-2024

Figura 3.01 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.02 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.03 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.04 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.05 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.06 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.07 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.08 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.09 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.10 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.11 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.12 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.13 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.14 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.15 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.16 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.17 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.18 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.19 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.20 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.21 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.22 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.23 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.24 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.25 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.26 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.27 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.28 - Imagen de elaboración propia

Figura 3.29 - Imagen de elaboración propia

Figura 4.01 - Imagen de elaboración propia

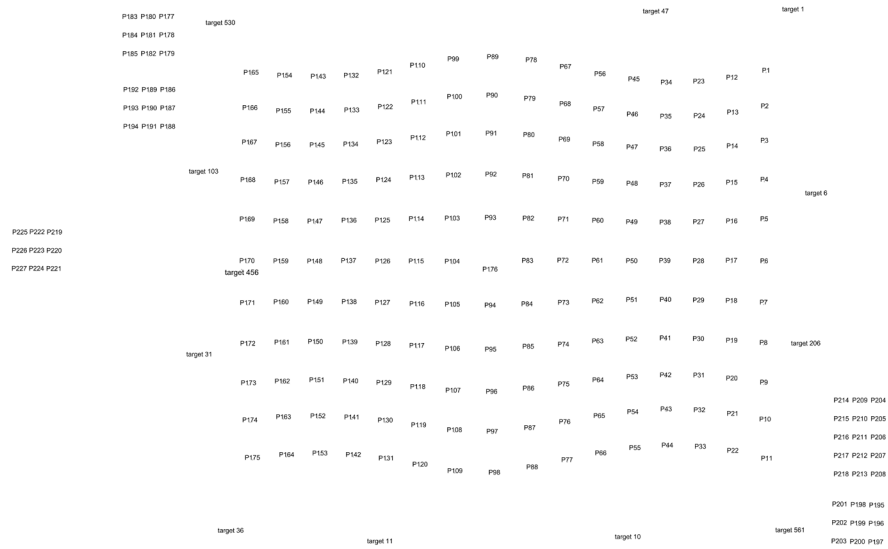
Figura 4.02 - Imagen de elaboración propia

Figura 4.03 - Imagen de elaboración propia

Figura anejo - Imagen de elaboración propia

# Anejo

En este anejo se presentan las coordenadas obtenidas de todos los puntos analizados en la prueba de carga n°4 (definitiva), en los dos estados con carga y sin carga. La numeración de los puntos corresponde a la que se muestra en la imagen siguiente, la cual sirve como referencia para identificar su disposición en el espacio.



[Fig. anejo] Representación esquemática de los puntos analizados y su numeración.

Tablero (dianas codificadas)						
Dianas	Sin carga			Con carga		
	X	Y	Z	X	Y	Z
target 1	-807,658382	804,715316	-2,006425	-807,483894	804,858388	-1,642434
target 47	-796,511062	600,633363	-7,984294	-796,194000	600,657882	-7,917135
target 530	-753,164776	-46,306250	-34,584655	-752,844019	-45,957802	-34,226148
target 103	-531,287469	-62,243750	-25,462999	-531,116960	-61,951933	-25,074689
target 456	-391,021066	0,292825	-16,235246	-390,866933	0,548245	-15,820711
target 31	-259,448625	-57,605867	-14,055385	-259,312970	-57,374446	-13,694970
target 36	0,385426	0,059935	-1,104369	0,385242	0,059726	-1,104681
target 11	6,891302	222,693185	8,989320	7,126587	222,673120	9,367855
target 10	-14,649399	590,302805	23,094998	-14,374656	590,737047	23,563655
target 561	-34,371145	831,239085	29,801951	-34,163637	831,609072	30,040534
target 206	-312,439762	843,327324	19,461856	-312,330289	843,601765	19,846113
target 6	-536,115088	849,948148	10,676370	-536,010531	850,103201	11,002452

Vidrios						
Dianas	Sin carga			Con carga		
	X	Y	Z	X	Y	Z
point 177	-758,891233	-126,448696	-31,260981	-758,658839	-126,159010	-30,927627
point 178	-731,395789	-125,175645	-30,078306	-731,216294	-124,895541	-29,651730

point 179	-703,903444	-123,904263	-28,848185	-703,755123	-123,634634	-28,392045
point 180	-757,503338	-153,781478	-32,871260	-757,370038	-153,533636	-32,372205
point 181	-730,088361	-152,561461	-31,619086	-729,927404	-152,269659	-31,135290
point 182	-702,592947	-151,276906	-30,309572	-702,479405	-151,000945	-29,797284
point 183	-756,335147	-181,183254	-34,131064	-756,190223	-180,970399	-33,865778
point 184	-728,758224	-179,929723	-33,098950	-728,618158	-179,640530	-32,580941
point 185	-701,290258	-178,680484	-31,775488	-701,146884	-178,388474	-31,292407
point 186	-650,631942	-120,412086	-30,158772	-650,251252	-120,093463	-29,975860
point 187	-623,236545	-119,363074	-28,919830	-622,839329	-119,035212	-28,717010
point 188	-595,813908	-118,318890	-27,736678	-595,468206	-117,981015	-27,476041
point 189	-649,329610	-147,875716	-31,677141	-649,099393	-147,553919	-31,467407
point 190	-621,981748	-146,831279	-30,401124	-621,721131	-146,501629	-30,169814
point 191	-594,624467	-145,770316	-29,149308	-594,361467	-145,444749	-28,938501
point 192	-648,269005	-175,270324	-33,088459	-647,995038	-174,945949	-32,870738
point 193	-620,883055	-174,266060	-31,706228	-620,610011	-173,900572	-31,506030
point 194	-593,460150	-173,159604	-30,526175	-593,238396	-172,845451	-30,259340
point 195	-76,334335	958,634714	38,214670	-76,242698	958,933296	38,406522
point 196	-48,832961	959,090452	39,270745	-49,049211	959,321918	39,085419
point 197	-21,359511	959,491352	40,313349	-21,592570	959,799470	40,076525
point 198	-75,924643	931,178490	37,703858	-76,005650	931,497039	37,620814
point 199	-48,369386	931,620340	38,801537	-48,263801	931,928339	38,968833
point 200	-20,904132	932,051281	39,865957	-20,971043	932,477893	39,716156
point 201	-75,769373	903,627734	37,045465	-75,617326	903,994145	37,363560
point 202	-47,985204	904,173593	38,340555	-48,083288	904,469909	38,249762
point 203	-20,531841	904,617349	39,393173	-20,609064	904,971661	39,298566
point 204	-232,032188	954,828600	28,098093	-232,004745	955,071630	28,475435
point 205	-204,603143	955,868105	29,228077	-204,597188	956,124487	29,555113
point 206	-177,225955	956,915836	30,308352	-177,316827	957,123580	30,669720
point 207	-149,904914	957,919697	31,295405	-149,947388	958,159151	31,614215
point 208	-122,515388	958,958964	32,322870	-122,366143	959,343376	32,525332
point 209	-231,024452	927,342634	27,708755	-230,964822	927,633466	28,025897
point 210	-203,655370	928,348522	28,722392	-203,562123	928,680720	29,025347
point 211	-176,221051	929,385523	29,869304	-176,199330	929,704132	30,171664
point 212	-148,850657	930,434565	30,850158	-148,852003	930,727186	31,136544
point 213	-121,851363	931,513469	32,242046	-121,466560	931,774797	32,103093
point 214	-229,973950	899,782757	27,243481	-229,871345	900,101246	27,547867
point 215	-202,598490	900,789241	28,290735	-202,468348	901,143732	28,625877
point 216	-175,231554	901,820401	29,353247	-175,088448	902,173223	29,663236
point 217	-147,863455	902,839522	30,383335	-147,726936	903,206172	30,644210
point 218	-120,502182	903,885702	31,319604	-120,324714	904,263677	31,639607

Comparador						
Dianas	Sin carga			Con carga		
	X	Y	Z	X	Y	Z
point 219	-432,858289	-280,988609	96,433745	-431,821855	-279,969511	81,987174
point 220	-405,523062	-280,031388	97,519861	-404,463036	-279,406963	83,058388
point 221	-378,701054	-278,912430	98,959790	-377,633823	-278,661726	84,461243
point 222	-431,725614	-306,830202	95,613704	-431,078804	-305,839388	81,213744
point 223	-404,404119	-305,875425	96,770630	-403,750254	-305,261178	82,354338
point 224	-377,585411	-304,758881	98,104463	-376,854775	-304,512469	83,631785

point 225	-430,166200	-332,419952	94,909654	-429,733326	-331,301985	80,361517
point 226	-402,859748	-331,497510	96,105681	-402,521206	-330,884276	81,773789
point 227	-	-	-	-375,700993	-330,120591	83,359273

Punto del LVDT						
Diana	Sin carga			Con carga		
	X	Y	Z	X	Y	Z
point 176	-403,555289	369,739334	228,085504	-403,017698	369,923415	225,926073

Estructura						
Dianas	Sin carga			Con carga		
	X	Y	Z	X	Y	Z
point 1	-715,169825	768,076758	84,186182	-714,939518	768,230023	84,497244
point 2	-662,269987	768,303732	124,549494	-661,990983	768,418374	124,773831
point 3	-610,971697	769,980351	158,405231	-610,757930	770,111861	158,658953
point 4	-553,239353	771,959047	184,495435	-553,010804	772,241058	184,761377
point 5	-494,319678	773,904423	200,455473	-494,357882	774,461808	200,812311
point 6	-432,011470	776,457409	207,632587	-432,025922	776,926102	208,064706
point 7	-370,654375	778,198342	206,668542	-370,629830	778,690757	207,121761
point 8	-310,837887	780,522506	193,714128	-310,692383	780,947151	194,170804
point 9	-251,870580	783,497612	174,538837	-251,787079	783,804121	174,898536
point 10	-197,223403	787,580590	145,763383	-197,135521	787,888231	146,093340
point 11	-139,235921	792,299609	113,589273	-139,171732	792,757573	113,828988
point 12	-702,704467	717,765014	73,807464	-702,502830	717,924656	74,141176
point 13	-651,103504	721,051494	112,775193	-650,883419	721,155586	113,081486
point 14	-600,904621	722,436408	144,964443	-600,697262	722,579779	145,243676
point 15	-546,822883	723,708967	170,412705	-546,664564	724,039020	170,694800
point 16	-489,396587	725,704293	186,525808	-489,268532	726,285042	186,837347
point 17	-430,785500	727,743725	194,511340	-430,684907	728,272023	194,772751
point 18	-371,260930	730,165819	192,388342	-371,203219	730,668726	192,643077
point 19	-312,349074	732,966582	180,564151	-312,110780	733,445110	180,867226
point 20	-256,114655	735,617379	162,011014	-255,944235	735,886874	162,313552
point 21	-203,692355	738,864164	134,173737	-203,510983	739,089074	134,473415
point 22	-148,833610	741,243700	101,973758	-148,643000	741,613330	102,237256
point 23	-694,910862	668,676833	67,888127	-694,737358	668,823900	68,268569
point 24	-643,762060	671,735386	104,622708	-643,576188	671,818914	104,984553
point 25	-594,327159	673,776488	137,509153	-594,099743	673,915567	137,785645
point 26	-541,704454	674,847762	161,657379	-541,468216	675,193848	161,899955
point 27	-486,001998	676,191668	177,560852	-486,000849	677,020731	177,792997
point 28	-428,348944	678,670267	185,922907	-428,140072	679,227891	186,041863
point 29	-370,035380	681,057433	183,192001	-369,847608	681,609931	183,292778
point 30	-312,719025	683,504025	173,394130	-312,524257	683,849277	173,553677
point 31	-258,692883	686,558465	153,815196	-258,414788	686,805787	154,111118
point 32	-207,350441	689,453046	126,661525	-206,934852	689,657869	127,075465
point 33	-153,185018	692,906122	94,933019	-152,651770	693,244996	95,347912
point 34	-691,303201	620,628337	66,472517	-691,221876	620,762171	66,901715
point 35	-640,856840	621,881704	102,852331	-640,718205	621,963801	103,240759
point 36	-592,453487	623,302738	135,945187	-592,355175	623,494091	136,277349
point 37	-539,476849	625,251810	159,277008	-539,270831	625,625076	159,433336

point 38	-483,517200	626,563768	174,798356	-483,428610	627,431931	174,811752
point 39	-426,700816	628,581385	181,717203	-426,411343	629,171552	181,657703
point 40	-369,014792	631,887237	180,600152	-368,735781	632,593693	180,587740
point 41	-311,700978	634,588877	170,173154	-311,589403	634,693923	170,167775
point 42	-257,011019	637,166719	152,038382	-256,764186	637,281360	152,298720
point 43	-206,733771	639,904479	123,604165	-206,192238	640,120449	124,163540
point 44	-153,397419	643,801967	92,781649	-152,597112	644,198002	93,367489
point 45	-694,156446	572,160701	67,833052	-694,148643	572,297873	68,285854
point 46	-641,576477	571,874778	106,288777	-641,882939	572,164478	106,963427
point 47	-593,242117	573,535482	139,153109	-593,153057	573,708596	139,440329
point 48	-539,101906	575,250069	162,476943	-539,067371	575,854721	162,594111
point 49	-482,412070	577,146272	176,877246	-481,997182	577,693643	176,503451
point 50	-424,447067	579,461674	184,884952	-424,142411	580,014767	184,524090
point 51	-366,877347	581,553618	182,912813	-366,367003	582,481923	182,732494
point 52	-308,127880	583,979348	173,787461	-307,885481	584,316196	173,836441
point 53	-252,429657	587,404410	154,988811	-251,996232	587,629499	155,431063
point 54	-200,620033	590,534071	125,934825	-199,993385	590,745391	126,649649
point 55	-147,649206	595,672588	94,470129	-146,871699	596,035780	95,250161
point 56	-699,673273	521,422843	73,674188	-699,771506	521,583619	74,125321
point 57	-647,045322	521,619121	111,234770	-647,598965	521,944823	112,089129
point 58	-595,543422	523,007254	145,209358	-595,601884	523,155751	145,527871
point 59	-539,849825	524,714152	168,762849	-539,637563	525,020065	168,561192
point 60	-482,436270	526,614825	184,298561	-482,023356	527,119340	183,632405
point 61	-423,114933	528,345923	193,200813	-422,543240	529,136838	192,657740
point 62	-362,797998	531,198005	190,213070	-362,540437	531,644883	189,380379
point 63	-303,408131	533,917586	180,179701	-303,028537	534,248652	180,092068
point 64	-245,819949	536,922554	161,337362	-245,291633	537,144365	161,888392
point 65	-192,940302	540,755669	132,889138	-192,147417	540,965738	133,800895
point 66	-137,831338	545,236687	99,915491	-137,017293	545,566740	100,854786
point 67	-708,275236	469,702880	79,795347	-708,473248	469,860735	80,403240
point 68	-652,896263	471,351425	119,103299	-653,250677	471,488061	119,737775
point 69	-600,375004	472,395937	153,117702	-600,493444	472,539129	153,389187
point 70	-542,175956	473,376970	177,577303	-541,959805	473,657670	177,092941
point 71	-482,575447	475,813071	194,463120	-481,728984	475,898208	192,944915
point 72	-421,088845	477,682392	202,884303	-420,733934	477,653327	201,631220
point 73	-358,495958	480,681936	200,283514	-358,192322	481,035890	199,068458
point 74	-296,474360	483,243207	188,629733	-296,060456	483,535471	188,340039
point 75	-237,709500	485,993008	169,473813	-237,060291	486,238422	170,012624
point 76	-182,086684	489,827852	140,593157	-181,192560	490,086975	141,553850
point 77	-125,781931	495,564262	107,004867	-124,838544	495,917263	108,041437
point 78	-715,910115	418,299715	84,371672	-716,199977	418,489995	84,907920
point 79	-658,564307	418,383579	126,035796	-659,056795	418,561341	126,747818
point 80	-604,784288	419,305484	160,731302	-605,050860	419,474723	161,131532
point 81	-544,427492	420,367758	186,768458	-544,097556	420,607628	185,972841
point 82	-482,256249	423,496227	204,710589	-481,096072	423,762979	201,885910
point 83	-418,574512	424,982886	212,417648	-418,134710	425,088110	210,308225
point 84	-354,335651	426,758329	210,497544	-353,757305	426,950755	208,318026
point 85	-291,365050	430,993299	198,565350	-290,729893	431,255283	197,961719
point 86	-229,732521	433,985631	177,630530	-228,756590	434,247913	178,073020
point 87	-171,422698	438,232641	148,591922	-170,218480	438,540937	149,440200

point 88	-113,355227	444,124321	113,528595	-112,104250	444,436254	114,474447
point 89	-718,275167	360,801081	88,419424	-718,593998	361,005725	89,184792
point 90	-661,120363	362,166147	128,810034	-661,481959	362,329425	129,573674
point 91	-605,081626	363,376896	164,708779	-605,019940	363,549294	164,966555
point 92	-544,633754	365,212182	191,417919	-544,145299	365,455212	190,450938
point 93	-480,804414	366,952519	208,860860	-479,760153	367,274167	206,451209
point 94	-350,389425	372,078697	214,581476	-349,659217	372,319045	212,418647
point 95	-285,141476	375,254611	202,565775	-284,265740	375,502052	201,662810
point 96	-222,744711	379,259686	181,713567	-221,628768	379,545571	181,766899
point 97	-163,979985	382,591109	151,309655	-162,511898	382,888736	151,906879
point 98	-103,524961	388,272564	115,591155	-101,874841	388,624491	116,137536
point 99	-712,750860	302,225332	83,243237	-712,982429	302,408638	83,866627
point 100	-657,054909	306,405405	124,517546	-657,200200	306,638422	125,082345
point 101	-601,993241	307,341675	159,445153	-601,854695	307,562711	159,674914
point 102	-541,102894	309,525649	186,578320	-540,617270	309,800567	185,789974
point 103	-478,046805	310,302119	204,271541	-476,557327	310,601236	201,411040
point 104	-413,289681	312,944154	213,541315	-412,519900	313,231887	211,723955
point 105	-349,290531	315,684537	210,069821	-348,746476	316,018047	207,179518
point 106	-284,107156	318,608145	198,491619	-283,177761	318,823876	197,709234
point 107	-222,396530	321,985225	176,649437	-221,126897	322,209956	176,768870
point 108	-163,943179	326,376478	147,810624	-162,480874	326,625051	148,284884
point 109	-103,332557	329,595188	111,020790	-101,767970	329,823258	111,479313
point 110	-701,151319	249,557058	74,758516	-701,347721	249,745907	75,354011
point 111	-646,917232	253,544728	114,378319	-647,032989	253,799202	114,890726
point 112	-594,072022	254,643361	149,902926	-593,936680	254,886272	150,055618
point 113	-535,266258	255,492966	175,301121	-534,878535	255,693199	174,777956
point 114	-474,094406	257,166843	192,615257	-473,562082	257,322015	191,372664
point 115	-411,289759	259,518961	201,555715	-410,747742	259,576382	200,115831
point 116	-347,783245	263,152013	199,190305	-347,346289	263,262274	197,746427
point 117	-285,939373	265,559356	187,402056	-285,375533	265,708091	186,901720
point 118	-225,343146	269,379060	166,472302	-224,383576	269,517603	166,906269
point 119	-168,635167	272,923569	137,710975	-167,570455	273,128333	138,436110
point 120	-110,413470	277,336697	102,814065	-109,268618	277,516844	103,521617
point 121	-689,620890	201,411943	66,243515	-689,665032	201,629641	66,762836
point 122	-637,849517	203,954558	104,917632	-637,808962	204,245748	105,335505
point 123	-586,028017	204,761009	139,291690	-585,836855	204,998912	139,513762
point 124	-529,776104	206,035415	165,251599	-529,355986	206,177177	164,996297
point 125	-469,636679	207,211534	182,670222	-469,444548	206,946911	182,086380
point 126	-409,131080	209,863285	190,818534	-408,636292	209,797921	189,971359
point 127	-347,604182	212,070296	187,913046	-347,301809	212,019147	187,108011
point 128	-286,842056	215,354900	175,476120	-286,283118	215,400281	175,389857
point 129	-228,947468	218,624423	155,451701	-228,339148	218,812646	155,818851
point 130	-173,418142	222,907225	127,653347	-172,642870	223,139765	128,370733
point 131	-117,119856	226,737301	94,275938	-116,352780	226,895394	95,090420
point 132	-682,327636	151,539544	60,166822	-682,384832	151,758673	60,736687
point 133	-631,155707	154,311399	97,708927	-630,990935	154,602232	98,073871
point 134	-580,532737	155,032317	131,521450	-580,317242	155,259850	131,785305
point 135	-525,069870	155,922572	157,532976	-524,770392	156,002762	157,562466
point 136	-467,477992	157,435815	173,962460	-467,160387	157,285335	173,691602
point 137	-407,551624	159,202020	183,914767	-407,221524	159,012260	183,443041

point 138	-346,552786	162,467967	180,704639	-346,310122	162,365200	180,336745
point 139	-286,993765	165,789719	167,976068	-286,645038	165,840330	167,996080
point 140	-229,296096	169,242094	147,819446	-228,870554	169,425549	148,190470
point 141	-175,712981	173,030774	120,106922	-175,176842	173,288228	120,715888
point 142	-120,204963	177,619229	85,781680	-119,609041	177,805247	86,304219
point 143	-679,052748	102,623696	55,626021	-678,963704	102,873029	56,096823
point 144	-627,543099	103,486578	93,706832	-627,385048	103,783311	94,108613
point 145	-577,372320	104,999761	127,518998	-577,170206	105,226936	127,838047
point 146	-521,861412	105,280871	153,390811	-521,691961	105,333390	153,595896
point 147	-464,005098	106,694097	170,894192	-463,691128	106,596412	170,926006
point 148	-404,873193	108,810524	180,723653	-404,485581	108,655872	180,620105
point 149	-344,510749	111,821960	177,278862	-344,289688	111,670317	177,260072
point 150	-285,340108	114,582161	164,392994	-285,138128	114,617707	164,526732
point 151	-228,578501	118,806059	144,214855	-228,301508	118,988695	144,559772
point 152	-175,163307	122,570525	116,682992	-174,774540	122,811558	117,204816
point 153	-120,156177	127,847488	84,013687	-119,719965	128,010394	84,486277
point 154	-678,762712	52,437569	55,827485	-678,511066	52,741172	56,162150
point 155	-626,004137	52,779513	93,927846	-625,757141	53,117516	94,242365
point 156	-575,665184	54,180647	128,358589	-575,431091	54,424586	128,684015
point 157	-520,342000	55,041867	154,134319	-520,087151	55,121722	154,403718
point 158	-462,421701	56,032593	171,413169	-462,070895	55,980208	171,635540
point 159	-402,916059	58,418120	180,956409	-402,678204	58,287980	181,119950
point 160	-342,209995	61,285074	177,861140	-341,982452	61,126949	178,106279
point 161	-282,261461	64,805540	165,472553	-282,099260	64,825954	165,704639
point 162	-224,559404	67,593346	144,779847	-224,371297	67,748251	145,082564
point 163	-171,727188	71,482579	117,367850	-171,492887	71,694436	117,732258
point 164	-115,755178	78,576709	82,231508	-115,513904	78,719916	82,580359
point 165	-680,990733	2,449374	58,646546	-680,698080	2,742471	58,989675
point 166	-628,620871	2,782981	96,819506	-628,295107	3,123703	97,096474
point 167	-577,463396	4,154871	131,626950	-577,135501	4,429879	131,901593
point 168	-521,394737	4,335071	158,646331	-521,103007	4,462602	158,966692
point 169	-462,838710	5,937035	175,651954	-462,818352	5,710425	176,073880
point 170	-401,154384	8,074808	184,443698	-400,957031	8,026006	184,894235
point 171	-338,863176	11,476959	182,411240	-338,679520	11,329295	182,842882
point 172	-278,411635	14,157335	170,079873	-278,325421	14,174642	170,389922
point 173	-219,788023	17,501267	149,521158	-219,769014	17,637493	149,694831
point 174	-164,784588	21,846826	120,226250	-164,783014	22,027554	120,368869
point 175	-109,079637	27,842249	86,774455	-109,080298	27,945044	86,889775



