POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

José Gutiérrez Abascal, 2. 28006 Madrid
Tel.: 91 336 3060
info.industriales@upm.es

www.industriales.upm.es

José María Barón Rufete

05 TRABAJO FIN DE GRADO

INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

MODELO TÉRMICO SIMULABLE TEÓRICO Y BASADO EN SIMULACIONES 3D DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN EN VEHÍCULOS ELÉCTRICOS Y APLICACIONES AEROESPACIALES.

TRABAJO FIN DE GRADO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE GRADUADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

FEBRERO 2020

José María Barón Rufete

DIRECTOR DEL TRABAJO FIN DE GRADO:
Rafael Asensi

DOCTORANDO Y TUTOR EXTERNO:
Guillermo Salinas

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

POLITÉCNICA

DEPARTAMENTO DE AUTOMATICA, INGENIERIA ELECTRICA

Y ELECTRONICA E INFORMATICA INDUSTRIAL

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

CENTRO DE ELECTRONICA INDUSTRIAL

MODELO TÉRMICO SIMULABLE TEÓRICO Y BASADO EN SIMULACIONES 3D DE ELEMENTOS FINITOS. APLICACIÓN EN VEHÍCULOS ELÉCTRICOS Y APLICACIONES AEROESPACIALES.

TRABAJO FINAL DE GRADO

Autor: José María Barón Rufete

Grado en Tecnologías Industriales, Universidad Politécnica de Madrid

Tutor: Rafael Asensi

Profesor Asociado por la Universidad Politécnica de Madrid

Cotutor: Guillermo Salinas

Doctorando por la Universidad Politécnica de Madrid

2020

AGRADECIMIENTOS

A mi tutor, Rafael, por brindarme la oportunidad de desarrollar este proyecto.

A mi cotutor, Guillermo Salinas, por estar conmigo desde el principio, exigirme al máximo durante el desarrollo del proyecto y estar siempre dispuesto a resolver mis dudas. Y a Juan Antonio Serrano, por ayudarme en la construcción de los prototipos experimentales.

Por último, a mis amigos y mis padres, por todos los mensajes de ánimo y la ayuda dada durante todos estos años.

RESUMEN EJECUTIVO

La electrónica de potencia en la actualidad deriva hacia el diseño de componentes magnéticos que trabajen en condiciones de funcionamiento más exigentes, siendo la labor del ingeniero el dimensionamiento y el modelado del componente para que cumpla las especificaciones de trabajo.

Dentro de los aspectos a tener en cuenta durante el diseño, el modelado térmico es uno de los factores con más impacto debido a la influencia de la temperatura en las pérdidas electromagnéticas y el desgaste por fatiga térmica. En el diseño de componentes magnéticos, se tiende miniaturizar el volumen del componente magnético, provocando problemas de disipación, por lo que es necesario estimar correctamente la temperatura, que actúa de limitante en el dimensionamiento de componentes magnéticos. Guillermo Salinas, cotutor del TFG y doctorando en la UPM, desarrolla en su tesis una metodología para abordar el reto de modelar la temperatura alcanzada en régimen permanente en función de las pérdidas electromagnéticas en el componente magnético. Dicha metodología explica cómo construir una matriz que relacione la temperatura y las pérdidas en base a los resultados obtenidos en las simulaciones MEF para unas condiciones de contorno prefijadas, preservando la calidad de las estimaciones en contraposición a los modelos simplificados teóricos, rápidos pero imprecisos, y aumentando la eficiencia frente a las simulaciones MEF, muy precisos pero con un coste computacional alto si se busca estimar la temperatura para diferentes combinaciones de pérdidas.

El presente TFG parte del modelo térmico estacionario construido por Guillermo Salinas, complementando la estimación de la temperatura en régimen permanente con una metodología que permite afrontar el cálculo de la evolución transitoria utilizando tanto conceptos teóricos, como los resultados de simulaciones MEF. Por tanto, el principal objetivo del proyecto es el desarrollo de un modelo electrotérmico transitorio que permita estimar la temperatura de un componente electromagnético durante cualquier instante del tiempo en función de las especificaciones eléctricas de funcionamiento de este.

La estructura del TFG puede ser dividida en 3 apartados principales:

- Análisis de los fundamentos físicos que participan en la construcción de un modelo electrotérmico.
- Construcción de un modelo electrotérmico transitorio que estime la temperatura en función de las pérdidas de un componente magnético.
- Aplicación práctica a un prototipo de bobina diseñada para trabajar en un convertidor DC-DC.

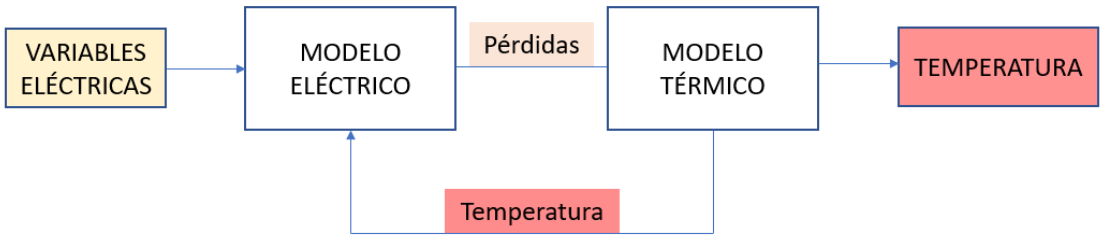
En primer lugar, la construcción de un modelo electrotérmico involucra conceptos de la electrónica de potencia, la transferencia de calor y la interrelación entre ellas. Puesto que la aplicación práctica del modelo se centra en el análisis electrotérmico de la bobina de un convertidor, el primer capítulo ,“Fundamentos Físicos”, comienza introduciendo conceptos indispensables para la caracterización de las señales eléctricas, como el valor medio, el valor eficaz o los tipos de ondas, explica los principales tipos de convertidores y expone la función que cumple la bobina para el funcionamiento del convertidor.

En un segundo apartado, se desarrollan conceptualmente los fundamentos físicos principales que generan las pérdidas electromagnéticas en las bobinas durante su funcionamiento, como el ciclo de histéresis, las corrientes de Foucault o el efecto Joule, y se recoge los modelos que permiten el computo de dichas pérdidas:

- Ecuación de Steinmetz: Ecuación de base empírica que permite el computo de las pérdidas en el núcleo magnético.
- Ecuación de pérdidas en el devanado: Ecuación de base teórica que evalúa las pérdidas generadas en forma de calor por el efecto Joule en un devanado.

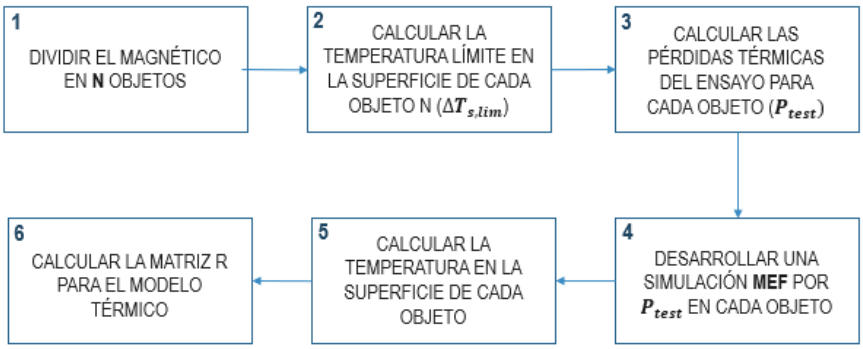
Dichas pérdidas generadas en la bobina son disipadas al ambiente en forma de calor e inducen a un aumento de temperatura en el devanado y el núcleo magnético. Por tanto, en el tercer apartado del capítulo se recogen los principales fenómenos de transferencia de calor, las principales herramientas para la caracterización de perfiles térmicos y los modelos teóricos simplificados para el cálculo del transitorio térmico, como el método de la Capacitancia (Método C), los gráficos de Heisler y análisis transitorio multidimensional.

Es importante resaltar que una de las principales dificultades de desarrollar un modelo electrotérmico es la dualidad electrotérmica:



Mientras que las pérdidas electromagnéticas inducen a un aumento de temperatura en el componente magnético, el valor de estas depende a su vez de la temperatura. Por ello, en el capítulo se expone un modelo empírico que evalúa dicha influencia en el cálculo de las pérdidas en el núcleo magnético. Siendo objeto de futuros proyectos, el modelado de la influencia de la temperatura en el cálculo de pérdidas en el devanado.

A continuación, una vez esclarecidos los conceptos físicos fundamentales para abordar la construcción del modelo electrotérmico, en el primer apartado del segundo capítulo se recoge la metodología expuesta en la tesis de Guillermo Salinas para calcular la matriz que relaciona la variación de temperatura respecto al ambiente en régimen permanente con las pérdidas en el componente magnético, la matriz $[R]$:



Definiéndose el modelo térmico estacionario como:

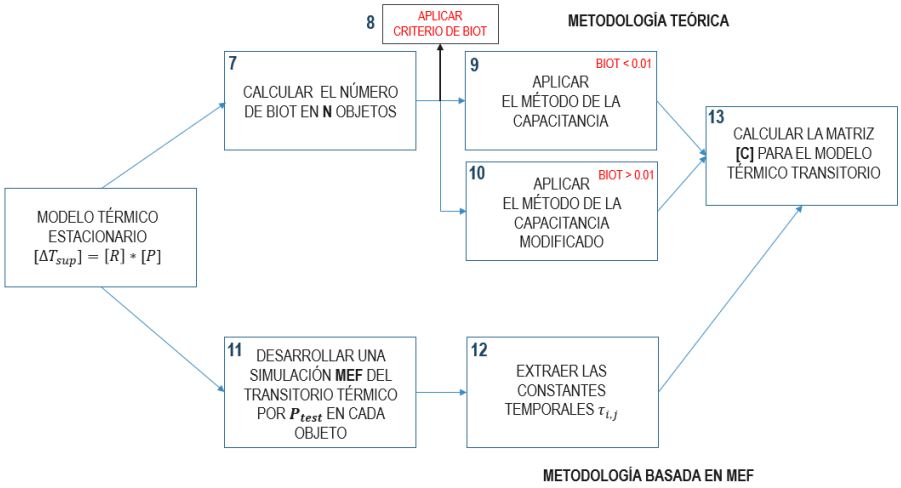
$$[\Delta T_{sup}] = [R] * [P]$$

$$Donde:$$

$$-[\Delta T_{sup}]\ es\ el\ vector\ de\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente$$

$$-[P]\ es\ el\ vector\ de\ pérdidas\ en\ cada\ uno\ de\ los\ objetos.$$

Conocido el modelo térmico estacionario, en el segundo apartado del segundo capítulo se desarrolla la metodología para el cálculo del transitorio térmico en el componente magnético:



Definiéndose el modelo térmico transitorio como:

Metodología Teórica Capacitancia (C):

$$[\Delta T_{sup}(t)] = [C] * ([R] * [P])$$

$$Donde:$$

$$-[\Delta T_{sup}]\ es\ el\ vector\ de\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente.$$

$$-[P]\ es\ el\ vector\ de\ pérdidas\ en\ cada\ uno\ de\ los\ objetos.$$

$$-[R]\ es\ la\ matriz\ que\ modela\ el\ régimen\ estacionario.$$

$$-[C]\ es\ la\ matriz\ que\ modela\ el\ régimen\ transitorio.$$

Metodología basada en MEF y CM:

$$[\Delta T_{sup}(t)] = [RC] * [P]$$

$$-[\Delta T_{sup}]\ es\ el\ vector\ de\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente.$$

$$-[P]\ es\ el\ vector\ de\ pérdidas\ en\ cada\ uno\ de\ los\ objetos.$$

$$-[RC]\ es\ la\ matriz\ que\ modela\ el\ régimen\ estacionario\ y\ transitorio.$$

Dicha metodología presenta dos vías de cálculo partiendo del modelo térmico estacionario, una teórica y otra basada en simulación MEF. Por un lado, la metodología teórica aborda el problema evaluando el número Biot en cada uno de los objetos, número adimensional que representa la relación entre la conductividad térmica y la convección, y aplicando el Método de la Capacitancia (C) o el Método de la Capacitancia Modificada (CM) en función del Criterio de Biot. Cabe destacar que ambos métodos abordan el cálculo del transitorio térmico

conceptualmente de forma diferente, ya que el método CM evalúa el transitorio térmico del componente magnético cuándo uno de los objetos presenta generación interna de calor afrontando directamente la Ecuación General de la Transferencia de Calor, mientras que el método C evalúa el transitorio térmico despreciando los perfiles térmicos y evaluando cada objeto de forma independiente.

Por otro lado, la metodología basada en MEF aborda el problema extrayendo la constante temporal característica en cada uno de los objetos para cada una de las simulaciones, donde se asigna P_{test} como generación interna de calor a uno de los objetos en cada una de ellas.

Ambas metodologías, utilizan conceptos como:

-P_{test} : Generación interna cuando la variación de temperatura respecto al ambiente está en el límite.

-$h_{equiv,sup}$: Coeficiente de película equivalente de una superficie

-Árbol nodal de disipación de calor: Representación gráfica de las “rutas” de disipación de calor al ambiente a través de una superficie.

Dichos conceptos son desarrollados a lo largo del capítulo y requieren la evaluación geométrica y de las condiciones de contorno en cada uno de los objetos. Para incorporar la influencia de la temperatura en el cálculo de las pérdidas en el componente magnético, se discretizan los modelos con un periodo de discretización dt:

Metodología Teórica Capacitancia (C):

$$\left[\Delta T_{sup}(t_i)\right] = [C(t_i)] * ([R] * [P(T(t_{i-1})]) \ (138)$$

$$Donde:$$

$$t_i = t_{i-1} + dt$$

Siendo dt el periodo de la discretización del modelo.

Metodología basada en MEF Y CM:

$$\left[\Delta T_{sup}(t_i)\right] = ([RC(t_i)] * [P(T(t_{i-1})]) \ (138)$$

$$Donde:$$

$$t_i = t_{i-1} + dt$$

Siendo dt el periodo de la discretización del modelo.

Por último, en el capítulo final del TFG se desarrolla la aplicación práctica del modelo térmico transitorio a una bobina diseñada para operar en un convertidor DC/DC. Los resultados obtenidos en el modelo térmico se comparan con los datos experimentales extraídos del prototipo y con las simulaciones efectuadas en COMSOL para tres escenarios propuestos. Analizando los errores relativos para cada uno de los modelos y escenarios, se observa que el modelo MEF y el modelo CM presentan comportamiento similares y mejores que el modelo C. Por otro lado, se concluye que el modelo térmico estacionario obtiene peores resultados conforme las pérdidas se alejan de los valores de P_{test} y el método C se ajusta mejor a los instantes inicial de los resultados del prototipo experimental que los modelos MEF Y CM. Como resultado de la verosimilitud de lo modelos desarrollados en el presente documento, se concluye que pueden ser utilizados para la estimación de temperatura, facilitando la selección del volumen mínimo durante el dimensionamiento del componente magnético.

1 INTRODUCCIÓN 3

BACKGROUND 3
OBJETIVOS DEL PROYECTO 3

2 FUNDAMENTOS FÍSICOS 4

2.1 INTRODUCCIÓN A LA ELECTRÓNICA DE POTENCIA 4
2.1.1 SEÑALES ELÉCTRICAS 4
2.1.2 INTRODUCCIÓN CONVERTIDORES ELÉCTRICOS 6
2.2 COMPUTO DE PÉRDIDAS EN BOBINAS 7
2.2.1 PÉRDIDAS EN EL NÚCLEO MAGNÉTICO 7
2.2.2 PÉRDIDAS EN EL DEVANADO MAGNÉTICO DE COBRE 14
2.2.3 RESUMEN DEL APARTADO 16
2.3 INTRODUCCIÓN A LA TRANSFERENCIA DE CALOR 17
2.3.1 ECUACIÓN GENERAL DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN SÓLIDOS 17
2.3.2 MÉTODOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR 20
2.3.3 RESISTENCIAS TÉRMICAS 22
2.3.4 MODELADO TÉRMICO TRANSITORIO 25
2.4 DUALIDAD TÉRMICA – ELÉCTRICA 29

3 MODELO TÉRMICO TRANSITORIO 31

3.1 MODELO TÉRMICO ESTACIONARIO 31
3.1.1 METODOLOGÍA 31
3.2 MODELO TÉRMICO TRANSITORIO 33
3.2.1 METODOLOGÍA 34
3.2.2 CALCULO DE Bi Y $Ptest$ EN GEOMETRIAS COMPLEJAS 38
3.2.3 MÉTODO DE LA CAPACITANCIA MODIFICADO 45
3.2.4 INCORPORACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LAS PÉRDIDAS EN FUNCIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL MODELO TÉRMICO TRANSITORIO 54

4 APLICACIÓN PRACTICA DEL MODELO TÉRMICO: BOBINA 56

4.1 CARACTERÍSTICAS DEL PROTOTIPO UTILIZADO 56
4.2 ANÁLISIS GEOMÉTRICOS Y DE CONDICIONES DE CONTORNO DEL BUCK 59
4.3 MODELO TÉRMICO ESTACIONARIO BOBINA 74
4.4 MODELO TEÓRICO TÉRMICO TRANSITORIO BOBINA 78
4.5 MODELO TÉRMICO TRANSITORIO BOBINA BASADO EN MEF 108
4.6 RESULTADOS TEÓRICOS, BASADO EN MEF Y EXPERIMENTALES 109

5 CONCLUSIONES 131

ANEXO I: SCRIPTS DE MATLAB PARA EL CÁLCULO NUMÉRICO 133

ANEXO II: PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO 147

ANEXO III: ESQUEMÁTICO Y PCB BUCK 149

ANEXO IV: MODELO NÚCLEO CATIA Y PROTOTIPO REAL 152

LISTA DE FIGURAS 154

LISTA DE TABLAS 158

ABREVIATURAS Y ACRÓNIMOS 159

BIBLIOGRAFÍA 160

1 INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente proyecto es ilustrar una metodología que permita analizar y evaluar de forma rápida y simple el comportamiento térmico de un componente electromagnético, factor diferencial durante el diseño de la fase de potencia. El proyecto ha sido desarrollado en el Centro de Electrónica Industrial (CEI) en colaboración con Rafael Asensi, tutor del proyecto, y Guillermo Salinas, cotutor del proyecto e investigador en el centro.

BACKGROUND

El modelado térmico de componentes electromagnéticos con geometrías irregulares y diferentes combinaciones de pérdidas es uno de los principales retos para el ingeniero encargado de dimensionar el componente para funcionar en condiciones de trabajo exigentes. En el diseño de componentes magnéticos, se tiende miniaturizar el volumen del componente magnético, provocando problemas de disipación, por lo que es necesario estimar correctamente la temperatura, que actúa de limitante en el dimensionamiento de componentes magnéticos. Por un lado, simplificar excesivamente el modelo puede incurrir en errores de estimación, reduciendo la durabilidad del componente y desvirtuando la calidad del diseño electromagnético. Por otro lado, las simulaciones mediante el Análisis por Elementos Finitos (AEF) pueden resultar muy precisas pero su coste computacional es demasiado elevado si se desea realizar el análisis en diferentes escenarios.

El proyecto parte del modelo térmico estacionario desarrollado en la tesis de Guillermo Salinas [28]. En dicha tesis se ilustra una metodología que permite definir una matriz, basada en un análisis teórico inicial y las soluciones obtenidas en las simulaciones por medio del Análisis por Elementos Finitos (AEF), que relaciona las pérdidas electromagnéticas del componente magnéticos y la variación de temperatura respecto al ambiente en cualquiera de los puntos del componente. Dicha matriz es invariante y tiene validez para las condiciones de contorno prefijadas.

OBJETIVOS DEL PROYECTO

Respecto a los objetivos del Trabajo Final de Grado (TFG), se destaca:

- Modelado de las pérdidas electromagnéticas del componente magnético en funcionamiento y la influencia de la temperatura en el valor de dichas pérdidas.
- Aplicación práctica del Modelo Térmico Estacionario desarrollado en la tesis de Guillermo Salinas.
- Desarrollar una metodología que permita complementar el Modelo Térmico Estacionario incluyendo la evolución transitoria al mismo.
- Simulación del comportamiento térmico de una bobina mediante herramientas de Análisis por Elementos Finitos (AEF).
- Desarrollo de una evaluación teórica de las ventajas y desventajas de la simplificación geométrica en la ejecución de una simulación térmica.
- Construcción de un prototipo experimental para la evaluación de la verosimilitud de los resultados obtenidos en las simulaciones y los modelos térmicos.

2 FUNDAMENTOS FÍSICOS

2.1 INTRODUCCIÓN A LA ELECTRÓNICA DE POTENCIA

La electrónica de potencia evoluciona en dirección al desarrollo de componentes electrónicos que operen en condiciones de funcionamiento muy exigentes optimizando al máximo el tamaño de los dispositivos. Dichas condiciones de trabajo inducen en muchas ocasiones a una elevada concentración de pérdidas durante el funcionamiento, provocando la fatiga térmica y la rotura del componente magnético analizado. Es labor del ingeniero la evaluación y la caracterización de las condiciones térmicas a las que se somete el dispositivo durante el diseño para poder evaluar correctamente los riesgos y las ventajas de la modificación de la geometría y las especificaciones de funcionamiento.

El presente documento se centrará en el análisis del modelo termoeléctrico de componentes electromagnéticos, por lo que únicamente se desarrollarán en este apartado conceptos básicos de la electrónica de potencia que serán imprescindible aplicar para realizar el modelo.

2.1.1 SEÑALES ELÉCTRICAS

En la electrónica de potencia se trabaja con señales analógicas generadas por medio de fenómenos electromagnéticos, principalmente continuas o periódicas [29]. Mientras que las señales continuas son aquellas que se mantienen invariantes con el tiempo, las señales periódicas muestran periodicidad describiendo ciclos repetitivos respecto al tiempo. Dicha periodicidad puede ser caracterizada por medio del periodo (T), tiempo fundamental en el que una onda cumple [30]:

$$x(t) = x(t+T) \quad \forall t \quad (1)$$

A su vez puede ser definida la frecuencia, el número de ciclos que completa la onda por segundo y la velocidad angular:

$$f = \frac{1}{T} \quad (2)$$

$$\omega = 2\pi * f \quad (3)$$

La señal más simple en la electrónica de potencia es la onda sinusoidal, descrita como:

$$x(t) = A * \sin(\omega * t + \theta) \quad (4)$$

$$Donde$$

$$- A\ es\ la\ amplitud\ de\ la\ onda\ sinusoidal.$$

$$- \omega\ es\ la\ velocidad\ angular.$$

$$- \theta\ es\ el\ desfase\ respecto\ al\ origen.$$

Dicha señal está completamente caracterizada haciendo uso de tres parámetros: amplitud, velocidad angular y desfase respecto al origen. Sin embargo, las ondas armónicas no son las más comunes en electrónica de potencia, siendo necesario definir modelos más complejos para representar las ondas anarmónicas como la onda cuadrada o la triangular.

Fourier demostró que las ondas periódicas no armónicas pueden ser analizadas por medio de una serie utilizando la contribución relativa de ondas armónicas con múltiplos de la frecuencia fundamental. Por tanto, las ondas anarmónicas se pueden definir como [30]:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n * \sin(n * \omega * t + \theta_n) \quad (5)$$

Por ejemplo, una onda cuadrada puede ser definida como:

$$x_{cuadrada}(t) = \frac{4 * A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} * \sin((2n-1) * \omega * t + \theta) \quad (6)$$

$$Donde$$

$$- A\ es\ la\ amplitud\ de\ la\ onda\ cuadrada.$$

$$- \omega\ es\ la\ velocidad\ angular\ de\ la\ onda\ cuadrada.$$

$$- \theta\ es\ el\ desfase\ respecto\ al\ origen\ de\ la\ onda\ cuadrada.$$

Por último, en electrónica de potencia todas las ondas armónicas suelen ser representadas por medio de números característicos que permiten establecer sus características principales y realizar el cálculo de potencia. Dichas características son [30]:

- **Valor Medio**

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) * dt \quad (7)$$

Un valor no nulo del valor medio representa la magnitud de un componente en corriente continua.

- **Valor Eficaz**

$$x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)^2 * dt} \quad (8)$$

Es ampliamente utilizada para el cálculo de potencias y energías. Para ondas periódicas anarmónicas puede ser definida la siguiente relación entre el valor eficaz y los valores eficaces de los armónicos de su serie de Fourier. De forma que:

$$x_{ef}{}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_{ef,n}{}^2 \quad (9)$$

$$Donde:$$

$$-x_{ef,n}{}^2 representa\ el\ valor\ eficaz\ del\ armónico\ n.$$

2.1.2 INTRODUCCIÓN CONVERTIDORES ELÉCTRICOS

Un convertidor de potencia es un dispositivo que convierte energía eléctrica sin utilizar partes móviles [15]. Es utilizado para alterar la tensión y modificar las características de la intensidad de forma que cumpla las especificaciones requeridas para su aplicación. Dentro de los convertidores, podemos destacar [15]:

- Convertidores de Corriente Continua a Corriente Continua (DC-DC)
- Convertidores de Corriente Continua a Corriente Alterna (DC-CA)
- Convertidores de Corriente Alterna a Corriente Continua (CA-DC)
- Convertidores de Corriente Alterna a Corriente Alterna (CA-CA)
-

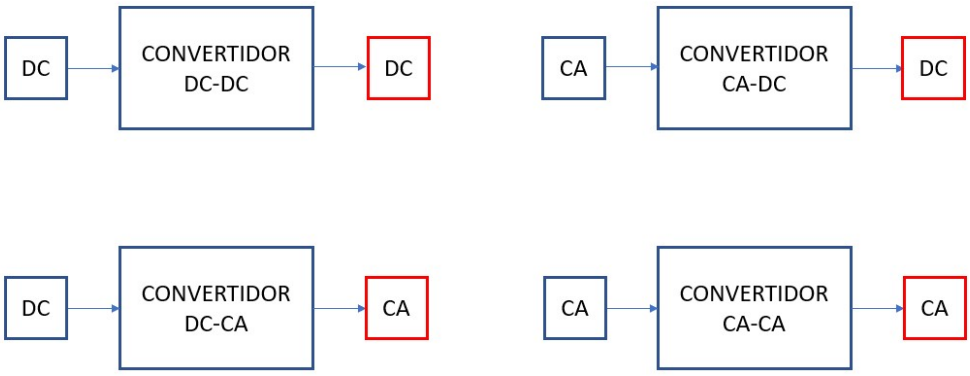


Figura 1: Tipos de Convertidores Eléctricos

Los convertidores son configurados para cumplir unas especificaciones eléctricas en su salida mediante la selección de diferentes topologías de circuito eléctricas y el uso de componentes eléctricos. Dentro de los componentes, podemos resaltar:

- Interruptores: Destacando el uso de IGBT, MOSFET Y JFET. Su principal
- Resistencias: Componentes pasivos que imponen una relación lineal entre la tensión entre sus bornes y la intensidad que atraviesa la resistencia.
- Condensadores: Componente pasivo capaz de almacenar energía sustentando un campo eléctrico. Su principal función en la electrónica de Potencia es la de regular la tensión entre sus bornes, evitando que se produzcan cambios buscos de tensión.
- Bobina: Componente capaz de almacenar energía en forma de campo magnético debido al fenómeno de autoinducción. Su principal función en la electrónica de Potencia es la de regular la intensidad entre sus bornes, evitando que se produzcan cambios buscos de intensidad.
-

Cabe destacar que es trabajo del ingeniero diseñar y seleccionar la topología del circuito y los componentes utilizados para el correcto cumplimiento de las especificaciones en la salida del convertidor. Concretando en el uso de las bobinas, el diseño no requiere únicamente el dimensionamiento del núcleo magnético y el devanado para unas características eléctricas en la salida, sino que es necesario modelar las pérdidas eléctricas y magnéticas durante su funcionamiento para evitar que no excedan los límites de seguridad.

2.2 COMPUTO DE PÉRDIDAS EN BOBINAS

Los componentes electromagnéticos son una pieza indispensable en los convertidores utilizados en la electrónica de potencia. Pese a que sean ampliamente utilizados, su comercialización no está disponible en una amplia gama de rangos y es labor del ingeniero maximizar la optimización del diseño del componente magnético para ajustarse a unas especificaciones concretas de funcionamiento. Uno de los aspectos que se debe precisar, siendo objeto de estudio en este capítulo, es el cálculo de pérdidas en el componente, proviniendo éstas de dos orígenes principales: pérdidas en el núcleo magnético y pérdidas en el devanado. Las pérdidas en los componentes electromagnéticos son uno de los principales inputs en cualquier modelo térmicos, debido a que dichas pérdidas se traducirán en un consiguiente incremento de temperatura.

Encuadrándolo en el presente proyecto, será necesario evaluar correctamente las pérdidas producidas por el componente electromagnético, debido a que un incorrecto cálculo de estas inducirá a un error acumulado que desacreditará los resultados del modelo. Es por tanto un eslabón indispensable y de equivalente importancia que el desarrollo del modelo mismo.

2.2.1 PÉRDIDAS EN EL NÚCLEO MAGNÉTICO

Las pérdidas magnéticas en el núcleo poseen básicamente dos posibles orígenes físicos:

- Pérdidas ciclo de Histéresis

  El proceso de magnetización y desmagnetización de un material ferromagnético produce pérdidas en forma de calor como resultado de la diferencia de Energía transferida al campo durante ambos procesos. El valor de dichas pérdidas coincide con el área encerrada en el contorno del ciclo de histéresis y depende de la frecuencia de la corriente que circula, la densidad pico del flujo magnético, la temperatura y las características del material.

- Pérdidas por Corrientes de Foucault

  Producidas por las corrientes inducidas sobre el material ferromagnético por los cambios en el campo magnético variable con el tiempo. Las pérdidas por corrientes parásitas dependen del cuadrado de la frecuencia, el cuadrado de la densidad pico del flujo magnético y las propiedades y geometría del material. En aquellos casos donde el material magnético es aislante, como en el caso de las ferritas, el valor de las pérdidas es prácticamente nulo.

Por tanto, las pérdidas en el núcleo deben ser caracterizadas como una función dependiente de:

- Densidad pico del flujo magnético B_{AC}.
- Frecuencia f.
- Temperatura T.
- Forma del núcleo magnético.
- Material.

Por tanto, el cálculo de las pérdidas electromagnéticas resulta un reto complicado que será abarcado en el presente apartado.

Pérdidas por Histéresis

Todos los núcleos electromagnéticos presentan un grado de histéresis en su ciclo característico B-H, es decir, en todos los núcleos de materiales ferromagnéticos existe una diferencia entre la energía de desmagnetización y magnetización del material [17]. Para ilustrar dicha afirmación, supongamos que tenemos un circuito magnético con una fuente de tensión variable con el tiempo como el de la siguiente figura:

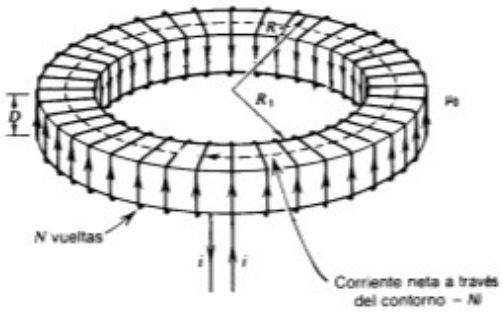


Figura 2: Circuito magnético con fuente de tensión variable con el tiempo [28]

Cabe destacar que para el desarrollo de este no se tendrá en cuenta la resistencia óhmica del hilo arrollado sobre el núcleo y el flujo disperso. La energía comunicada por la fuente a la bobina en un tiempo dt es la siguiente:

$$v * i * dt \quad (10)$$

La tensión vendrá dada por:

$$v = N * S * \frac{dB}{dt} \quad (11)$$

Por lo que la ecuación (1), quedaría de la siguiente forma:

$$v * i * dt = N * S * dB \quad (12)$$

Y finalmente teniendo en cuenta que: $N * i = H * l$

Obtenemos la siguiente ecuación [29]:

$$v * i * dt = S * l * H * dB \quad (13)$$

De dicha ecuación podemos concluir que cuando aumenta la densidad de campo magnético B, la energía comunicada por la fuente depende del producto del campo magnético H, la diferencial de la densidad de campo magnético dB y el volumen del circuito magnético $S * l$, donde S es la superficie y l es la longitud. Así mismo, analizando la ecuación (4), sobre la *Figura 2* que representa la curva $B - H$ del núcleo magnético, observamos que el producto $H * dB$ representa el área oscurecida de la figura.

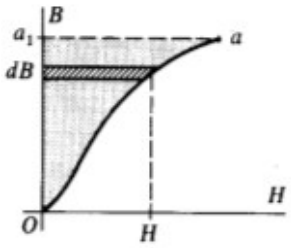


Figura 3: Diagrama B-H durante la magnetización de un núcleo magnético [28]

Por lo tanto, la energía comunicada en el proceso de magnetización al aumentar el valor de H será proporcional al valor del área por debajo de la curva que une los puntos $\bar{O}$ y a. Por otro lado, en el proceso de desmagnetización, como ya se indicó en el apartado "Ciclo de Histéresis" del capítulo anterior, al disminuir el valor de H, los valores de B siguen la curva que une los puntos a y b de la *Figura 3*:

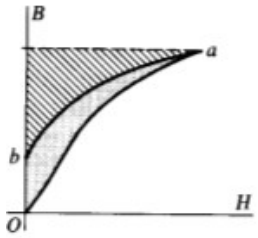


Figura 4: Diagrama B-H durante la desmagnetización de un núcleo magnético [28]

Donde el área rallada, representa el representa la energía por unidad de volumen que el circuito magnético cede a la fuente en el proceso de desmagnetización. La diferencia entre el área en el proceso de magnetización y desmagnetización representa la energía por unidad de volumen almacenada en el material por unidad de volumen y ciclo de histéresis. Si dicho material se ve forzado a recorrer f ciclos de histéresis, como el representado en la *Figura 4*, por segundo, la potencia que se disipa en forma de calor, es decir, las pérdidas, son las siguientes:

$$P_{Hist} = S * l * f * (\acute{a}rea\ BH) \ (\ 14\ )$$

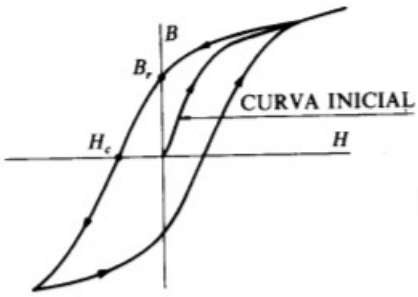


Figura 5: Ciclo de Histéresis en material ferromagnéticos [28]

De la siguiente expresión se pueden deducir los siguientes puntos:

- Un mayor valor de la frecuencia f, aumentará el valor de las pérdidas por histéresis y en consecuencia el calentamiento inducido por este. Existen procedimientos donde se persiguen altas frecuencias para el calentamiento de piezas, como en el caso del horno de inducción

-A mayor volumen del circuito magnético, mayor serán las pérdidas. A su vez, un mayor valor máximo de la densidad de flujo B, punto a en las *Figuras 3 y 4,* aumentará el valor de las pérdidas por histéresis. Sin embargo, para los transformadores de potencia donde se persiguen valores de flujo concretos, trabajar con un mayor valor de inducción permite disminuir el volumen y, por tanto, las pérdidas. Se suele trabajar con el valor de inducción máxima situado en el codo de la curva $\bar{O} - a$ de la *Figura 3*.

- Por último, se deduce que para reducir las pérdidas por histéresis será recomendado utilizar un material cuyo ciclo de histéresis sea lo más estrecho posible, denominados materiales blandos.

Pérdidas por corrientes de Foucault

Cuando se aplica un campo magnético variable en un núcleo magnético se generan unas corrientes circulantes en su interior como puede verse en la siguiente imagen:

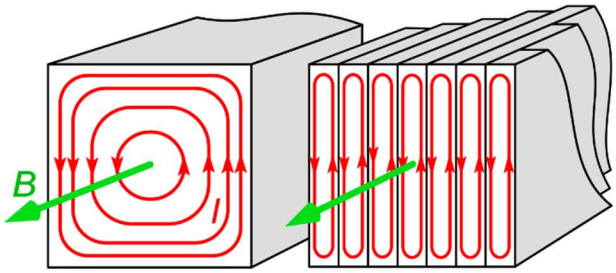


Figura 6: Corrientes de Foucault en núcleo magnético [20].

Siguiendo la "regla de la mano derecha", las corrientes de Foucault circulan en dirección de forma que el campo magnético inducido (secundario) se oponga al campo magnético primario inducido. Ambos campos tienden a "proteger" el interior del núcleo y el campo magnético total en el núcleo decae exponencialmente con la distancia al interior. La distancia característica de caída de campo magnético está dada por [33]:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \ (15)$$

$$Donde:$$

$$-\ Frecuencia\ f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

$$-Pemeabilidad\ Magnética: \mu.$$

$$-Conductividad\ del\ material: \sigma.$$

Esto supone un problema por las pérdidas que genera y aumenta en relevancia en frecuencias muy altas. Para calcular dichas pérdidas se considerará que el conductor magnético está inmerso en un campo magnético variable $B(t)$ y uniforme en toda el área transversal.

Fijándonos en la Figura 6, el campo magnético secundario generado para contrarrestar al campo primario sería el que se indica de color verde, B(t).

El flujo magnético que atraviesa el plano perpendicular al campo magnético (plano xy) tomando como ejemplo un núcleo magnético con forma rectangular, sería el siguiente:

$$\phi(t) = A(x) * B(t) = 2xwB(t) \ (16)$$

$$Donde:$$

$$-Siendo\ A\ el\ área\ que\ es\ atravesada\ por\ el\ campo\ magnético.$$

$$-x\ la\ altura\ respecto\ al\ eje\ simetría\ del\ núcleo: 2x\ la\ altura\ evaluada.$$

$$-w\ ancho\ del\ núcleo\ magnético.$$

Utilizando la ley de Faraday:

$$v(t) = 2xw * \frac{\partial B(t)}{\partial t}\ (17)$$

La resistencia r, siendo L la profundidad del núcleo tomado cómo ejemplo, sería:

$$r = \frac{w\rho_{NUCLEO}}{dA_{LATERAL}} = \frac{2w\rho_{NUCLEO}}{Ldx}\ (18)$$

Por lo que las pérdidas instantáneas en el núcleo magnético por corrientes de Foucault se pueden definir como:

$$\delta p(t) = \frac{v(t)^2}{r}\ (19)$$

Definiendo finalmente las pérdidas por corrientes de Foucault por unidad de volumen como:

$$P_{fou,vol} = \frac{\langle \delta p(t) \rangle}{Volumen}\ (20)$$

Como ejemplo, para el caso de un campo magnético $B(t) = B * \sin wt$, una anchura L y un espesor d el resultado sería [33]:

$$P_{fou,vol} = \frac{d^2\omega^2B^2}{24 * \rho_{NUCLEO}}\ (21)$$

Sin embargo, las pérdidas de Foucault no suelen ser calculadas independientemente, sino que se suelen computar junto a las pérdidas por Histéresis con la ecuación empírica de Steinmetz que será expuesta en el siguiente subapartado.

Computo de las pérdidas totales en el núcleo

La forma general de la ecuación empírica para el cálculo de las pérdidas totales en el núcleo magnético es la siguiente:

$$P_v = kf^{\propto}(B_{AC})^{\beta}\ (22)$$

$$Donde:$$

$$-\ P_v\ es\ la\ potencia\ media\ por\ unidad\ de\ volumen.$$

$$-\ f\ es\ la\ frecuencia\ de\ la\ señal\ de\ excitación.$$

$$-B_{AC}\ es\ el\ flujo\ magnético\ de\ pico.$$

$$-\ \propto, k\ y\ \beta\ son\ parámetros\ del\ material\ calculados\ empiricamente.$$

Está ecuación se denomina ecuación de Steinmetz (GSE) [21] y puede ser aplicada en unos rangos de frecuencia y densidad de flujo. Los fabricantes a menudo proporcionan información

detallada de las pérdidas en el núcleo P_v como función de B_{AC} y con la frecuencia f como parámetro. Un ejemplo de esto sería la información proporcionada en la ficha técnica de la ferrita 3F3:

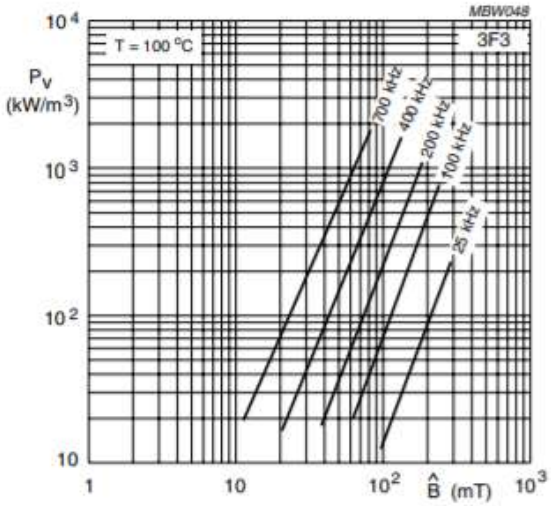
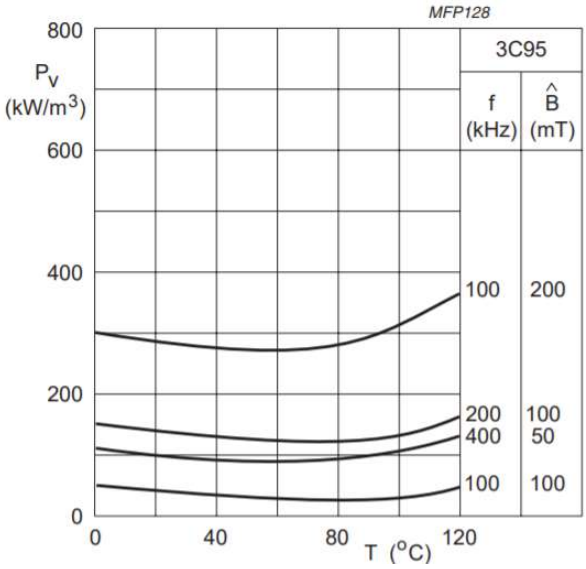


Figura 7: Pérdidas en el núcleo magnético en función de la densidad de flujo magnético. [18]

Adicionalmente será necesario incluir a la ecuación de Steinmetz un factor que evalúe la influencia que tiene la temperatura en el cálculo de las pérdidas en el núcleo magnético. Como ejemplo, para la ferrita 3C95:



4

Figura 8: Pérdidas magnéticas específicas como función de la Temperatura. [19]

Como resultado, la ecuación de Steinmetz modificada incluyendo la influencia de la temperatura es la siguiente [23]:

$$P_v = kf^{\propto}(B_{AC})^{\beta}(C_2 - C_1 * T + C_0 * T^2) \ (23)$$

$$Donde:$$

$$- P_v \ es \ la \ potencia \ media \ por \ unidad \ de \ volumen$$

$$- f \ es \ la \ frecuencia \ de \ la \ señal \ de \ excitación$$

$$-B_{AC}\ es\ el\ flujo\ magnético\ de\ pico$$

$$-\propto, k\ y\ \beta\ son\ parámetros\ del\ material\ calculados\ empiricamente.$$

$$-\ C_0, C_1\ y\ C_2\ parámetros\ calculados\ empíricamente.$$

$$-\ T\ es\ la\ temperatura\ media\ del\ núcleo\ magnético.$$

Ferrita	f (kHz)	k	∝	β	C_0	C_1	C_2
3C30	20-100	7.13E-03	1.42	3.02	3.65E-04	6.65E-02	4
	100-200	7.13E-03	1.42	3.02	4.00E-04	6.80E-02	3.8
3C90	20-200	3.20E-03	1.46	2.75	1.65E-04	3.10E-02	2.45
3C94	20-200	2.37E-03	1.46	2.75	1.65E-04	3.10E-02	2.45
	200-400	2.00E-09	2.6	2.75	1.65E-04	3.10E-02	2.45
3F3	100-300	2.50E-04	1.63	2.45	7.90E-05	1.05E-02	1.26
	300-500	2.00E-05	1.8	2.5	7.70E-05	1.05E-02	1.28
	500-1000	3.60E-09	2.4	2.25	6.70E-05	8.10E-03	1.14
3F4	500-1000	1.20E-03	1.75	2.9	9.50E-05	1.10E-02	1.15
	1000-3000	1.10E-11	2.8	2.4	3.40E-05	1.00E-04	0.67

Tabla 1: Constantes de la ecuación de Steinmetz para los diferentes rangos de valor de frecuencia. [18]

El aumento de las pérdidas electromagnéticas en función de la frecuencia implica que un núcleo que trabaje con cierta densidad B_{AC} de pico tendrá un rango limitado de frecuencias a las que poder operar y no podrá ser utilizada dicha relación para todas las frecuencias:

Ferrita	Rango f(MHz)
3C30	<0.2
3C90	<0.2
3C94	<0.3
3F3	0.2-0.5
3F4	1-2

Tabla 2:Rangos de frecuencia de la Ecuación de Steinmetz. [18]

Además, la ecuación de Steinmentz posee la gran limitación de que únicamente puede ser calculada para formas de ondas senoidales, resultando un problema insalvable para la caracterización en electrónica de potencia, donde las tensiones y corrientes suelen ser ondas pulsadas. Para solventar dicho problema se propuso una mejora de la ecuación de Steinmetz [21], motivada porque las pérdidas en un dominio tienen una dependencia directa de $\frac{dB}{dt}$. La fórmula de Steinmetz modificada (IGSE), teniendo en cuenta la influencia de la temperatura incluida en la fórmula anterior sería la siguiente:

$$P_V = \left(\frac{1}{T} \int_0^T k_i \left| \frac{dB}{dt} \right|^{\propto} * (\Delta B)^{\beta - \propto} * dt \right) * \ Inf_{TEMP} \ (24)$$

$$Donde:$$

$$Inf_{TEMP} = (C_2 - C_1 * T + C_0 * T^2)$$

$$k_i = \frac{k}{(2\pi)^{\propto-1}\int_0^{2\pi}|\cos\theta|^{\propto}2^{\beta-\alpha}d\theta}$$

Los parámetros $k, \alpha\ y\ \beta$ son los parámetros equivalentes utilizados en la ecuación de Steinmentz. Utilizando esta fórmula modificada, las pérdidas pueden ser calculadas para cualquier forma de onda, sin que se requiera una caracterización extra de la ecuación de Steinmentz.

Adicionalmente, existe un modelo con mayor precisión que tiene en cuenta las pérdidas del efecto DC Bias, denominado I2GSE *[24]*. Sin embargo, no se va a tener en cuenta en este estudio debido a que la principal fuente de pérdidas en el núcleo magnético proviene de la histéresis y estas pérdidas son despreciables frente a las pérdidas de Histéresis.

Por último, a nivel teórico se considera a la Temperatura de Curie, temperatura donde el material magnético pierde sus propiedades, el máximo operacional de un material magnético. Sin embargo, a nivel teórico-práctico las pérdidas magnéticas limitan la temperatura máxima operacional. A ciertas temperaturas críticas, la generación de pérdidas magnéticas puede ser mayores que la capacidad de disipación térmica del núcleo magnético, generando un proceso inestable de crecimiento de Temperatura [32]. Este fenómeno es consecuencia de la no linealidad de relación entre las pérdidas y la temperatura.

2.2.2 PÉRDIDAS EN EL DEVANADO MAGNÉTICO DE COBRE

El paso de corriente por un conductor tiene como consecuencia unas pérdidas en forma de calor que son principalmente explicadas por el efecto Joule. La primera Ley de Joule establece que el calor generado en un conductor por el que circula una corriente es proporcional al producto de la resistencia y el cuadrado del valor de la corriente [31].

$$P \propto I^2 * R \ (25)$$

La elección del cobre para el desarrollo de transformadores y bobinas se debe a su elevada conductividad eléctrica, facilitando el arrollamiento con finos cables y minimizando la cantidad de cobre utilizado, el volumen del devanado y la resistencia eléctrica del mismo. Como consecuencia de las altas densidades de corrientes producto de la búsqueda de un mínimo volumen de devanado, el calor disipado por pérdidas eléctricas es una relevante fuente de calor.

Al igual que con el núcleo magnético, el valor máximo de pérdidas eléctricas disipadas está limitado por la capacidad de disipación de calor que tenga el devanado.

Una sección típica de un devanado en una bobina de N vueltas se presenta a continuación:

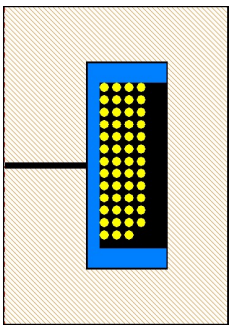


Figura 9: Sección devanado en núcleo magnético RM8/I

La sección que posee un único cable de cobre se puede definir como A_{Cu}. El producto del número de espiras N por el área del devanado da como resultado el total de área de cobre. Sin embargo, esta no coincide en su totalidad con el área que presenta el bobinado A_W porque la geometría circular no permite ocupar todo el espacio de ventana y el conductor posee un aislante de forma que los cables no se encuentran en contacto unos con otros. La ratio total de cobre en la ventana del devanado se puede definir como [31]:

$$k_{Cu} = \frac{N * A_{Cu}}{A_W} \ (16)$$

La cantidad de potencia disipada por unidad de volumen de cobre en su resistencia DC está dado por:

$$P_{Cu,DC} = \rho_{Cu} * (J_{rms})^2 \ (27)$$

$$Donde:$$

$$-J_{rms} = \frac{I_{rms}}{A_{Cu}} \ es\ la\ densidad\ de\ corriente.$$

$$-I_{rms} es\ la\ corriente\ por\ el\ devanado.$$

Sin embargo, resulta más conveniente expresar la potencia consumida en el devanado en función del área de ventana debido a que es más fácilmente calculable y facilitará el análisis térmico simplificando la geometría a una corona cilíndrica. Siendo su valor el siguiente:

$$P_{Cu,DC} = k_{Cu} * \rho_{Cu} * (J_{rms})^2 \ (28)$$

Donde el valor de la resistencia del devanado en corriente continúa es el siguiente:

$$R_{DC} = \frac{k_{Cu} * \rho_{Cu}}{{A_{Cu}}^2} \ (29)$$

Cabe destacar que el flujo de corriente a través de un conductor se distribuye de forma uniforme en el caso de la corriente continua (DC) y corriente alterna (AC) a baja frecuencia, no siendo así en el caso de la corriente alterna (AC) en altas frecuencias, donde será necesario tener en cuenta los siguientes factores:

- Efecto Piel

Cuando corriente alterna (AC) a alta frecuencia, no se distribuye de forma uniforme fluye menor cantidad de corriente conforme más cercana al centro del conductor se encuentre la superficie evaluada. Dicho efecto, que tiene como resultado un mayor valor de la Resistencia a la conducción de la corriente alterna frente a la continua, es conocido como Efecto Piel [16].

-Efecto Proximidad

El flujo de corrientes en los conductores colindantes a un conductor donde está circulando corriente alterna (AC) a alta frecuencia genera variaciones en el flujo de corriente del conductor, como consecuencia de las Corrientes de Foucault inducidas por el resto de los conductores. Optimizar la selección del núcleo magnético y el número de capas del devanado es clave para la reducción de las pérdidas en el devanado [16] .

Conceptualmente, dichos conceptos pueden ser sintetizados en la siguiente idea. El campo magnético generado por factores internos o externos en el conductor disminuye el área efectiva de los cables, aumentando la resistencia del devanado y, por tanto, las pérdidas.

Considerando dichos factores, el valor de las pérdidas en el interior del conductor en corriente alterna (AC) a alta frecuencia, es el siguiente:

$$P_{Cu,AC} = R_{DC} * I_{DC}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} R_{AC,i} * I_{AC,ef,i}^2 \quad (30)$$

$Donde$:

$-I_{AC,ef,i}^2$ es el cuadrado del valor eficaz de la intensidad del armónico i.

$-R_{AC,i}$ es el valor de la resistencia del armónico i.

Por último, cabe resaltar la influencia de la temperatura en las pérdidas del devanado. Dicha influencia es resultado de la dependencia que posee la conductividad del cobre respecto a la temperatura. Dicha dependencia puede observarse en la variación del valor de una resistencia de cobre frente a la temperatura [22]:

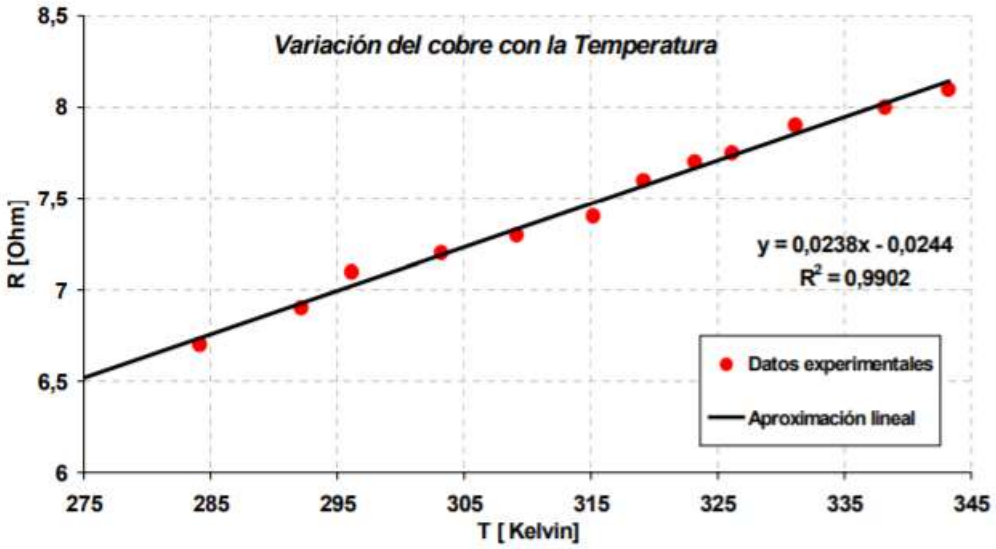


Figura 10: Datos experimentales de la variación de la resistencia de cobre con la temperatura. [22]

2.2.3 RESUMEN DEL APARTADO

Las pérdidas en los convertidores magnéticos poseen dos posibles orígenes: el núcleo magnético y el devanado. Para la caracterización de las pérdidas en el núcleo magnético será utilizada la ecuación de Steinmetz modificada (IGSE) [21], incluyendo la influencia de la temperatura en las pérdidas magnéticas. Por otro lado, las pérdidas en el devanado serán caracterizadas incluyendo la influencia del Efecto Piel y el Efecto Proximidad en el Área efectiva de conducción en el cobre y, por tanto, en la resistencia en corriente alterna (CA) a alta frecuencia. También cabe resaltar la influencia de la temperatura en la conductividad del cobre, influenciando a su vez a la resistencia en corriente alterna (CA) a alta frecuencia.

Pérdidas Totales en el núcleo:

$$P_V = \left(\frac{1}{T} \int_0^T k_i \left| \frac{dB}{dt} \right|^{\propto} * (\Delta B)^{\beta - \propto} * dt \right) * \ Inf_{TEMP} \ (31)$$

$$Inf_{TEMP} = (C_2 - C_1 * T + C_0 * T^2)$$

$$k_i = \frac{k}{(2\pi)^{\propto - 1} \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^{\propto} 2^{\beta - \alpha} d\theta}$$

Pérdidas en el devanado en corriente alterna (AC) a alta frecuencia:

$$P_{Cu,AC} = R_{DC} * I_{DC}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} R_{AC,i} * I_{AC,ef,i}^2 \ (32)$$

Dichas pérdidas constituyen el INPUT del modelo térmico transitorio, las cuales son disipadas al ambiente en forma de calor e inducen a un aumento de temperatura en el devanado y el núcleo magnético. Los conceptos teóricos necesarios para modelar dichos aumentos de temperatura será tratados en el siguiente apartado.

2.3 INTRODUCCIÓN A LA TRANSFERENCIA DE CALOR

El modelado térmico de elementos electromagnéticos es un área de estudio relativamente reciente, empezada a mitad de la década los 90 por B. J. Sawart y J. A. Ferreira [3]. Ambos autores estudiaron el incremento de temperatura producido los componentes magnéticos; pero no fue hasta el año 2002, donde P. R. Wilson [25] propuso un equivalente de circuito térmico del núcleo de ferrita. El modelo calculaba la subida de temperatura en el núcleo mediante la comparativa entre la energía disipada en forma de calor en convección y radiación con las pérdidas por histéresis en el núcleo magnético.

En este capítulo se esclarecerán las bases teóricas que permitirán desarrollar el modelo térmico transitorio de un componente magnético estableciendo el método de cálculo del perfil de temperatura teniendo en cuenta la influencia de la generación de calor proveniente de las pérdidas electromagnéticas, analizando la interacción del objeto con el ambiente mediante las condiciones de contorno y los métodos de transferencia y disipación de calor e introduciendo los números adimensionales que permitirán esclarecer cuál será el comportamiento del objeto en el transitorio.

2.3.1 ECUACIÓN GENERAL DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN SÓLIDOS

La completa caracterización térmica de un objeto requiere la determinación de la distribución de temperaturas en el objeto para determinadas condiciones de contorno e inputs en forma de fuentes de generación de calor y condiciones iniciales de análisis. Para ello, el primer paso en todo análisis térmico es la realización de un balance de energía en el objeto que se desea analizar para computar el calor que se almacena frente al calor generado y el calor intercambiado con el entorno. Aplicando la primera ley de la Termodinámica [4] o también conocida como la “Ley de la Conservación de la Energía”:

$$Q_{in} - Q_{out} + E_{gen} = \Delta E_{sistema} \ (33)$$

$$Donde:$$

$$-(\boldsymbol{Q_{in}} - \boldsymbol{Q_{out}}) \ es\ el\ balance\ de\ energia\ que\ entra\ en\ el\ sistema\ frente\ a\ la\ que\ sale.$$

$$-\boldsymbol{E_{gen}}\ es\ la\ energía\ generada\ por\ el\ sistema\ como\ fuente\ interna\ de\ generación\ de\ calor.$$

$$-\Delta\boldsymbol{E_{sistema}}\ es\ la\ variación\ de\ energia\ en\ el\ sistema\ como\ energía\ almacenada.$$

Donde en sistemas cerrados con masa fija, los términos del balance se definen como:

$$\Delta E_{sistema} = m * C_v * \Delta T \ (34)$$

$$E_{gen} = V * G \ (35)$$

$$Q_{in} - Q_{out} = J_{Total} * A_{ext} \ (36)$$

$$-m\ , V\ y\ A_{ext}\ son\ la\ masa, el\ volume\ y\ el\ área\ exterior\ del\ sistema\ respectivamente.$$

$-C_v$ es el calor específico a volumen constante en el sistema.

$-\Delta T$ es la variación de temepratura en el sistema.

$-J_{Total}$ es el flujo de energía que entra en el sistema menos el que sale.

$-G$ es la energía por unidad de volumen generada en el sistema.

Este análisis térmico global simplemente permitiría computar el balance de energía de un objeto donde se ha producido un incremento de temperatura fruto de un aumento de energía generada por el objeto o el calor que se intercambia en el contorno del objeto. Sin embargo, el objeto de la aplicación del presente análisis es la caracterización de la distribución de temperaturas en un componente magnético ante unas determinadas condiciones de contorno, una generación interna de calor en forma de pérdidas magnéticas y pérdidas en el devanado y una disipación de calor con el ambiente. Por tanto, será necesario establecer un análisis diferencial más preciso, teniendo en cuenta la conducción de calor en el interior del objeto y la variación de temperatura del objeto en función del tiempo. Para ello se tendrá en cuenta:

- Ley de Fourier unidimensional:

  Sea J la energía por unidad de área y tiempo que se establece entre dos puntos de un objeto separados por una distancia diferencial dx. La Ley de Fourier define que existe una proporcional entre el flujo de energía $\dot{J}$ y el gradiente de temperatura entre esos dos puntos [1]:

$$\dot{J} = -k * \frac{\partial T}{\partial x} \ (37)$$

$$Donde:$$

$$-\boldsymbol{k}\ es\ la\ conductividad\ del\ material\ en\ dicha\ dirección\ y\ a\ esa\ Temperatura.$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \; es\ el\ gradiente\ de\ temperatura\ en\ la\ dirección\ x.$$

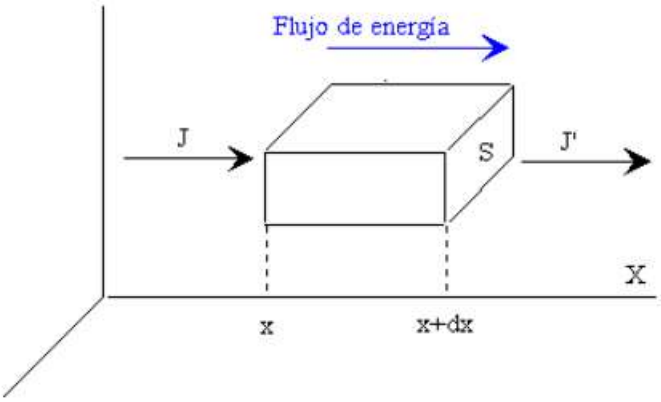


Figura 11: Barra de longitud dx, sección S y conductividad térmica k atravesada por un flujo $\dot{J}$ [1].

- Energía almacenada por un objeto por unidad de tiempo dt

Sea el objeto de la *Figura 9*, de calor específico C_v ,densidad ρ y sección S , la energía almacenada por unidad de tiempo dt, se define como [9]:

$$\frac{\Delta E_{sistema}}{dt} = \rho * S * dx * C_v * \frac{(T_{t+dt} + T_t)}{dt} \quad (38)$$

- Energía generada por un objeto por unidad de tiempo dt

Sea el objeto de la *Figura 9*, donde $\dot{g}$ es la potencia por unidad de volumen, la energía generada por unidad de tiempo dt se define [9]:

$$\frac{E_{gen}}{dt} = S * dx * \dot{g} \quad (39)$$

Cabe destacar que, en el análisis térmico de componentes magnéticos, $\dot{g}$ se correspondería con las pérdidas magnéticas y en el devanado.

Realizando un balance de energía al objeto de la *Figura 11*, aplicando la ley de Fourier, considerando que la sección S es uniforme en todo el objeto y reagrupando términos se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{g} = \rho * C_v * \frac{\partial T}{\partial t} \quad (40)$$

De forma más compacta considerando la evolución tridimensional se puede expresar como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (41)$$

Nótese, que la dificultad del análisis recae en el conocimiento del campo de Temperaturas. Conocido este, se simplifica en gran medida el cálculo de los flujos de calor y del transitorio térmico. Para un instante concreto, se define la ecuación de Laplace como:

$$0 = \alpha \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho C_p} \ (42)$$

Integrando unidimensionalmente para diferentes temperaturas se obtiene:

Lineal:

$$Generación\ de\ Calor: \quad T(x) = C_2 * x^2 + C_1 * x + C_0 \ (43)$$

$$Sin\ Generación\ de\ Calor: \quad T(x) = C_1 * x + C_0 \ (44)$$

Cilíndricas:

$$Generación\ de\ Calor: \quad T(x) = C_2 * x^2 + C_1 * ln\, x + C_0 \ (45)$$

$$Sin\ Generación\ de\ Calor: \quad T(x) = C_1 * ln\, x + C_0 \ (46)$$

Esféricas.

$$Generación\ de\ Calor: \quad T(x) = C_2 * x^2 + C_1 * \frac{1}{x} + C_0 \ (47)$$

$$Sin\ Generación\ de\ Calor: \quad T(x) = C_1 * \frac{1}{x} + C_0 \ (48)$$

Los siguientes perfiles de temperaturas serán utilizados para analizar la distribución de temperaturas presente en el componente magnético y evaluar correctamente el transitorio.

2.3.2 MÉTODOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

El proceso de transferencia de calor en forma de flujo térmico es producido por un desequilibrio energético a través de una superficie con condiciones de contorno definidas. De este modo, cualquier sistema que genere calor deberá disiparlo al ambiente hasta alcanzar un equilibrio energético. En el caso de los componentes magnéticos, las pérdidas generadas en el núcleo magnético y en el devanado tratadas en el capítulo anterior, se disipan en forma de calor produciendo un consecuente aumento de temperatura hasta alcanzar el equilibrio térmico. El intercambio de calor entre objetos puede producirse por medio de los siguientes mecanismos [4] :

- Conducción

Transporte de energía térmica a través de sólidos y líquidos estáticos. La conducción únicamente puede llevarse a cabo a través de objetos o materiales o entre dos objetos que están en contacto. Definimos así los siguientes conceptos:

$$Flujo\ de\ Calor\ Unidireccional: \quad q = -k\,\frac{\partial T}{\partial x} \ (49)$$

$$Flujo\ de\ Calor\ Tridireccional: \quad q = -k\,\nabla T \ (50)$$

Cabe destacar que en el presente proyecto se considerará el coeficiente de conducción térmica constante con la temperatura e igual en todas las direcciones.

- Convección

Transferencia de calor entre la superficie de un sólido y un fluido debido a la conducción y al transporte de energía como consecuencia del movimiento del fluido, producido de forma natural o forzada. Definimos así los siguientes conceptos:

$$Flujo\ de\ Calor\ por\ convección: \quad q = h\Delta T \ (51)$$

El coeficiente de película h es una conductancia térmica (W/K*m^2) que no es intrínseca a la geometría, sino que depende de las propiedades del fluido, la geometría del sólido y de la hidrodinámica del movimiento del fluido alrededor de la superficie del sólido.

El valor del coeficiente de película es muy diferente en función del método de transferencia de calor y la geometría sobre la que se esté evaluando. En el siguiente escrito únicamente se hará referencia a la convección natural debido a que en las condiciones de contorno del transitorio térmico del componente magnético a evaluar no se contemplará la convección forzada, la cual conlleva una mayor disipación del calor. La formulación que será utilizada para el cálculo del coeficiente de película en el caso de la convección natural es la siguiente.

Geometry	Natural convection heat transfer coefficient: W/m² · °C (ΔT in °C, L or D in m)	Natural convection heat transfer coefficient: Btu/h · ft² · °F (ΔT in °F, L or D in ft)
Vertical plate or cylinder	$h_{conv} = 1.42\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$	$h_{conv} = 0.29\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$
Horizontal cylinder	$h_{conv} = 1.32\left(\frac{\Delta T}{D}\right)^{0.25}$	$h_{conv} = 0.27\left(\frac{\Delta T}{D}\right)^{0.25}$
Horizontal plate ($L = 4A/p$, where A is surface area and p is perimeter	$h_{conv} = 1.32\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$	$h_{conv} = 0.27\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$
(a) Hot surface facing up	$h_{conv} = 0.59\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$	$h_{conv} = 0.12\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$
(b) Hot surface facing down		
Components on a circuit board	$h_{conv} = 2.44\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$	$h_{conv} = 0.50\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$
Small components or wires in free air	$h_{conv} = 3.53\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$	$h_{conv} = 0.72\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{0.25}$
Sphere	$h_{conv} = 1.92\left(\frac{\Delta T}{D}\right)^{0.25}$	$h_{conv} = 0.39\left(\frac{\Delta T}{D}\right)^{0.25}$

Figura 12: Coeficiente de Película en Convección Natural para diferentes geometrías. [7]

- Radiación

Emisión de calor en forma de ondas electromagnéticas en objetos que se encuentran a una temperatura por encima del cero absoluto. El flujo máximo emitido desde una superficie en forma de calor está dado por la ley de Stefan-Boltzmann [4]:

$$q = \varepsilon\sigma T_s^4 \ (52)$$

Para el desarrollo de este escrito, se supondrá que el ambiente es una superficie gris que emite a temperatura T_0 y se calculará un coeficiente de película equivalente de radiación.

$$q = \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_o^4) = \boldsymbol{\varepsilon * \sigma} * (T_s - T_o) * \boldsymbol{(T_s + T_o)} * \boldsymbol{(T_s^2 + T_o^2)} = \boldsymbol{h_{rad}} * (T_s - T_o) \ (53)$$

$$h_{rad} = \varepsilon * \sigma * (T_s + T_o) * (T_s^2 + T_o^2) = f(T_s, T_0, \varepsilon)$$

Se define adicionalmente el coeficiente de película de convección-radiación:

$$h_{rad-conv} = (h_{conv} + h_{rad}) \ (54)$$

Donde h_{rad-c} es dependiente de la temperatura superficial

2.3.3 RESISTENCIAS TÉRMICAS

Una herramienta muy útil para resolver la ecuación del calor sin necesidad de recurrir a la resolución de ecuaciones diferenciales –en muchas ocasiones puede llegar a ser inviable- es el uso de redes de resistencias térmicas. Este método consiste en una analogía con los circuitos eléctricos.

La resistencia térmica se define como la capacidad que tiene un material o una superficie para oponerse al flujo de calor, es decir, el inverso de la conductancia. Depende de cada método de transferencia de temperatura y de las condiciones a las que esté siendo evaluadas [12].

$$\Delta T = R_{th} * Q'' \ (55)$$

A lo largo de esta sección se definirán las resistencias térmicas de conducción, convección, radiación y de contacto entre objetos, las cuales serán utilizadas para definir el modelo térmico planteado en este TFG.

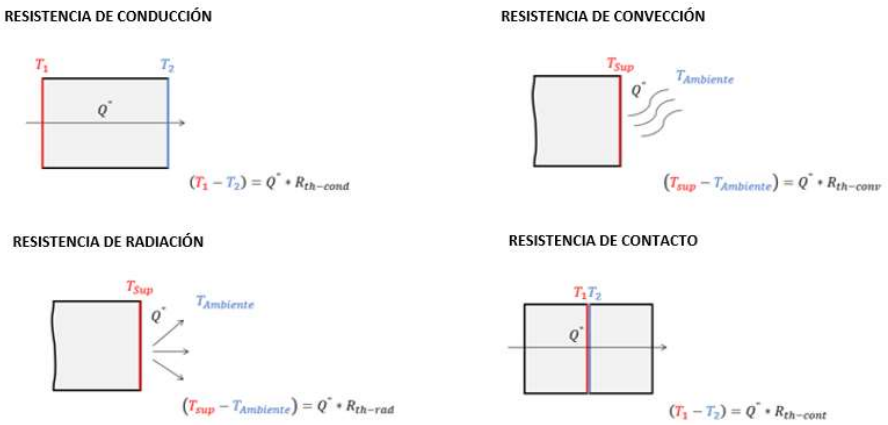


Figura 13: Resistencias térmicas de conducción, radiación, convección y contacto

Se presenta a continuación una metodología para el cálculo de cada una de las Resistencias Térmicas y su implicación y uso en el presente documento:

Resistencia Conducción

La resistencia térmica de conducción representa la capacidad de un material a oponerse al flujo de calor. De forma que para un flujo de calor constante $Q"$, a mayor valor de resistencia térmica mayor menor será la diferencia de temperatura entre los dos puntos evaluados.

$$\Delta T_1 * R_{cond,1} = \Delta T_2 * R_{cond,2} = Q" \ = \ cte \ (56)$$

$$Donde:$$

$$\Delta T_1 > \ \Delta T_2$$

$$R_{cond,1} < \ R_{cond,2}$$

La resistencia térmica depende del valor de la conductividad térmica k y de la geometría del objeto evaluado. Para representar la influencia de la geometría del objeto se tomará el factor S, el cual se evalúa en unidades de distancia. Por tanto, el valor de la Resistencia térmica de conducción se evalúa como [12]:

$$R_{cond} = \frac{1}{k * S} \ (57)$$

$$Donde:$$

$$-S: Factor\ de\ Forma\ del\ Objeto.$$

Donde la metodología para el cálculo del Factor de Forma S se trata en la *Figuras 14 y 15* que se presenta a continuación:

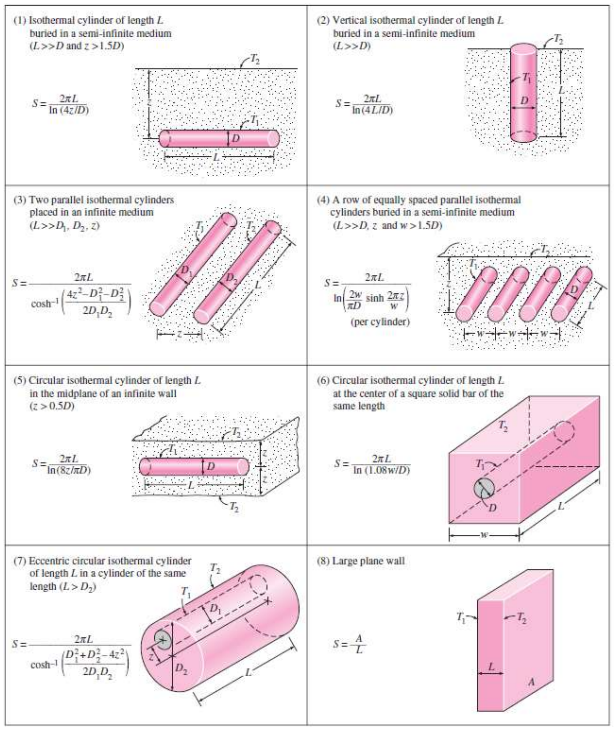


Figura 14. Cálculo del Factor de Forma S para diferentes geometrías [6].

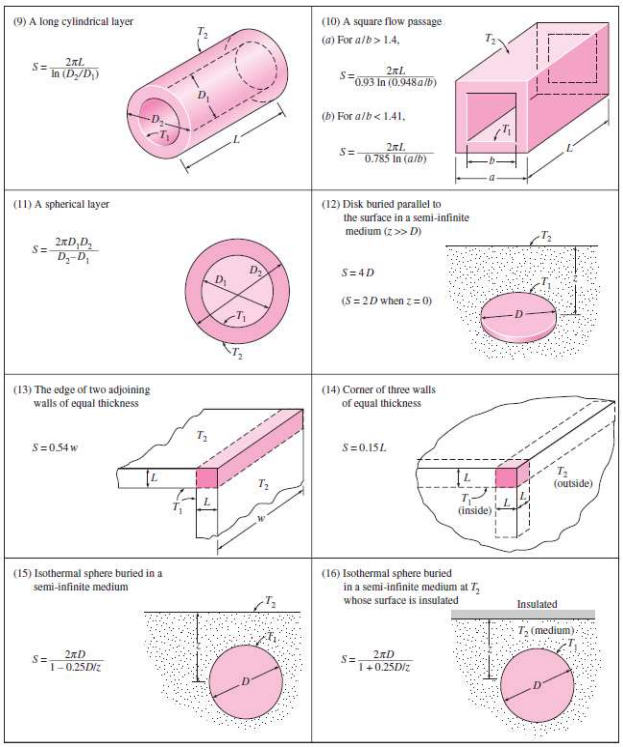


Figura 15: Cálculo del Factor de Forma S para diferentes geometrías [6].

En el presente documento, la resistencia de conducción será utilizada para evaluar la resistencia que presenta el flujo de calor al atravesar un objeto y disipar calor en el ambiente. A su vez, se debe diferenciar entre Resistencia de conducción media y resistencia de conducción total. Para ilustrar dicha diferenciación se presenta el siguiente ejemplo:

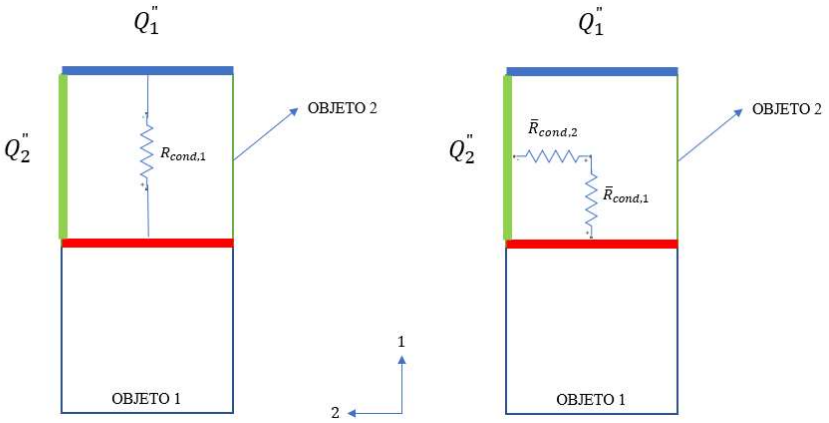


Figura 16: Resistencias Térmicas de Conducción del Objeto 2 en 2 direcciones. En la imagen de la izquierda se muestra la resistencia de conducción en dirección 1 y en la imagen de la derecha en dirección 2.

En la *Figura 16*, se observa que el objeto 1 puede disipar calor por su superficie marcada con color rojo mediante los flujos $Q_1^{"}$ y $Q_2^{"}$, a través de las superficies marcadas en azul y verde respectivamente. Cabe destacar que, para disipar en la cara marcada en azul, el flujo debe atravesar el objeto 2 en dirección 1 en su totalidad con la correspondiente resistencia térmica $R_{cond,1}$, mientras que, para disipar en la cara lateral marcada en verde, el flujo

deberá recorrer en media la mitad del objeto 2 en dirección 1 y la mitad del objeto 2 en dirección 2, siendo las resistencias térmicas correspondientes $\bar{R}_{cond,1}$ y $\bar{R}_{cond,2}$. Donde $\bar{R}_{cond,1}$ y $\bar{R}_{cond,2}$ representarían las resistencias medias de conducción del objeto 2 en las direcciones 1 y 2 respectivamente.

Resistencia Convección y Radiación

La resistencia térmica de convección y radiación representan la capacidad de una superficie en contacto con un fluido exterior de oponerse a la disipación. Individualmente, las resistencias pueden ser evaluadas en función del valor de coeficiente de película [9]:

$$R_{conv} = \frac{1}{h_{conv} * A} \quad (58)$$

$$R_{rad} = \frac{1}{h_{rad} * A} \quad (59)$$

En el presente documento, únicamente será evaluada la influencia de la convección debido a que es más relevante en la disipación de calor. Su correcta caracterización es fundamental para computar correctamente la evolución del transitorio térmico y la temperatura máxima alcanzada por el objeto en régimen permanente.

Resistencia de Contacto

La discontinuidad física existente entre dos materiales, debido a su rugosidad, tiene como consecuencia un gradiente térmico en la interfaz entre ellos, la cual puede tratarse como una resistencia térmica adicional. La conductividad del aire toma un valor fundamental en el valor de esta resistencia.

Las resistencias térmicas de contacto son propias de pares de materiales y se determinan de forma experimental. Tienen valores que rondan los $10^{-4} m^2 k/W$

El ejemplo más claro de la Resistencia de Contacto en un componente magnético sería en el contacto entre el devanado y el núcleo magnético. Sin embargo, no será incluida debido a que debe ser calculada de forma experimental y su influencia es baja en los componentes magnéticos frente a las resistencias de conducción y convección.

2.3.4 MODELADO TÉRMICO TRANSITORIO

La resolución del problema transitorio pasa por calcular el campo de temperaturas para cualquier instante de tiempo y la energía intercambiada en el transitorio. En la evolución del transitorio influyen tanto factores geométricos como las condiciones de contorno que marcan la interacción entre el componente magnético y ambiente.

Números Adimensionales

Para afrontar con garantías la resolución de este problema será necesario definir dos números adimensionales que permitan predecir cómo es el transitorio térmico del cuerpo. Definimos, por tanto:

Número de Biot:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{Intercambio\ Calor\ Convección}{Intercambio\ Calor\ Conducción} \quad (60)$$

Número adimensional que representa la regularidad espacial de la temperatura durante la evolución del transitorio [5]. Para números de Biot muy elevados la convección predomina frente a la conducción por lo que los gradientes de temperatura son muy elevados.

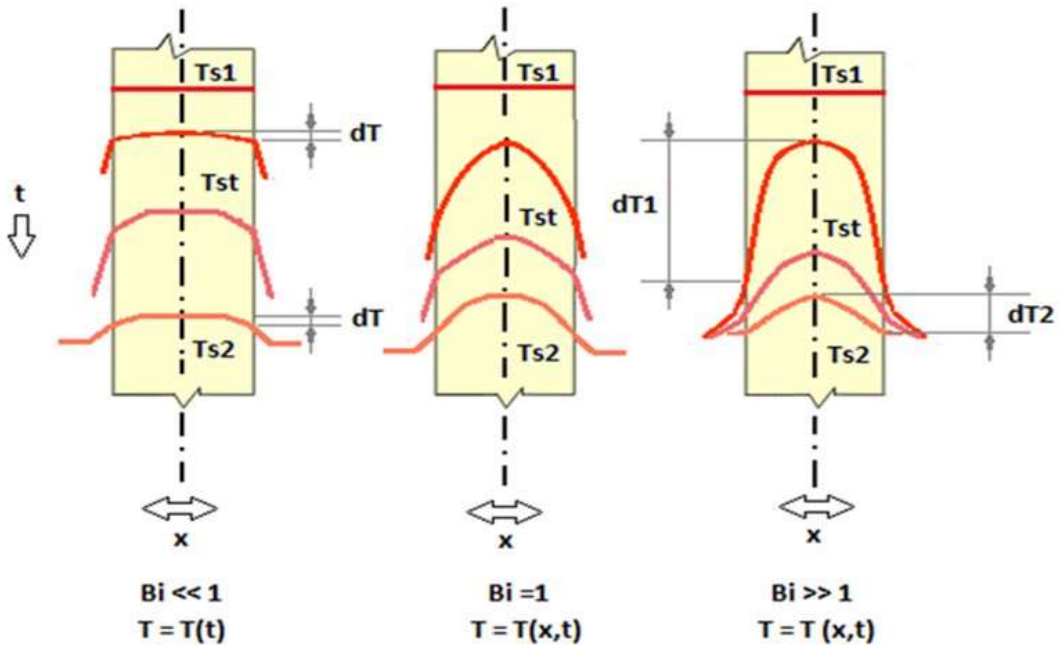


Figura 17: Influencia del número de Biot en el transitorio térmico (PiroBloc, 2016) [26]

Como se puede observar en la *Figura 15*, a mayores valores del número de Biot los gradientes térmicos en el interior del objeto durante el transitorio aumentarán y, por tanto, la componente dimensional del análisis adquirirá mayor relevancia, siendo necesaria evaluarla en el cómputo del transitorio.

Número de Fourier

$$Fo = \frac{\propto t}{L^2} = \frac{Velocidad\ de\ conducción}{Velocidad\ de\ Almacenamiento\ de\ Energía} \quad (61)$$

Número adimensional que representa la relación entre la velocidad de almacenamiento de energía en el cuerpo y la velocidad de conducción [8]. El número de Fourier será utilizado como factor adimensional en el desarrollo del modelo térmico transitorio.

Métodos para la Resolución de Regímenes Transitorio

Método de la Capacitancia

Para pequeños valores del número de Biot, la conducción predomina frente a la convección y, por tanto, los gradientes de temperatura son muy planos, permitiendo evaluar el cuerpo sin tener en cuenta la influencia dimensional en el transitorio térmico [11]. En dichos casos, el transitorio estará gobernado con una función únicamente dependiente con el tiempo y qué dependerá de las propiedades del objeto y las condiciones de contorno. Para demostrar dicha afirmación realizaremos un balance de energía a un objeto i:

Balance de Energía:

$$q_{entra} - q_{sale} + q_{generada} = q_{almacenada}$$

$$h * A * (T - T_{amb}) + q_{generada} = \rho * V * C_p * \frac{\partial T}{\partial t} \ (62)$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos:

$$T(t) = T_{homogene} \ + T_{particular} \ (63)$$

$$Donde:$$

$$T_{homogenea} = CTE_1 * e^{\frac{-t*h*A_s}{\rho*V*C_p}}$$

$$T_{particular} = CTE_2$$

Donde $T_{homogenea}$es la resolución de la ecuación diferencial homogénea y $T_{particular}$ es una solución particular de la ecuación diferencial

Analizando el resultado, se observa que la evolución del transitorio es independiente de la energía del objeto y depende de las condiciones de contorno y las propiedades del objeto, como se había indicado. La temperatura evoluciona de manera equivalente a un circuito RC, donde:

$$C_{tér} = V * \rho * C_p \ (64)$$

$$R_{tér} = \frac{1}{h * A_s} \ (65)$$

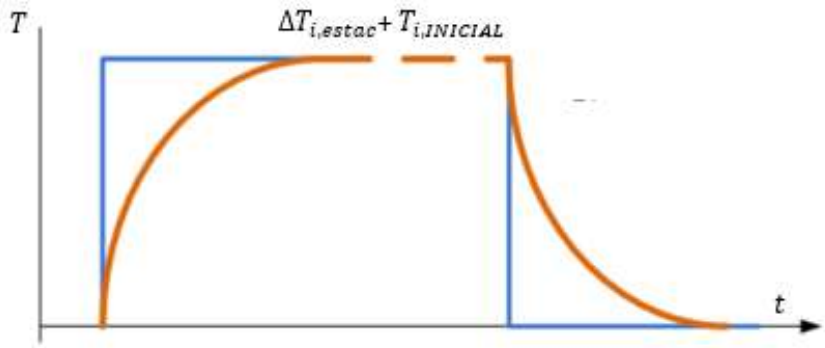


Figura 18: Evolución del Transitorio térmico utilizando el Método de la Capacitancia

Al siguiente método de análisis del transitorio térmico se le conoce como método de la capacitancia

El criterio utilizado para su uso implicará el cálculo del número de Biot. Siendo el criterio el siguiente [5] :

- Objeto con Biot: $Bi < 0.01$: Método de la Capacitancia
- Objeto con Biot: $Bi > 0.01$: Metodología Alternativa

Integración directa de ecuación del calor en Régimen Transitorio

El método de la capacitancia no es aplicable en todos los casos y, por tanto, en ciertas ocasiones será necesario integrar directamente la ecuación del calor en régimen transitorio para analizar la evolución temporal del campo de temperaturas. Esta será la metodología con la que se tratará de abordar el modelo que se desarrollará en posteriores capítulos.

Cabe mencionar que no se desarrollará en este escrito el método de análisis de transitorios térmicos por gráficos de Heisler [10] ya que es aplicable únicamente a sólidos sin generación interna de calor y no es el caso del presente estudio.

Cálculo del transitorio térmico en sistemas tridimensionales

Cuando los efectos transitorios bidimensionales y tridimensionales son relevantes, es posible resolver los transitorios como resultado del producto de las soluciones unidimensionales [14]. De esta forma para obtener la solución final del campo de temperaturas para un instante de tiempo, se deberán obtener las soluciones a los 3 problemas unidimensionales para ese instante de tiempo. Para explicar la presente metodología se presenta el siguiente ejemplo.

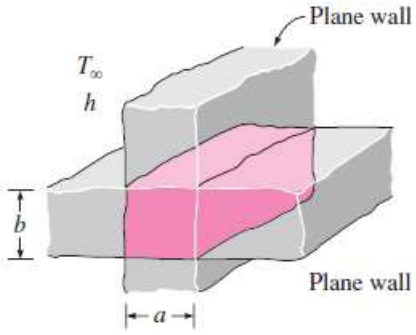


*Figura 19: Barra de sección a*b infinita [14]*

En la *Figura 17,* una barra infinita se encuentra en contacto directo con el ambiente en proceso de enfriamiento. La barra infinita podría considerarse la intersección de dos planos infinitos de espesor a con vector normal x (Plano Inf x) y de espesor b con vector normal y (Plano Inf y) respectivamente y por tanto, la distribución de temperatura durante el transitorio de la barra infinita puede ser expresada como [14]:

$$\left(\frac{T(x,y,t)-T_\infty}{T_{inicial}-T_\infty}\right)_{Barra\ Infiinita} = \left(\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_{inicial}-T_\infty}\right)_{Plano\ Inf\ x} * \left(\frac{T(y,t)-T_\infty}{T_{inicial}-T_\infty}\right)_{Plano\ Inf\ y}$$

$$\theta(x,t) = \left(\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_{inicial}-T_\infty}\right);\ \theta(y,t) = \left(\frac{T(x,t)-T_\infty}{T_{inicial}-T_\infty}\right) (66)$$

Donde $\theta(x,t)$ representa el transitorio en la coordenada x y $\theta(x,t)$ representa el transitorio en la coordenada x de la temperatura adimensionalizada. La subdivisón geométrica para el resto de geometrías más utilizadas es:

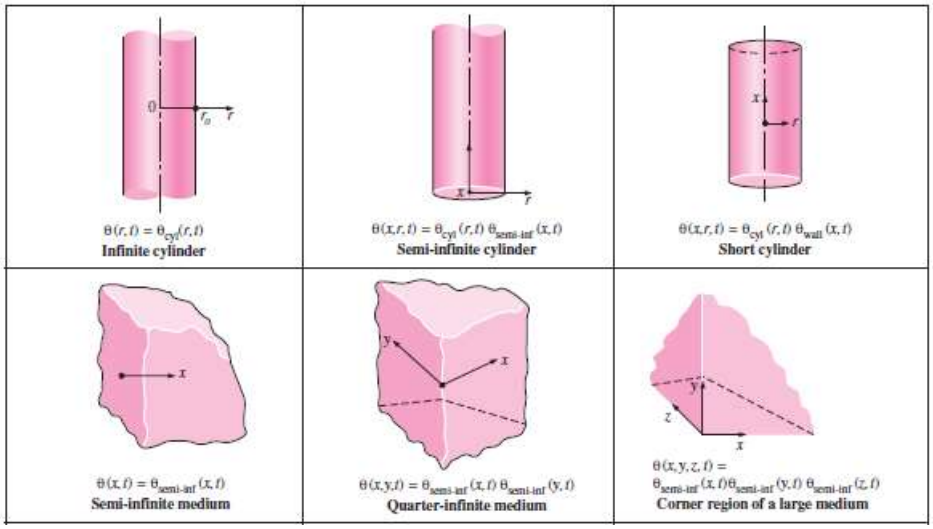


Figura 20: Análisis multidimensional del Transitorio Térmico [14].

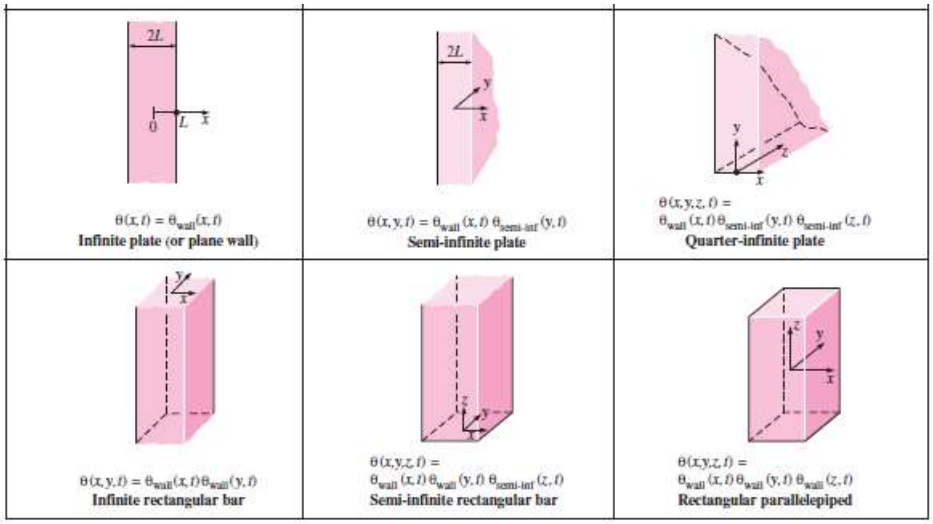


Figura 21: Análisis multidimensional del Transitorio Térmico [14].

2.4 DUALIDAD TÉRMICA – ELÉCTRICA

El principal objetivo del presente proyecto es el desarrollo de un modelo electrotérmico transitorio que permita predecir las temperaturas inducidas por las pérdidas etapa de potencia de un componente electromagnético. La dificultad del siguiente análisis reside en la dualidad de los modelos térmico y electromagnético, donde la temperatura y los perfiles térmicos influyen y son dependientes de las pérdidas electromagnéticas obtenidas en el modelo eléctrico. Por tanto, es necesario realimentar la temperatura alcanzada en cada instante del transitorio térmico con el fin de preservar la precisión en el cálculo de resultados. Se presenta a continuación el diagrama de bloques pertinente para el análisis:

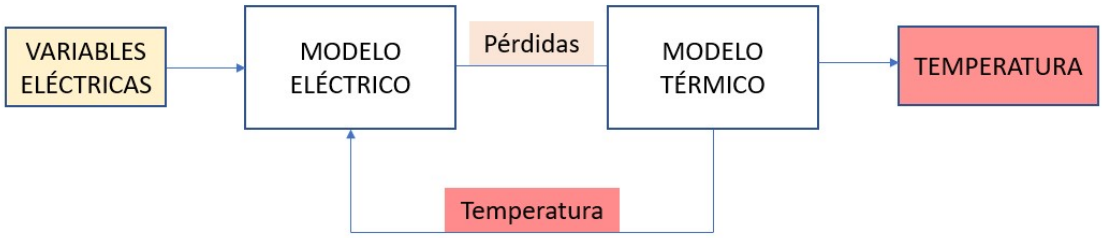


Figura 22: Diagrama de Bloques del modelo realimentando el valor de la temperatura.

Cabe resaltar que realimentar el valor de la temperatura para el cálculo de las pérdidas en el componente magnético a tiempo real dificulta el computo del modelo, por lo que en el próximo capítulo se expondrá una metodología para abordar dicho problema.

3 MODELO TÉRMICO TRANSITORIO

El cálculo de un modelo transitorio es unos de los principales retos en el modelado de componentes electromagnéticos y adquiere una gran importancia para estimar la fatiga térmica que reduce la vida útil de dichos componentes. Como se trató en el capítulo de "Introducción a la Transferencia de Calor", el método de la capacitancia no es aplicable en todas las situaciones evaluables debido a que es demasiado restrictivo porque depende de que los gradientes de temperatura dentro del componente magnético analizado sean lo suficientemente pequeños para que pueda ser despreciable la influencia dimensional en el cálculo del transitorio. De modo que es necesario desarrollar una metodología aplicable a estos componentes para simplificar el cálculo de los transitorios térmicos, objeto de este estudio.

En este documento se va a ilustrar un modelo lineal de análisis transitorio derivado del modelo estacionario mediante objetos tratado en la tesis de Guillermo Salinas [27]. Dicho modelo simplifica el cálculo de las temperaturas en los puntos críticos reduciendo el coste computacional frente a los modelos MEF (Métodos de Elementos Finitos) y prevaleciendo la precisión frente a los modelos más simplificados. Por tanto, se utilizará la metodología para el cálculo del modelo estacionario desarrollado en la tesis de Guillermo Salinas para desarrollar una metodología que permita analizar la evolución transitoria. Variables como la conductividad, el calor específico y la relación Volumen/Área tendrán gran importancia en el análisis.

3.1 MODELO TÉRMICO ESTACIONARIO

El comportamiento térmico de los componentes magnéticos es uno de los principales factores limitantes durante su diseño. Para abordar dicha problemática, los modelos MEF permiten estimar el perfil de temperaturas con gran precisión, sin embargo, estos modelos suponen un coste computacional demasiado alto y, por tanto, Guillermo presenta en su tesis un modelo simplificado con el que aunar precisión y velocidad computacional.

3.1.1 METODOLOGÍA

El diagrama de bloques que describe el funcionamiento del modelo es el siguiente:

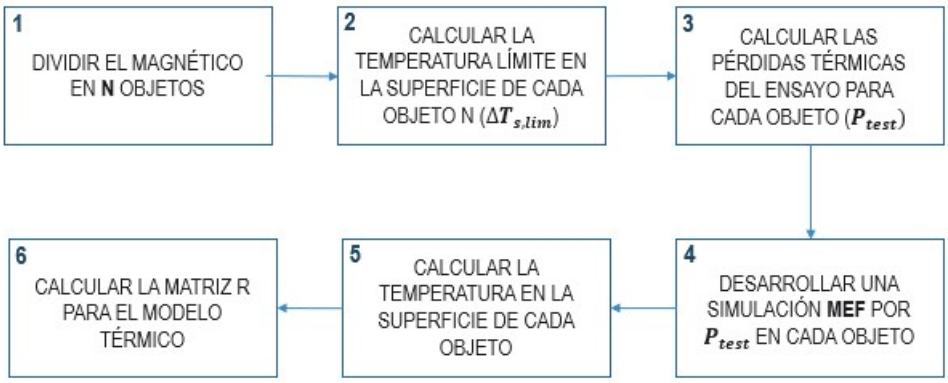


Figura 23:Diagrama de Bloques del Modelo Térmico Estacionario.

Describiéndose a continuación cada una de las fases del procedimiento:

1. En primer lugar, el magnético deberá ser dividido en un número de objetos N. Cabe destacar que para el cálculo del modelo se requiere una simulación MEF por cada objeto, por tanto, es conveniente buscar el número de objetos mínimo que permita representar al componente magnético.
2. Establecer la variación de temperatura superficial máxima respecto al ambiente $\Delta T_{s,lim}$ para cada uno de los objetos. Se debe encontrar por debajo de la temperatura límite de seguridad.
3. Calcular P_{test} para cada objeto. P_{test} representa la potencia que disipa cada objeto en el ambiente cuando la diferencia de temperatura respecto a la temperatura ambiente es $\Delta T_{s,lim}$. La formulación simplificada que será utilizada para el cálculo de P_{test} para cada uno de los objetos es la siguiente [27]:

$$P_{test} = \sum_{Superf} h_{superf} * A_{superf} * \Delta T_{s,lim} + \varepsilon \sum_{Superf} A_{superf} * \sigma * \left({T_{s,lim}}^4 - {T_{ambiente}}^4\right) \quad (67)$$

$$Donde:$$

$$-h_{superf}\ es\ el\ coeficiente\ de\ película\ de\ la\ superficie$$

$$-A_{superf}\ es\ el\ área\ de\ la\ superficie$$

$$-\ T_{s,lim}\ es\ la\ temperatura\ límite\ de\ cada\ objeto\ en\ su\ superficie$$

$$-\sigma\ es\ la\ constante\ de\ Stephan - Boltzmann\ (5.670373 * 10^{-8} \frac{W}{m^9 * K^4})$$

$$-\ \varepsilon\ es\ la\ emisividad\ relativa$$

Donde el primer término representa la potencia intercambiada con el ambiente por convección, mientras que el segundo término representa la potencia intercambiada con el ambiente por radiación.

4. Realizar un MEF por cada objeto. El componente magnético será simulado en su totalidad, sin embargo, únicamente se le asignarán las pérdidas P_{test} a uno de los objetos en cada una de las simulaciones. Las pérdidas se consideran uniformes en el objeto y las propiedades térmicas constantes.
5. Calcular la temperatura en la superficie. Para cada una de las simulaciones, se almacenará la variación de temperatura media respecto al ambiente en la superficie de cada uno de los objetos. En el modelo no es rígidamente necesario utilizar la temperatura en la superficie, cualquier punto puede ser objeto de estudio.
6. Calcular la matriz $[R]$ para el modelo térmico. Una vez almacenada la temperatura en cada uno de los objetos, se calcularán todos los términos de la matriz $[R]$. La matriz R tiene las mismas unidades que la resistencia térmica (K/W), sin embargo, no proviene de la relación entre las propiedades del material y la geometría del componente magnético. A su vez, tiene dimensión NxN, siendo N el número de objetos en el que ha sido segmentado el magnético. Cada término de la matriz se define como [27]:

$$R_{i,j} = \frac{\Delta T_{i,j}}{P_{test,j}} \quad (68)$$

Por tanto, el término $R_{i,j}$ representa la variación de temperatura en la superficie respecto al ambiente en el objeto i entre la potencia calculada cuando el objeto j tiene unas pérdidas $P_{test,j}$.

Una vez calculados todos los términos de la matriz $[R]$, Guillermo Salinas define el modelo térmico estacionario como [27]:

$$\begin{pmatrix} \Delta T_{1,sup} \\ \vdots \\ \Delta T_{N,sup} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1,1} & \cdots & R_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N,1} & \cdots & R_{N,N} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$[\Delta T_{sup}] = [R] * [P]$$

$$Donde:$$

$$-[\Delta T_{sup}]\ es\ el\ vector\ de\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente$$

$$-[P]\ es\ el\ vector\ de\ pérdidas\ en\ cada\ uno\ de\ los\ objetos.$$

La propia definición inherente a la matriz permite el cálculo de la variación de temperatura respecto al ambiente en la superficie de cada uno de los objetos para diferentes valores de pérdidas. De forma, que para el objeto i, la variación de temperatura en la superficie respecto al ambiente para un vector de pérdidas $[P]$, se define como [27]:

$$\Delta T_{sup,i} = P_1 * R_{i,1} + \cdots + P_N * R_{N,1} \quad (70)$$

Por tanto, el modelo predice la variación de temperatura media respecto al ambiente en la superficie de cada uno de los objetos para cualquier combinación de pérdidas. Los coeficientes de la matriz $[R]$ son constantes y están definidos a partir de una linealización en las condiciones de funcionamiento críticas y unas condiciones de contorno.

Cabe destacar que, para el presente modelo estacionario, se ha definido la matriz $[R]$ para calcular las temperaturas en la superficie, sin embargo, esta puede ser definida para calcular la temperatura en cualquier punto de cada objeto con un bajo coste operacional, ya que las simulaciones no tienen que ser repetidas. Por otro lado, la matriz $[R]$ tiene validez únicamente para las condiciones de contorno en la que se realizó la simulación MEF, por lo que no puede ser extrapolable a otras condiciones y requeriría recompilar las simulaciones.

3.2 MODELO TÉRMICO TRANSITORIO

Una vez expuesta la metodología para abordar correctamente el cálculo del régimen estacionario, será necesario analizar la evolución transitoria de cada objeto a la hora de alcanzar la temperatura en el régimen estacionario. Para ello tomaremos en consideración la influencia de la temperatura alcanzada en régimen estacionario y la influencia de la posición y el tiempo de forma independiente. Esto se debe a que el desarrollo del transitorio no depende del valor de las pérdidas en el objeto ni del origen de estas, sino que es característico de las propiedades del material, la forma del objeto y la capacidad de evacuar calor que tenga el objeto en su contorno. Por tanto, en el siguiente documento se expondrán 3 metodologías para afrontar el cálculo de la evolución temporal del transitorio térmico en un componente magnético desde dos puntos diferenciados: el método de la capacitancia expuesto en el anterior capítulo y el método de la capacitancia modificado, basado en el análisis adimensional realizado en [2], cómo modelos teóricos y un modelo térmico transitorio basado

en la simulación MEF. Cabe destacar que, a diferencia con el modelo térmico estacionario, en este apartado no se tendrá en cuenta la influencia de la radiación.

3.2.1 METODOLOGÍA

El diagrama de bloques que describe el funcionamiento de las metodologías partiendo del modelo térmico estacionario es el siguiente:

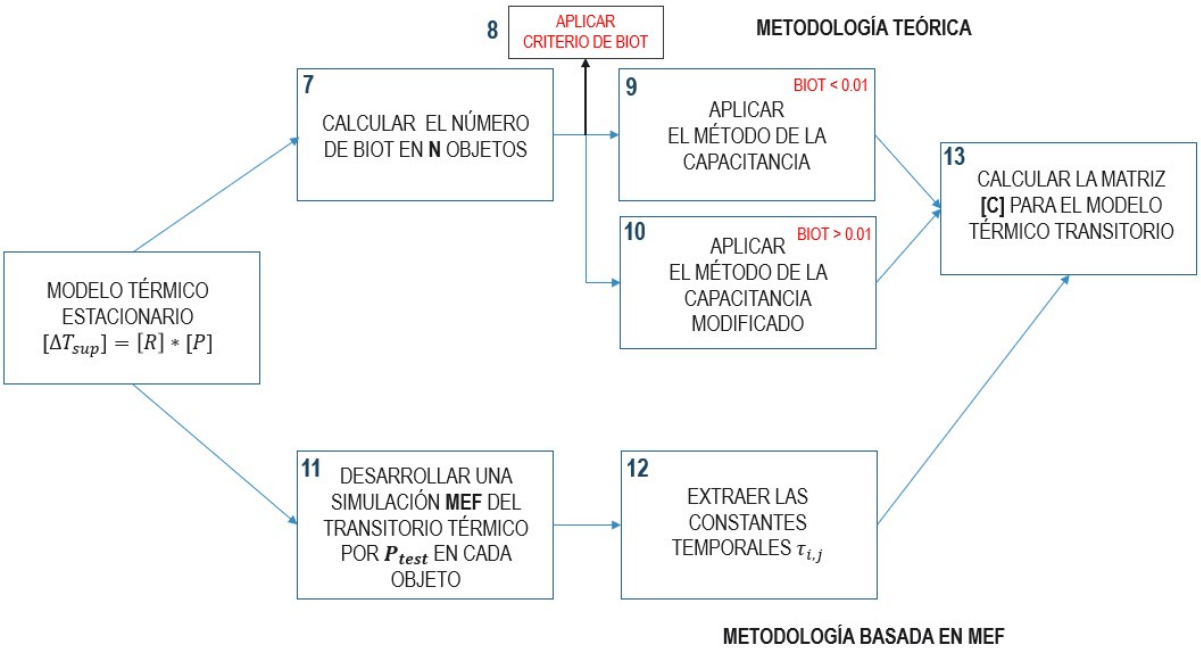


Figura 24: Diagrama de Diagrama de Bloques del Modelo Térmico Transitorio.

Donde en la figura anterior, los números 7,8,9 y 10 son fases propias de la metodología teórica mientras que los números 11 y 12 son propios de la metodología basada en MEF. Ambas metodologías comparten la fase 13, en la cual se computa la matriz [C] que evalúa el comportamiento térmico del componente magnético.

A continuación, se describen cada una de las fases de ambos procedimientos:

METODOLOGÍA TEÓRICA

7. Calcular el número de Biot. Se computará el número de Biot de cada uno de los objetos en cada una de las direcciones con las condiciones de contorno de cada una de las superficies. El número de Biot, cómo ya se trató en el apartado de "Introducción a la Transferencia de Calor", es un número adimensional que representa la regularidad de la temperatura dentro de un objeto durante el transitorio
8. Aplicar el criterio de Biot. Para aquellos objetos donde el número de Biot es muy bajo, la conductividad térmica se impone frente a la convección y, por tanto, los gradientes térmicos en el objeto son pequeños. La temperatura en dichos casos puede ser considerada equivalente en todos los objetos. El criterio utilizado para considerar como cierta dicha afirmación es la siguiente:

   - **Objeto con Biot:** $\boldsymbol{Bi < 0.01}$: Gradientes térmicos en el objeto despreciables

- **Objeto con Biot:** $\boldsymbol{Bi > 0.01}$: Gradientes térmicos en el objeto no despreciables

9. Aplicar el método de la capacitancia. En el caso de que aquellos objetos que cumplan el criterio expuesto en el punto 9, será posible aplicar el criterio de la capacitancia. Así pues, el perfil de temperatura a lo largo de todo el objeto será único en todos los instantes de tiempo. El transitorio estará gobernado con una función únicamente dependiente con el tiempo y dependerá de las propiedades del objeto y las condiciones de contorno. La temperatura evolucionará de manera equivalente a un circuito RC, donde:

$$C_{tér} = V * \rho * C_p \ (71)$$

$$R_{tér} = \frac{1}{h * A_s} \ (72)$$

Por lo tanto, para dichos casos utilizaremos la función $\mathrm{A(t)}$ que define el transitorio del objeto como:

$$\mathrm{A(t)} = \left(1 - e^{-\frac{h*A_s*t}{V*\rho*C_p}}\right) \ (73)$$

En la anterior fórmula, no se ha tenido en cuenta la influencia espacial debido a que se ha considerado que el predominio de la conducción frente a la convección permite despreciar la influencia de los gradientes térmicos. También es necesario aclarar que se ha definido la función de forma que se cumplan las condiciones temporales de $A(0) = 0$; $A(+\infty) = 1$. A su vez se define la constante temporal del objeto que modela el transitorio como:

$$\tau_{Obj} = \frac{V * \rho * C_p}{h * A_s} \ (s) \ (74)$$

De forma que $A\left(5 * \tau_{Obj}\right) \cong 1$

El método de la capacitancia se trata de un método muy simplificado que permite predecir los resultados experimentales, pero bajo condiciones muy específicas.

10. Aplicar el método de la capacitancia. En aquellos casos en los que no se pueda realizar la simplificación geométrica debido a que los gradientes térmicos son elevados, no será posible utilizar la simplificación del método de la capacitancia. Para esta situación, tampoco será posible utilizar métodos clásicos como el análisis mediante los gráficos de Heisler [10] y el número de Fourier [8] debido a que estos están desarrollados bajo la premisa de que el cuerpo no tiene generación interna de Calor. Así pues, será necesario analizar el problema afrontando directamente la ecuación general de transferencia de calor. Para ello se utilizará el Método de la Capacitancia Modificado, donde se calcularán las funciones que gobiernan el transitorio térmico para cada una de las direcciones del objeto resolviendo la ecuación general de transferencia de calor adimensionalizada. Una vez calculadas dichas funciones, la función que gobierna el transitorio en todo el objeto, teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado *"Cálculo del transitorio térmico en sistemas tridimensionales",* se aproxima al producto de la función que gobiernan el transitorio en cada una de las direcciones.

$$B(\mathrm{t}) = \mathrm{B(t)}_{Dir,1} * \mathrm{B(t)}_{Dir,2} * \mathrm{B(t)}_{Dir,3} \ (75)$$

También es necesario aclarar que las funciones temporales que modelan el transitorio deben cumplir las condiciones temporales de $B(0) = 0$; $B(+\infty) = 1$

A continuación, se extraerá de la función $B(\mathrm{t})$, de forma equivalente al método de la capacitancia, la constante temporal del objeto que modela el transitorio τ_{Obj} como:

$$B(5 * \tau_{Obj}) \approx 1$$

Definiendo finalmente la función $\mathrm{A(t)}$ que modela el transitorio térmico en todo el objeto como:

$$\mathrm{A(t)} = \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_{Obj}}}\right) (76)$$

Cabe destacar que el cálculo de la función requiere extraer la constante temporal τ_{Obj} gráficamente para cada objeto, de forma que:

$$B(t_{RRPP}) \approx 1$$

$$\tau_{Obj} = \frac{t_{RRPP}}{5} \ (77)$$

El método de la capacitancia modificado es un modelo que permite modelar el transitorio térmico en aquellas funciones donde no se pueden despreciar los gradientes térmicos en el interior del objeto, abordando directamente la resolución de la ecuación general de la transferencia de calor adimensionalizada en cada una de las direcciones del objeto, extrayendo el transitorio térmico del componente magnético en su totalidad. La metodología para abordar el cálculo de las funciones que modela el transitorio térmico en cada dirección será expuesto a lo largo del capítulo.

METODOLOGÍA BASADA EN FEM

11. Desarrollar una simulación MEF en cada objeto por P_{test} en cada objeto. De forma equivalente al punto 4, el componente magnético será simulado en su totalidad asignando las pérdidas P_{test} a uno de los objetos en cada una de las simulaciones. Para este caso se realizará la simulación en régimen transitorio del objeto. Las pérdidas se consideran uniformes en el objeto y las propiedades térmicas constantes.
12. Extraer las constantes temporales $\tau_{i,j}$. Para cada una de las simulaciones se almacenará el transitorio térmico en las superficies de los objetos evaluados en el modelo térmico estacionario. Como resultado se obtendrán un total de NxN vectores $C_{i,j}(t)$ que evalúan el transitorio térmico en la superficie seleccionada en el cada objeto i para cada simulación j. A partir de dichas funciones, se construirán los vectores $B_{i,j}(t)$ como:

$$B_{i,j}(t) = \frac{C_{i,j}(t) - C_{i,j}(0)}{C_{i,j}(+\infty) - C_{i,j}(0)} \ (78)$$

De forma que el vector $B_{i,j}(t)$ cumpla las condiciones de contorno temporales $B_{i,j}(0) = 0$; $B_{i,j}(+\infty) = 1$. A continuación, para cada uno de los vectores $B_{i,j}(t)$ se extraerán las constantes temporales $\tau_{i,j}$ de forma que:

$$B_{i,j}(5 * \tau_{i,j}) \approx 1$$

Definiendo finalmente la función $A_{i,j}(t)$ como:

$$A_{i,j}(\tau_{i,j}) \approx \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{i,j}}}\right) (79)$$

13. Calcular la matriz $[\boldsymbol{C}]$ para el cálculo del modelo térmico transitorio. Se debe diferencia el cálculo de la matriz $[\boldsymbol{C}]$ para las 3 metodologías expuestas en el presente documento puesto a que conceptualmente los términos computados
son diferentes. Mientras que, en la metodología teórica de la capacitancia C, el término $A_i(t)$ representa el transitorio térmico para el objeto i independientemente del origen de la variación de la temperatura, en la metodología basada en MEF y en la metodología de la capacitancia modificada CM el término $A_{i,j}(t)$ representa el transitorio térmico del objeto i extraído de la simulación en la cual únicamente el objeto j genera calor. Por lo que, para ambas metodologías, el modelo térmico transitorio se define como:

Metodología Teórica Capacitancia (C):

$$\begin{pmatrix} \Delta T_{1,sup}(t) \\ \vdots \\ \Delta T_{N,sup}(t) \end{pmatrix} = (A_1(t) \quad \dots \quad A_N(t)) * \left(\begin{pmatrix} R_{1,1} & \cdots & R_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N,1} & \cdots & R_{N,N} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} \right)$$

$$[\Delta T_{sup}(t)] = [C] * ([R] * [P]) \ (80)$$

$$Donde:$$

$$-[\Delta T_{sup}] \ es\ el\ vector\ de\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente.$$

$$-[P] \ es\ el\ vector\ de\ pérdidas\ en\ cada\ uno\ de\ los\ objetos.$$

$$-[R] \ es\ la\ matriz\ que\ modela\ el\ régimen\ estacionario.$$

$$-[C] \ es\ la\ matriz\ que\ modela\ el\ régimen\ transitorio.$$

La matriz $[C]$, se define por tanto como:

$$[C] = (A_1(t) \quad \dots \quad A_N(t)) \ (81)$$

De forma que la variación de temperatura respecto al ambiente de cada objeto i se define como:

$$\Delta T_{i,sup}(t) = A_i(t) * \sum_{j=1:N} R_{i,j} * P_j \ (82)$$

Metodología basada en MEF y CM:

$$\begin{pmatrix} \Delta T_{1,sup}(t) \\ \vdots \\ \Delta T_{N,sup}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1,1} * A_{1,1}(t) & \cdots & R_{1,N} * A_{1,N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N,1} * R_{1,N} A_{1,N}(t) & \cdots & R_{N,N} * R_{1,N} * A_{1N,N}(t) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix}$$

$$\left[\Delta T_{sup}(t)\right] = [RC] * [P] \ (83)$$

$$Donde:$$

$$-\left[\Delta T_{sup}\right] \ es\ el\ vector\ de\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente.$$

$$-[P] \ es\ el\ vector\ de\ pérdidas\ en\ cada\ uno\ de\ los\ objetos.$$

$$-[RC] \ es\ la\ matriz\ que\ modela\ el\ régimen\ estacionario\ y\ transitorio.$$

La matriz $[RC]$, se define como:

$$[RC] = \begin{pmatrix} R_{1,1} * A_{1,1}(t) & \cdots & R_{1,N} * A_{1,N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N,1} * R_{1,N} A_{1,N}(t) & \cdots & R_{N,N} * R_{1,N} * A_{1N,N}(t) \end{pmatrix} \ (84)$$

Dicha matriz, aúna el comportamiento del régimen transitorio y estacionario.

De forma que la variación de temperatura respecto al ambiente de cada objeto i se define como:

$$\Delta T_{i,sup}(t) = \sum_{j=1:N} A_{i,j}(t) * R_{i,j} * P_j \ (85)$$

3.2.2 CALCULO DE Bi Y P_{test} EN GEOMETRIAS COMPLEJAS

El modelo térmico estacionario y el modelo térmico transitorio requieren la evaluación de las condiciones de contorno en las superficies de cada objeto para el cálculo de P_{test} y el número de Biot respectivamente.

En la aplicación del modelo térmico estacionario, el cálculo de P_{test} requiere la evaluación del coeficiente de película que presentan los objetos en cada una de sus superficies. No todas las superficies de los objetos se encuentran en contacto directo con el ambiente, por lo que en el presente apartado se expondrá el concepto de coeficiente de película equivalente para aquellas superficies que se encuentren en contacto con el resto de los objetos. Por otro lado, el modelo térmico transitorio requiere el cálculo del número de Biot para distintas geometrías y condiciones de contorno no equivalentes en todas las superficies, así mismo los conceptos longitud característica y coeficiente de película promedio deber expuestos.

Por tanto, a continuación, se definen los siguientes conceptos:

-Coeficiente de película equivalente de una superficie(h_{equiv}): Se define como el coeficiente de película equivalente que presenta una superficie de un sólido que no se encuentra totalmente en contacto con el ambiente, pero es capaz de disipar calor por medio de la conducción y convección en los objetos colindantes.

$$h_{equiv,sup} = \frac{1}{A_s * R_{ter,sup-amb}} \quad (86)$$

$$Donde:$$

$$-A_s \; es \; el \; área \; de \; la \; superficie.$$

$$-R_{ter,sup-amb} \; es \; la \; resistencia \; térmica \; entre \; el \; ambiente \; y \; la \; superficie \; \left(\frac{K}{W}\right).$$

El término $R_{ter,sup-amb}$ representa la resistencia térmica que presenta el sólido para disipar calor al ambiente a través de la superficie evaluada. El cálculo de dicha resistencia térmica requiere la construcción de una red de resistencias térmicas que conecten dicha superficie con el ambiente para la disipación de calor. Para ilustrar el cálculo de dicha resistencia se desarrollarán dos ejemplos, uno en 2D y otro en 3D:

Sea la siguiente geometría conformada por un total de 5 objetos:

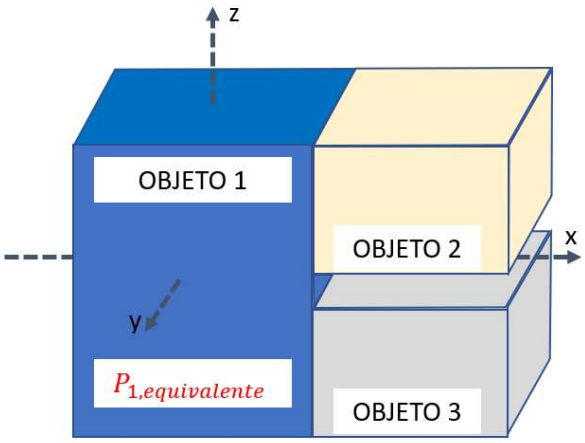


Figura 25: Geometría ejemplo de cálculo del coeficiente de película equivalente.

En ella se desea evaluar las condiciones de contorno que presenta el objeto 1 en la dirección x, debido a que, la superficie derecha con vector normal equivalente a dicha dirección, no se encuentra en su totalidad conectada al ambiente y se deberá analizar, por tanto, cuáles son las principales “rutas” que puede recorrer el flujo de calor que atraviesa dicha superficie.

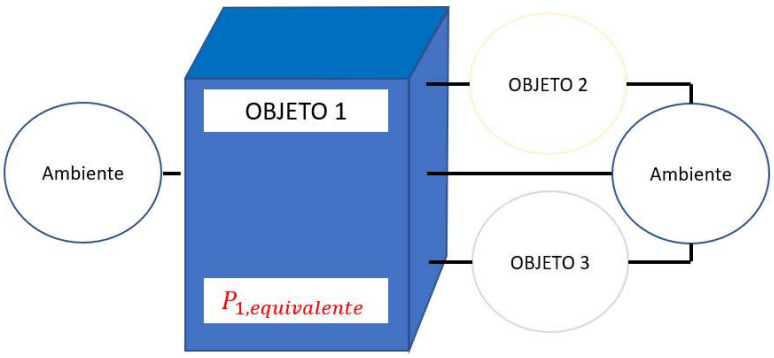


Figura 26: Esquema Nodal de la Geometría Ejemplo.

Como se observa en la figura, la cara lateral derecha posee 3 posibles rutas, estando conectada directamente con el ambiente en una de ellas. Para cada una de esas rutas será necesario desarrollar un Árbol de Resistencia Térmicas que se ajuste al "camino" que deberá recorrer el flujo de calor hasta alcanzar el ambiente. El árbol de resistencias térmicas se construirá bajo las siguientes premisas:

- Pese a que el flujo de calor que atraviesa una superficie tiene una dirección normal a la dicha superficie, el calor podrá ser disipado en los otros objetos en cualquier dirección.
- Al evaluar la convección en un objeto, se tendrá en cuenta la resistencia térmica de conducción que debe "atravesar" el flujo de calor. Por ejemplo, el objeto 1 en su superficie derecha para disipar calor en las caras laterales del objeto 2, el flujo de calor debe recorrer la resistencia de conducción media del Objeto 2, mientras que para disipar calor por la derecha del objeto 2, debe recorrer la resistencia de conducción del objeto 2 en su totalidad.

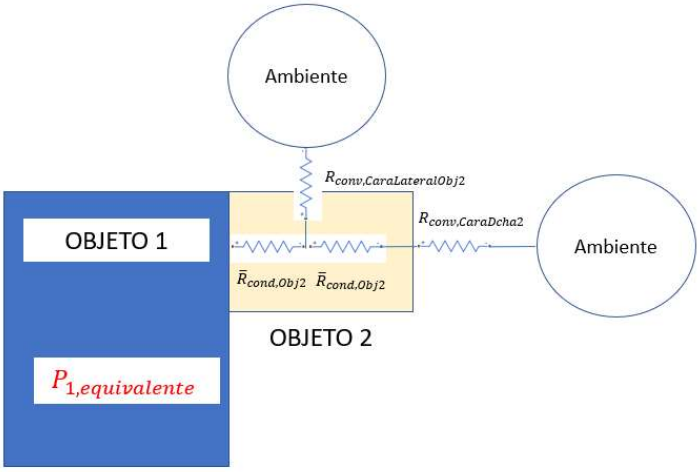


Figura 27: Árbol de Resistencias Térmicas Objeto 1-Objeto 2-Ambiente

- El valor medio de la Resistencia de conducción $\bar{R}_{cond}$ de un objeto por simplificación se definirá como $\frac{R_{cond}}{2}$. La resistencia de conducción R_{cond} de un sólido se calcula utilizando las tablas expuesta en el apartado de "Introducción a la Transferencia de Calor"
- El valor de la resistencia térmica de convección en una superficie se define como:

$$R_{conv} = \frac{1}{A_{superficie} * h_{superficie}} \quad (87)$$

El coeficiente película de la superficie se calculará utilizando las tablas expuestas en el apartado de “Introducción a la Transferencia de Calor”

Por tanto, en base a dichas premisas, el mapa de resistencias térmicas en la superficie lateral derecha del objeto 1 es la siguiente:

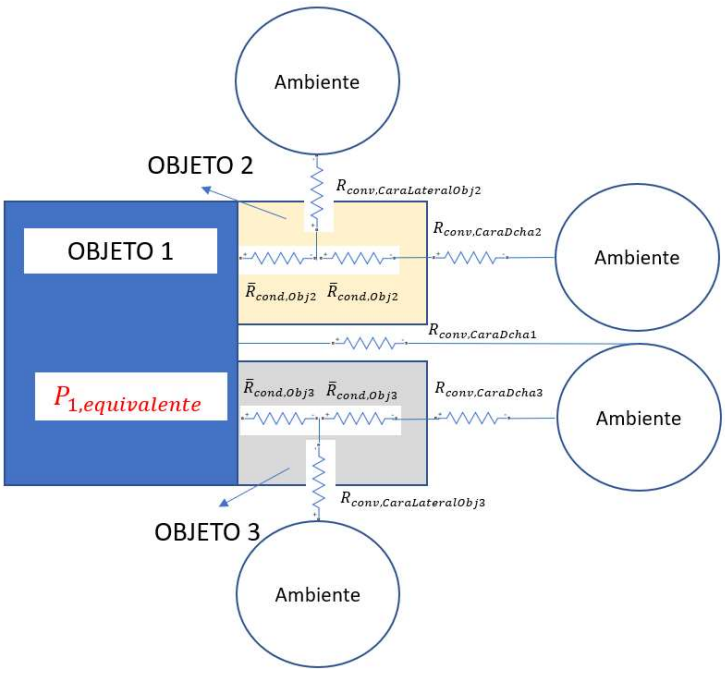


Figura 28: Árbol de Resistencias Cara lateral derecha Objeto 1 - Ambiente

Donde se calcula la resistencia térmica equivalente $R_{ter,sup-a}$ de la superficie respecto al ambiente como:

$$R_{ter,sup-amb} = R1//R2//R_{conv,CaraDcha1} \quad (88)$$

$$R1 = \bar{R}_{cond,Obj2} + (\bar{R}_{cond,Obj2} + R_{conv,CaraDcha2})//R_{conv,CaraLatera}$$

$$R2 = \bar{R}_{cond,Ob} + (\bar{R}_{cond,Ob} + R_{conv,CaraDcha3})//R_{conv,CaraLateralObj}$$

De este modo, $R_{ter,sup-amb}$ se calcula como la aportación en paralelo de cada una de las resistencias térmicas de las rutas definidas anteriormente.

A continuación, se presenta un segundo ejemplo, donde se simula la temperatura alcanzada en régimen permanente en un grupo de objetos donde únicamente uno de los objetos genera calor. Dicha temperatura, se simula de nuevo eliminando el objeto que no generaba calor e incorporando el coeficiente de convección equivalente en la superficie que resultaba del contacto entre los dos objetos. Los resultados obtenidos simulando el grupo de dos objetos, es el siguiente:

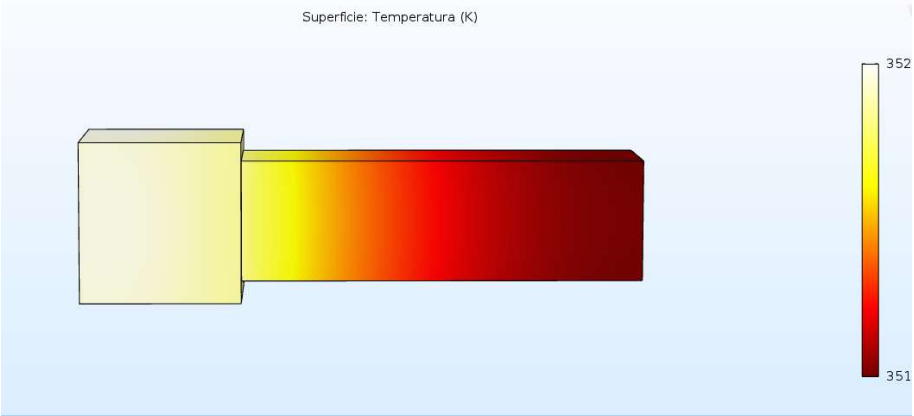
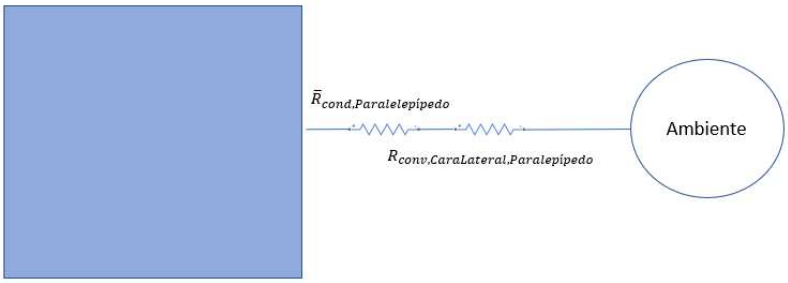


Figura 29: Régimen Permanente cuando el cubo tiene generación interna de calor.

Donde el cubo es el objeto con generación interna de calor y el paralelepípedo es el objeto complementario. Cabe destacar que no se ha tenido en cuenta la disipación de calor en la cara lateral derecha del objeto y el fragmento de la cara lateral derecha del cubo, ambas consideradas adiabáticas. El coeficiente de película complementario se ha considerado uniforme con valor de:

$$h_{conv} = 10\ \frac{W}{K * m^2}$$

Se calcula a continuación, el coeficiente de película equivalente de la cara derecha del cubo de la figura, teniendo en cuenta que los valores de las resistencias térmicas del paralelepípedo y el mapa de resistencias térmicas son las siguientes:



$$\bar{R}_{cond,Paralelepípedo} = 0.2778\ \frac{K}{W}$$

$$R_{conv,CaraLateral,Paralepípedo} = 33.33\ \frac{K}{W}$$

Figura 30: Árbol de Resistencias Cara Lateral Derecha Cubo- Ambiente

De forma que se obtiene el valor del coeficiente equivalente:

$$h_{equiv} = \quad 74.3802 \frac{W}{K * m^2}$$

Recompilando la simulación únicamente con el cubo e incorporando el valor del coeficiente de película equivalente, se obtiene:

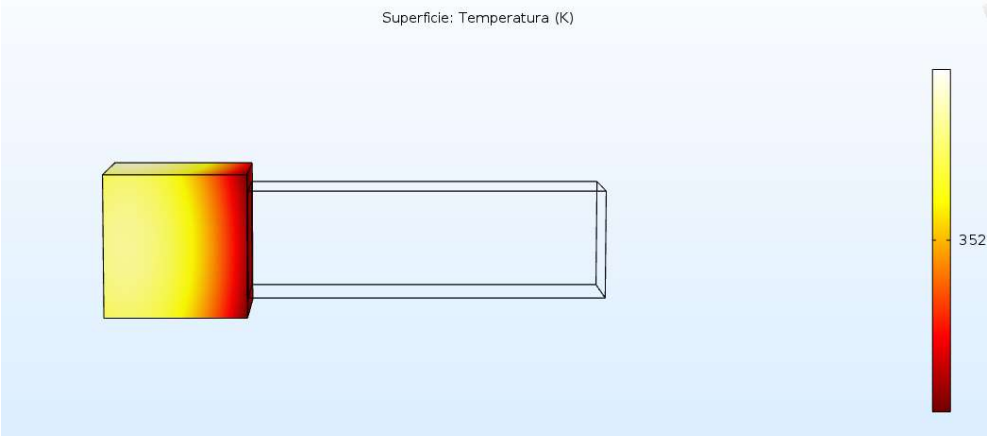


Figura 31: Régimen Permanente cuando el paralepípedo es sustituido por el coeficiente de película equivalente.

Como se observa en la figura, se alcanza la misma temperatura utilizando la metodología del coeficiente de película equivalente.

-Coeficiente de película equivalente promedio($h_{promedio}$): Se define como el coeficiente de película promedio que presenta un sólido en todas las superficies que participan en la disipación de Calor.

$$h_{promedio} = \frac{\sum_{superficies} A_s * h_{equiv,sup}}{\sum_{superficies} A_s} \quad (89)$$

El coeficiente de película promedio será utilizado para el cálculo del coeficiente de Biot de cada objeto en el que se desee evaluar el transitorio térmico, por medio del criterio de la capacitancia anteriormente citado.

-Longitud Característica (L_c): Longitud efectiva en la disipación de Calor.

$$L_c = \frac{Volumen\ sólido}{Área\ efectiva\ en\ la\ disipación\ de\ calor} \quad (90)$$

Cabe destacar que, en el análisis multiobjetivo, evaluar la longitud característica del objeto individual inducirá a errores en el cálculo del transitorio térmico del mismo. Dicho error implica que el transitorio térmico sea más rápido y desigual en todo el objeto. Por lo tanto, en el modelo de la capacitancia modificado, la longitud característica utilizada para el modelo transitorio es la del conjunto del componente magnético analizado. Dicha consideración no será tenida en cuenta en el cálculo de la temperatura en el régimen estacionario, al estar desacoplados ambos cálculos en el desarrollo del modelo.

Continuando con el ejemplo utilizado al desarrollar el concepto de coeficiente de película equivalente, se realizará la simulación del transitorio térmico para dos escenarios. Para analizar correctamente el resultado de los casos a analizar, es necesario tener en cuenta que la constante temporal del transitorio térmico de la simulación de los dos objetos es aproximadamente 800 s.

- **Escenario 1:** Simulación del transitorio térmico en el punto central del cubo sustituyendo el paralelepípedo por el coeficiente de película equivalente en la superficie de contacto. El resultado del transitorio térmico es el siguiente:

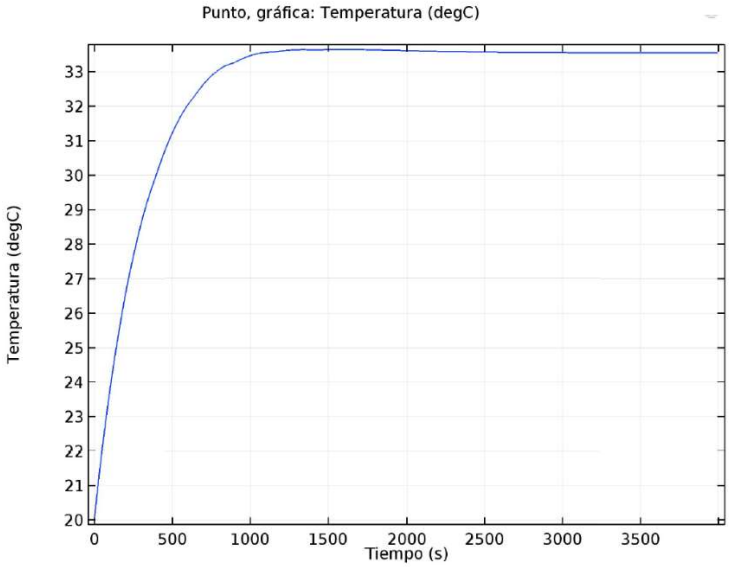


Figura 32: Régimen Transitorio cuando el paralepípedo es sustituido por el coeficiente de película equivalente.

- **Escenario 2**: Simulación del transitorio térmico en el punto central del cubo partiendo del escenario 1 donde se incluye la longitud característica del objeto completo y se aumentan las pérdidas.

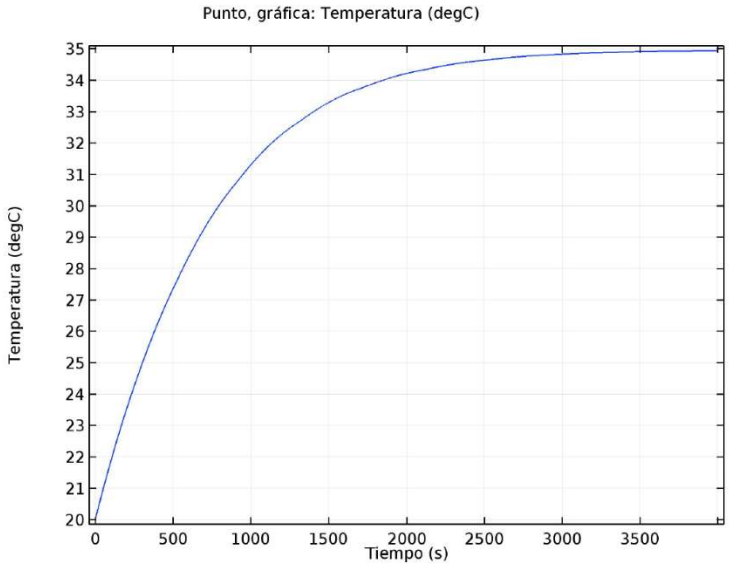


Figura 33: Régimen Permanente cuando el paralepípedo es sustituido por el coeficiente de película equivalente y la longitud equivalente. Adicionalmente, se aumentan las pérdidas respecto a la Figura 32

Por tanto, observando los resultados obtenidos en el escenario 1, el uso del coeficiente de película equivalente induce a “acelerar” el transitorio térmico. Esto se debe a que el coeficiente de película equivalente es un coeficiente virtual que evalúa la capacidad de la superficie de disipar calor sin tener el volumen de objetos sujeto al transitorio térmico. Los errores relativos frente a la simulación del transitorio térmico en los dos escenarios:

$Error\ Constante\ Temporal\ Escenario\ 1$	-62.5%
$Error\ Constante\ Temporal\ Escenario\ 2$	$-6.25\ \%$

Tabla 3: Errores Relativos de las simulaciones de los escenarios 1 y 2 respecto a la simulación de la geometría completa.

Siendo necesario evaluar la longitud característica del conjunto de objetos para reducir el error inducido del coeficiente de película equivalente.

3.2.3 MÉTODO DE LA CAPACITANCIA MODIFICADO

En aquellos casos en los que no se pueda realizar la simplificación geométrica debido a que los gradientes térmicos son elevados, no será posible utilizar la simplificación del método de la capacitancia. Así pues, será necesario analizar el problema afrontando directamente la ecuación general de transferencia de calor, utilizando una metodología basada en el desarrollo unidimensional adimensional de [2].

En el presente apartado, se ilustrará una metodología para calcular la función $\mathrm{A(t)}$ que modela el comportamiento transitorio en un objeto para cualquier condición de contorno. Se incluirán como consideraciones adicionales en el análisis transitorio:

- La función $\mathrm{A(t)}$ se calculará de forma independiente para cada una de las dimensiones, de forma que como se indicó en el capítulo de Introducción a la Transferencia de Calor, el valor de la función $\mathrm{A(t)}$ para coordenadas cartesianas sería:

  $$A_{x-y-z}(\mathrm{t}) \approx A_x(\mathrm{t}) * A_y(\mathrm{t}) * A_z(\mathrm{t})\ (91)$$

  Para coordenadas cilíndricas:

  $$A_{r-\theta-z}(\mathrm{t}) \approx A_r(\mathrm{t}) * A_\theta(\mathrm{t}) * A_z(\mathrm{t})\ (92)$$

  Para coordenadas esféricas:

  $$A_{r-\theta-\varphi}(\mathrm{t}) \approx A_r(\mathrm{t}) * A_\theta(\mathrm{t}) * A_\varphi(\mathrm{t})\ (93)$$

  Cabe destacar que en ciertas geometrías donde no exista una fuerte dependencia de la temperatura con la coordenada angular θ o la coordenada angular φ, se podrá despreciar dicha coordenada. Es, por ejemplo, el caso de un cilindro macizo que disipa calor por sus caras laterales de forma uniforme, y, por tanto, la evolución del transitorio término no se ve influenciado por la coordenada angular θ Así pues, las funciones $A_{r-\theta-z}(\mathrm{t})$ y $A_{r-\theta-\varphi}(\mathrm{t})$ pueden ser simplificadas a:

  $$A_{r-\theta-z}(\mathrm{t}) \approx A_r(\mathrm{t}) * A_z(\mathrm{t})\ (94)$$

  $$A_{r-\theta-\varphi}(\mathrm{t}) \approx A_r(\mathrm{r},\mathrm{t})\ (95)$$

Por tanto, en el análisis del transitorio del objeto i, este será la única fuente de generación de calor y será necesario considerar la influencia del resto de objetos en las condiciones de contorno. Se presenta a continuación un ejemplo:

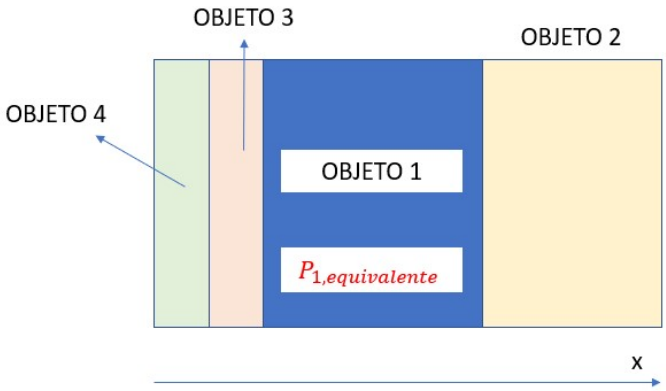


Figura 34: Conjunto de 4 objeto representados en 2D donde el objeto presenta generación interna de calor.

Para obtener el modelo transitorio en la dirección x del objeto, se analiza la evolución de este teniendo en cuenta la influencia del resto de objetos en las condiciones de contorno, es decir, se calcula el valor del coeficiente de película equivalente en dichas superficies.

Una vez establecidas las condiciones en la que se realizará el análisis, se debe afrontar el cálculo directo de la ecuación General de Transferencia de Calor. Para ello utilizaremos la siguiente ecuación [2]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r^m} * \frac{\partial}{\partial r}\left(r^m * \frac{\partial T}{\partial r}\right) + G \ (96)$$

$$Donde:$$

$$-\ m\ depende\ de\ la\ geometría\ analizada:$$

$$m = 0\ para\ pared, m\ = 1\ para\ cilindro\ y\ m = 2\ para\ esfera$$

$$G = \frac{P_{GeneradaObjeto}(W)}{\rho * C_P}$$

A su vez se establecerán las condiciones de contorno en los extremos del objeto a analizar, de forma que [2]:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(r_{extremos}) = h * (T_{extrenos} - T_{Amb}) \ (97)$$

Para facilitar el análisis, se obtendrán los parámetros adimensionales del problema y se definirá la Ecuación Adimensional General de Calor Modificada [2]:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{1}{x^m} * \frac{\partial}{\partial x}\left(x^m * \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + g \ (98)$$

$$Donde:$$

$$R = \frac{T - T_{amb}}{\Delta T_{Reg.Perm}};\ \tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2}; r = \frac{x}{L_C}; g = \frac{P_{GeneradaObjeto} * {L_C}^2}{k * \Delta T_{Reg.Perm}}$$

A su vez las condiciones de contorno adimensionalizadas:

$$\frac{\partial R}{\partial r}(r_{extremo}) = B(R_{extreno})\ (99)$$

$$B = \frac{h_{extremo} * k}{L_x}$$

La Ecuación Adimensional General de Calor Modificada es una ecuación diferencial, unidimensional y adimensionalizada que evalúa el perfil de temperatura $R(\tau, x)$ para en todos los instantes durante el transitorio térmico definiendo las condiciones de contorno en el objeto evaluado. Para la resolución de las ecuaciones anteriores, es necesario realizar una simplificación: suponer conocido el perfil de temperatura y realizar un cálculo de los coeficientes de integración utilizando las condiciones propias de cada análisis [2]. Es importante que el perfil de temperaturas elegido sea coherente con la geometría y con el perfil en Régimen Permanente. Los perfiles para las geometrías más comunes, definidos en el apartado "Introducción a la Transferencia de Calor" son los siguientes:

Pared con generación interna de Calor:

$$T(x) = C_2 * x^2 + C_1 * x + C_0\ (100)$$

Cilindro con generación interna de Calor:

$$T(x) = C_2 * x^2 + C_1 * \ln x + C_0\ (101)$$

Esfera con generación interna de Calor:

$$T(r) = C_2 * x^2 + C_1 * \frac{1}{x} + C_0\ (102)$$

Las constantes de integración de los perfiles dependen de las condiciones evaluadas en el régimen permanente. Por tanto, si se define un perfil de temperatura con contantes dependientes del tiempo, se estaría evaluando el perfil de temperatura para cada instante temporal durante el transitorio. De formar que las contantes de integración C_2, C_1 y C_0 se redefinirían como $C_2(t)$, $C_1(t)$ y C_0(t), dependientes del tiempo.

Para los ejemplos mencionados, adimensionalizamos realizando las siguientes sustituciones:

$$R(x,\tau) = \frac{T(x,t) - T_{amb}}{\Delta T_{Reg.Perm}}\ ;\ \tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2}; r = \frac{x}{L_C}$$

Los perfiles de temperatura adimensionalizados se definen como:

Pared con generación interna de Calor [2]:

$$R(r,\tau) = a_2(\tau) * r^2 + a_1(\tau) * r + a_0(\tau)\ (103)$$

$$Donde:$$

$$a_2(\tau) = \frac{C_2\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) * {L_C}^2}{\Delta T_{Reg.Perm}}\ ;\ a_1(\tau) = \frac{C_1\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) * L_C}{\Delta T_{Reg.Perm}}\ ;\ a_o(\tau) = \frac{C_0\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) - T_{amb}}{\Delta T_{Reg.Perm}}$$

Cilindro con generación interna de Calor [2]:

$$R(x,\tau) = a_2(\tau) * x^2 + a_1(\tau) * \ln x + a_0(\tau)\ (104)$$

$$Donde:$$

$$a_2(\tau) = \frac{C_2\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) * {L_C}^2}{\Delta T_{Reg.Perm}} \;\; ; \;\; a_1(\tau) = \frac{C_1\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) * \ln(L_C)}{\Delta T_{Reg.Perm}} \;\; ; \;\; a_o(\tau) = \frac{C_0\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) - T_{amb}}{\Delta T_{Reg.Perm}}$$

Esfera con generación interna de Calor:

$$R(x,\tau) = a_2(\tau) * x^2 + a_1(\tau) * \frac{1}{x} + a_0(\tau) \; (105)$$

$$Donde:$$

$$a_2(\tau) = \frac{C_2\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) * {L_C}^2}{\Delta T_{Reg.Perm}} \;\; ; \;\; a_1(\tau) = \frac{C_1\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) * \ln(L_C)}{\Delta T_{Reg.Perm}} \;\; ; \;\; a_o(\tau) = \frac{C_0\left(\frac{\alpha t}{{L_C}^2}\right) - T_{amb}}{\Delta T_{Reg.Perm}}$$

Una vez definido el perfil de temperatura, se deberá calcular el valor medio de la temperatura, siendo $[a, b]$ los extremos del objeto analizado [2]:

$$\bar{\theta} = (m+1)\int_a^b r^m \, \theta dx = f\big(a_0(\tau), a_1(\tau), a_2(\tau)\big) \; (106)$$

Integrando a su vez la Ecuación Adimensional General de Calor Modificada:

$$(m+1)\int_0^t r^m \frac{\partial\theta}{\partial\tau} dx = \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\tau} = (m+1)\int_a^b \frac{\partial}{\partial r}(r^m * \frac{\partial\theta}{\partial r})dx + (m+1)\int_a^b x^m * g * dx \; (107)$$

Desarrollando la expresión obtenemos como resultado:

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\tau} = (m+1)\left[\!\left[x^m * \frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\!\right]_a^b + (m+1)\left[\!\left[\frac{x^{m+1}}{m+1} * g\right]\!\right]_a^b \; (108)$$

Teniendo en cuenta que el objeto al principio del transitorio se encuentra a temperatura ambiente y al valor de la derivada en las condiciones de contorno:

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}(a) = B_a(\theta_a) \; (109)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}(a) = B_b(\theta_b) \; (110)$$

A su vez, aplicando dichas condiciones en la ecuación de calor [2]:

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\tau} = (m+1)\left[\!\left[r^m * \frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\!\right]_a^b + \left[\!\left[\frac{r^{m+1}}{m+1} * g\right]\!\right]_a^b$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\tau} = (m+1)(b^m * B_b * \theta_b - a^m * B_a * \theta_a) + (b^{m+1} - a^{m+1}) * g \; (111)$$

A su vez, se utilizarán el valor de las condiciones de contorno en los extremos para calcular la relación entre las constantes de integración $a_2(\tau), a_1(\tau)$ y $a_0(\tau)$.

Para exponer este método se va a desarrollar un pequeño ejemplo:

Sea la siguiente figura:

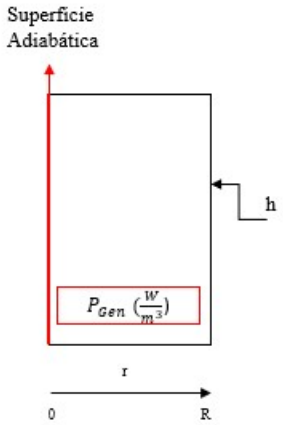


Figura 35: Pared plana con generación interna de calor que presenta la pared izquierda adiabática y la pared derecha disipa calor al ambiente con un coeficiente de película h.

Al ser una pared plana con generación de calor, la ecuación de calor a afrontar es la siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r^m} * \frac{\partial}{\partial r}\left(r^m * \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{P_{Gen}}{\rho * C_p} \ (112)$$

Donde m = 0 por ser una pared plana:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{P_{Gen}}{\rho * C_p} \ (113)$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \ en \ r = 0 \ (114)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -h * (T - T_\infty) \ en \ r = R \ (115)$$

Condiciones iniciales: $T = T_o = T_\infty \ para \ t = 0$

Ya definido el problema, será necesario adimensionalizar las ecuaciones, donde los parámetros adimensionales serán los siguientes:

$$\tau = \frac{\alpha t}{R^2} \ ; \ \theta = \frac{T - T_o}{\Delta T_{Reg.Perm}} \ ; B = \frac{h\,R}{k} ; x = \frac{r}{R} \ ; \ g = \frac{P_G * R^2}{k * \Delta T_{Reg.Perm}}$$

Por tanto, la Ecuación General de Transferencia de Calor modificada y las condiciones de contorno son las siguientes:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + g \ (116)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \ en \ x = 0$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -B\theta_{x=1}\ en\ x = 1$$

El perfil de temperaturas adimensionalizado elegido para la siguiente geometría plana es el siguiente:

$$\theta(x,\tau) = a_2(\tau) * x^2 + a_1(\tau) * x + a_0(\tau)\ (117)$$

Derivando dicha ecuación respecto a x, se obtendría:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 2 * a_2(\tau) * x + a_1(\tau)(118)$$

Aplicando la ecuación para ambas condiciones de contorno:

$$a_1(\tau) = 0\ (119)$$

$$2 * a_2(\tau) + a_1(\tau) = -B\theta_{x=1}\ (120)$$

$$a_2(\tau) = \frac{-B\theta_{x=1}}{2}\ (121)$$

Para obtener el valor de $a_0(\tau)$, utilizaremos de nuevo las condiciones de contorno y la ecuación del perfil de temperatura obteniendo:

$$a_0(\tau) = -\left(\frac{a_1(\tau) + 2a_1(\tau)}{B}\right) - a_1(\tau) - a_2(\tau)\ (122)$$

$$a_0(\tau) = \theta_{x=1} * \left(1 - \frac{B}{2}\right)\ (123)$$

Una vez calculadas las contantes de integración por medio de las condiciones de contorno en función de la temperatura en un extremo, se calculará la temperatura media en función de las constantes de integración:

$$\bar{\theta} = (m+1)\int_a^b x^m\,\theta dx\ (124)$$

$$\bar{\theta} = \left(\frac{1+B}{3}\right)\theta_{x=1}\ (125)$$

Aplicando el valor de la temperatura media a la ecuación general de transferencia de calor adimensionalizada se obtiene:

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\tau} = (1)\left[\!\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]\!\right]_0^1 + (1) * g$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\tau} = (-B\theta_{x=1} + g)\ (126)$$

Sustituyendo el valor medio de la temperatura:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left(\frac{1+B}{3}\right)\theta_{x=1}\right) = (-B\theta_{x=1} + g)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\theta_{x=1}) = \frac{-B\theta_{x=1} + g}{\left(\frac{1+B}{3}\right)}\ (127)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene el valor del transitorio de temperatura para $x = 1$ y las condiciones de contorno temporales $\theta_{x=1}(\tau = 0) = 0$ y $\theta_{x=1}(\tau \to \infty) = 1$:

$$\theta_{x=1} = \left(1 - e^{-\frac{B}{1+\frac{B}{3}}\tau}\right) \ (128)$$

De forma que si tenemos en cuenta el perfil de temperatura supuesto para la resolución de la Ecuación General de Calor Adimensionalizada y sustituimos los valores de las constantes de integración y el resultado obtenidos en la ecuación anterior:

$$a_1(\tau) = 0 \ (129)$$

$$a_2(\tau) = \frac{-B\theta_{x=1}}{2} \ (130)$$

$$a_0(\tau) = \theta_{x=1} * \left(1 - \frac{B}{2}\right) \ (131)$$

$$\theta_{x=1} = \left(1 - e^{-\frac{B}{1+\frac{B}{3}}\tau}\right) \ (132)$$

$$\theta(x,\tau) = a_2(\tau) * x^2 + a_1(\tau) * x + a_0(\tau)$$

Sustituyendo $a_2(\tau)$, $a_1(\tau)$, $a_0(\tau)$ y $\theta_{x=1}$ en $\theta(x,\tau)$, obtenemos:

$$\theta(x,\tau) = \left(-\frac{B}{2} * \left(1 - e^{-\frac{B}{1+\frac{B}{3}}\tau}\right)\right) * x^2 + \left(1 + \frac{B}{2}\right)\left(1 - e^{-\frac{B}{1+\frac{B}{3}}\tau}\right) (133)$$

Donde la ecuación anterior puede ser expresada como:

$$\theta(x,\tau) = \left(1 - \frac{B}{2} * (-1 + x^2)\right) + \left(\frac{B}{2} * x^2 - \frac{B}{2} - 1\right) * e^{--\frac{B}{1+\frac{B}{3}}\tau} \ (134)$$

Identificando términos para un valor de $x = a$ fijo donde $a \epsilon [0,1]$:

$$\theta(x,\tau) = Cte_1(a) + Cte_2(a) * Cte_3(\tau) \ (135)$$

$$Donde:$$

$$Cte_1(a) = \left(1 - \frac{B}{2} * (-1 + a^2)\right)$$

$$Cte_2(a) = \left(\frac{B}{2} * x^2 - \frac{B}{2} - 1\right)$$

$$Cte_3(\tau) = e^{-\frac{B}{1+\frac{B}{3}}\tau}$$

En la anterior ecuación, se puede observar que el término $Cte_3(\tau)$ gobierna el comportamiento del transitorio térmico en toda la geometría y es independiente del punto dimensional donde sea analizado el transitorio.

Por otro lado, los términos $Cte_1(a)$ y $Cte_2(a)$ influyen sobre la distribución dimensional del perfil de temperatura en el objeto y los valores máximos alcanzados en el objeto.

Para comprobar las siguientes afirmaciones, evaluaremos el transitorio en 4 puntos para un valor concreto de B, la distribución de temperaturas en un mismo punto de tiempo para diferentes valores de B y la influencia de B en el punto finalmente alcanzado:

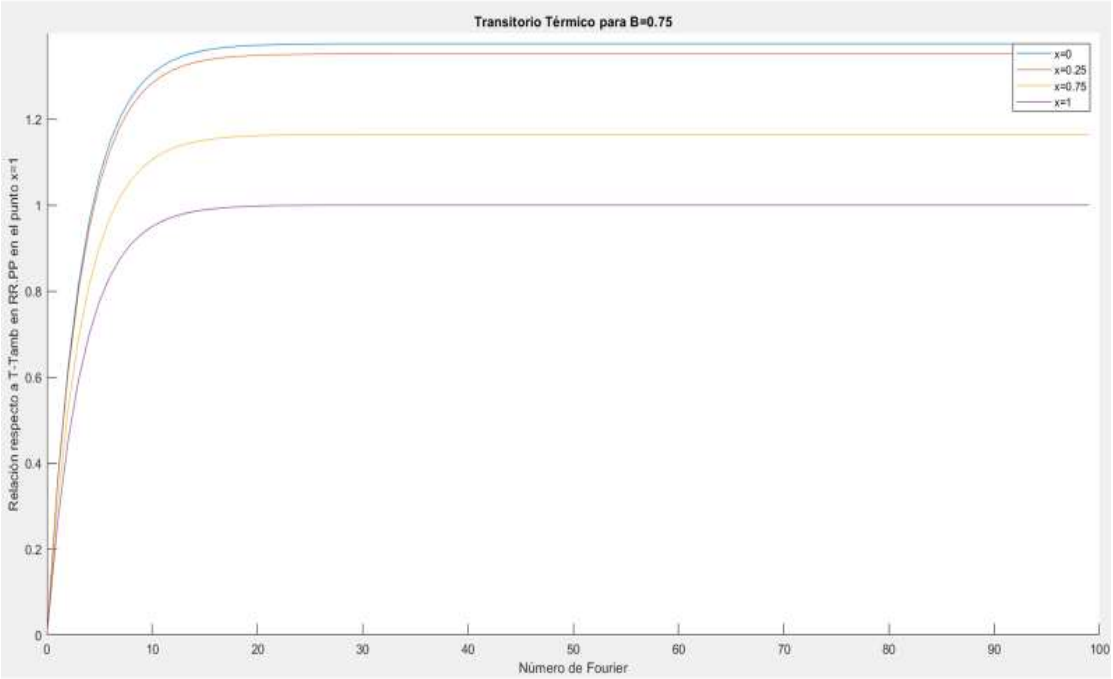


Figura 36: Transitorio Térmico para B=0.75.

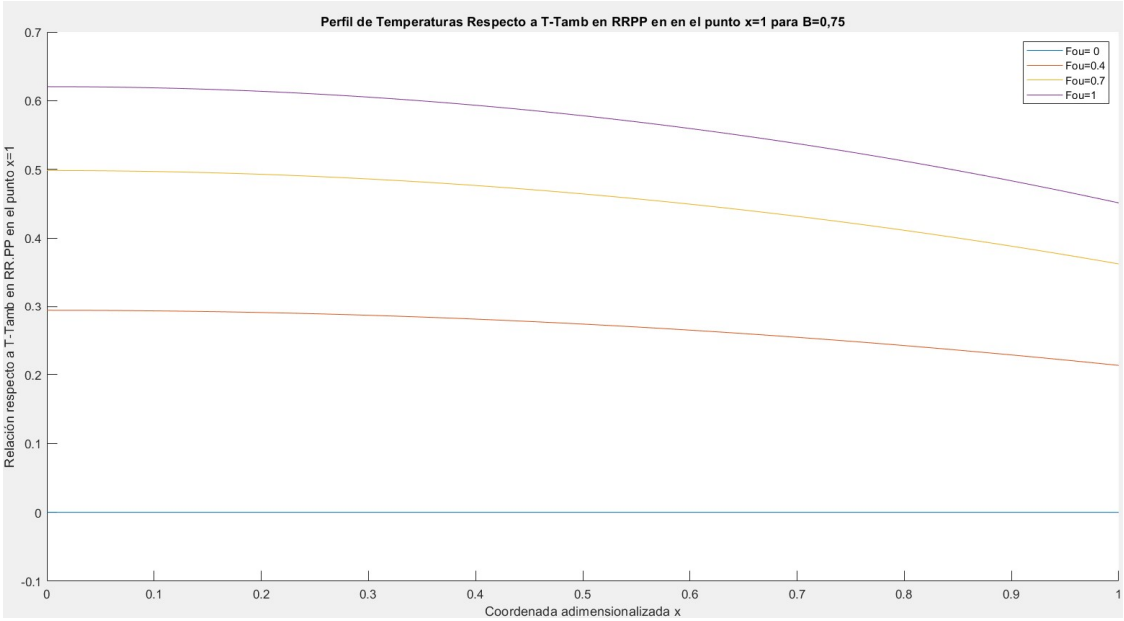


Figura 37: Perfil de Temperaturas respecto a T-Tamb en RRPP en el punto x=1 para B=0.75.

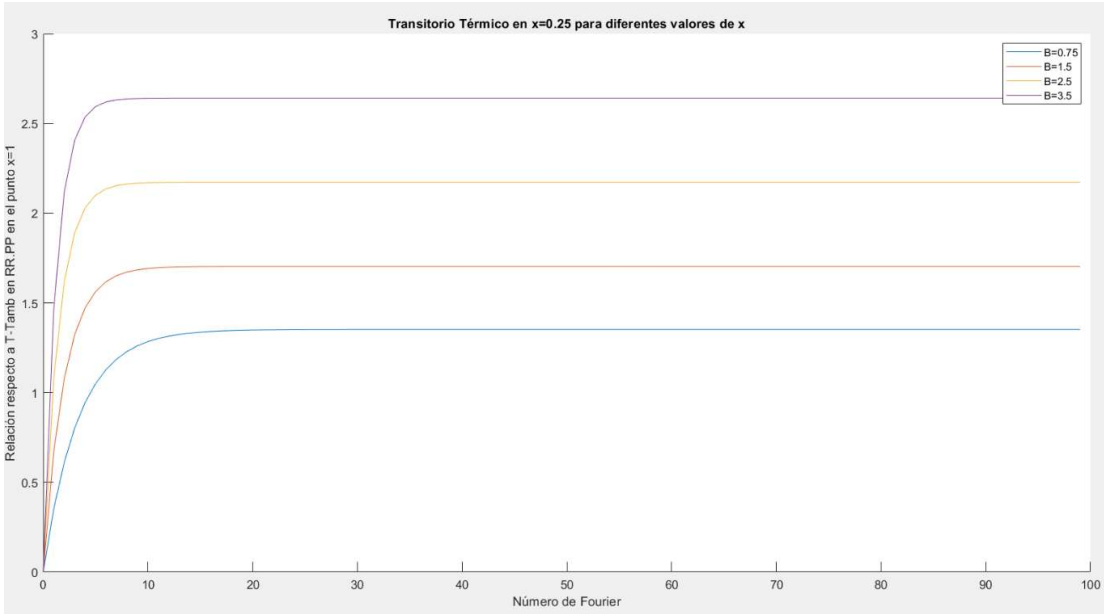


Figura 38: Transitorio Térmico en x=0.25 para diferentes valores de x.

Por tanto, los puntos de la geometría del objeto alcanzarán diferentes máximos locales al finalizar el transitorio, es decir, temperaturas en el régimen permanente, con un comportamiento transitorio equivalente. También cabe resaltar que un valor mayor del coeficiente adimensional B siendo la variación de temperatura en régimen permanente en el punto evaluado equivalente, supondrá mayores gradientes térmicos en el interior del objeto evaluado.

Por último, deshaciendo la adimensionalización de la ecuación:

$$\tau = \frac{\alpha t}{R^2}\ ;\ \theta = \frac{T - T_o}{\Delta T_{Reg.Perm}}\ ; B = \frac{h\,R}{k}; x = \frac{r}{R}\ ;\ g = \frac{P_G * R^2}{k * \Delta T_{Reg.Perm}}$$

$$T(r,t) = T_o + \Delta T_{Reg.Perm} * \left(\left(1 - \frac{h\,R}{2*k} * \left(-1 + \frac{r^2}{R}\right)\right) + \left(\frac{h\,R}{2*k} * \frac{r^2}{R} - \frac{h\,R}{2*k} - 1\right) * e^{--\frac{\frac{h\,R}{k}}{1+\frac{h\,R}{3*k}}\tau} \right)$$

(136)

Para aquellos casos en los que sea relevante la evolución en todas las direcciones, será necesario calcular cada dimensión de forma individual y expresar la función que define el comportamiento total como el producto de todas las funciones unidimensionales, como bien había sido indicado en el aparatado de Transitorio Térmico Multidimensional del capítulo de Introducción a la Transferencia de Calor. Para el ejemplo de un paralelogramo que presente en todas sus dimensiones igual comportamiento que en el ejemplo anterior, el transitorio térmico estaría dado por:

$$T(t) = \nabla T_{Reg.Perm} * \left(1 - e^{-\frac{B*\alpha}{\left(1+\frac{B}{3}\right)R^2}*t}\right)^3 \quad (137)$$

Cabe destacar que, en el presente modelo, el perfil de temperatura calculado no es el correcto y únicamente se incluye para tener en cuenta la influencia del perfil de temperaturas en el transitorio térmico.

3.2.4 INCORPORACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LAS PÉRDIDAS EN FUNCIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL MODELO TÉRMICO TRANSITORIO

Como punto final para el presente capítulo incorporaremos el término de las pérdidas eléctricas como input del modelo térmico transitorio. Como se definió en el apartado de "Cálculo de la Pérdidas en Componentes Magnético", existe una dependencia de las pérdidas en un componente magnético con la temperatura, por lo que será necesario tener en cuenta dicha influencia en el modelo modificando el vector $[P]$. Dicha modificación supone un cambio en la metodología del modelo, al retroalimentar el valor de la temperatura para el cálculo de las pérdidas. Para ello, se propone el siguiente modelo discretizado:

$$\left[\Delta T_{sup}(t_i)\right] = [C(t_i)] * ([R] * [P(T(t_{i-1})]) \quad (138)$$

$$Donde:$$

$$t_i = t_{i-1} + dt$$

Siendo dt el periodo de la discretización del modelo. Cabe destacar que la elección de dicha constante temporal deberá ser mínima para reducir el error inducido de calcular las pérdidas en base a la temperatura del periodo anterior. Como ejemplo, se expone el siguiente modelo:

$$T_{sup}(t) = 25 + \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) * 5 * 10 * (1 + 0.01 * T_{sup} - 0.000001 * T_{sup}^2) \quad (139)$$

$$Donde:$$

$$T_{amb} = 25°C$$

$$[C(t)] = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right)$$

$$[R] = 5\ \frac{K}{W}$$

$$[P] = 10 * (1 + 0.01 * T_{sup} - 0.000001 * T_{sup}^2)$$

Discretizando el modelo en base a la metodología expuesta se obtiene:

$$T_i = 25 + \left(1 - e^{-\frac{t_i}{500}}\right) * 5 * 10 * \left(1 + 0.01 * T_{i-1} - 0.000001 * T_{i-1}^2\right) \quad (140)$$

$$Donde:$$

$$T_{i-1} = T_{sup}(t_{i-1})$$

$$t_i = t_{i-1} + dt$$

Por último, se obtiene la evaluación de la potencia para dos valores de dt:

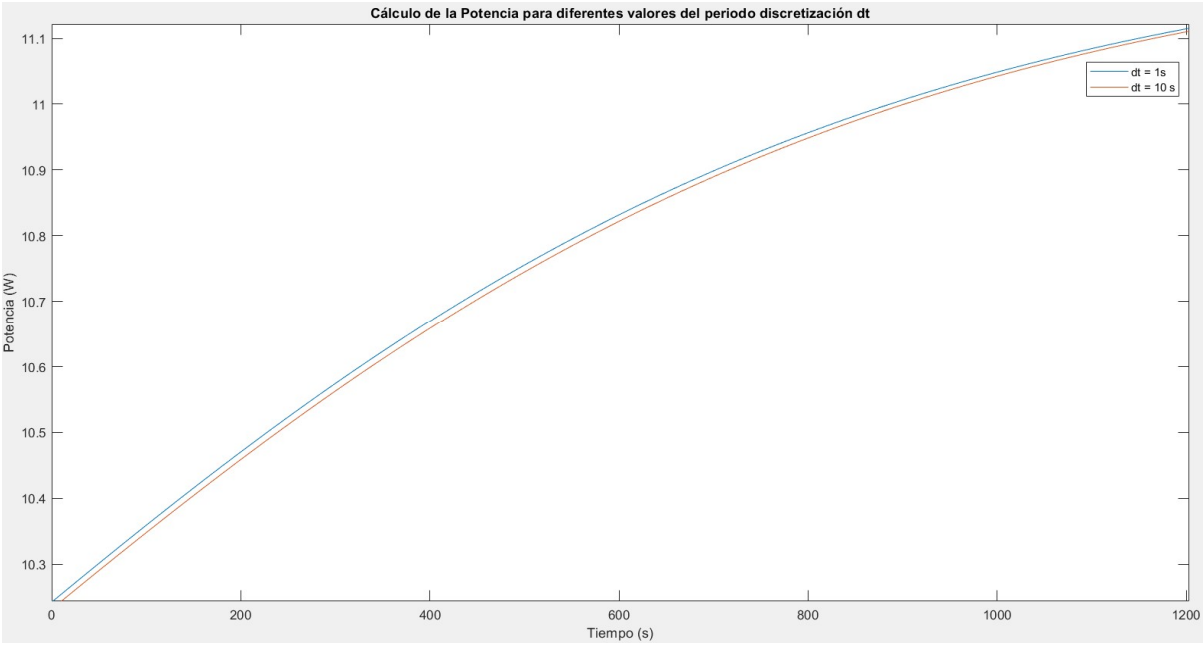


Figura 39: Evolución de la Potencia para valores de discretización de la constante temporal de dt = 1s y dt = 10s.

Como puede observarse en la figura, un mayor valor del periodo de discretización induce en un mayor retraso en el cálculo de las pérdidas que afectará al cálculo de la temperatura en los instantes iniciales del transitorio, donde la pendiente de evolución de la temperatura es mayor. Por tanto, el valor del periodo de discretización deberá ser elegido en función del transitorio del objeto, siendo suficiente el valor de $dt = 1s$ para el componente magnético analizado en el presente documento.

4 APLICACIÓN PRACTICA DEL MODELO TÉRMICO: BOBINA

En este capítulo final se buscará aunar todos los conceptos expuestos en los anteriores capítulos para desarrollar el modelo térmico completo de una bobina y compararlo así con el funcionamiento de un prototipo. Para ello, en el presente capítulo se realizarán las siguientes operaciones:

- Evaluación geométrica pertinente dividiendo la bobina de la forma más adecuada para facilitar el análisis y evaluación de las condiciones de contorno.
- Cálculo de la matriz $[R]$ que evalúa el régimen permanente en cada uno de los objetos
- Cálculo de los números de Biot de cada uno de los objetos
- Análisis por el criterio de Biot de los objetos para identificar aquellos donde no puede ser utilizado el método de la capacitancia.
- Cálculo de la matriz [C] en el método de la capacitancia
- Cálculo de las matrices [RC] para el método de la capacitancia modificado y el método basado en MEF.
- Discretización del sistema e inclusión de las pérdidas magnéticas
- Evaluación de resultados y comparación con resultados experimentales

Dichos resultados obtenidos, podrán ser extrapolados al cálculo del transitorio térmico para diferentes aplicaciones de la bobina donde coincidan las condiciones de contorno, debido a que como se ha expuesto en el desarrollo del documento, el transitorio térmico de la bobina es independiente del método de calor que produzca el aumento de la temperatura.

4.1 CARACTERÍSTICAS DEL PROTOTIPO UTILIZADO

Para realizar la experimentación del modelo térmico transitorio se ha utilizado una bobina diseñada para trabajar en un Convertidor DC:DC, objeto de futuros proyectos, cuyo esquemático y PCB se incluyen en el ANEXO III. El Convertidor DC:DC se ha diseñado para trabajar con las siguientes especificaciones:

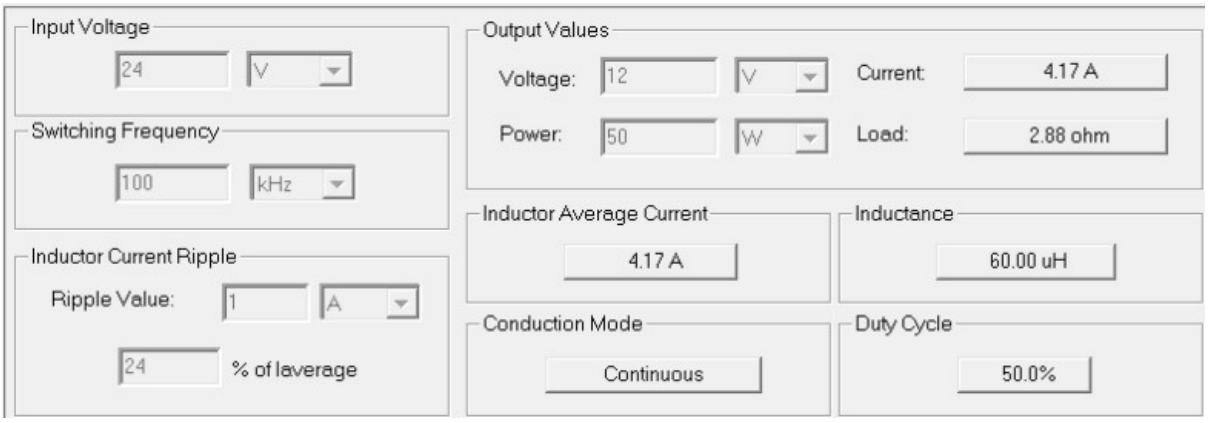


Figura 40: Especificaciones en el Convertidor DC:DC

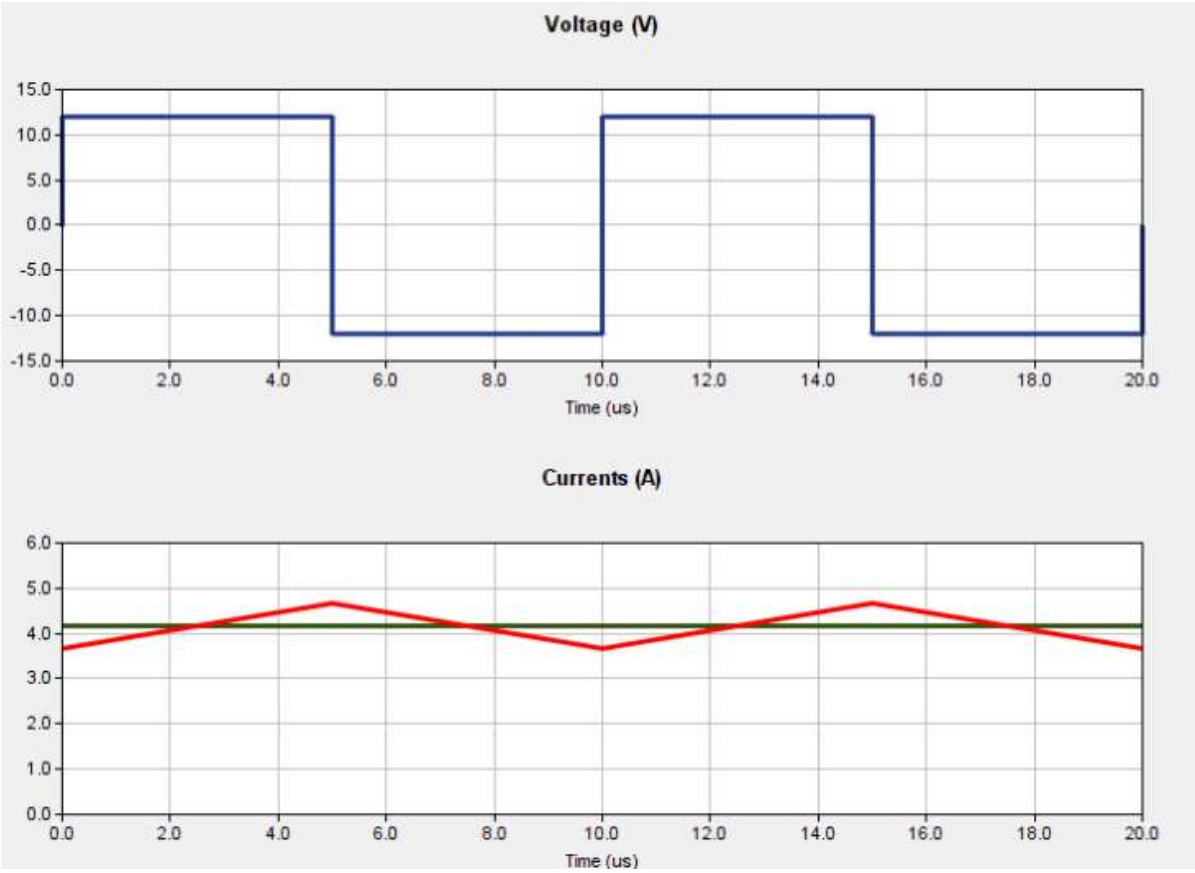


Figura 41: Gráficas Voltaje y Corriente en la Bobina del Convertidor DC:DC

El Convertidor CC:CC se trata de un Convertidor Buck o Reductor, donde la tensión en la carga es menor que el voltaje de entrada del convertidor. En la Figura 24, se observan las especificaciones operativas para las que ha sido diseñado el Convertidor Buck mientras que en la Figura 41 se muestran las formas de onda de la tensión e intensidad en la bobina, componente magnético sobre el cuál se desarrollará el modelo térmico transitorio en el presente capítulo.

Las características constructivas de la bobina son las siguientes:

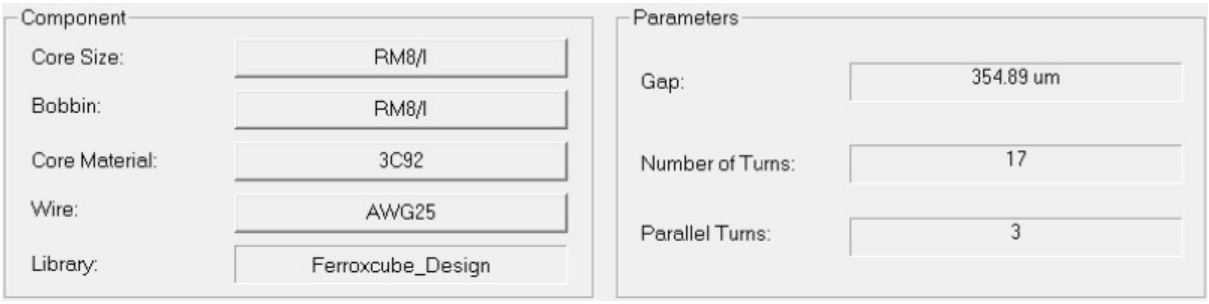


Figura 42: Especificaciones constructivas bobina para Convertidor DC:DC.

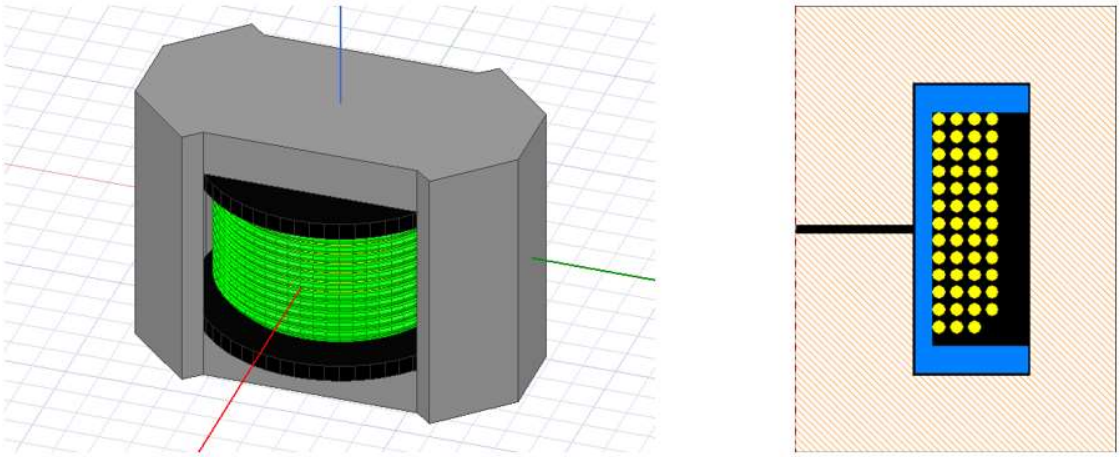


Figura 43: Bobina con Núcleo RM8/I 3C90.

Adicionalmente, se exponen los resultados numéricos en la bobina del convertidor Buck por medio del programa ANSIS:

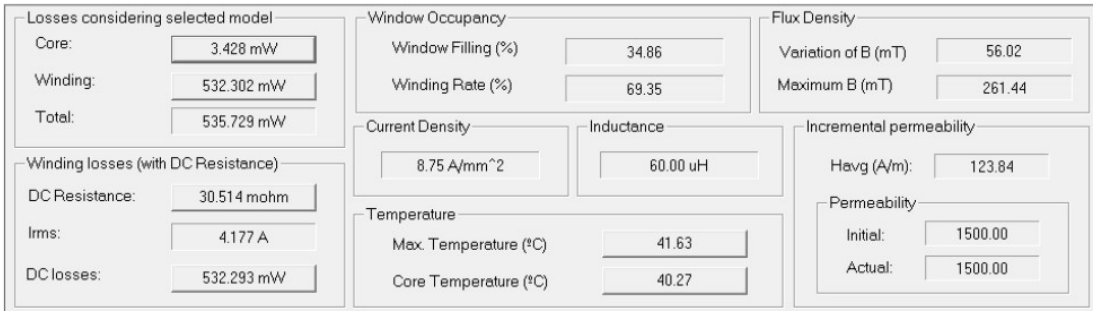


Figura 44: Resultados comportamiento eléctrico convertidor DC:DC en ANSIS

Figura 45:Peso de las Pérdidas y porcentaje de ventana en el devanada

Una vez seleccionada la bobina, cabe destacar que la experimentación se llevará a cabo bajo equivalentes condiciones de contorno, pero mediante otras condiciones de flujo y forma de onda de la corriente en la bobina ya que la caracterización térmica del transitorio es independiente del origen de las pérdidas. La forma de onda utilizada para el análisis y el desarrollo experimental es senoidal:

En los apartados finales del capítulo se evaluarán los resultados térmicos de la bobina en el funcionamiento del convertidor Buck.

4.2 ANÁLISIS GEOMÉTRICOS Y DE CONDICIONES DE CONTORNO DEL BUCK

En el apartado anterior se presentó la bobina que es objeto de análisis en el presente capítulo. El núcleo magnético en la bobina puede ser simplificado geométricamente sin modificar en exceso el futurible resultado de los cálculos:

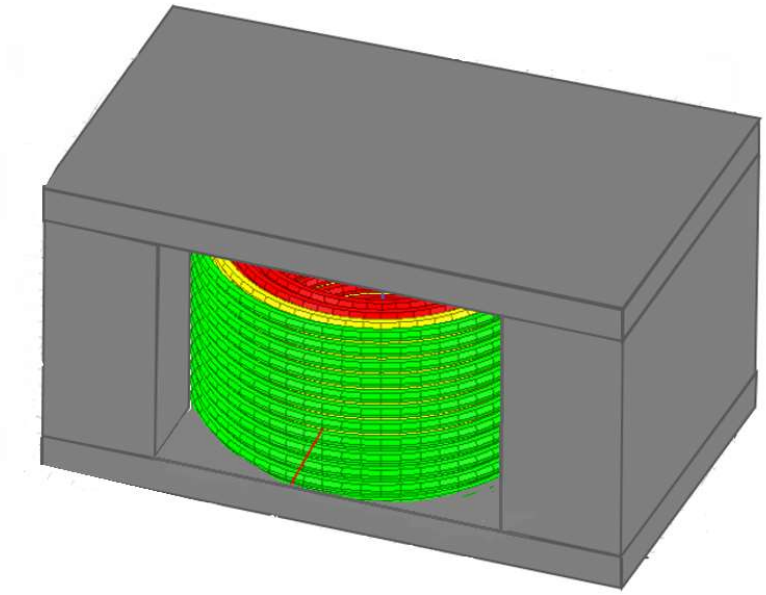


Figura 46: Simplificación geométrica del núcleo RM8/I de la bobina del convertidor DC: DC.

A su vez, el devanado puede ser simplificado como una corona cilíndrica:

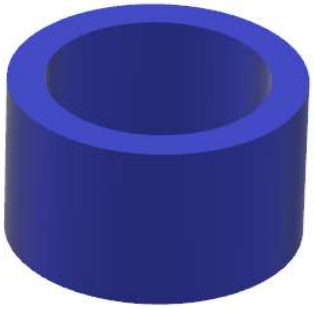


Figura 47: Simplificación de la geometría de la bobina del convertidor DC:DC.

Con la simplificación de la geometría, es posible separar el componente magnético en 6 objetos independientes de análisis:

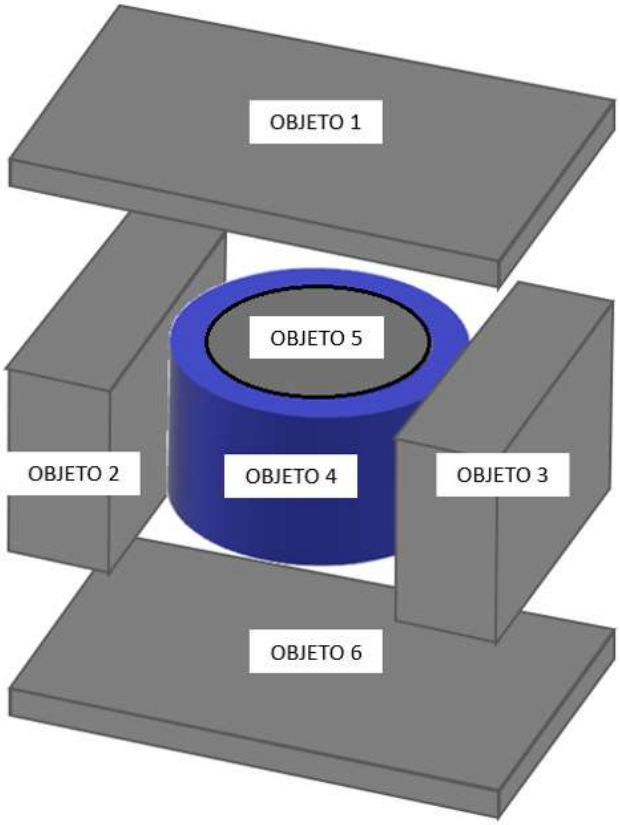


Figura 48: División geométrica de la geometría simplificada de la bobina del convertidor CD:CD en 6 objetos. El Objeto 4 representa el devanado y el resto de los objetos, el núcleo magnético.

Una vez realizada la simplificación y división geométrica en objetos, en el siguiente apartado se definirán las direcciones de análisis para cada objeto y se analizarán las condiciones de contorno para cada una de dichas direcciones.

Como puede observarse en la figura 8, el componente magnético ha sido dividido en un total de 6 objetos. Las principales direcciones de análisis para dichos objetos son las siguientes:

- Para los objetos 1, 2, 3 y 6, las direcciones de análisis son las definidas por los 3 vectores normales de la superficie del objeto. Por ejemplo, para el objeto 3:

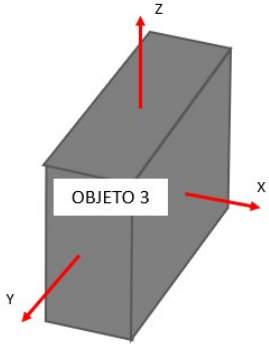


Figura 49: Ejes principales de análisis del Objeto 3.

- Para los objetos 4 y 5, las direcciones de análisis son la definida por el vector normal de la superficie superior del cilindro y la dirección radial:

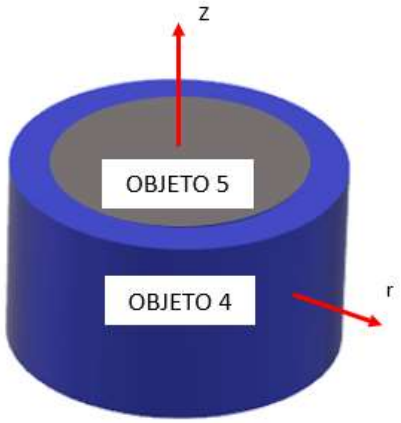
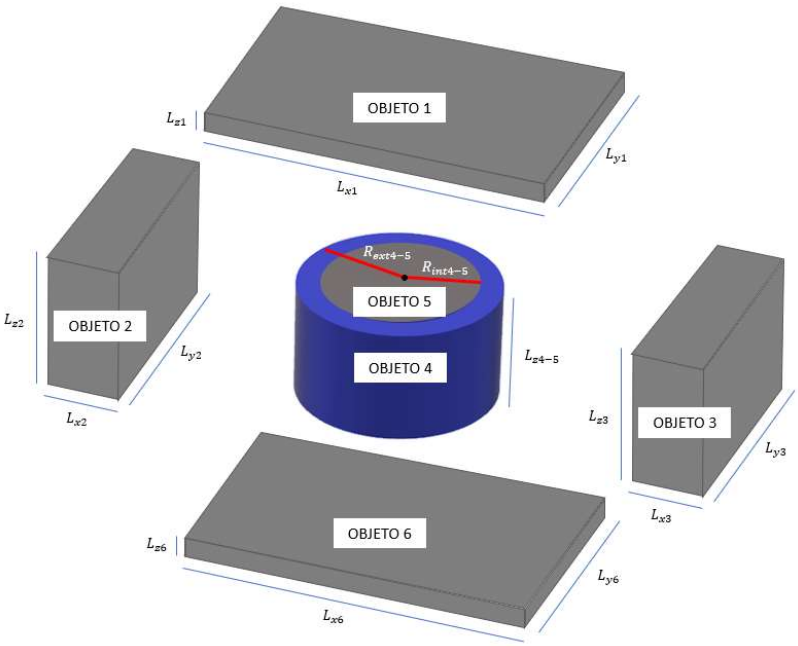


Figura 50: Direcciones principales de análisis de los objetos 5 y 4.

Una vez definidas las direcciones de análisis, deben analizarse las condiciones de contorno para cada una de las direcciones de los objetos acorde a la metodología expuesta en el anterior capítulo. Para ello en primer lugar se definirán las dimensiones relevantes durante el análisis:



$$L_{x1} = 23.20\ mm \quad L_{y1} = 11\ mm \quad L_{z1} = 2.80\ mm$$
$$L_{x2} = 3.09\ mm \quad L_{y2} = 11\ mm \quad L_{z2} = 16.40\ mm$$
$$L_{x3} = 3.09\ mm \quad L_{y3} = 11\ mm \quad L_{z3} = 16.40\ mm$$
$$L_{x6} = 23.20\ mm \quad L_{y6} = 11\ mm \quad L_{z6} = 2.80\ mm$$
$$L_{z4-5} = 16.40\ mm \quad R_{int4-5} = 4.75\ mm \quad R_{ext4-5} = 6.95\ mm$$

Figura 51: Dimensiones Geometría simplificada. L representa una longitud lineal y R una longitud lineal. Los subíndices representan la dirección principal de análisis y el objeto respectivamente.

Y las propiedades de los materiales en el componente magnético:

$k_{ferrita} = 4\frac{W}{K*m}$	$C_{p,ferrita} = 750\frac{J}{Kg*K}$	$\rho_{ferrita} = 4800\frac{Kg}{m^3}$
$k_{cobre} = 400\frac{W}{K*m}$	$C_{p,cobre} = 385\frac{J}{Kg*K}$	$\rho_{cobre} = 8960\frac{Kg}{m^3}$

Tabla 4: Propiedades del componente magnético.

Y las características de las condiciones límite y la transferencia de calor por radiación:

$$\Delta T_{lim} = 100\ K\ ;\ \varepsilon = 0.85\ ;\ \sigma = 5.6704\ \frac{W}{m^2 * K^4}$$

Adicionalmente, cabe destacar que el componente electromagnético se encontraba apoyado sobre una superficie durante la experimentación y, por tanto, durante el análisis se considerará que la cara inferior del objeto 6 es adiabática. Teniendo en cuenta esta premisa y utilizando las dimensiones en cada se definen los siguientes árboles nodales para cada una de las direcciones de análisis:

DIRECCIÓN Z

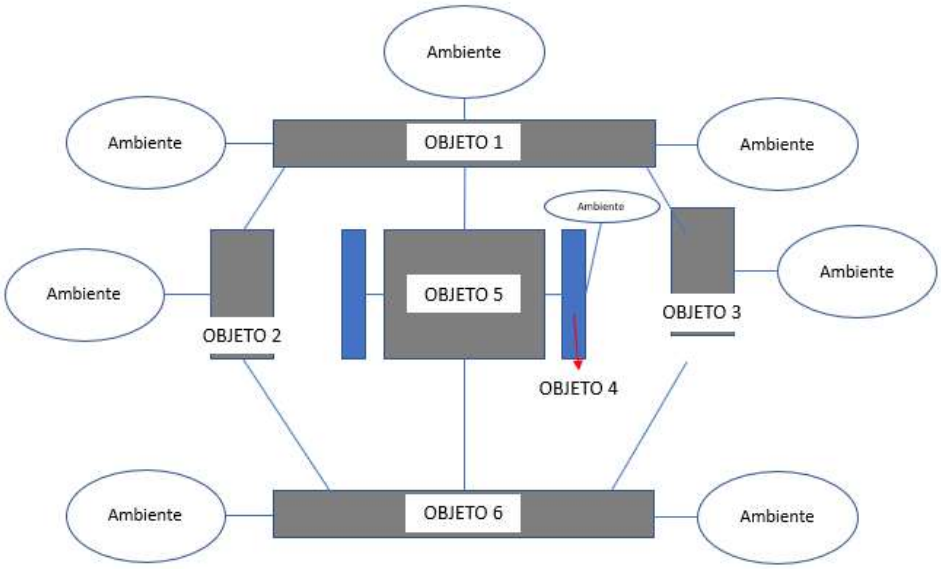


Figura 52: Árbol nodal de la geometría simplificada en dirección z.

Analizando la Figura 12, tendremos en cuenta las siguientes consideraciones antes de completar el análisis de las condiciones de contorno:

-La cara superior del objeto 6 se encuentra conectada con el resto de los objetos, por lo que habrá que evaluar la participación de todos en la disipación de calor.

-Como se indicó en el capítulo anterior, pese a que únicamente se esté teniendo en cuenta en cuenta el calor disipado por la superficie con componente normal equivalente a la dirección analizada, el calor en el resto de los objetos puede ser disipado en todas direcciones. Es decir, el calor que se atraviesa la cara superior del objeto 6 puede ser disipado en las caras laterales de los objetos 2, 3 y 4 y por ello, los objetos 2, 3 y 4 se encuentran conectados con el ambiente en el árbol nodal.

- Se tendrá en cuenta la Resistencia Térmica media que debe atravesar el flujo de calor para disipar en un objeto. Es decir, continuando con el ejemplo de la cara superior del objeto 6, para que el flujo de calor que atraviesa la cara superior del objeto 6 se disipe en las caras laterales del objeto 2, deberá "recorrer" una resistencia térmica media en el objeto 2.

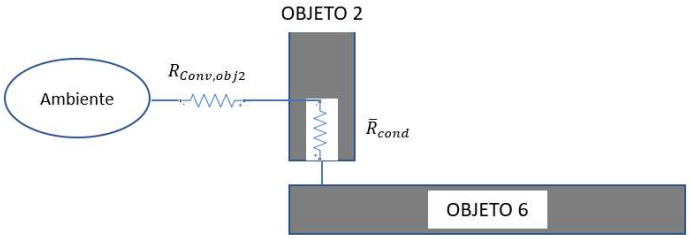


Figura 53: Árbol de resistencias térmicas Objeto 6 - Objeto 2 – Ambiente en dirección z.

De igual forma, se tendrá en cuenta la Resistencia térmica si un objeto debe ser "atravesado" para disipar calor en un tercero, es decir, si se quiere evaluar el calor que atraviesa la cara superior del objeto 6 que es disipado en el objeto 1, se deberá tener en cuenta la resistencia térmica del objeto 2, la resistencia térmica media del objeto 1 y la resistencia a la convección del objeto 1.

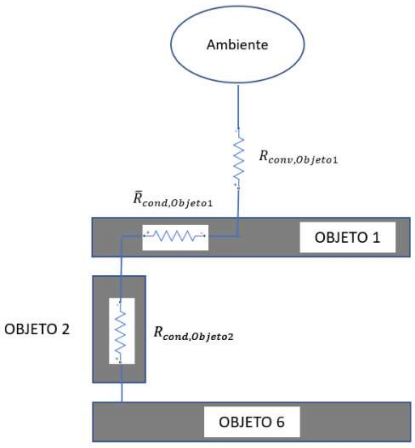


Figura 54: Árbol de resistencias térmicas Objeto 6 - Objeto 2 - Objeto 1 – Ambiente en dirección z.

- En el caso que en un objeto la convección posea varios métodos de disipación de calor, se evaluarán las resistencias de convección en paralelo. Siguiendo con el ejemplo anterior:

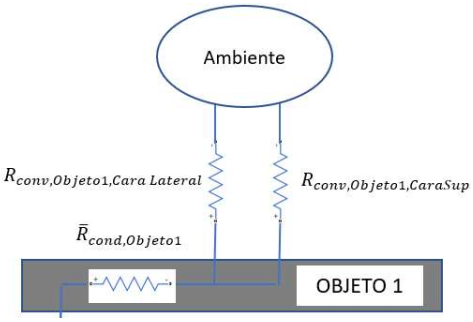


Figura 55: Evaluación en paralelo de las resistencias térmicas de convección en las caras laterales y la cara superior del objeto 1.

Teniendo en cuenta todas las consideraciones, se obtienen los siguientes árboles de resistencias para cada uno de los objetos cuyas superficies con dirección normal z no se encuentren en contacto con el ambiente. Para cada árbol de resistencias se obtendrá a su vez la resistencia equivalente.

OBJETO 1: DIRECCIÓN Z

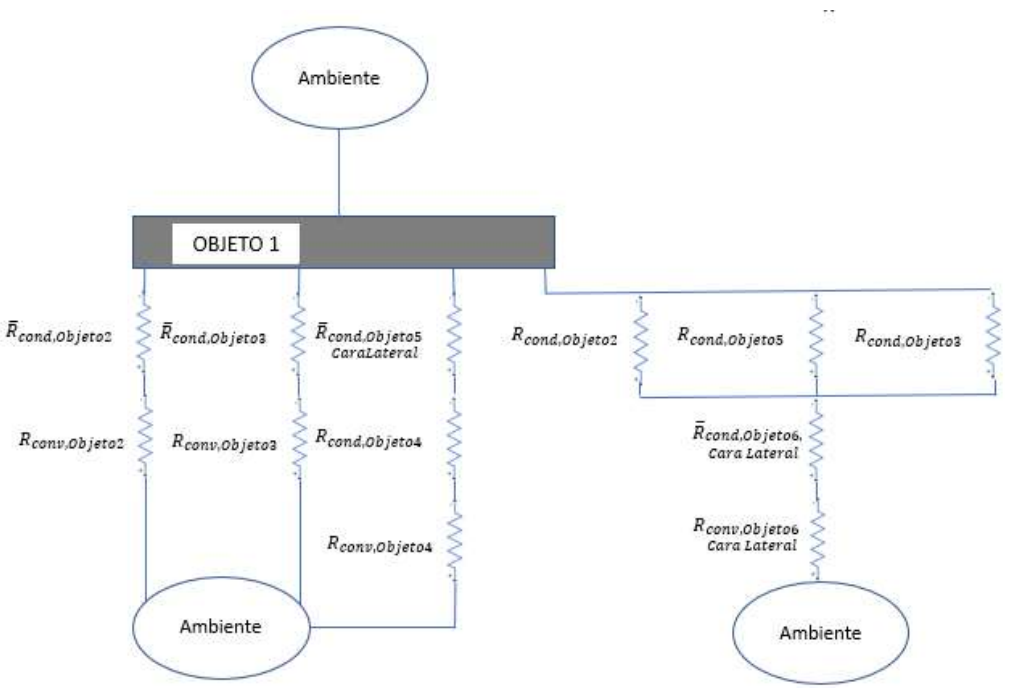


Figura 56: Árbol de resistencias térmicas Objeto 1 - Ambiente en dirección z.

Donde la resistencia térmica que ve el objeto 1 para disipar calor con el ambiente en la cara inferior se define como:

$$\mathrm{R_{zinf,Objeto1}} = \mathrm{R_1} // \mathrm{R_2} \ (141)$$

$$\mathrm{R_2} = \left(\left(\mathrm{R_{conv,Objeto4}} + \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{cond,Objeto5}} + \mathrm{R}_{\substack{\mathrm{cond,Objeto4}\\ \mathrm{CaraLateral}}}\right) // \left(\mathrm{R_{conv,Objeto2}} + \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{cond,Objeto2}}\right) // \left(\mathrm{R_{conv,Objeto3}} + \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{cond,Objeto3}}\right)\right)$$

$$\mathrm{R_1} = \left(\left(\mathrm{R_{cond,Objeto2}} // \mathrm{R_{cond,Objeto5}} // \mathrm{R_{cond,Objeto3}}\right) + \left(\left(\mathrm{R}_{\substack{\mathrm{conv,Objeto6}\\ \mathrm{Cara\ Lateral}}} + \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{cond,Objeto6}}\right)\right)\right)$$

Definiendo el coeficiente de película equivalente en dicha superficie como:

$$h_{\mathrm{zinf,Objeto1}} = \frac{\mathrm{R_{zinf,Objeto1}}}{L_{x1} * L_{y1}} \ (142)$$

La superficie superior, al encontrarse directamente conectada con el ambiente, no es necesario realizar el análisis por medio de resistencias térmicas y su coeficiente de película será directamente evaluado.

OBJETO 6: DIRECCIÓN Z

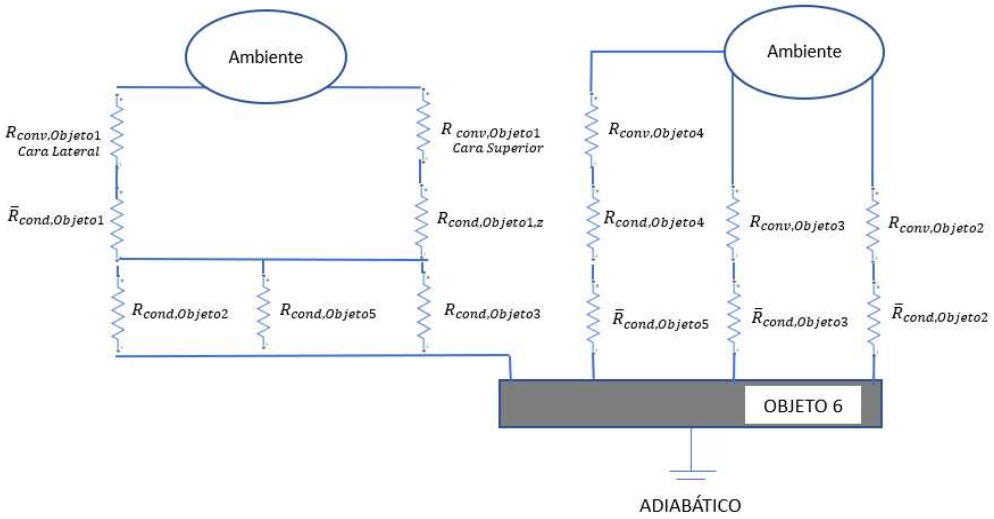


Figura 57: Árbol de resistencias térmicas Objeto 6 - Ambiente en dirección z.

Donde la resistencia térmica que ve el objeto 1 para disipar calor con el ambiente en la cara superior se define como:

$$R_{zsup,Objeto6} = R_1 // R_2 \quad (143)$$

$$R_1 = \left(\left(R_{cond,Objeto2} // R_{cond,Objeto5} // R_{cond,Objeto3} \right) + \left(\left(R_{\substack{conv,Objeto1 \\ Cara\ Lateral}} + \bar{R}_{cond,Objeto1,} \right) // \left(R_{\substack{conv,Objeto1 \\ Cara\ Superior}} + R_{cond,Objeto1} \right) \right) \right)$$

$$R_2 = \left(\left(R_{conv,Objeto4} + \bar{R}_{cond,Objeto5,CaraLateral} + R_{\substack{cond,Objeto4 \\ CaraLateral}} \right) // \left(R_{conv,Objeto2} + \bar{R}_{cond,Objeto2} \right) // \left(R_{conv,Objeto3} + \bar{R}_{cond,Objeto3} \right) \right)$$

Definiendo el coeficiente de película equivalente en dicha superficie como:

$$h_{sup,Objeto6} = \frac{R_{zsup,Objeto6}}{L_{x6} * L_{y6}} \quad (144)$$

Por otro lado, el coeficiente de película en la superficie inferior se considerará nula, al haber establecido en las condiciones de contorno que la superficie inferior es adiabática.

OBJETO 2 ,3 y 5: DIRECCIÓN Z

Para los objetos 2, 3 y 5, el análisis se realizará conjuntamente al disparar de forma equivalente el calor en sus superficies inferior y superior.

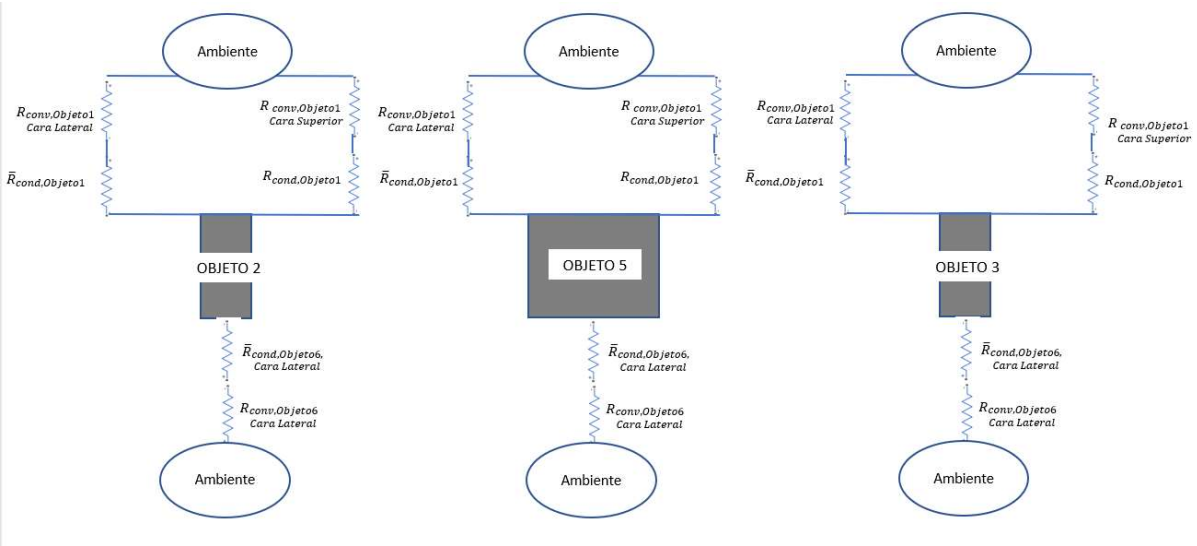


Figura 58: Árbol de resistencias térmicas Objeto 2 - Ambiente, Objeto 3 - Ambiente y Objeto 5 - Ambiente en dirección z.

Donde la resistencia térmica que ven los objetos 2,3 y 5 para disipar calor con el ambiente en la cara superior se define como:

$$R_{zsup,Objeto2} = \left(R_{\substack{conv,Objeto1\\ Cara\ Lateral}} + \bar{R}_{cond,Objeto1,CaraLateral}\right) // \left(R_{\substack{conv,Objeto1\\ Cara\ Lateral}} + \bar{R}_{cond,Objeto1,CaraLateral}\right) \quad (145)$$

$$R_{zsup,Objeto2} = R_{zsup,Objeto3} = R_{zsup,Objeto5}$$

Por otro lado, la resistencia térmica que “ven” los objeto 2,3 y 5 para disipar calor con el ambiente en la cara superior se define como:

$$R_{zinf,Objeto2} = \left(R_{\substack{conv,Objeto2\\ Cara\ Lateral}} + \bar{R}_{cond,Objeto2}\right) \quad (146)$$

$$R_{zinf,Objeto2} = R_{zinf,Objet} \quad = R_{zinf,Objeto5} \quad (147)$$

Definiendo el coeficiente de película equivalente en dichas superficies como:

$$h_{\mathrm{sup,Objeto3}} = h_{\mathrm{sup,Objeto2}} = \frac{\mathrm{R_{zsup,Objeto2}}}{L_{x2} * L_{y2}} \quad (148)$$

$$h_{\mathrm{sup,Objeto5}} = \frac{\mathrm{R_{zsup,Objeto5}}}{\pi * {R_{INT4-5}}^2} \quad (149)$$

$$h_{\mathrm{inf,Objeto3}} = h_{\mathrm{inf,Objeto2}} = \frac{\mathrm{R_{zinf,Objeto2}}}{L_{x2} * L_{y2}} \quad (150)$$

$$h_{\mathrm{inf,Objeto5}} = \frac{\mathrm{R_{zinf,Objeto5}}}{\pi * R_{INT4-5}{}^{2}} \quad (151)$$

OBJETO 4: DIRECCIÓN Z

Respecto al objeto 4, no se evaluará la disipación de calor en el eje z, es decir, se considerarán adiabáticas la superficie superior e inferior debido a que la superficie lateral es predominante en la disipación de calor al ambiente. A diferencia del contacto entre la cara lateral interior del devanado y el bloque cilíndrico del núcleo magnético, el contacto entre las superficies superior e inferior del mismo y el núcleo es muy poco compacta, dificultando la transmisión de calor por la elevada conductividad del aire

Siguiendo el desarrollo de la dirección z, para la dirección x el mapa nodal sería el siguiente:

DIRECCIÓN X

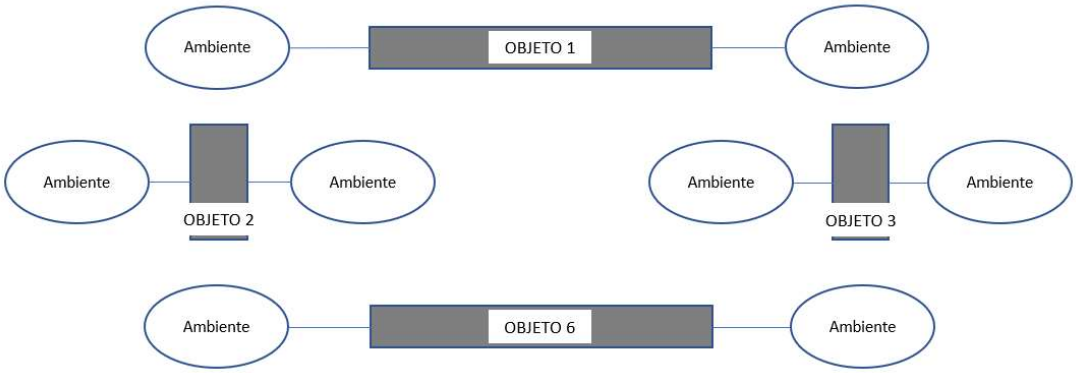


Figura 59: Árbol nodal del componente magnético en dirección x.

DIRECCIÓN Y

De forma equivalente al desarrollo realizado en el eje x, el mapa de resistencias en la dirección y sería el siguiente:

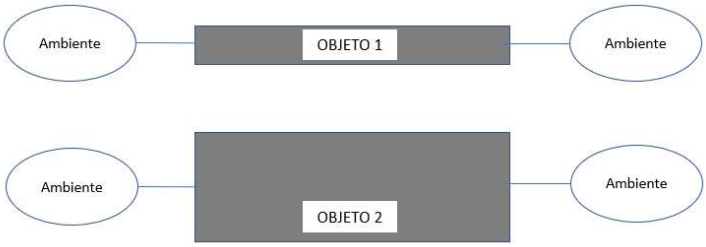


Figura 60: Árbol nodal del componente magnético en dirección y.

Es necesario concretar que en las direcciones x e y, pese a indicar los diagramas de nodos, no es necesario calcular el mapa de Resistencias puesto que el coeficiente de película de dichas superficies es directamente evaluable debido a que las superficies se encuentran en su totalidad "conectadas" con el ambiente.

Por último, se desarrolla el mapa de nodos y de resistencias térmicas para la dirección radial de los objetos 4 y 5

DIRECCIÓN R: OBJETOS 4 Y 5

Se observa el siguiente mapa nodal:

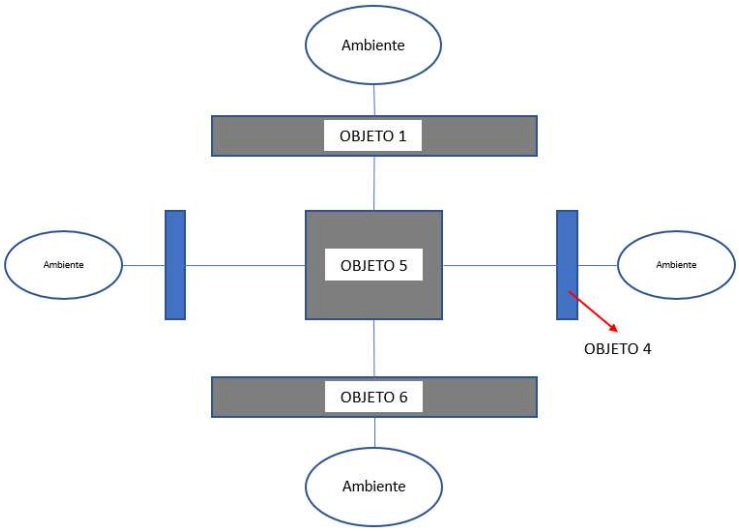


Figura 61: Árbol nodal del componente magnético en dirección R.

Definiendo el mapa de resistencias térmicas para ambos objetos en la dirección R como:

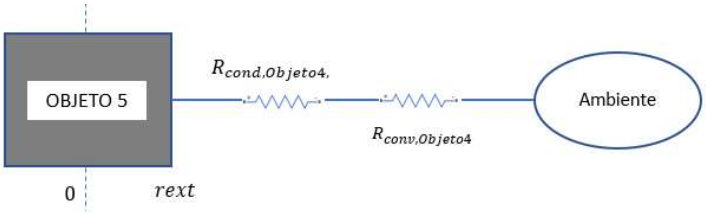


Figura 62: Árbol de resistencias térmicas Objeto 5 - Ambiente en dirección R.

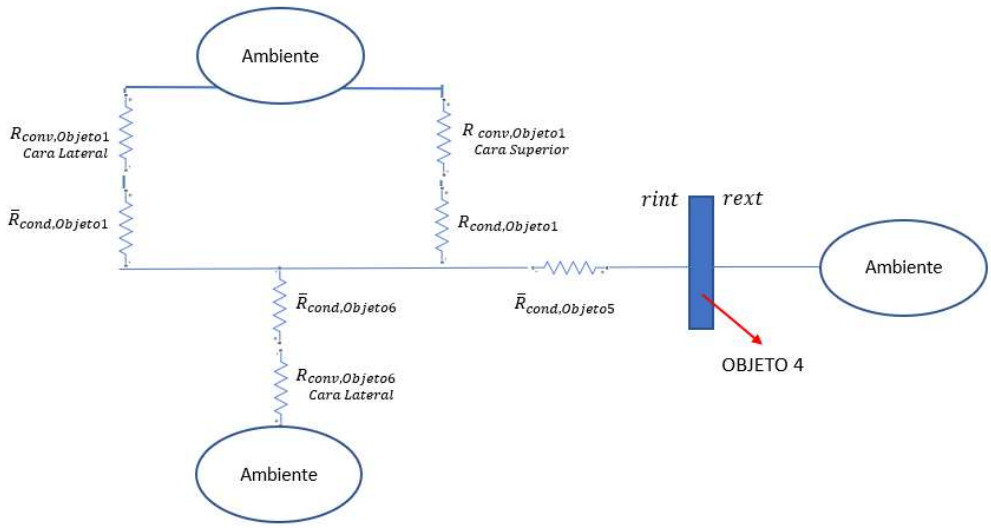


Figura 63: Árbol de resistencias térmicas Objeto 4 - Ambiente en dirección R.

Donde en el objeto 5 únicamente se ha indicado una de las caras del objeto debido a la simetría existente. Las resistencias térmicas equivalentes para la disipación de calor se definen como:

$$R_{rext,Objeto5} = R_{cond,Objet\ \ ,Cara\ lateral} + R_{conv,Objet} \qquad (152)$$

$$R_{rint,Objeto4} = \bar{R}_{cond,Objet} + R1 \quad (153)$$

$$Donde:$$

$$R1 = \left(R_{\substack{conv,Objeto1\\ Cara\ Lateral}} + \bar{R}_{cond,Objet}\right) // \left(R_{\substack{conv,Objet\\ Cara\ Superior}} + R_{cond,Objet}\right) // \left(R_{\substack{conv,Objet\\ Cara\ Lateral}} + \bar{R}_{cond,Objeto6}\right)$$

Definiendo el coeficiente de película equivalente en dichas superficies como:

$$h_{rext,Objeto5} = \frac{\mathrm{R}_{rext,Objeto5}}{2 * \pi * R_{INT4} \quad * L_{z4-5}} \quad (155)$$

$$h_{rint,Objeto} = \frac{\mathrm{R}_{\mathrm{rint,Objeto4}}}{2 * \pi * R_{INT4-} \quad * L_{z4-5}} \quad (156)$$

La superficie exterior del Objeto 4, al encontrarse directamente conectada con el ambiente, no es necesario realizar el análisis por medio de resistencias térmicas y su coeficiente de película será directamente evaluado.

Finalmente, para concretar el cálculo del mapa de resistencias térmicas, se indican a continuación el valor de las resistencias térmicas utilizadas en el cómputo de las resistencias térmicas equivalentes que ve cada objeto para disipar al ambiente:

- Resistencias Térmicas de Convección

Utilizando las expresiones expuestas en el apartado de “Introducción a la Transferencia de Calor”, el valor de las resistencias térmicas de convección es el siguiente:

$$R_{\substack{conv,Objet \\ Cara\,Superior}} = \frac{1}{h_{conv,Objet\quad,Cara\,Superior} * L_{x1} * L_{y1}} \quad (157)$$

$$h_{conv,Objet\quad,Cara\,Superior} = 1.32 * \left(\frac{\Delta T}{4 * L_{x1} * \frac{L_{y1}}{2 * L_{x1} + 2 * L_{y1}}} \right)^{0.25} \quad (158)$$

$$R_{\substack{conv,Objeto \\ Cara\,Lateral}} = R_{\substack{conv,Objeto1 \\ Cara\,Lateral}} = \frac{1}{h_{conv,Objeto1,Cara\,Lateral} * (2 * L_{x1} * L_{z1} + 2 * L_{y1} * L_{z1})} \quad (159)$$

$$h_{conv,Objeto1,Cara\,Lateral} = 1.32 * \left(\frac{\Delta T}{L_{z1}} \right)^{0.25} \quad (160)$$

$$R_{conv,Objeto3} = R_{conv,Objeto2} = \frac{1}{h_{conv,Objeto2} * (2 * L_{x2} * L_{z2} + 2 * L_{y2} * L_{z2})} \quad (161)$$

$$h_{conv,Objeto2} = 1.32 * \left(\frac{\Delta T}{L_{z2}} \right)^{0.25} \quad (162)$$

$$R_{conv,Objet} = \frac{1}{h_{conv,Objet} * (\frac{\pi}{2} * R_{ext4-} * L_{z4})} \quad (163)$$

$$h_{conv,Objeto4} = 1.32 * \left(\frac{\Delta T}{L_{z4}} \right)^{0.25} \quad (164)$$

Como se puede observar en las expresiones de los valores de los coeficientes de película, aparece el término que representa el incremento de temperatura en la superficie donde se está evaluando el coeficiente de película respecto a la temperatura ambiente, ΔT.

Dicho valor no es constante durante la evolución del transitorio, sin embargo, para simplifcar el cálculo se tomará como constante con valor $\Delta T = 100°$, valor máximo tomado como referencia para el cálculo de la evolución estacionaria de la bobina en el cálculo de P_{test}. Cabe destacar que en la $R_{conv,Objeto4}$ unicamente se ha considerado un cuarto de la superficie lateral del objeto 4 para la disipación, puesto que la superficie no se encuentra integramente conectadad con el ambiente

.

Por otro lado, los valores de la resistencias térmicas de conducción son los siguientes:

- Resistencias Térmicas de Conducción

Utilizando las expresiones expuestas en el apartado de “Introducción a la Transferencia de Calor”, el valor de las resistencias térmicas de conducción es el siguiente:

$$R_{cond,Objet} = R_{cond,Objet} = \frac{1}{k_{ferrita} * \frac{L_{x1} * L_{y1}}{L_{z1}}} \quad (165)$$

$$R_{cond,Objeto3} = R_{cond,Objet} = \frac{1}{k_{ferrita} * \frac{L_{x2} * L_{y2}}{L_{z2}}} \quad (166)$$

$$R_{cond,Objeto5} = \frac{1}{k_{ferrita} * \frac{\pi {R_{INT4-5}}^2}{L_{z5}}} \quad (167)$$

$$R_{cond,Objet} = \frac{\ln\left(\frac{R_{EXT4-5}}{R_{INT4}}\right)}{k_{cobre} * 2\pi * L_{z4}} \quad (168)$$

Cabe destacar que para calcular el valor de las resistencias térmicas medias de conducción $\bar{R}$ expuestas en el mapa nodal de resistencias térmicas, se debe tener en cuenta cuál es el recorrido medio que debe recorrer el flujo de calor para disipar calor con el ambiente. Sin embargo, como ya se expuso en puntos anteriores del presente documento, se simplificará el cálculo definiendo la siguiente relación:

$$\bar{R}_{cond,objeto} = \frac{R_{cond,objeto}}{2} \quad (169)$$

Definiendo por tanto las resistencias medias de conducción como:

$$\bar{R}_{cond,Objeto6} = \bar{R}_{cond,Objeto1} = \frac{R_{cond,Objeto1}}{2} \quad (170)$$

$$\bar{R}_{cond,Objeto2} = \bar{R}_{cond,Objeto6} = \frac{R_{cond,Objeto1}}{2} \quad (171)$$

$$\bar{R}_{cond,Objet} = \frac{R_{cond,Objeto}}{2} \quad (172)$$

A continuación, se expone el cálculo de la longitud característica y el coeficiente de convección promedio de cada objeto:

Longitudes Características:

$$L_{C,objeto} = \frac{L_{x1} * L_{y1} * L_{z1}}{2 * (L_{x1} * L_{y1} + L_{z1} * L_{y1} + L_{z1} * L_{x1})} \quad (173)$$

$$L_{C,ob} = \frac{L_{x2} * L_{y2} * L_{z2}}{2 * (L_{x2} * L_{y2} + L_{z2} * L_{y2} + L_{z2} * L_{x2})} \quad (174)$$

$$L_{C,objeto} = \frac{L_{x3} * L_{y3} * L_{z3}}{2 * (L_{x3} * L_{y3} + L_{z3} * L_{y3} + L_{z3} * L_{x3})} \quad (175)$$

$$L_{C,objet} = \frac{\pi * (R_{EXT4-}{}^{2} - R_{INT4-5}{}^{2}) * L_{z4-5}}{A} \quad (176)$$

$$A = 2 * \pi * (R_{EXT4-5}{}^{2} - R_{INT4-}{}^{2}) + 2 * \pi * R_{EXT4-} * L_{z4-5} + 2 * \pi * R_{INT4-} * L_{z4-5}$$

$$L_{C,objet} = \frac{\pi * R_{INT4-5}{}^{2} * L_{z4-5}}{2 * \pi * R_{INT4-}{}^{2} + 2 * \pi * R_{INT4-5} * L_{z4-5}} \quad (177)$$

$$L_{C,objeto6} = \frac{L_{x6} * L_{y6} * L_{z6}}{2 * (L_{x6} * L_{y6} + L_{z6} * L_{y6} + L_{z6} * L_{x6})} \quad (178)$$

$$L_C = \frac{V_T}{A_T} = 0.022mm$$

Coeficiente de Película Promedio:

$$h_{pr,objet} = \frac{A_1 + B_1}{2 * (L_{x1} * L_{y1} + L_{z1} * L_{y1} + L_{z1} * L_{x1})} \quad (179)$$

$$A_1 = \left(h_{\text{zinf,Objeto1}} + h_{conv,Objet\quad,Cara\ Superior}\right) * L_{x1} * L_{y1}$$

$$B_1 = \left(2 * L_{x1} * L_{z1} + 2 * L_{y1} * L_{z1}\right) * h_{conv,Objeto1,Cara\ Lateral}$$

$$h_{pr,objeto2} = \frac{A_2 + B_2}{2 * (L_{x2} * L_{y2} + L_{z2} * L_{y2} + L_{z2} * L_{x2})} \quad (180)$$

$$A_2 = \left(h_{\text{zinf,Objeto2}} + h_{\text{zsup,Objeto2}}\right) * L_{x2} * L_{y2}$$

$$B_2 = \left(2 * L_{x2} * L_{z2} + 2 * L_{y2} * L_{z2}\right) * h_{conv,Objeto2,Cara\ Lateral}$$

$$h_{pr,objeto3} = \frac{A_3 + B_3}{2 * (L_{x3} * L_{y3} + L_{z3} * L_{y3} + L_{z3} * L_{x3})} \quad (181)$$

$$A_3 = \left(h_{\text{zinf,Objeto3}} + h_{\text{zsup,Objeto3}}\right) * L_{x3} * L_{y3}$$

$$B_3 = \left(2 * L_{x3} * L_{z3} + 2 * L_{y3} * L_{z3}\right) * h_{conv,Objeto3,Cara\ Lateral}$$

$$h_{pr,objeto4} = \frac{2 * \pi * L_{z4-5} * (R_{INT4-5} * h_{rint,Objeto4} + R_{EXT4-\quad} * h_{conv,Objeto4})}{A} \quad (182)$$

$$A = 2 * \pi * ({R_{EXT4-5}}^2 - {R_{INT4-\quad}}^2) + 2 * \pi * R_{EXT4-\quad} * L_{z4-5} + 2 * \pi * R_{INT4-\quad} * L_{z4-5}$$

$$h_{pr,objeto5} = \frac{2 * \pi * R_{INT4-5} * L_{z4-5} * h_{rext,Objet\quad} + \pi * {R_{INT4-\quad}}^2 * (h_{\text{sup,Objeto5}} + h_{\text{inf,Objeto5}})}{2 * \pi * {R_{INT4-5}}^2 + 2 * \pi * R_{INT4-5} * L_{z4-5}} \quad (183)$$

$$h_{pr,objeto6} = \frac{h_{\text{sup,Objeto6}} * L_{x6} * L_{y6} + \left(2 * L_{x6} * L_{z6} + 2 * L_{y1} * L_{z6}\right) * h_{conv,Objeto6,Cara\ Lateral}}{2 * (L_{x6} * L_{y6} + L_{z6} * L_{y6} + L_{z6} * L_{x6})} \quad (184)$$

Por último, se desarrolla el cálculo de las contantes adimensionales B que evalúan las condiciones de contorno en el modelo de la capacitancia modificado:

OBJETO 1:

$$B_{z,sup,Objeto1} = \frac{h_{conv,Objeto1,Cara\ Superior} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (185)$$

$$B_{z,inf,Objet\quad} = \frac{h_{\text{zinf,Objeto1}} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (186)$$

$$B_{x,dcha,Objeto1} = \frac{h_{conv,Objeto1,Cara\ Lateral} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (187)$$

$$B_{x,izq,Objeto\quad} = \frac{h_{conv,Objeto1,Cara\ Lateral} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (188)$$

$$B_{y,dcha,Objeto1} = \frac{h_{conv,Ob\qquad,Cara\ Lateral} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (189)$$

$$B_{y,izq,Objeto1} = \frac{h_{conv,Objeto1,Cara\ Lateral} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (190)$$

OBJETOS 2 Y 3:

$$B_{z,sup,Objet} = B_{z,sup,Objeto2} = \frac{h_{\text{zsup,Objeto2}} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (191)$$

$$B_{z,inf,Objet} = B_{z,inf,Objeto2} = \frac{h_{\text{zinf,Objeto2}} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (192)$$

$$B_{x,dcha,Objeto3} = B_{x,dcha,Objet} = \frac{h_{conv,Objeto2} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (193)$$

$$B_{x,izq,Objeto} = B_{x,izq,Objeto2} = \frac{h_{conv,Objeto2} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (194)$$

$$B_{y,dcha,Objeto3} = B_{y,dcha,Objeto2} = \frac{h_{conv,Objeto2} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (195)$$

$$B_{y,izq,Objeto3} = B_{y,izq,Objeto2} = \frac{h_{conv,Objeto2} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (196)$$

OBJETO 4:

$$B_{z,sup,Objeto4} = 0 \quad (197)$$

$$B_{z,inf,Objet} = 0 \quad (198)$$

$$B_{r,ext,Objeto4} = \frac{h_{conv,Objeto} * L_C}{k_{Cobre}} \quad (199)$$

$$B_{r,int,Objet} = \frac{h_{rint,Objeto4} * L_C}{k_{Cobre}} \quad (200)$$

OBJETO 5:

$$B_{z,sup,Objet} = \frac{h_{\text{zsup,Objeto5}} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (201)$$

$$B_{z,inf,Objeto} = \frac{h_{\text{zsup,Objeto5}} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (202)$$

$$B_{r,int,Objeto5} = \frac{h_{rext,Objeto5} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (203)$$

OBJETO 6:

$$B_{z,sup,Objet} = \frac{h_{\text{zsup,Objeto6}} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (204)$$

$$B_{z,inf,Objeto6} = 0 \quad (205)$$

$$B_{x,dcha,Objeto6} = \frac{h_{conv,Objeto6,Cara\ Lateral} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (206)$$

$$B_{x,izq,Objet} = \frac{h_{conv,Objeto6,Cara\ Latera} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (207)$$

$$B_{y,dcha,Objet} = \frac{h_{conv,Objet\quad,Cara\ Lateral} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (208)$$

$$B_{y,izq,Objeto6} = \frac{h_{conv,Objeto6,Cara\ Lateral} * L_C}{k_{ferrita}} \quad (210)$$

4.3 MODELO TÉRMICO ESTACIONARIO BOBINA

Una vez definidas las condiciones de contorno y analizado geométricamente el componente magnético, se efectúa en el presente apartado el cálculo de la matriz $[R]$,que evalúa el régimen estacionario del componente magnético. Dicha matriz para el presente ejemplo se define como:

$$[R]_{sup} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta T_{1,1}}{P_{test,1}} & \frac{\Delta T_{1,2}}{P_{test,2}} & \frac{\Delta T_{1,3}}{P_{test,3}} & \frac{\Delta T_{1,4}}{P_{test,4}} & \frac{\Delta T_{1,5}}{P_{test,5}} & \frac{\Delta T_{1,6}}{P_{test,6}} \\ \frac{\Delta T_{2,1}}{P_{test,1}} & \frac{\Delta T_{2,2}}{P_{test,2}} & \frac{\Delta T_{2,3}}{P_{test,3}} & \frac{\Delta T_{2,4}}{P_{test,4}} & \frac{\Delta T_{2,5}}{P_{test,5}} & \frac{\Delta T_{2,6}}{P_{test,6}} \\ \frac{\Delta T_{3,1}}{P_{test,1}} & \frac{\Delta T_{3,2}}{P_{test,2}} & \frac{\Delta T_{3,3}}{P_{test,3}} & \frac{\Delta T_{3,4}}{P_{test,4}} & \frac{\Delta T_{3,5}}{P_{test,5}} & \frac{\Delta T_{3,6}}{P_{test,6}} \\ \frac{\Delta T_{4,1}}{P_{test,1}} & \frac{\Delta T_{4,2}}{P_{test,2}} & \frac{\Delta T_{4,3}}{P_{test,3}} & \frac{\Delta T_{4,4}}{P_{test,4}} & \frac{\Delta T_{4,5}}{P_{test,5}} & \frac{\Delta T_{4,6}}{P_{test,6}} \\ \frac{\Delta T_{5,1}}{P_{test,1}} & \frac{\Delta T_{5,2}}{P_{test,2}} & \frac{\Delta T_{5,3}}{P_{test,3}} & \frac{\Delta T_{5,4}}{P_{tes}} & \frac{\Delta T_{5,5}}{P_{test,5}} & \frac{\Delta T_{5,6}}{P_{test,6}} \\ \frac{\Delta T_{6,1}}{P_{test,1}} & \frac{\Delta T_{6,2}}{P_{test,2}} & \frac{\Delta T_{6,3}}{P_{test,3}} & \frac{\Delta T_{6,4}}{P_{test,4}} & \frac{\Delta T_{6,5}}{P_{test,5}} & \frac{\Delta T_{6,6}}{P_{test,6}} \end{pmatrix} \left(\frac{K}{W}\right) \quad (211)$$

$$Donde:$$

$$P_{test,1} = (A_1 + B_1) * \Delta T_{lim} + C_1 * \sigma * \varepsilon * \left({T_{lim}}^4 - {T_{amb}}^4\right) \quad (212)$$

$$A_1 = \left(h_{\mathrm{zinf,Objeto1}} + h_{conv,Objet\quad,Cara\ Superior}\right) * L_{x1} * L_{y1}$$

$$B_1 = \left(2 * L_{x1} * L_{z1} + 2 * L_{y1} * L_{z1}\right) * h_{conv,Ob\qquad,Cara\ Lateral}$$

$$C_1 = (L_{x1} * L_{y1} + 2 * L_{z1} * L_{y1} + 2 * L_{z1} * L_{x1})$$

$$P_{test,3} = P_{test,2} = (A_2 + B_2) * \Delta T_{lim} + C_2 * \sigma * \varepsilon * \left({T_{lim}}^4 - {T_{amb}}^4\right) \quad (213)$$

$$A_2 = \left(h_{\mathrm{zinf,Objeto2}} + h_{\mathrm{zsup,Objeto2}}\right) * L_{x2} * L_{y2}$$

$$B_2 = \left(2 * L_{x2} * L_{z2} + 2 * L_{y2} * L_{z2}\right) * h_{conv,Objeto2,Cara\ Lateral}$$

$$C_2 = (L_{z2} * L_{y2} + 2 * L_{z2} * L_{x2})$$

$$P_{test,4} = A_4 * \Delta T_{lim} + B_4 * \sigma * \varepsilon * \left({T_{lim}}^4 - {T_{amb}}^4\right) \quad (214)$$

$$A_4 = 2 * \pi * L_{z4-5} * (R_{INT4-5} * h_{rint,Objeto4} + R_{EXT4-5} * h_{conv,Objeto4})$$

$$B_4 = \frac{\pi}{2} * R_{EXT4-} \ * L_{z4-5} + 2 * \pi * R_{INT4-5} * L_{z4-5}$$

$$P_{test,5} = A_5 * \Delta T_{lim} \ (215)$$

$$A_5 = 2 * \pi * R_{INT4-} \ * L_{z4-5} * h_{rext,Objeto4} + \pi * R_{INT4-}{}^{2} * (h_{\mathrm{sup,Objeto5}} + h_{\mathrm{inf,Objeto5}})$$

$$P_{test,6} = A_6 * \Delta T_{lim} + \ B_6 * \sigma * \varepsilon * \left(T_{lim}{}^{4} - T_{amb}{}^{4}\right) \ (216)$$

$$A_6 = h_{\mathrm{sup,Objeto6}} * L_{x6} * L_{y6} + \left(2 * L_{x6} * L_{z6} + 2 * L_{y1} * L_{z6}\right) * h_{conv,Objeto6,Cara\ Lateral}$$

$$B_6 = 2 * (L_{z6} * L_{y6} + L_{z6} * L_{x6})$$

Donde las propiedades de los materiales y la temperatura límite para todos los objetos se definen como:

$k_{ferrita} = 4\frac{W}{K * m}$	$C_{p,ferrita} = 750\frac{J}{Kg * K}$	$\rho_{ferrita} = 4800\frac{Kg}{m^3}$
$k_{cobre} = 400\frac{W}{K * m}$	$C_{p,cobre} = 385\frac{J}{Kg * K}$	$\rho_{cobre} = 8960\frac{Kg}{m^3}$
$\Delta T_{lim} = 100\ K$	$\varepsilon = 0.85$	$\sigma = 5.6704\ \frac{W}{m^2 * K^4}$

Tabla 5: Propiedades de los materiales y temperatura límite.

Computando el valor por medio de un Script, “CalculatePtest”, en el programa MATLAB se obtienen los siguientes valores de P_{test}:

$$P_{test,1} = 2.4211\ W$$

$$P_{test,3} = P_{test,2} = 1.5300\ \ W$$

$$P_{test,4} = 1.5522\ W$$

$$P_{test,5} = \ 1.2720\ W$$

$$P_{test,6} = 2.0628\ W$$

Una vez calculados los valores de P_{test}, se procederá a calcular las temperaturas $\Delta T_{i,j}$, las cuales corresponden a la temperatura superficial media obtenida en el objeto i cuando se simula el componente magnético asignando las pérdidas $P_{test,j}$ al objeto j. Dichas simulaciones se realizarán por medio del programa COMSOL, definiendo la condiciones de contorno con coeficientes de película fijos. El resultado obtenido en cada una de las simulaciones con la geometría simplificada es el siguiente:

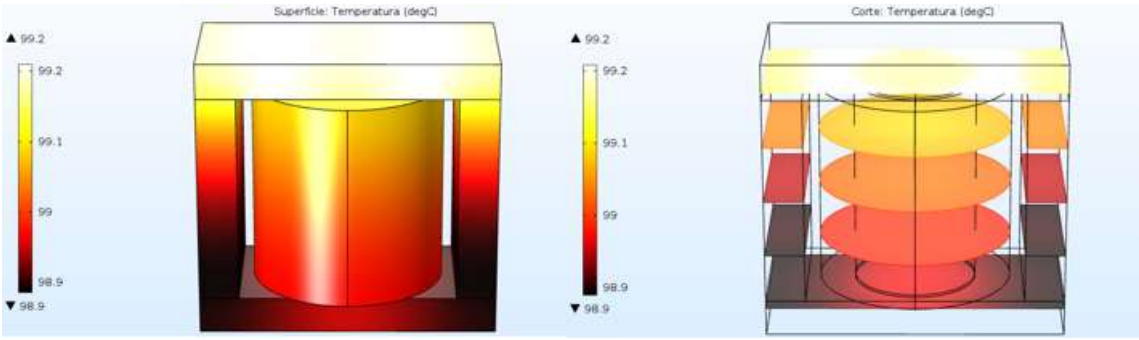


Figura 64: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 1 tiene como generación interna de calor $P_{test,1}$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y.

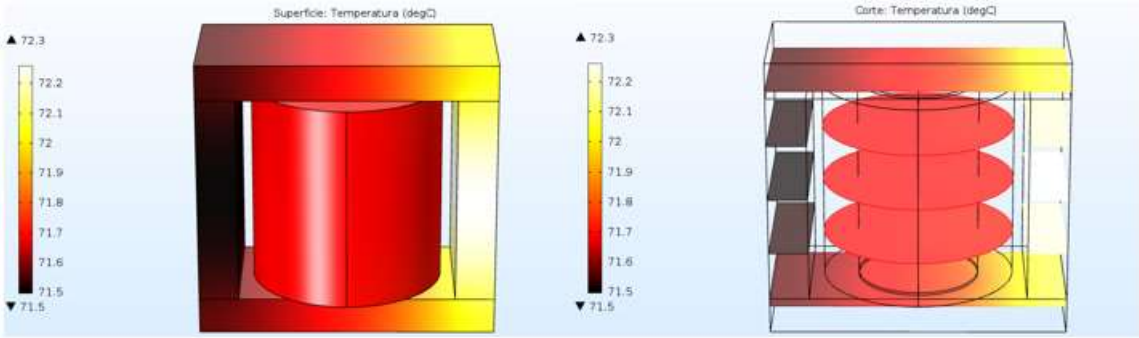


Figura 65: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 2 tiene como generación interna de calor $P_{test,2}$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y.

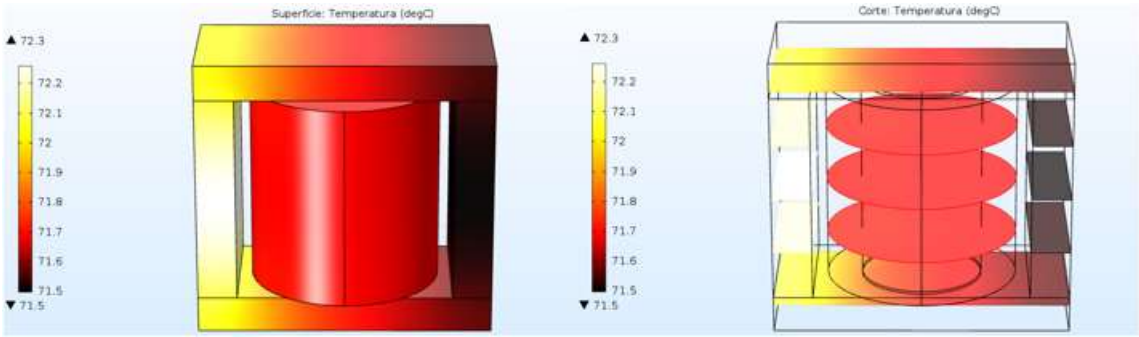


Figura 66: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 3 tiene como generación interna de calor $P_{test,3}$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y.

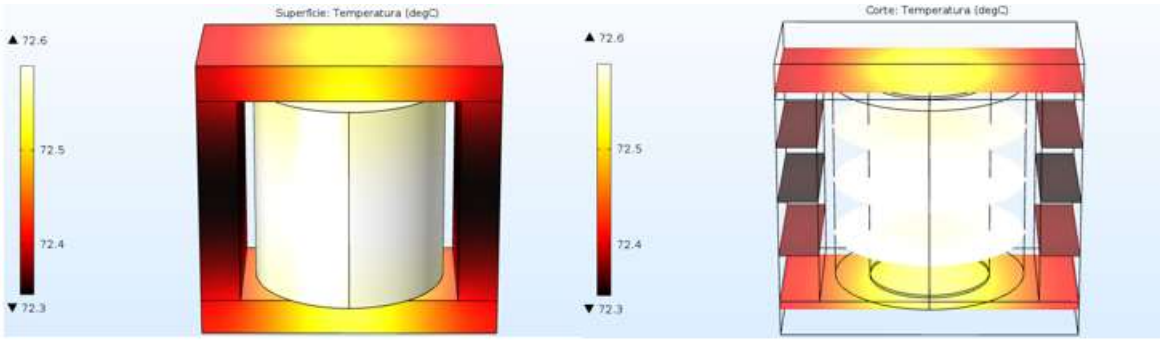


Figura 67: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 4 tiene como generación interna de calor $P_{test,4}$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y.

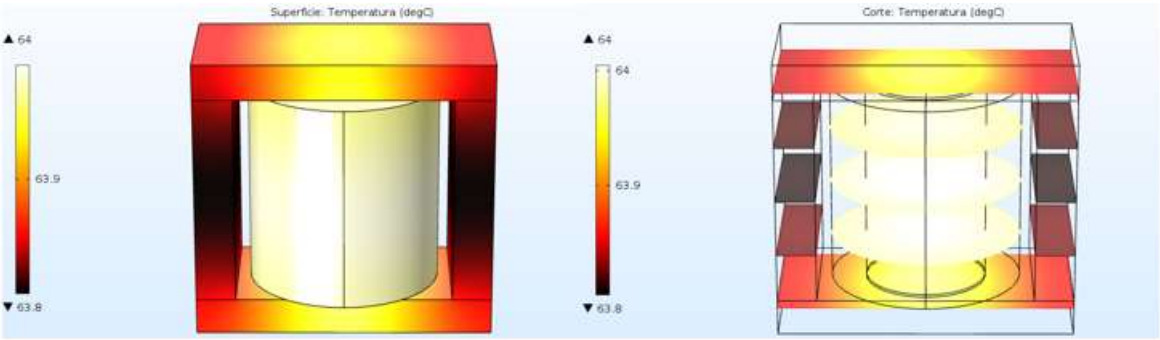


Figura 68: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 5 tiene como generación interna de calor $P_{test,5}$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y.

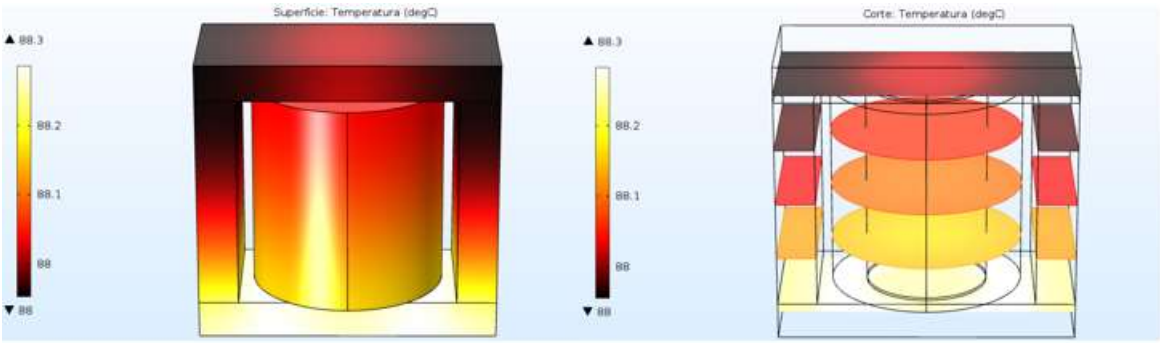


Figura 69: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 6 tiene como generación interna de calor $P_{test,6}$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y.

$T_{1,1} = 99.20$ ℃	$T_{1,2} = 71.90$ ℃	$T_{1,3} = 71.90$ ℃	$T_{1,4} = 71.47$ ℃	$T_{1,5} = 63.93$ ℃	$T_{1,6} = 88.00$ ℃
$T_{2,1} = 99.05$ ℃	$T_{2,2} = 72.20$ ℃	$T_{2,3} = 71.50$ ℃	$T_{2,4} = 71.30$ ℃	$T_{2,5} = 63.80$ ℃	$T_{2,6} = 88.15$ ℃
$T_{3,1} = 99.05$ ℃	$T_{3,2} = 71.50$ ℃	$T_{3,3} = 72.20$ ℃	$T_{3,4} = 71.30$ ℃	$T_{3,5} = 63.80$ ℃	$T_{3,6} = 88.15$ ℃
$T_{4,1} = 99.05$ ℃	$T_{4,2} = 71.70$ ℃	$T_{4,3} = 71.70$ ℃	$T_{4,4} = 72.60$ ℃	$T_{4,5} = 63.97$ ℃	$T_{4,6} = 88.15$ ℃
$T_{5,1} = 99.05$ ℃	$T_{5,2} = 71.70$ ℃	$T_{5,3} = 71.70$ ℃	$T_{5,4} = 72.57$ ℃	$T_{5,5} = 64.00$ ℃	$T_{5,6} = 88.15$ ℃
$T_{6,1} = 98.90$ ℃	$T_{6,2} = 71.90$ ℃	$T_{6,3} = 71.90$ ℃	$T_{6,4} = 72.47$ ℃	$T_{6,5} = 63.93$ ℃	$T_{6,6} = 88.30$ ℃

Tabla 6: Temperatura medias en la superficie en cada objeto para cada simulación. El primer subíndice representa el objeto y el segundo representa el objeto al que ha sido asignado P_{test}.

Por último, se calcula la matriz $[R]$ que evalua el régimen estacionario:

$$[R]_{sup} = \begin{pmatrix} 30.65 & 30.65 & 30.65 & 29.94 & 30.61 & 30.54 \\ 30.59 & 30.85 & 30.39 & 29.83 & 30.50 & 30.61 \\ 30.59 & 30.39 & 30.85 & 29.83 & 30.50 & 30.61 \\ 30.59 & 30.52 & 30.52 & 30.67 & 30.64 & 30.61 \\ 30.59 & 30.52 & 30.52 & 30.65 & 30.66 & 30.61 \\ 30.52 & 30.65 & 30.65 & 30.58 & 30.61 & 30.69 \end{pmatrix} \left(\frac{K}{W}\right) \quad (217)$$

4.4 MODELO TEÓRICO TÉRMICO TRANSITORIO BOBINA

Una vez calculado el régimen estacionario, se desarrolla a continuación el modelo térmico transitorio para el componente magnético. Dicho modelo se desarrollará con las tres metodologías propuestas en el documento calculando la matriz [C] o la matriz [RC] en cada uno de los modelos respectivamente.

METODOLOGÍA TEÓRICA

En primer lugar, se calculará el número de Biot para evaluar la relación entre la convección y la conducción en cada uno de los objetos:

$$Bi_{Objeto1} = \frac{h_{pr,Objeto1} * L_{C,objeto1}}{k_{ferrita}} \quad (218)$$

$$Bi_{Objeto} = \frac{h_{pr,Objeto2} * L_{C,objeto2}}{k_{ferrita}} \quad (219)$$

$$Bi_{Objeto3} = \frac{h_{pr,Objeto3} * L_{C,objeto3}}{k_{ferrita}} \quad (220)$$

$$Bi_{Objeto4} = \frac{h_{pr,Objeto4} * L_{C,objeto4}}{k_{cobre}} \quad (221)$$

$$Bi_{Objeto5} = \frac{h_{pr,Objeto5} * L_{C,objet}}{k_{ferrita}} \quad (222)$$

$$Bi_{Objet} = \frac{h_{pr,Objeto6} * L_{C,objeto6}}{k_{ferrita}} \quad (223)$$

Obteniendo los siguientes resultados numéricos:

$Bi_{Objeto1} = 0.0074$	$Bi_{Objeto2} = 0.0082$	$Bi_{Objeto3} = 0.0082$
$Bi_{Objeto4} = 4.5667 * 10^{-5}$	$Bi_{Objeto5} = 0.0095$	$Bi_{Objeto6} = 0.0069$

Tabla 7: Número de Biot de cada objeto para aplicar el criterio de la capacitancia.

Atendiendo al criterio de Biot, únicamente puede ser utilizado el método de la capacitancia en el objeto 4.

En el presente documento, con intención de comparar el método de la capacitancia y el método de la capacitancia modificado, se desarrollarán ambos en todos los objetos.

MÉTODO DE LA CAPACITANCIA

Para el modelo de la capacitancia, las funciones $A(t)$ que evalúan el transitorio térmico se definen como:

$$A_1(t) = 1 - e^{\frac{-t*Bi_{Objeto} *\alpha_{ferrita}}{L_{C,objeto1}{}^2}} \quad (224)$$

$$A_2(t) = 1 - e^{\frac{-t*Bi_{Objeto2}*\alpha_{ferrita}}{L_{C,objeto2}{}^2}} \quad (225)$$

$$A_3(t) = 1 - e^{\frac{-t*Bi_{Objeto3}*\alpha_{ferrita}}{L_{C,objet}{}^2}} \quad (226)$$

$$A_4(t) = 1 - e^{\frac{-t*Bi_{Objeto1}*\alpha_{cobre}}{L_{C,objeto4}{}^2}} \quad (227)$$

$$A_5(t) = 1 - e^{\frac{-t*Bi_{Objeto5}*\alpha_{ferrita}}{L_{C,objeto5}{}^2}} \quad (228)$$

$$A_6(t) = 1 - e^{\frac{-t*Bi_{Objeto6}*\alpha_{ferrita}}{L_{C,objeto6}{}^2}} \quad (229)$$

Obteniendo los siguientes resultados numéricos de las funciones de transitorio para cada uno de los objetos evaluados:

$$A_1(t) = 1 - e^{\frac{-t}{125.44}} \quad (230)$$

$$A_2(t) = 1 - e^{\frac{-t}{198.43}} \quad (231)$$

$$A_3(t) = 1 - e^{\frac{-t}{198.43}} \quad (232)$$

$$A_4(t) = 1 - e^{\frac{-t}{588.10}} \quad (233)$$

$$A_5(t) = 1 - e^{\frac{-t}{295.28}} \quad (234)$$

$$A_6(t) = 1 - e^{\frac{-t}{135.11}} \quad (235)$$

MODELO CAPACITANCIA MODIFICADO

Para abordar correctamente el estudio del régimen transitorio será necesario analizar la Ecuación General de Transferencia de Calor Adimensionalizada para cada una de las direcciones de análisis de cada objeto. Se debe tener en cuenta que muchos de los resultados analíticos adimensionales son equivalentes y, por tanto, no se desarrollará en el siguiente documento el cálculo de la función que evalúa el transitorio para todos los casos. Por otro lado, se abordará con mayor minuciosidad el análisis del Objeto 4 y 5, al tratarse de una geometría diferente frente al resto de los casos.

OBJETO 1

Dirección Z

La geometría del objeto 1 en dirección z, es la siguiente:

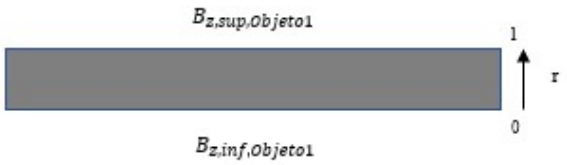


Figura 70: Objeto 1 en el corte del plano x-z.

Donde la Ecuación General de Transferencia de Calor Adimensionalizada se define como:

$$\frac{\partial \theta_{z1}(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{z1}(r,\tau)}{\partial r^2} \quad (236)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \; ; \; \theta_{z1} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \; ; r = \frac{z}{L_C}$$

$$Donde:$$

$$-L_C \; es \; la \; longitud \; característica \; del \; componente \; magnético.$$

$$-\Delta T_{RP} \; es \; la \; variación \; de \; temperatura \; respecto \; al \; ambiente \; en \; régimen \; permanente.$$

$$-\alpha \; es \; difusividad \; térmica \; del \; objeto \; 1.$$

$$-T_o \; es \; la \; temperatura \; ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{z1}}{\partial r} = -B_{z,sup,Objet} \quad \theta_{z1_{r=1}} \; en \; r = 1 \; (237)$$

$$\frac{\partial \theta_{z1}}{\partial r} = B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z1_{r=0}}\ en\ r = 0\ (238)$$

$$Donde:$$

$$-\ \theta_{z1_{r=1}} = \theta_{z1}(1,\tau)\ ;\ \theta_{z1_{r=0}} = \theta_{z1}(0,\tau)$$

$$-B_{z,sup,Objeto1}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ superior\ del\ objeto\ 1.$$

$$-B_{z,inf,Objeto1}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ inferior\ del\ objeto\ 1.$$

Para el siguiente caso, al tratarse de una pared plana con generación interna de calor se utilizará el siguiente perfil de temperaturas:

$$\theta_{z1}(r,\tau) = a_2(\tau) * r^2 + a_1(\tau) * r + a_0(\tau)\ (239)$$

Aplicando las condiciones de contorno, obtenemos los siguientes valores para las constantes del perfil de temperatura:

$$a_1(\tau) = B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z1_{r=0}}(\tau)\ (240)$$

$$a_2(\tau) = \frac{-B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z1_{r=0}}(\tau) - B_{z,sup,Objet}\quad \theta_{z1_{r=1}}(\tau)}{2}\ (241)$$

$$a_0(\tau) = \theta_{r=0}(\tau)\ (242)$$

El perfil de temperatura sustituyendo las constantes de integración quedaría de la siguiente forma:

$$\theta_{z1}(r,\tau) = \frac{-B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z1_{r=0}}(\tau) - B_{z,sup,Objeto1}\theta_{z1_{r=1}}(\tau)}{2} + B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z1_{r=0}}(\tau) + \theta_{z1_{r=0}}$$

$$(243)$$

Se busca ahora calcular el perfil de temperatura únicamente en función de la temperatura en el extremo $r = 0$:

$$\theta_{z1_{r=1}}(\tau) = \frac{-B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z1_{r=0}}(\tau) - B_{z,sup,Objeto1}\theta_{z1_{r=1}}(\tau)}{2} + B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z1_{r=0}}(\tau) + \theta_{z1_{r=0}}$$

$$\theta_{z1_{r=1}} = \frac{1 + \frac{B_{z,inf,Objeto1}}{2}}{1 + \frac{B_{z,sup,Objeto1}}{2}}\theta_{z1_{r=0}}\ (244)$$

Operando y sustituyendo de nuevo en el perfil de temperaturas se obtiene el siguiente resultado:

$$\theta_{z1}(r,\tau) = \frac{-B_{z,inf,Objeto1} - B_{z,sup,Objeto1}\dfrac{1+\dfrac{B_{z,inf,Objeto1}}{2}}{1+\dfrac{B_{z,sup,Objeto1}}{2}}}{2}\theta_{z1_{r=0}} * r^2 + B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z1_{r=0}} * r + \theta_{z1_{r=0}} \quad (245)$$

El siguiente paso es calcular la temperatura media en el perfil de temperatura, donde acorde a la definición expuesta en el anterior capítulo, se define como:

$$\overline{\theta_{z1}} = (m+1)\int_a^b x^m\,\theta_{z1}dx \quad (246)$$

Operando se obtiene el siguiente resultado donde se relaciona la temperatura media en función de las condiciones de contorno y la temperatura en el extremo $r = 0$:

$$\overline{\theta_{z1}} = \left(\frac{-B_{z,inf,Objeto1} - B_{z,sup,Objeto1}\dfrac{1+\dfrac{B_{z,inf,Objeto1}}{2}}{1+\dfrac{B_{z,sup,Objeto1}}{2}}}{6} + \frac{B_{z,inf,Objet}}{2} + 1\right)\theta_{z1_{r=0}} \quad (247)$$

El siguiente paso es integrar la Ecuación General del calor adimensionalizada en función de r:

$$(m+1)\int_0^1 r^m\frac{\partial\theta_{z1}}{\partial\tau}dr = \frac{\partial\overline{\theta_{z1}}}{\partial\tau} = (m+1)\int_0^1 r^m\frac{\partial^2\theta_{z1}}{\partial r^2}dr \quad (248)$$

Donde operando y aplicando las condiciones de contorno se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\theta_{z1_{r=0}}\right) = \frac{\dfrac{-2*B_{z,inf,Objet} - 2*B_{z,sup,Objeto1} - 2*B_{z,sup,Objet} * B_{z,inf,Objeto1}}{2+B_{z,sup,Objeto1}}\theta_{z1_{r=0}}}{\left(\dfrac{-B_{z,inf,Objet} - B_{z,sup,Objeto1}\dfrac{1+\dfrac{B_{z,inf,Objeto1}}{2}}{1+\dfrac{B_{z,sup,Objeto1}}{2}}}{6} + \dfrac{B_{z,inf,Objet}}{2} + 1\right)} \quad (249)$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{z1_{r=0}}(0) = 0; \theta_{z1_{r=0}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{z1_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{\tau * \frac{\frac{-2*B_{z,inf,Objeto1} - 2*B_{z,sup,Objeto1} - 2*B_{z,sup,Objeto1}*B_{z,inf,Objet}}{2+B_{z,sup,Objeto1}}}{\frac{-B_{z,inf,Objeto1} - B_{z,sup,Objeto1}\frac{1+\frac{B_{z,inf,Objeto1}}{2}}{1+\frac{B_{z,sup,Objet}}{2}}}{6} + \frac{B_{z,inf,Objet}}{2} + 1}} \right) \quad (250)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{z1}(t) = \left(1 - e^{\frac{t*\propto_{ferrita}}{{L_C}^2} * \frac{\frac{-2*B_{z,inf,Objeto1} - 2*B_{z,sup,Objeto1} - 2*B_{z,sup,Objet} \quad *B_{z,inf,Objeto1})}{2+B_{z,sup,Objet}}}{\frac{-B_{z,inf,Objeto1} - B_{z,sup,Objeto1}\frac{1+\frac{B_{z,inf,Objeto1}}{2}}{1+\frac{B_{z,sup,Objeto1}}{2}}}{6} + \frac{B_{z,inf,Objeto1}}{2} + 1}} \right) \quad (251)$$

Dirección X

Análogamente para la dirección X, cuya Ecuación General Adimensionalizada de Transferencia de Calor, condiciones de contorno y valores adimensionalizados son las siguientes:

Figura 71: Objeto 1 en el corte del plano x-z.

$$\frac{\partial \theta_{x1}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial r^2} \quad (227)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \; ; \; \theta_{x1} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \; ; r = \frac{x}{L_C}$$

$$Donde:$$

$$-L_C \; es \; la \; longitud \; característica \; del \; componente \; magnético..$$

$$-\Delta T_{RP} \; es \; la \; variación \; de \; temperatura \; respecto \; al \; ambiente \; en \; régimen \; permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 1.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{x1}}{\partial r} = -B_{x,dcha,Objeto1}\theta_{x1_{r=1}}\ en\ r = 1\ (252)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = B_{x,izq,Objeto1}\theta_{x1_{r=0}}\ en\ r = 0\ (253)$$

$$Donde:$$

$$-\ \theta_{x1_{r=1}} = \theta_{x1}(1,\tau)\ ;\ \theta_{x1_{r=0}} = \theta_{x1}(0,\tau)$$

$$-B_{x,dcha,Objet}\quad evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ del\ objeto\ 1.$$

$$-B_{x,izq,Objeto1}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ del\ objeto\ 1.$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{x1_{r=0}}(0) = 0; \theta_{x1_{r=0}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{x1_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{-\tau * \frac{\frac{-2*B_{x,izq,Ob}\quad *2-2*B_{x,dcha,Objeto1}-2*B_{x,dcha,Objeto1}*B_{x,iz\ \ ,Objeto1})}{2+B_{x,dcha,Objet}}}{\frac{-B_{x,izq,Objet}\quad -B_{x,dcha,Objeto1}\frac{1+\frac{B_{x,izq,Objeto1}}{2}}{1+\frac{B_{x,dcha,Objeto1}}{2}}}{6}+\frac{B_{x,izq,Objeto1}}{2}+1}}\right)\ (254)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{x1}(t) = \left(1 - e^{\frac{t*\propto_{ferrita}}{L_C{}^2} * \frac{\frac{-2*B_{x,izq,Objeto1}*2-2*B_{x,dcha,Objeto1}-2*B_{x,dcha,Ob}\quad *B_{x,izq,Objeto1})}{2+B_{x,dcha,Objeto1}}}{\frac{-B_{x,izq,Objeto1}-B_{x,dcha,Objeto1}\frac{1+\frac{B_{x,izq,Ob}}{2}}{1+\frac{B_{x,dcha,Objeto1}}{2}}}{6}+\frac{B_{x,izq,Objeto1}}{2}+1}}\right)\ (255)$$

Dirección Y

De forma equivalente que para las dos direcciones anteriores se define:

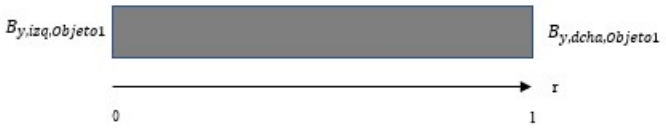


Figura 72:Objeto 1 en el corte del plano y-z

$$\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial r^2} \ (256)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \ ; \ \theta_{y1} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \ ; r = \frac{y}{L_C}$$

$$Donde:$$

$$-L_C \ es\ la\ longitud\ característica\ del\ componente\ magnético..$$

$$-\Delta T_{RP}\ es\ la\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente\ en\ régimen\ permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 1.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial r} = -B_{y,dcha,Objeto1} {\theta_{y1}}_{r=1}\ en\ r = 1\ (257)$$

$$\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial r} = B_{y,izq,Objeto1} {\theta_{y1}}_{r=0}\ en\ r = 0\ (258)$$

$$Donde:$$

$$-\ {\theta_{y1}}_{r=1} = \theta_{y1}(1,\tau)\ ;\ {\theta_{y1}}_{r=0} = \theta_{y1}(0,\tau)$$

$$-B_{y,dcha,Objeto1}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ del\ objeto\ 1.$$

$$-B_{y,izq,Objet}\quad evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ del\ objeto\ 1.$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales ${\theta_{y1}}_{r=0}(0) = 0; {\theta_{y1}}_{r=0}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{y1_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{\tau * \frac{\frac{-2*B_{y,izq,Objeto1}*2-2*B_{y,dcha,Objeto1}-2*B_{y,dcha,Objeto1}*B_{y,izq,Objet}}{2+B_{x,dcha,Objeto1}}}{\frac{-B_{y,izq,Objeto1}-B_{y,dch\ \ ,Objeto1}\frac{1+\frac{B_{y,izq,Objeto1}}{2}}{1+\frac{B_{y,dcha,Objeto1}}{2}}}{6}+\frac{B_{y,izq,Objeto1}}{2}+1}} \right) \ (259)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{y1}(t) = \left(1 - e^{\frac{t*\propto_{ferrita}}{{L_C}^2} * \frac{\frac{-2*B_{y,izq,Objeto1}*2-2*B_{y,dcha,Objeto1}-2*B_{y,dcha,Objet} \quad *B_{y,izq,Objeto1})}{2+B_{x,dcha,Objeto1}}}{\frac{-B_{y,izq,Objeto1}-B_{y,dcha,Objeto1}\frac{1+\frac{B_{y,izq,Objet}}{2}}{1+\frac{B_{y,dcha,Objeto1}}{2}}}{6}+\frac{B_{y,izq,Objeto1}}{2}+1}} \right) \quad (260)$$

Una vez resueltas las ecuaciones diferenciales en las tres dimensiones del objeto 1, la ecuación adimensionalizada que evalúa el transitorio térmico en el objeto completo es resultado del producto de las ecuaciones $A_{x1}(t)$, $A_{y1}(t)$ y $A_{z1}(t)$:

$$A_1(t) = A_{x1}(t) * A_{y1}(t) * A_{z1}(t) \ (261)$$

OBJETO 2

El objeto 2 presenta una geometría a nivel analítico semejante al objeto y, por tanto, presentará un perfil de temperaturas semejante. El transitorio para cada una de las direcciones es el siguiente:

Dirección Z

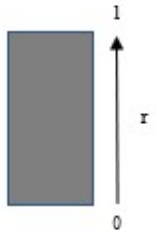


Figura 73: Objeto 2 en el corte del plano x-z.

$$\frac{\partial \theta_{z2}(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{z2}(r,\tau)}{\partial r^2} \ (262)$$

$$Donde:$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \ ; \ \theta_{z1} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \ ; r = \frac{z}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C \; es\ la\ longitud\ característica\ del\ componente\ magnético..$$

$$-\Delta T_{RP} \; es\ la\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente\ en\ régimen\ permanente.$$

$$-\alpha \; es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 2.$$

$$-T_o \; es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{z2}}{\partial r} = -B_{z,sup,Objeto1}\theta_{z2_{r=1}} \; en\ r = 1 \; (263)$$

$$\frac{\partial \theta_{z2}}{\partial r} = B_{z,inf,Objeto1}\theta_{z2_{r=0}} \; en\ r = 0 \; (264)$$

$$Donde:$$

$$\theta_{z2_{r=1}} = \theta_{z2}(1,\tau)\ ;\ \theta_{z2_{r=0}} = \theta_{z2}(0,\tau)$$

$$-B_{z,sup,Objeto2} \; evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ superior\ del\ objeto\ 2.$$

$$-B_{z,inf,Objeto2} \; evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ inferior\ del\ objeto\ 2.$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{z2_{r=0}}(0) = 0; \theta_{z2_{r=0}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{z2_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{\tau * \frac{\frac{-2*B_{z,inf,Objet} \quad *2-2*B_{z,sup,Objeto2}-2*B_{z,sup,Objet} \quad *B_{z,inf,Objet} \quad)}{2+B_{z,sup,Objeto2}}}{\frac{-B_{z,inf,Objeto2}-B_{z,su \quad ,Objeto2}\frac{1+\frac{B_{z,inf,Objeto2}}{2}}{1+\frac{B_{z,sup,Objet}}{2}}}{6}+\frac{B_{z,inf,Objeto2}}{2}+1}} \right) \; (265)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{z2}(t) = \left(1 - e^{\frac{t*\propto_{ferrita}}{{L_C}^2} * \frac{\frac{-2*B_{z,inf,Objeto2}*2-2*B_{z,sup,Objeto2}-2*B_{z,sup,Objeto2}*B_{z,inf,Objeto2})}{2+B_{z,sup,Objeto2}}}{\frac{-B_{z,inf,Objeto2}-B_{z,sup,Objeto2}\frac{1+\frac{B_{z,inf,Objeto2}}{2}}{1+\frac{B_{z,sup,Objet}}{2}}}{6}+\frac{B_{z,inf,Objeto2}}{2}+1}} \right) \; (266)$$

Dirección X

Figura 74: Objeto 2 en el corte del plano x-z

$$\frac{\partial \theta_{x2}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial r^2} \ (267)$$

$$Donde:$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \ ; \ \theta_{x2} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \ ; r = \frac{x}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C \ es\ la\ longitud\ característica\ del\ componente\ magnético..$$

$$-\Delta T_{RP}\ es\ la\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente\ en\ régimen\ permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 2.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{x2}}{\partial r} = -B_{x,dcha,Objeto1} \theta_{x2_{r=1}}\ en\ r = 1\ (268)$$

$$\frac{\partial \theta_{x2}}{\partial r} = B_{x,izq,Objeto1} \theta_{x2_{r=0}}\ en\ r = 0\ (269)$$

$$Donde:$$

$$\theta_{y1_{r=1}} = \theta_{y1}(1,\tau) \ ; \ \theta_{y1_{r=0}} = \theta_{y1}(0,\tau)$$

$$-B_{x,dcha,Objeto2}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ del\ objeto\ 2.$$

$$-B_{x,izq,Objeto2}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ del\ objeto\ 2.$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{x2_{r=0}}(0) = 0; \theta_{x2_{r=0}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{x2_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{\tau * \frac{\frac{-2*B_{x,izq,Obje} \quad *2-2*B_{x,dcha,Objet} \quad -2*B_{x,dcha,Objeto2}*B_{x,izq,Objeto2})}{2+B_{x,dcha,Objeto2}}}{\frac{-B_{x,izq,Objeto2}-B_{x,dcha,Objeto2}\frac{1+\frac{B_{x,izq,Objeto2}}{2}}{1+\frac{B_{x,dcha,Objet}}{2}}}{6}+\frac{B_{x,izq,Objeto2}}{2}+1}} \right) \quad (270)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{x2}(t) = \left(1 - e^{\frac{t*\propto_{ferrita}}{{L_C}^2} * \frac{\frac{-2*B_{x,izq,Objeto2}*2-2*B_{x,dcha,Objeto2}-2*B_{x,dcha,Objeto2}*B_{x,izq,Objeto2})}{2+B_{x,dcha,Objeto2}}}{\frac{-B_{x,izq,Objeto2}-B_{x,dcha,Objeto2}\frac{1+\frac{B_{x,izq,Objeto2}}{2}}{1+\frac{B_{x,dcha,Objeto2}}{2}}}{6}+\frac{B_{x,izq,Objeto2}}{2}+1}} \right) \quad (271)$$

Dirección Y:

Figura 75: Objeto 2 en el corte del plano y-z.

$$\frac{\partial \theta_{y2}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial r^2} \quad (272)$$

$$Donde:$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \; ; \; \theta_{y2} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \; ; r = \frac{y}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C \; es \; la \; longitud \; característica \; del \; componente \; magnético..$$

$$-\Delta T_{RP} \; es \; la \; variación \; de \; temperatura \; respecto \; al \; ambiente \; en \; régimen \; permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 2.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial\theta_{y2}}{\partial r} = -B_{y,dcha,Objeto1}\theta_{y2_{r=1}}\ en\ r = 1\ (273)$$

$$\frac{\partial\theta_{y2}}{\partial r} = B_{y,izq,Objeto1}\theta_{y2_{r=0}}\ en\ r = 0\ (274)$$

Donde:

$$\theta_{y2_{r=1}} = \theta_{y2}(1,\tau)\ ;\ \theta_{y2_{r=0}} = \theta_{y2}(0,\tau)$$

$$-B_{y,dcha,Objeto1}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ del\ objeto\ 2.$$

$$-B_{y,izq,Objeto1}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ del\ objeto\ 2.$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{y2_{r=0}}(0) = 0; \theta_{y2_{r=0}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{y2_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{\tau * \frac{\frac{-2*B_{y,izq,Objeto2}*2-2*B_{y,dcha,Objeto2}-2*B_{y,dcha,Objeto2}*B_{y,izq,Objet}\ )}{2+B_{x,dcha,Objeto1}}}{\frac{-B_{y,izq,Objeto2}-B_{y,dcha,Objeto2}\frac{1+\frac{B_{y,izq,Objet}}{2}}{1+\frac{B_{y,dcha,Ob}}{2}}}{6}+\frac{B_{y,izq,Objeto2}}{2}+1}}\right)\ (275)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{y2}(\tau) = \left(1 - e^{\frac{t*\propto_{ferrita}}{L_C{}^2} * \frac{\frac{-2*B_{y,izq,Objeto2}*2-2*B_{y,dcha,Objeto2}-2*B_{y,dcha,Objeto2}*B_{y,izq,Objeto2})}{2+B_{x,dcha,Objet}}}{\frac{-B_{y,izq,Objeto2}-B_{y,dcha,Objeto2}\frac{1+\frac{B_{y,izq,Objeto2}}{2}}{1+\frac{B_{y,dcha,Objeto2}}{2}}}{6}+\frac{B_{y,izq,Objeto2}}{2}+1}}\right)\ (276)$$

Una vez resueltas las ecuaciones diferenciales en las tres dimensiones del objeto 2, la función adimensionalizada que evalúa el transitorio térmico en el objeto completo es resultado del producto de las ecuaciones $A_{x2}(t)$, $A_{y2}(t)$ y $A_{z2}(t)$:

$$A_2(t) = A_{x2}(t) * A_{y2}(t) * A_{z2}(t)\ (277)$$

Cabe destacar que la función adimensionalizada que evalúa el transitorio de temperatura en el Objeto 3 es equivalente a la función del Objeto 2, debido a que poseen la misma geometría y condiciones de contorno. Por tanto, el Objeto 3 no será evaluado el valor de la función $A_3(t)$:

$$A_2(t) = A_3(t) \ (278)$$

OBJETO 4

El Objeto 4 representa el devanado del componente magnético, donde el resultado obtenido el resolver la ecuación diferencial adimensionalizada en la dirección radial es totalmente diferente a los resultados anteriores. Por tanto, se desarrollará el análisis completo.

Dirección Radial R

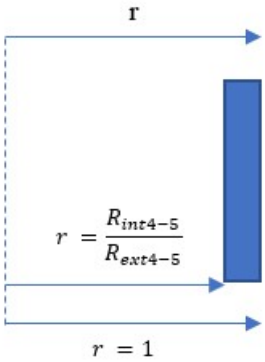


Figura 76: Objeto 4 en el corte de cualquier plano R-z

Al tratarse de una geometría cilíndrica, la Ecuación General de Transferencia de calor para un valor de $m = 1$:

$$\frac{\partial \theta_{r4}}{\partial \tau} = \frac{1}{r} * \frac{\partial}{\partial r}\left(r * \frac{\partial \theta_{r4}}{\partial r}\right) \ (279)$$

$$Donde:$$

$$\theta_{r4} = \frac{T - T_0}{\Delta T_{RP}}; \ \tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2}; r = \frac{R}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C \ es \ la \ longitud \ característica \ del \ componente \ magnético..$$

$$-\Delta T_{RP} \ es \ la \ variación \ de \ temperatura \ respecto \ al \ ambiente \ en \ régimen \ permanente.$$

$$-\alpha \ es \ difusividad \ térmica \ del \ objeto \ 4.$$

$$-T_o \ es \ la \ temperatura \ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{r4}}{\partial r} = -B_{r,ext,Objeto4}\theta_{r4_{r=1}} \ en \ r = 1 \ (280)$$

$$\frac{\partial \theta_{r4}}{\partial r} = B_{r,int,Objeto4}\theta_{r4}{}_{r=\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}}} \; en\; r = \frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} \; (281)$$

Donde:

$$\theta_{r4}{}_{r=1} = \theta_{r4}(1,\tau)\; ;\; \theta_{r4}{}_{r=\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objet}}} = \theta_{r4}(\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}},\tau)$$

$-B_{r,ext,Objeto4}$ *evalúa las condiciones de contorno en la cara lateral exterior del objeto* 4.

$-B_{r,int,Objeto4}$ *evalúa las condiciones de contorno en la cara lateral interior del objeto* 4.

Para el siguiente caso, al tratarse de una corona cilíndrica con generación interna de calor se utilizará el siguiente perfil de temperaturas:

$$\theta_{r4}(r,\tau) = a_2(\tau) * r^2 + a_1(\tau) * \ln r + a_0(\tau) \; (282)$$

Aplicando las condiciones de contorno, obtenemos los siguientes valores para las constantes del perfil de temperatura:

$$a_2(\tau) = -\frac{B_{r,int,Objeto4}\theta_{r4}{}_{r=\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto}}} + B_{r,ext,Objeto4}\theta_{r4}{}_{r=1} * \frac{R_{rext,Objet}}{R_{rint,Objet}}}{2 * \left(\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objet}} - \frac{R_{rext,Objet}}{R_{rint,Objet}}\right)} \; (283)$$

$$a_1(\tau) = \frac{B_{r,int,Objeto4}\theta_{r4}{}_{r=\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}}} + B_{r,ext,Objet} \quad \theta_{r4}{}_{r=1} * (2 * \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objet}} - \frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}})}{(\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objet}})} \; (284)$$

$$a_0(\tau) = \theta_{r4}{}_{r=1} + \frac{\frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\theta_{r4}{}_{r=\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}} + \theta_{r4}{}_{r=1} * \frac{R_{rext,Ob}}{R_{rint,Objeto4}}}{2 * (\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objet}})} \; (285)$$

Se busca ahora calcular el perfil de temperatura únicamente en función de la temperatura en el extremo $r = 1$:

$$\theta_{r4_{r=1}} = a_2(\tau) + a_0(\tau) \ (286)$$

$$\theta_{r4_{r=\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objet}}}} = \theta_{r4_{r=1}} * \frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objet}}\right)} \ (287)$$

Operando y sustituyendo de nuevo en las constantes del perfil de temperatura se obtiene el siguiente resultado:

$$a_2(\tau) = \theta_{r4_{r=1}} * A_2 \ (288)$$

$$a_1(\tau) = \theta_{r4_{r=1}} * A_1 (289)$$

$$a_0(\tau) = \theta_{r4_{r=1}} * A_0 (290)$$

$$Donde:$$

$$A_2 = -\left(\frac{B_{r,int,Objeto4}\frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} * + B_{r,ext,Objeto4}\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}}{2 * \left(\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}} - \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\right)}\right)$$

$$A_1 = \left(\frac{B_{r,int,Objeto4}\frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} + B_{r,ext,Ob} * \left(2 * \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}} - \frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}}\right)}{\left(\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Obje}}\right)}\right)$$

$$A_0 = \left(1 + \frac{\frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}} * \frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objet}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} + \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}}{2 * \left(\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Obj}}\right)}\right)$$

El siguiente paso es calcular la temperatura media en el perfil de temperatura, donde acorde a la definición expuesta en el anterior capítulo, se define como:

$$\overline{\theta_{r4}} = (m+1)\int_{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}}^{1} r^m\,\theta_{r4}dr \quad (291)$$

Operando para $m = 1$ dado que la geometría es cilíndrica, se obtiene el valor de $\overline{\theta_{r4}}$ en función de las condiciones de contorno y la temperatura en el extremo $r = 1$:

$$\overline{\theta_{r4}} = 2 * (A_2 * N + A_1 * M + A_0 * L) * \theta_{r4_{r=1}} \quad (292)$$

$$Donde:$$

$$N = \frac{1 - (\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Obj}})^4}{4}$$

$$M = \left(-\frac{1 + (\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}})^2 * (\ln\left(\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}}\right) - 1)}{4}\right)$$

$$L = (1 - (\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}})^2)$$

El siguiente paso es integrar la Ecuación General del calor adimensionalizada en función de r:

$$(m+1)\int_{\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}}^{1} r^m \frac{\partial\theta_{z1}}{\partial\tau}dr = \frac{\partial\overline{\theta_{z1}}}{\partial\tau} = (m+1)\int_{\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}}^{1} r^m \frac{\partial^2\theta_{z1}}{\partial r^2}dr \quad (293)$$

Donde operando y aplicando las condiciones de contorno se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\theta_{r4_{r=1}}\right) = -\frac{B_{r,ext,Objeto4} + B_{r,int,Objeto4} * \frac{\frac{R_{rext,Objet}}{R_{rint,Objeto4}}(1 + B_{r,ext,Objeto4})}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objet}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)}}{(A_2 * N + A_1 * M + A_0 * L)} * \theta_{r4_{r=1}} \quad (294)$$

$$Donde:$$

$$N = \frac{1 - (\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objet}})^4}{4}$$

$$M = \left(-\frac{1 + (\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}})^2 * (\ln\left(\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}\right) - 1)}{4}\right)$$

$$L = (1 - (\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}})^2)$$

$$A_2 = (\frac{B_{r,int,Objeto4}\frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} * + B_{r,ext,Obj} \quad \frac{R_{rext,Objet}}{R_{rint,Objeto4}}}{2 * \left(\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objet}} - \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\right)})$$

$$A_1 = (\frac{B_{r,int,Objeto4}\frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objet}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} + B_{r,ext,Objeto4} * (2 * \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}} - \frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objet}})}{(\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}})})$$

$$A_0 = \left(1 + \frac{\frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}} * \frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objet}}\left(1 + B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} + \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}}{2 * (\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}})}\right)$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{r4_{r=1}}(0) = 0; \theta_{r4_{r=1}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{r4_{r=1}}(\tau) = \left(1 - e^{-\tau * \frac{B_{r,ext,Objet} + B_{r,int,Objeto4} * \frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}(1 + B_{r,ext,Objet})}{\left(B_{r,int,Objet} - \frac{B_{r,int,Objet}}{B_{r,ext,Objet}}\right)}}{(A_2 * N + A_1 * M + A_0 * L)}}\right) \quad (295)$$

$$Donde:$$

$$N = \frac{1 - (\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}})^4}{4}$$

$$M = \left(-\frac{1 + (\frac{R_{rint,Ob}}{R_{rext,Objeto4}})^2 * (\ln\left(\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}\right) - 1)}{4}\right)$$

$$L = (1 - (\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}})^2)$$

$$A_2 = \left(\frac{B_{r,int,Objeto4}\dfrac{\dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objet}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \dfrac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} * + B_{r,ext,Objeto4}\dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}}{2 * \left(\dfrac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \dfrac{R_{rext,Ob}}{R_{rint,Objeto4}}\right)}\right)$$

$$A_1 = \left(\frac{B_{r,int,Objeto4}\dfrac{\dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \dfrac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} + B_{r,ext,Objet} \quad * \left(2 * \dfrac{R_{rext,Objet}}{R_{rint,Objeto4}} - \dfrac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}\right)}{\left(\dfrac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \dfrac{R_{rext,Objet}}{R_{rint,Objet}}\right)}\right)$$

$$A_0 = \left(1 + \frac{\dfrac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}} * \dfrac{\dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1 + B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \dfrac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objet}}\right)} + \dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Ob}}}{2 * \left(\dfrac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}} - \dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\right)}\right)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{r4}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t * \propto_{cobre}}{L_c{}^2} * \frac{B_{r,ext,Objeto4} + B_{r,int,Objeto4} * \frac{\frac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}(1 + B_{r,ext,Objeto4})}{\left(B_{r,int,Objeto4} - \frac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)}}{(A_2 * N + A_1 * M + A_0 * L)}}\right) \quad (296)$$

$$Donde:$$

$$N = \frac{1 - \left(\dfrac{R_{rint,Obj}}{R_{rext,Objeto4}}\right)^4}{4}$$

$$M = \left(-\frac{1 + \left(\dfrac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}\right)^2 * \left(\ln\left(\dfrac{R_{rint,Obje}}{R_{rext,Objet}}\right) - 1\right)}{4}\right)$$

$$L = \left(1 - \left(\frac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objet}}\right)^2\right)$$

$$A_2 = \left(\frac{B_{r,int,Objeto4}\dfrac{\dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1+B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4}-\dfrac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Ob}}\right)} * + B_{r,ext,Objeto4}\dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}}{2*\left(\dfrac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}-\dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\right)}\right)$$

$$A_1 = \frac{B_{r,int,Ob}\dfrac{\dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1+B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Ob}-\dfrac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} + B_{r,ext,Objeto4} * 2 * \dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}} - \dfrac{R_{rint,Objet}}{R_{rext,Objeto4}})}{\left(\dfrac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}-\dfrac{R_{rext,Ob}}{R_{rint,Objeto4}}\right)}$$

$$A_0 = \left(1 + \frac{\dfrac{B_{r,int,Objet}}{B_{r,ex\ ,Ob}} * \dfrac{\dfrac{R_{rext,Objet}}{R_{rint,Objeto4}}\left(1+B_{r,ext,Objeto4}\right)}{\left(B_{r,int,Objeto4}-\dfrac{B_{r,int,Objeto4}}{B_{r,ext,Objeto4}}\right)} + \dfrac{R_{rext,Objeto4}}{R_{rint,Objeto4}}}{2*\left(\dfrac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}-\dfrac{R_{rext,Objet}}{R_{rint,Objeto4}}\right)}\right)$$

Finalmente, el resultado del Objeto 4 se aproximará al resultado de la dirección radial, debido a que en el presente problema se ha considerado la superficie inferior y superior del objeto como adiabáticas.

$$A_4(t) \approx A_{r4}(t) \ (297)$$

Cabe destacar la diferencia en dificultad que ha presentado el cálculo por medio de la Ecuación General de Calor Adimensionalizada frente al cálculo del modelo utilizando el método de la capacitancia.

OBJETO 5

Dirección Radial

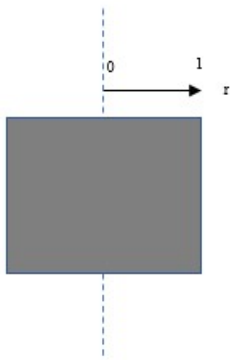


Figura 77: Objeto 5 en el corte de cualquier plano R-z

Al tratarse de una geometría cilíndrica, la Ecuación General de Transferencia de calor para un valor de $m = 1$:

$$\frac{\partial \theta_{r5}}{\partial \tau} = \frac{1}{r} * \frac{\partial}{\partial r}\left(r * \frac{\partial \theta_{r5}}{\partial r}\right) \ (298)$$

$$Donde:$$

$$\theta_{r5} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}};\ \tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2}; r = \frac{R}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C\ es\ la\ longitud\ característica\ del\ componente\ magnético..$$

$$-\Delta T_{RP}\ es\ la\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente\ en\ régimen\ permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 5.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{r4}}{\partial r} = -B_{r,ext,Objeto5}\theta_{r5_{r=1}}\ en\ r = 1\ (299)$$

$$\frac{\partial \theta_{r5}}{\partial r} = 0\ en\ r = 0\ (300)$$

$$\text{Donde:}$$

$$\theta_{r5_{r=1}} = \theta_{r5}(1,\tau)\ ;\ \theta_{r5_{r=0}} = \theta_{r5}(0,\tau)$$

$$-B_{r,ext,Objeto5}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ lateral\ exterior\ del\ objeto\ 5.$$

Para el siguiente caso, al tratarse de una corona cilíndrica con generación interna de calor se utilizará el siguiente perfil de temperaturas:

$$\theta_{r5}(r,\tau) = a_2(\tau) * r^2 + a_1(\tau) * \ln r + a_0(\tau)\ (301)$$

Aplicando las condiciones de contorno, obtenemos los siguientes valores para las constantes del perfil de temperatura:

$$a_2(\tau) = -\frac{B_{r,ext,Objeto5}\theta_{r5_{r=1}}}{2}\ \ (302)$$

$$a_1(\tau) = 0\ \ (303)$$

$$a_0(\tau) = \left(1 + \frac{B_{r,ext,Objet}}{2}\right) * \theta_{r5_{r=1}} \ (304)$$

Por lo que el perfil de temperaturas es:

$$\theta_{r5}(r,\tau) = -\frac{B_{r,ext,Objeto5}\theta_{r5_{r=1}}}{2} * r^2 + \left(1 + \frac{B_{r,ext,Objeto5}}{2}\right) * \theta_{r5_{r=1}} \ (305)$$

El siguiente paso es calcular la temperatura media en el perfil de temperatura, donde acorde a la definición expuesta en el anterior capítulo, se define como:

$$\overline{\theta_{r5}} = (m+1)\int_0^1 r^m \, \theta_{r5} dr \ (306)$$

Operando para $m = 1$ dado que la geometría es cilíndrica, se obtiene el valor de $\overline{\theta_{r4}}$ en función de las condiciones de contorno y la temperatura en el extremo $r = 1$:

$$\overline{\theta_{r5}} = \left(1 + \frac{B_{r,ext,Objeto5}}{3}\right) * \theta_{r5_{r=1}} \ (307)$$

El siguiente paso es integrar la Ecuación General del calor adimensionalizada en función de r:

$$(m+1)\int_{\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}}^{1} r^m \frac{\partial \theta_{z1}}{\partial \tau} dr = \frac{\partial \overline{\theta_{z1}}}{\partial \tau} = (m+1)\int_{\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Ob}}}^{1} r^m \frac{\partial^2 \theta_{z1}}{\partial r^2} dr \ (308)$$

Donde operando y aplicando las condiciones de contorno se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\theta_{r5_{r=1}}\right) = -\frac{B_{r,ext,Objet}}{1 + \frac{B_{r,ext,Objeto5}}{3}} * \theta_{r5_{r=1}} \ (309)$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{r5_{r=1}}(0) = 0; \theta_{r5_{r=1}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{r5_{r=1}}(\tau) = \left(1 - e^{-\tau * \frac{B_{r,ext,Objeto5}}{1 + \frac{B_{r,ext,Objeto5}}{3}}}\right) \ (310)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{r5}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t*\propto_{ferrita}}{{L_C}^2} * \frac{B_{r,ext,Objeto5}}{1+\frac{B_{r,ext,Objeto5}}{3}}}\right) (311)$$

Dirección Z

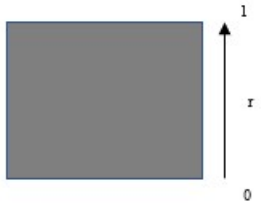


Figura 78: Objeto 5 en el corte de cualquier plano R-z

$$\frac{\partial \theta_{z5}(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{z5}(r,\tau)}{\partial r^2} \ (312)$$

$$Donde:$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \ ; \ \theta_{z5} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \ ; r = \frac{z}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C \ es\ la\ longitud\ característica\ del\ componente\ magnético..$$

$$-\Delta T_{RP}\ es\ la\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente\ en\ régimen\ permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 2.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{z5}}{\partial r} = -B_{z,sup,Objet} \quad \theta_{z5_{r=1}}\ en\ r = 1\ (313)$$

$$\frac{\partial \theta_{z5}}{\partial r} = B_{z,inf,Objeto1} \theta_{z5_{r=0}}\ en\ r = 0\ (314)$$

$$Donde:$$

$$\theta_{z5_{r=1}} = \theta_{z5}(1,\tau)\ ;\ \theta_{z5_{r=0}} = \theta_{z5}(0,\tau)$$

$$-B_{z,sup,Objeto5}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ superior\ del\ objeto\ 5.$$

$$-B_{z,inf,Objet} \quad evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ inferior\ del\ objeto\ 5.$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{z5_{r=0}}(0) = 0; \theta_{z5_{r=0}}(\infty) = 1$ de obtiene:

$$\theta_{z5_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{\tau * \frac{\frac{-2*B_{z,inf,Objeto5}*2-2*B_{z,sup,Objeto5}-2*B_{z,sup,Objeto5}*B_{z,inf,Objeto5})}{2+B_{z,sup,Objeto5}}}{\frac{-B_{z,inf,Objeto5}-B_{z,sup,Objeto5}\frac{1+\frac{B_{z,inf,Objet}}{2}}{1+\frac{B_{z,sup,Objeto5}}{2}}}{6}+\frac{B_{z,inf,Objeto5}}{2}+1}} \right) \quad (315)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{z5}(t) = \left(1 - e^{\frac{t*\propto_{ferrita}}{L_C{}^2} * \frac{\frac{-2*B_{z,inf,Objeto5}*2-2*B_{z,sup,Objeto5}-2*B_{z,sup,Objeto5}*B_{z,inf,Objeto5})}{2+B_{z,sup,Objeto5}}}{\frac{-B_{z,inf,Objeto5}-B_{z,sup,Objeto5}\frac{1+\frac{B_{z,inf,Objeto5}}{2}}{1+\frac{B_{z,sup,Objeto5}}{2}}}{6}+\frac{B_{z,inf,Objeto5}}{2}+1}} \right) \quad (316)$$

Una vez resueltas las ecuaciones diferenciales en las dos dimensiones del objeto 5, la función adimensionalizada que evalúa el transitorio térmico en el objeto completo es resultado del producto de las ecuaciones $A_{r5}(t)$ y $A_{z5}(t)$:

$$A_5(t) = A_{r5}(t) * A_{z5}(t) \ (316)$$

OBJETO 6

Dirección Z

La geometría del objeto 1 en dirección z, es la siguiente:

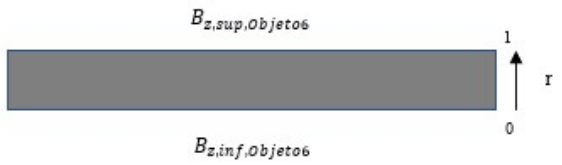


Figura 79: Objeto 6 en el corte con el plano x-z.

Donde la Ecuación General de Transferencia de Calor Adimensionalizada se define como:

$$\frac{\partial \theta_{z6}(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{z6}(r,\tau)}{\partial r^2} \ (317)$$

$$Donde:$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \ ; \ \theta_{z6} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \ ; r = \frac{z}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C \ es\ la\ longitud\ característica\ del\ componente\ magnético..$$

$$-\Delta T_{RP}\ es\ la\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente\ en\ régimen\ permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 6.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{z6}}{\partial r} = -B_{z,sup,Objeto6}\theta_{z6_{r=1}}\ en\ r = 1\ (318)$$

$$\frac{\partial \theta_{z6}}{\partial r} = 0 \quad en\ r = 0\ (319)$$

$$Donde:$$

$$\theta_{z6_{r=1}} = \theta_{z6}(1,\tau)\ ;\ \theta_{z6_{r=0}} = \theta_{z6}(0,\tau)$$

$$-B_{z,sup,Objeto6}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ superior\ del\ objeto\ 6.$$

Para el siguiente caso, al tratarse de una pared plana con generación interna de calor se utilizará el siguiente perfil de temperaturas:

$$\theta_{z6}(r,\tau) = a_2(\tau) * r^2 + a_1(\tau) * r + a_0(\tau)\ (320)$$

Aplicando las condiciones de contorno, obtenemos los siguientes valores para las constantes del perfil de temperatura:

$$a_1(\tau) = 0\ (321)$$

$$a_2(\tau) = \frac{-B_{z,sup,Objeto6}\theta_{z6_{r=1}}(\tau)}{2}\ (322)$$

$$a_0(\tau) = \left(1 + \frac{B_{z,sup,Objeto6}}{2}\right) * \theta_{z6_{r=1}}(\tau)\ (323)$$

Por lo que el perfil de temperaturas es:

$$\theta_{z6}(r,\tau) = -\frac{B_{z,sup,Objeto6}\theta_{z6_{r=1}}}{2} * r^2 + \left(1 + \frac{B_{z,sup,Objeto6}}{2}\right) * \theta_{z6_{r=1}} (324)$$

El siguiente paso es calcular la temperatura media en el perfil de temperatura, donde acorde a la definición expuesta en el anterior capítulo, se define como:

$$\overline{\theta_{z6}} = (m+1)\int_0^1 r^m\, \theta_{z6} dr (325)$$

Operando para $m = 1$ dado que la geometría es cilíndrica, se obtiene el valor de $\overline{\theta_{r4}}$ en función de las condiciones de contorno y la temperatura en el extremo $r = 1$:

$$\overline{\theta_{z6}} = \left(1 + \frac{B_{z,sup,Objeto6}}{3}\right) * \theta_{z6_{r=1}} \ (326)$$

El siguiente paso es integrar la Ecuación General del calor adimensionalizada en función de r:

$$(m+1)\int_{\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}}^{1} r^m \frac{\partial \theta_{z6}}{\partial \tau} dr = \frac{\partial \overline{\theta_{z6}}}{\partial \tau} = (m+1)\int_{\frac{R_{rint,Objeto4}}{R_{rext,Objeto4}}}^{1} r^m \frac{\partial^2 \theta_{z6}}{\partial r^2} dr \ (327)$$

Donde operando y aplicando las condiciones de contorno se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\theta_{z6_{r=1}}\right) = -\frac{B_{z,sup,Objeto6}}{1 + \frac{B_{z,sup,Objeto6}}{3}} * \theta_{z6_{r=1}} \ (328)$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{z6_{r=0}}(0) = 0; \theta_{z6_{r=0}}(\infty) = 1$ de obtiene:

$$\theta_{z6_{r=1}}(\tau) = \left(1 - e^{-\tau * \frac{B_{z,sup,Objeto6}}{1 + \frac{B_{z,sup,Objet}}{3}}}\right) (329)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{z6}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t*\propto_{ferrita}}{{L_C}^2} * \frac{B_{z,sup,Objeto6}}{1+\frac{B_{z,sup,Objeto6}}{3}}}\right) (330)$$

Dirección X

Análogamente para la dirección X, cuya Ecuación General Adimensionalizada de Transferencia de Calor, condiciones de contorno y valores adimensionalizados son las siguientes:

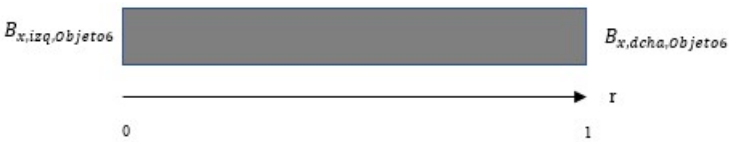


Figura 80: Objeto 6 en el corte con el plano x-z.

$$\frac{\partial \theta_{x6}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{x6}}{\partial r^2} \ (331)$$

$$Donde:$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{{L_C}^2} \ ; \ \theta_{x1} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \ ; r = \frac{x}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C \ es\ la\ longitud\ característica\ del\ componente\ magnético..$$

$$-\Delta T_{RP}\ es\ la\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente\ en\ régimen\ permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 6.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{x6}}{\partial r} = -B_{x,dcha,Objeto1}\theta_{x6_{r=1}}\ en\ r = 1\ (332)$$

$$\frac{\partial \theta_{x6}}{\partial r} = B_{x,izq,Objeto1}\theta_{x6_{r=0}}\ en\ r = 0\ (333)$$

$$Donde:$$

$$\theta_{x6_{r=1}} = \theta_{x6}(1,\tau)\ ;\ \theta_{x6_{r=0}} = \theta_{x6}(0,\tau)$$

$$-B_{x,dcha,Objeto6}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ superior\ del\ objeto\ 6.$$

$$-B_{x,izq,Objet}\ \ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ inferior\ del\ objeto\ 6.$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{x6_{r=0}}(0) = 0; \theta_{x6_{r=0}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{x6_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{\tau * \frac{\frac{-2*B_{x,izq,Objeto6}*2-2*B_{x,dcha,Objeto6}-2*B_{x,dcha,Objeto6}*B_{x,izq,Objeto6})}{2+B_{x,dcha,Objet}}}{\frac{-B_{x,izq,Objeto6}-B_{x,dcha,Objeto6}\frac{1+\frac{B_{x,izq,Obj}}{2}}{1+\frac{B_{x,dcha,Obj}}{2}}}{6}+\frac{B_{x,izq,Objeto6}}{2}+1}} \right) \quad (334)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_6(t) = \left(1 - e^{-\frac{t*\propto_{ferrita}}{L_C{}^2} * \frac{\frac{-2*B_{x,izq,Obj}\quad *2-2*B_{x,dcha,Obj}\quad -2*B_{x,dcha,Objeto6}*B_{x,izq,Objeto6})}{2+B_{x,dcha,Objeto6}}}{\frac{-B_{x,izq,Objeto6}-B_{x,dcha,Objet}\frac{1+\frac{B_{x,izq,Objet}}{2}}{1+\frac{B_{x,dcha,Objeto6}}{2}}}{6}+\frac{B_{x,izq,Objeto6}}{2}+1}} \right) \quad (335)$$

Dirección Y

De forma equivalente que para las dos direcciones anteriores se define:

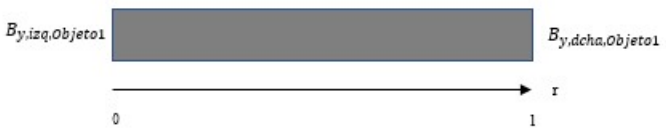


Figura 81: Objeto 6 en el corte con el plano y-z.

$$\frac{\partial \theta_{y6}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{y6}}{\partial r^2} \quad (336)$$

$$Donde:$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L_C{}^2} \; ; \; \theta_{y1} = \frac{T - T_o}{\Delta T_{RP}} \; ; r = \frac{y}{L_C}$$

$$Siendo:$$

$$-L_C \; es \; la \; longitud \; característica \; del \; componente \; magnético..$$

$$-\Delta T_{RP}\ es\ la\ variación\ de\ temperatura\ respecto\ al\ ambiente\ en\ régimen\ permanente.$$

$$-\alpha\ es\ difusividad\ térmica\ del\ objeto\ 6.$$

$$-T_o\ es\ la\ temperatura\ ambiente.$$

A su vez, se define las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta_{y6}}{\partial r} = -B_{y,dcha,Objeto6}\theta_{y6_{r=1}}\ en\ r = 1\ (337)$$

$$\frac{\partial \theta_{y6}}{\partial r} = B_{y,izq,Objeto1}\theta_{y6_{r=0}}\ en\ r = 0\ (338)$$

$$Donde:$$

$$\theta_{y6_{r=1}} = \theta_{y6}(1,\tau)\ ;\ \theta_{y6_{r=0}} = \theta_{y6}(0,\tau)$$

$$-B_{y,dcha,Objeto6}\ evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ superior\ del\ objeto\ 6.$$

$$-B_{y,izq,Objet}\quad evalúa\ las\ condiciones\ de\ contorno\ en\ la\ cara\ inferior\ del\ objeto\ 6.$$

Resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo las condiciones de contorno temporales $\theta_{y6_{r=0}}(0) = 0; \theta_{y6_{r=0}}(\infty) = 1$ se obtiene:

$$\theta_{x6_{r=0}}(\tau) = \left(1 - e^{\tau * \frac{\frac{-2*B_{y,izq,Objeto6}*2-2*B_{y,dcha,Objeto6}-2*B_{y,dcha,Objeto6}*B_{y,izq,Objeto6})}{2+B_{x,dcha,Objeto6}}}{\frac{-B_{y,izq,Objeto6}-B_{y,dcha,Objet}\ \frac{1+\frac{B_{y,izq,Objeto6}}{2}}{1+\frac{B_{y,dcha,Ob}}{2}}}{6}+\frac{B_{y,iz\ ,Objeto6}}{2}+1}}\right)\ (339)$$

Deshaciendo la adimensionalización temporal, se obtiene la siguiente función:

$$A_{y6}(t) = \left(1 - e^{\frac{t*\propto_{ferrita}}{L_C{}^2} * \frac{\frac{-2*B_{y,izq,Objeto6}*2-2*B_{y,dcha,Objeto6}-2*B_{y,dcha,Objeto6}*B_{y,izq,Objet}\ )}{2+B_{x,dcha,Objeto6}}}{\frac{-B_{y,izq,Objet}\ -B_{y,dcha,Objet}\ \frac{1+\frac{B_{y,izq,Objeto6}}{2}}{1+\frac{B_{y,dcha,Objeto6}}{2}}}{6}+\frac{B_{y,izq,Objeto6}}{2}+1}}\right)\ (340)$$

Una vez resueltas las ecuaciones diferenciales en las tres dimensiones del objeto 6, la ecuación adimensionalizada que evalúa el transitorio térmico en el objeto completo es resultado del producto de las ecuaciones $A_{x6}(t)$, $A_{y6}(t)$ y $A_{z6}(t)$:

$$A_6(t) = A_{x6}(t) * A_{y6}(t) * A_{z6}(t) \ (341)$$

Finalmente, resolviendo numéricamente el transitorio térmico para cada uno de los objetos se obtiene el siguiente resultado extraído de la ejecución de los scripts de MATLAB, recogidos en el ANEXO 1, construidos para computar el modelo de la capacitancia modificada :

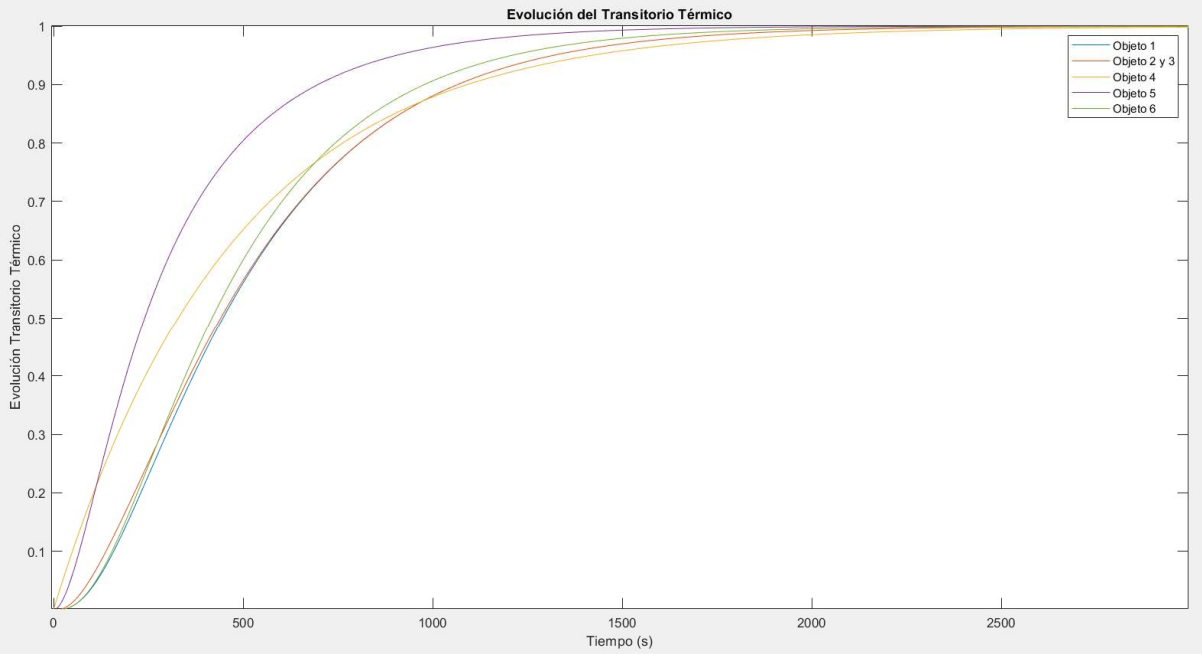


Figura 82: Resultado del transitorio térmico en la superficie de cada uno de los objetos con el método de la Capacitancia Modificado.

Para calcular la matriz [RC] que evalúa cada uno de los transitorios térmicos en cada uno de los casos será necesario extraer del gráfico anterior las constantes temporales. De forma que se obtiene de forma aproximada:

$$\tau_1 = 500s$$

$$\tau_2 = 500\ s$$

$$\tau_3 = 500\ s$$

$$\tau_4 = 510\ s$$

$$\tau_5 = 400\ s$$

$$\tau_6 = 450\ s$$

Redefiniendo las funciones que evalúan el transitorio térmico:

$$A_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (342)$$

$$A_2(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (343)$$

$$A_3(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (344)$$

$$A_4(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{510}}\right) (345)$$

$$A_5(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{400}}\right) (347)$$

$$A_6(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{450}}\right) (348)$$

Finamente la matriz [RC] se define como:

$$[RC]_{sup} = \begin{pmatrix} 30.65 * A_1(t) & 30.65 * A_2(t) & 30.65 * A_3(t) & 29.94 * A_4(t) & 30.61 * A_5(t) & 30.54 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.85 * A_2(t) & 30.39 * A_3(t) & 29.83 * A_4(t) & 30.50 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.39 * A_2(t) & 30.85 * A_3(t) & 29.83 * A_4(t) & 30.50 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.52 * A_2(t) & 30.52 * A_3(t) & 30.67 * A_4(t) & 30.64 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.52 * A_2(t) & 30.52 * A_3(t) & 30.65 * A_4(t) & 30.66 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.52 * A_1(t) & 30.65 * A_2(t) & 30.65 * A_3(t) & 30.58 * A_4(t) & 30.61 * A_5(t) & 30.69 * A_6(t) \end{pmatrix} \left(\frac{K}{W}\right)$$

(349)

4.5 MODELO TÉRMICO TRANSITORIO BOBINA BASADO EN MEF

En el presente apartado se analizará la evolución del transitorio térmico haciendo uso de la metodología basada en MEF expuesta en el anterior capítulo. Para ello, se deberá computar la simulación MEF en COMSOL, definiendo en las condiciones de contorno valores fijo del coeficiente de película, del transitorio térmico para cada uno de los casos evaluados, extraer las constantes temporales de las gráficas resultado de dichas simulaciones y finalmente construir la matriz [RC]. Al analizar los resultados se observa que todos los objetos presentan un transitorio prácticamente equivalente para los diferentes escenarios computados, por ello únicamente se presentará la gráfica de uno de ellos:

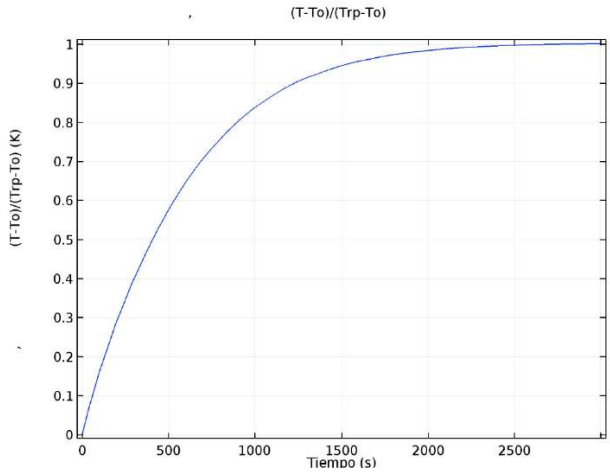


Figura 83: Función que modela el transitorio térmico extraída de la simulación en régimen transitorio. Es equivalente para todos los objetos y simulaciones.

Para calcular la matriz RC que evalúa cada uno de los transitorios térmicos en cada uno de los casos será necesario extraer del gráfico anterior la constante temporal. De forma que se obtiene de forma aproximada:

$$\tau_1 = 500s$$

$$\tau_2 = 500\ s$$

$$\tau_3 = 500\ s$$

$$\tau_4 = 500\ s$$

$$\tau_5 = 500\ s$$

$$\tau_6 = 500\ s$$

Definiendo a su vez las funciones que evalúan el transitorio térmico:

$$A_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (350)$$

$$A_2(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (351)$$

$$A_3(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (352)$$

$$A_4(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (353)$$

$$A_5(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (354)$$

$$A_6(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{500}}\right) (355)$$

$$[RC]_{sup}(t) = \begin{pmatrix} 30.65 * A_1(t) & 30.65 * A_2(t) & 30.65 * A_3(t) & 29.94 * A_4(t) & 30.61 * A_5(t) & 30.54 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.85 * A_2(t) & 30.39 * A_3(t) & 29.83 * A_4(t) & 30.50 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.39 * A_2(t) & 30.85 * A_3(t) & 29.83 * A_4(t) & 30.50 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.52 * A_2(t) & 30.52 * A_3(t) & 30.67 * A_4(t) & 30.64 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.52 * A_2(t) & 30.52 * A_3(t) & 30.65 * A_4(t) & 30.66 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.52 * A_1(t) & 30.65 * A_2(t) & 30.65 * A_3(t) & 30.58 * A_4(t) & 30.61 * A_5(t) & 30.69 * A_6(t) \end{pmatrix} \left(\frac{K}{W}\right)$$

(356)

4.6 RESULTADOS TEÓRICOS, BASADO EN MEF Y EXPERIMENTALES

Una vez definidas los modelos térmicos de cada uno de los objetos, se buscará comparar cada uno de ellos con los resultados obtenidos de la simulación MEF del objeto utilizando la geometría sin simplificar y los resultados experimentales obtenidos con el mismo prototipo. Cabe recordar que en el desarrollo del modelo térmico se incluye la influencia de la temperatura en el cálculo de las pérdidas electromagnéticas. Por tanto, el modelo térmico para cada una de las metodologías se define como:

METODOLOGÍA BASADA EN FEM

$$[\Delta \mathrm{T}] = [\mathrm{RC}]_{\mathrm{sup}} * [\mathrm{P}] \ (357)$$

$$[\mathrm{RC}]_{\mathrm{sup}}(t) = \begin{pmatrix} 30.65 * A_1(t) & 30.65 * A_2(t) & 30.65 * A_3(t) & 29.94 * A_4(t) & 30.61 * A_5(t) & 30.54 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.85 * A_2(t) & 30.39 * A_3(t) & 29.83 * A_4(t) & 30.50 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.39 * A_2(t) & 30.85 * A_3(t) & 29.83 * A_4(t) & 30.50 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.52 * A_2(t) & 30.52 * A_3(t) & 30.67 * A_4(t) & 30.64 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.52 * A_2(t) & 30.52 * A_3(t) & 30.65 * A_4(t) & 30.66 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.52 * A_1(t) & 30.65 * A_2(t) & 30.65 * A_3(t) & 30.58 * A_4(t) & 30.61 * A_5(t) & 30.69 * A_6(t) \end{pmatrix} (\frac{K}{W})$$

$$Donde:$$

$$A_2(t) = (1 - e^{-\frac{t}{500}})$$

$$A_3(t) = (1 - e^{-\frac{t}{500}})$$

$$A_4(t) = (1 - e^{-\frac{t}{500}})$$

$$A_5(t) = (1 - e^{-\frac{t}{500}})$$

$$A_6(t) = (1 - e^{-\frac{t}{500}})$$

$$[\mathrm{P}](\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{Core} * N_1 * (C_2 + C_1 * T_1 + C_2 * {T_1}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_2 * (C_2 + C_1 * T_2 + C_2 * {T_2}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_3 * (C_2 + C_1 * T_3 + C_2 * {T_3}^2) \\ \mathrm{P}_{Devanado} \\ \mathrm{P}_{Core} * N_5 * (C_2 + C_1 * T_5 + C_2 * {T_5}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_6 * (C_2 + C_1 * T_6 + C_2 * {T_6}^2) \end{pmatrix} (358)$$

$$Donde:$$

$$-T_i \ es \ la \ temperatura \ en \ el \ objeto \ i.$$

$$-N_i \ es \ la \ porción \ de \ pérdidas \ magnéticas \ que \ se \ le \ asigna \ al \ objeto \ i.$$

$$-C_0, C_1 \ y \ C_2 \ son \ que \ evaluan \ la \ influencia \ de \ la \ temperaturas \ en \ las \ pérdidas \ magnéticas.$$

METODOLOGÍA CAPACITANCIA MODIFICADA

$$[\Delta \mathrm{T}] = [\mathrm{RC}]_{\mathrm{sup}} * [\mathrm{P}] \ (359)$$

$$[\mathrm{RC}]_{\sup}(t) = \begin{pmatrix} 30.65 * A_1(t) & 30.65 * A_2(t) & 30.65 * A_3(t) & 29.94 * A_4(t) & 30.61 * A_5(t) & 30.54 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.85 * A_2(t) & 30.39 * A_3(t) & 29.83 * A_4(t) & 30.50 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.39 * A_2(t) & 30.85 * A_3(t) & 29.83 * A_4(t) & 30.50 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.52 * A_2(t) & 30.52 * A_3(t) & 30.67 * A_4(t) & 30.64 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.59 * A_1(t) & 30.52 * A_2(t) & 30.52 * A_3(t) & 30.65 * A_4(t) & 30.66 * A_5(t) & 30.61 * A_6(t) \\ 30.52 * A_1(t) & 30.65 * A_2(t) & 30.65 * A_3(t) & 30.58 * A_4(t) & 30.61 * A_5(t) & 30.69 * A_6(t) \end{pmatrix} (\frac{K}{W})$$

$$Donde:$$

$$A_1(t) = (1 - e^{-\frac{t}{500}})$$

$$0A_2(t) = (1 - e^{-\frac{t}{500}})$$

$$A_3(t) = (1 - e^{-\frac{t}{500}})$$

$$A_4(t) = (1 - e^{-\frac{t}{510}})$$

$$A_5(t) = (1 - e^{-\frac{t}{400}})$$

$$A_6(t) = (1 - e^{-\frac{t}{450}})$$

$$[\mathrm{P}](\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{Core} * N_1 * (C_2 + C_1 * T_1 + C_2 * {T_1}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_2 * (C_2 + C_1 * T_2 + C_2 * {T_2}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_3 * (C_2 + C_1 * T_3 + C_2 * {T_3}^2) \\ \mathrm{P}_{Devanado} \\ \mathrm{P}_{Core} * N_5 * (C_2 + C_1 * T_5 + C_2 * {T_5}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_6 * (C_2 + C_1 * T_6 + C_2 * {T_6}^2) \end{pmatrix} (360)$$

$$Donde:$$

$$-T_i \ es \ la \ temperatura \ en \ el \ objeto \ i.$$

$$-N_i \ es \ la \ porción \ de \ pérdidas \ magnéticas \ que \ se \ le \ asigna \ al \ objeto \ i.$$

$$-C_0, C_1 \ y \ C_2 \ son \ que \ evaluan \ la \ influencia \ de \ la \ temperaturas \ en \ las \ pérdidas \ magnéticas.$$

METODOLOGÍA CAPACITANCIA

$$[\Delta \mathrm{T}] = [\mathrm{R}]_{\sup} * [\mathrm{P}] * [\mathrm{C}] \ \ (361)$$

$$[R]_{sup} = \begin{pmatrix} 30.65 & 30.65 & 30.65 & 29.94 & 30.61 & 30.54 \\ 30.59 & 30.85 & 30.39 & 29.83 & 30.50 & 30.61 \\ 30.59 & 30.39 & 30.85 & 29.83 & 30.50 & 30.61 \\ 30.59 & 30.52 & 30.52 & 30.67 & 30.64 & 30.61 \\ 30.59 & 30.52 & 30.52 & 30.65 & 30.66 & 30.61 \\ 30.52 & 30.65 & 30.65 & 30.58 & 30.61 & 30.69 \end{pmatrix} \left(\frac{K}{W}\right) \quad (362)$$

$$[C] = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6(t) \end{pmatrix} \quad (363)$$

$$Donde:$$

$$A_1(t) = 1 - e^{\frac{-t}{125.44}}$$

$$A_2(t) = 1 - e^{\frac{-t}{198.43}}$$

$$A_3(t) = 1 - e^{\frac{-t}{198.43}}$$

$$A_4(t) = 1 - e^{\frac{-t}{588.10}}$$

$$A_5(t) = 1 - e^{\frac{-t}{295.28}}$$

$$A_6(t) = 1 - e^{\frac{-t}{135.11}}$$

$$[\mathrm{P}](\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{Core} * N_1 * (C_2 + C_1 * T_1 + C_2 * {T_1}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_2 * (C_2 + C_1 * T_2 + C_2 * {T_2}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_3 * (C_2 + C_1 * T_3 + C_2 * {T_3}^2) \\ \mathrm{P}_{Devanado} \\ \mathrm{P}_{Core} * N_5 * (C_2 + C_1 * T_5 + C_2 * {T_5}^2) \\ \mathrm{P}_{Core} * N_6 * (C_2 + C_1 * T_6 + C_2 * {T_6}^2) \end{pmatrix} \quad (364)$$

$$Donde:$$

$$-T_i \ es \ la \ temperatura \ en \ el \ objeto \ i.$$

$$-N_i \ es \ la \ porción \ de \ pérdidas \ magnéticas \ que \ se \ le \ asigna \ al \ objeto \ i.$$

$$-C_0, C_1 \ y \ C_2 \ son \ que \ evaluan \ la \ influencia \ de \ la \ temperaturas \ en \ las \ pérdidas \ magnéticas.$$

Para el modelo que es objeto de estudio, expuesto al principio del capítulo, el valor de las constantes en el rango de frecuencias analizado es el siguiente:

$$C_0 = 1.65 * 10^{-4}$$

$$C_1 = 3.10 * 10^{-2}$$

$$C_2 = 2.45$$

A su vez, para cada uno de los objetos en los que ha sido particionado el núcleo magnético se define la porción de pérdidas magnéticas como:

$$N_i = \frac{V_i}{V_{Núcleo}} \ (365)$$

$$V_{Núcleo} = 2595.66\ mm^3$$

$$Donde:$$

$$-V_{Núcleo}\ es\ el\ volumen\ del\ núcleo\ magnético$$

$$-V_I\ es\ el\ volumen\ del\ objeto\ i$$

Por otro lado, el valor de las pérdidas en el devanado y en el núcleo magnético se definen como:

PÉRDIDAS NÚCLEO: ONDA NO SENOIDAL

$$P_{core} = V_{Núcleo} * \left(\frac{1}{T} \int_0^T k_i \left| \frac{dB}{dt} \right|^{\propto} * (\Delta B)^{\beta - \propto} * dt \right) \ (366)$$

$$k_i = \frac{k}{(2\pi)^{\propto - 1} \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^{\propto} 2^{\beta - \alpha} d\theta} \ (367)$$

$$Donde:$$

$$-\propto, k\ y\ \beta\ son\ parámetros\ del\ material\ calculados\ empiricamente$$

$$-f\ es\ la\ frecuencia\ de\ la\ señal\ de\ excitación$$

$$-V_{Núcleo}\ es\ el\ volumen\ del\ núcleo\ magnético$$

PÉRDIDAS NÚCLEO: ONDA SENOIDAL

$$\mathrm{P_{core}} = V_{Núcleo} * \mathrm{kf^{\propto}(B_{AC})^{\beta}} \ (368)$$

$$Donde:$$

$$-\propto, k\ y\ \beta\ son\ parámetros\ del\ material\ calculados\ empiricamente$$

$$-f\ es\ la\ frecuencia\ de\ la\ señal\ de\ excitación$$

Para el modelo que es objeto de estudio, expuesto al principio del capítulo, el valor de las constantes en el rango de frecuencias analizado es el siguiente:

$$\propto = 1.46$$

$$\beta = 2.75$$

$$k = 2.37 * 10^{-3}$$

PÉRDIDAS DEVANADO

$$P_{Cu,AC} = R_{DC} * I_{DC}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} R_{AC,i} * I_{AC,ef,i}^2 \ (369)$$

$$Donde:$$

$$- R_{DC} \ es\ la\ resistencia\ de\ la\ bobina\ en\ corriente\ continua.$$

$$-I_{DC}\ es\ la\ componente\ de\ la\ corriente\ que\ representa\ la\ corriente\ continua$$

$$-R_{AC,i}\ es\ la\ resistencia\ de\ la\ bobina\ en\ el\ armónico\ i\ de\ la\ corriente$$

$$-I_{AC,ef}\ es\ el\ valor\ eficaz\ del\ armónico\ i\ de\ la\ corriente\ que\ atraviesa\ la\ bobina$$

Cabe resaltar que para definir correctamente el modelo y poder operar con él, será necesario su discretización, donde el periodo de discretización se define como $T = 1\ s$:

METODOLOGÍA BASADA EN FEM

$$[\Delta \mathrm{T}]_{i+1} = [\mathrm{RC}]_{\sup_{i+1}} * [\mathrm{P}]_i \ (370)$$

$$Donde:$$

$$[\Delta \mathrm{T}]_{i+1} = [\Delta \mathrm{T}](t_{i+1})$$

$$[\mathrm{RC}]_{\sup_{i+1}} = [\mathrm{RC}]_{\sup}(t_{i+1})$$

$$[\mathrm{P}]_i = [\mathrm{P}](t_i)$$

$$t_{i+1} = t_i + T$$

METODOLOGÍA CAPACITANCIA MODIFICADO

$$[\Delta \mathrm{T}]_{i+1} = [\mathrm{RC}]_{\sup_{i+1}} * [\mathrm{P}]_i \ (371)$$

$$Donde:$$

$$[\Delta \mathrm{T}]_{i+1} = [\Delta \mathrm{T}](t_{i+1})$$

$$[\mathrm{RC}]_{\sup_{i+1}} = [\mathrm{RC}]_{\sup}(t_{i+1})$$

$$[\mathrm{P}]_i = [\mathrm{P}](t_i)$$

$$t_{i+1} = t_i + T$$

METODOLOGÍA CAPACITANCIA

$$[\Delta T]_{i+1} = [R]_{sup} * [P]_i * [C]_{i+1} \ (372)$$

$$Donde:$$

$$[R]_{sup} \ es\ una\ matriz\ invariante$$

$$[P]_i = [P](t_i)$$

$$[C]_{i+1} = [C](t_{i+1})$$

$$t_{i+1} = t_i + T$$

Finalmente, los resultados obtenidos en los diferentes modelos serán comparados con los resultados de las simulaciones en COMSOL, simulando aire fluido en las condiciones de contorno en contraposición a la geometría simplificada, de la geometría no simplificada, recogida en el ANEXO IV, para diferentes combinaciones de pérdidas y los resultados experimentales obtenidos con un prototipo de la bobina, recogida en el ANEXO IV, con corriente senoidal a una frecuencia de $150\ kHz$. A su vez, compararemos los resultados obtenidos en la simulación sin simplificar con los resultados experimentales.

COMPARACIÓN CON SIMULACIÓN CON GEOMETRÍA NO SIMPLIFICADA

Los escenarios propuestos para la comprobación de la verosimilitud del modelo son los siguientes:

$Caso$	$P_{core}(W)$	$P_{Devanado}(W)$
1	0.3	2.40
2	0.1	1.6
3	0.05	1.1

Tabla 8: Pérdidas en el núcleo y el devanado para los 3 casos evaluados.

CASO 1:

Aplicando las pérdidas propuestas en el caso 1, obtenemos el siguiente perfil de temperaturas en el régimen permanente:

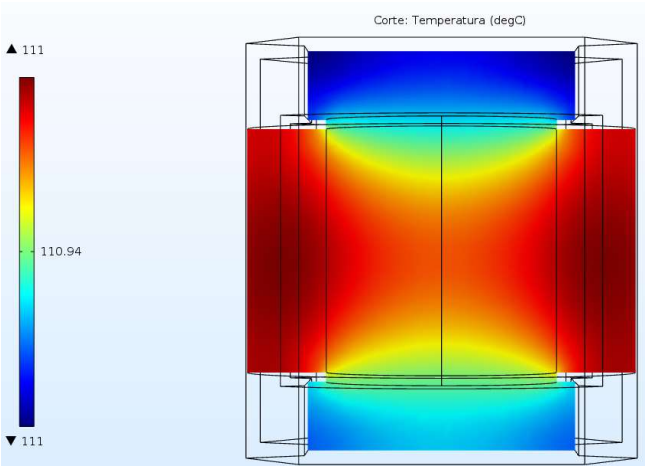


Figura 84: Perfil de temperaturas en el plano de corte y-z en el régimen permanente de la geometría no simplificado para el caso 1.

Siendo la evolución del transitorio en la cara interior del devanado (Superficie Objeto 5):

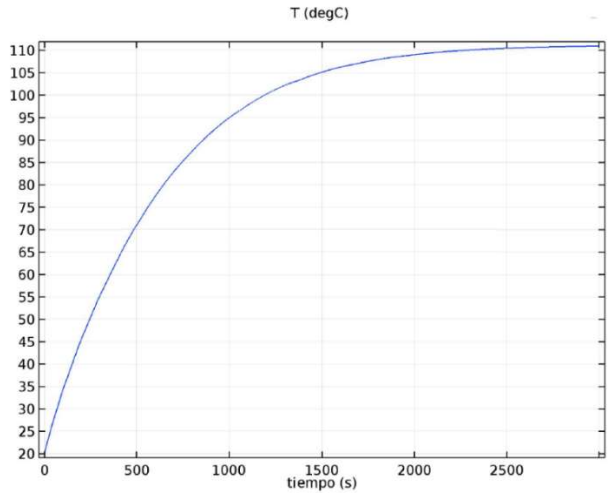


Figura 85: Evolución del transitorio térmico de temperaturas en la superficie exterior del objeto 5 para el caso 1.

Por otro lado, aplicando los tres modelos electrotérmicos desarrollados en el anterior apartado, obtenemos los siguientes resultados:

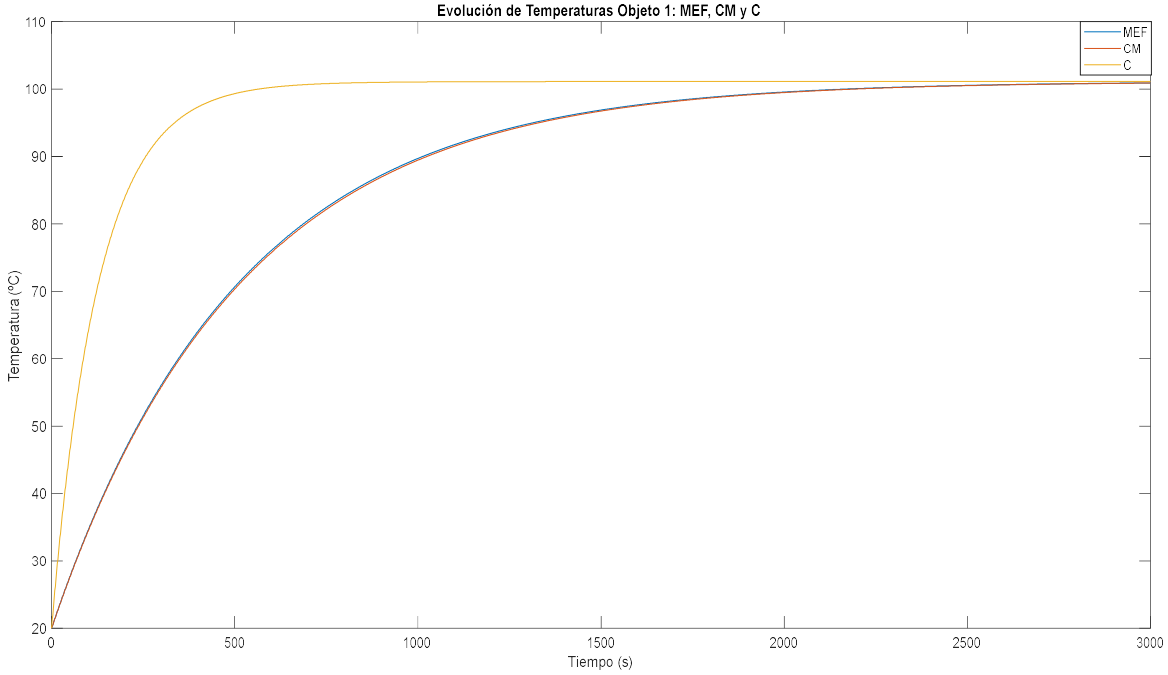


Figura 86: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 1 en el caso 1.

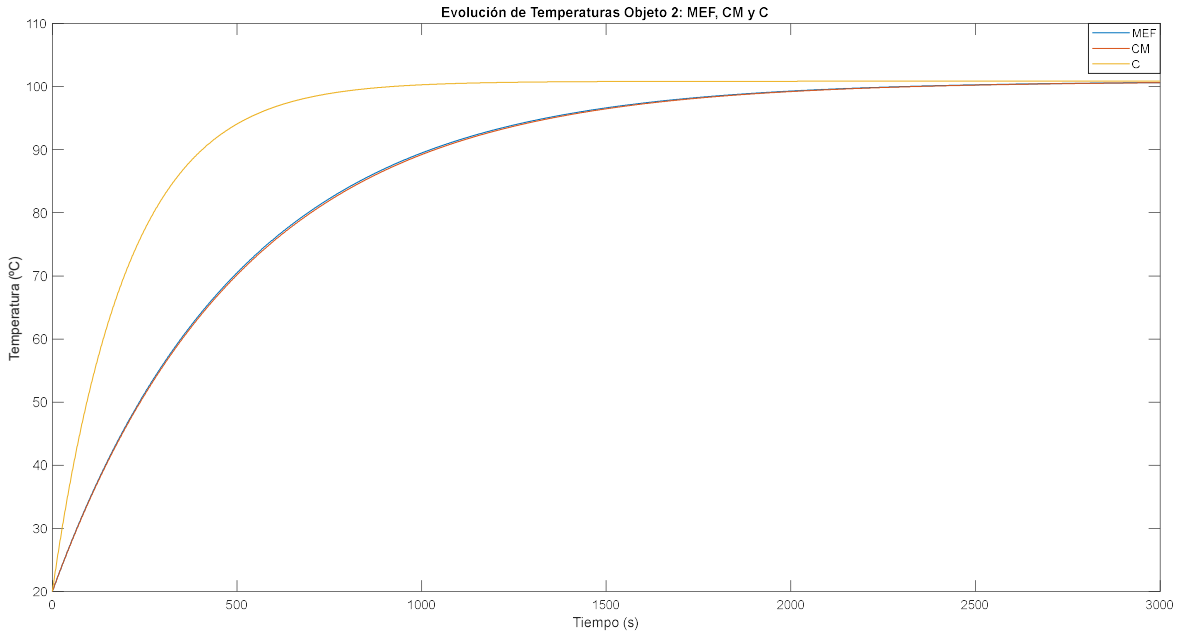


Figura 87: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie de los objetos 2 y 3 en el caso 1.

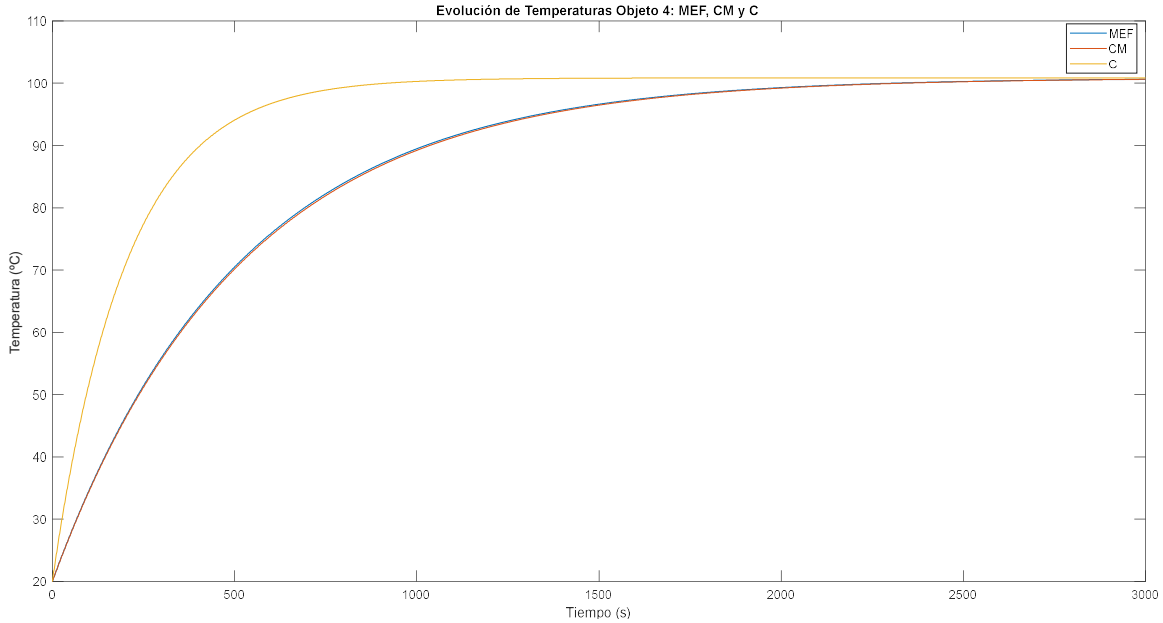


Figura 88. Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 4 en el caso 1.

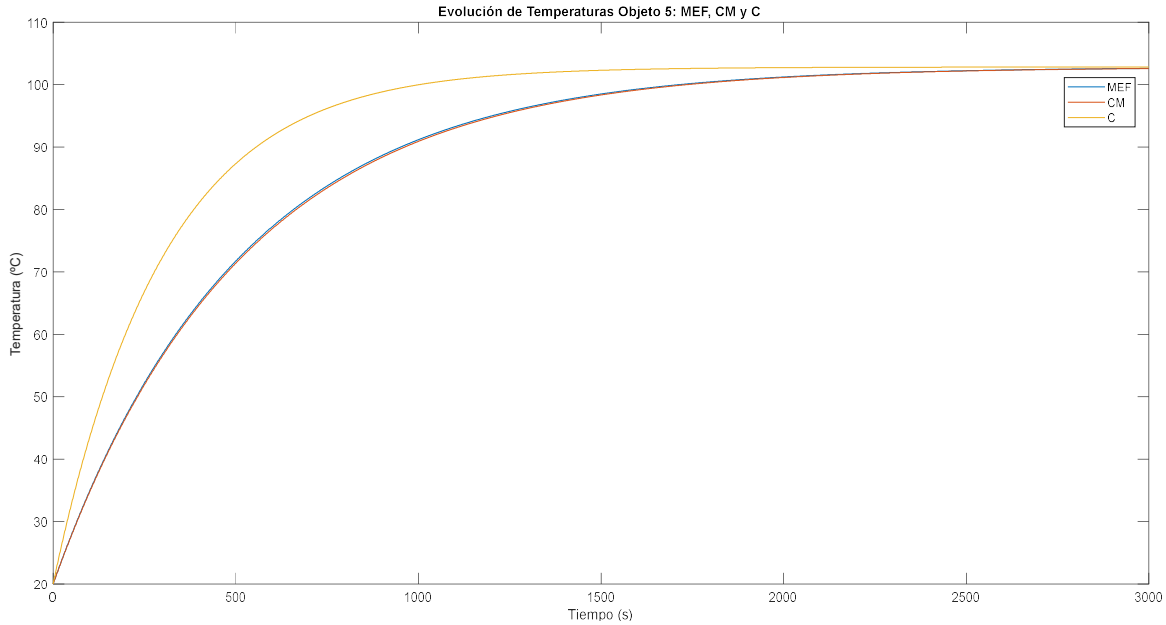


Figura 89. Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 5 en el caso 1.

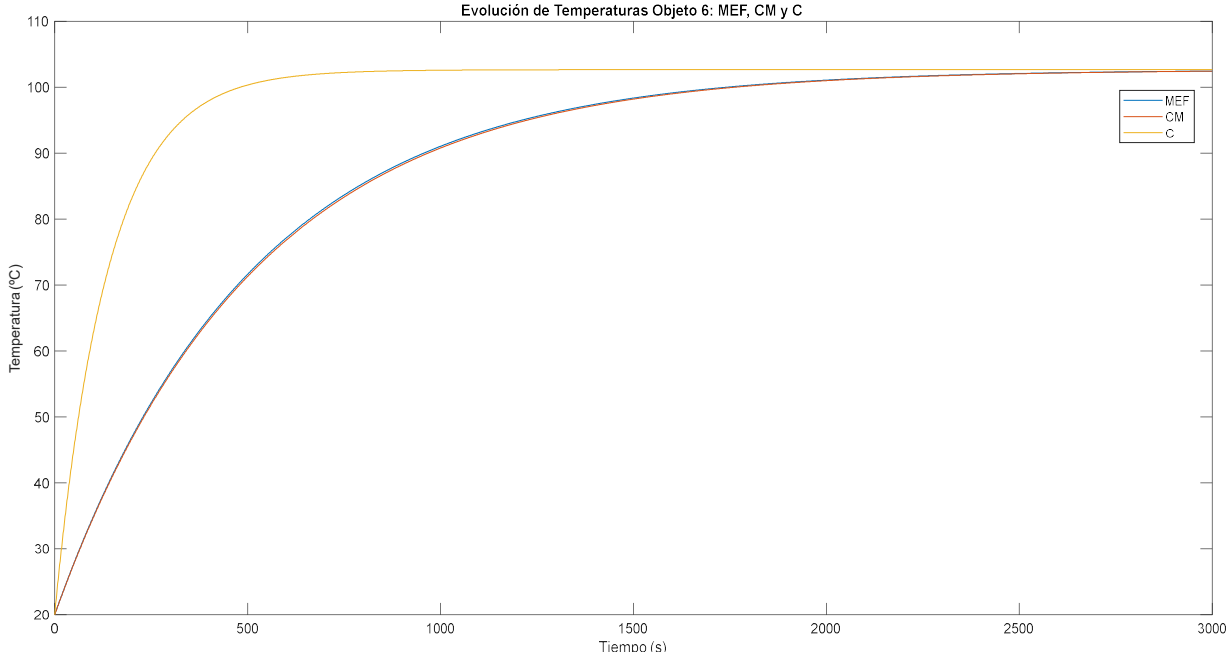


Figura 90: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 6 en el caso 1.

Comparando los resultados obtenidos en la simulación y en los tres modelos en la superficie exterior del objeto 5, los errores relativos en la superficie interior del devanado son los siguientes:

$Error\ Temperatura\ Régimen\ Permanente$	$6.7\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ MEF$	$-8.0\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ CM$	$-9.8\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ MEF$	$43.75\ \%$

Tabla 9: Errores Relativos en la superficie interior del devanado para el caso 1.

CASO 2:

Aplicando las pérdidas propuestas en el caso 2, obtenemos el siguiente perfil de temperaturas en el régimen permanente:

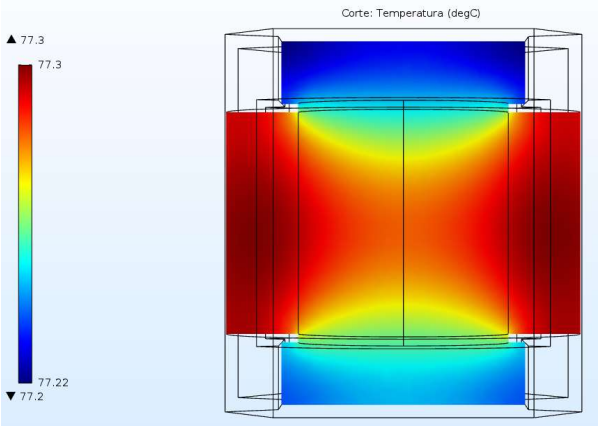


Figura 91: Perfil de temperaturas en ºC en el plano de corte y-z en el régimen permanente de la geometría no simplificado para el caso 2.

Siendo la evolución del transitorio en la cara interior del devanado (Superficie Objeto 5):

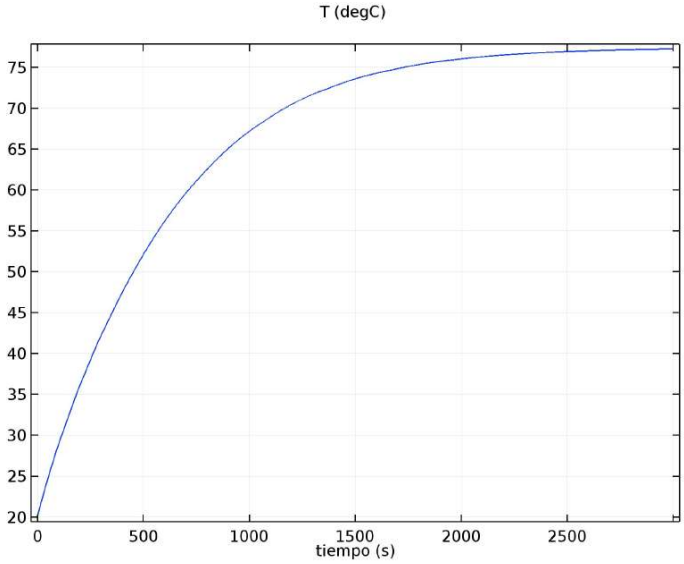


Figura 92: Evolución del transitorio térmico de temperaturas en la superficie exterior del objeto 5 para el caso 2.

Por otro lado, aplicando los tres modelos electrotérmicos desarrollados en el anterior apartado, obtenemos los siguientes resultados:

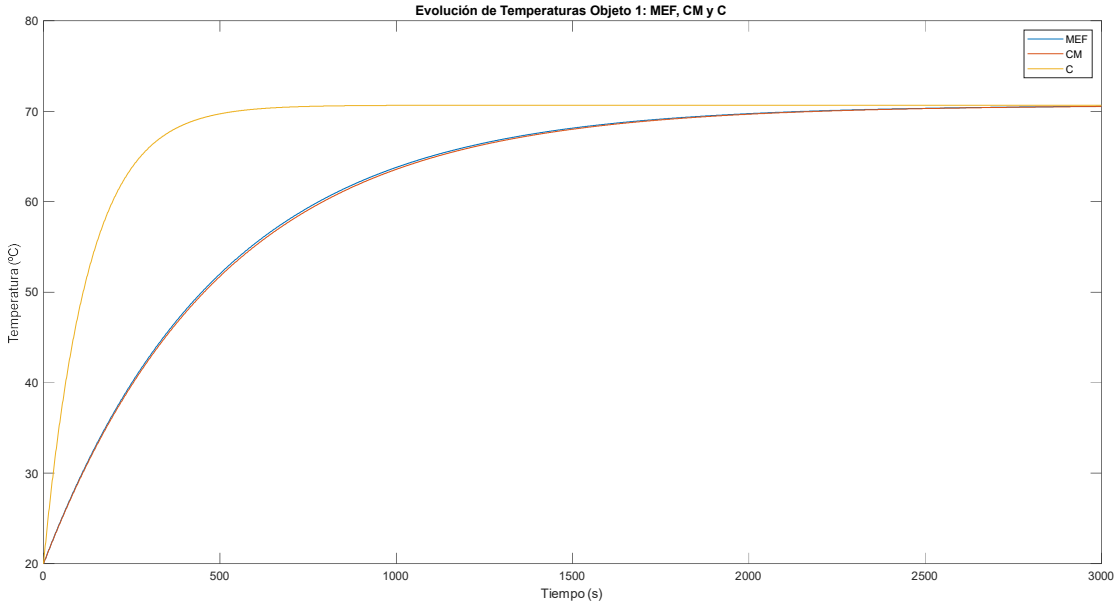


Figura 93: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 1 en el caso 2.

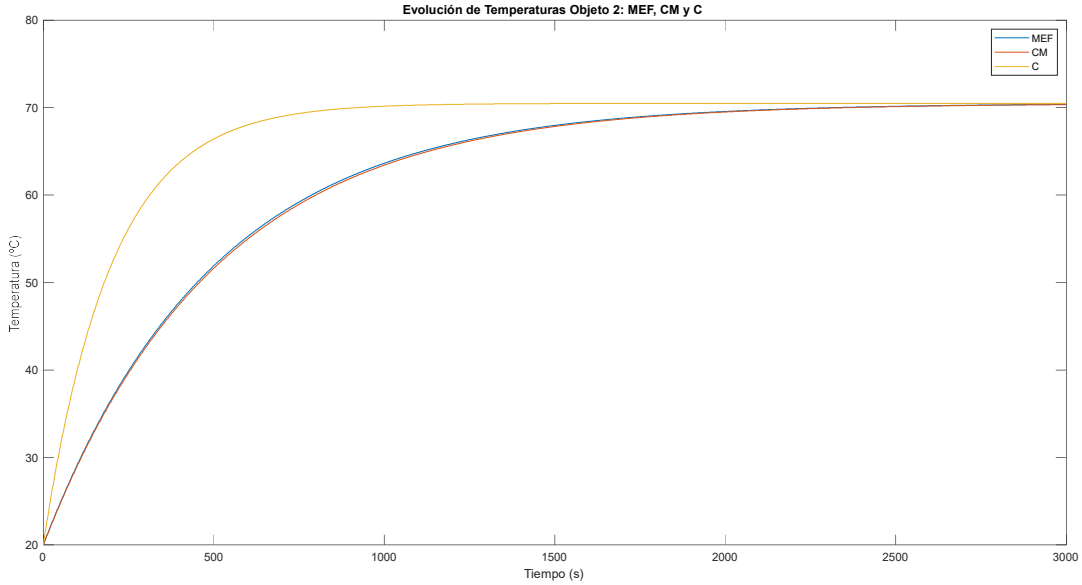


Figura 94: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie de los objetos 2 y 3 en el caso 2.

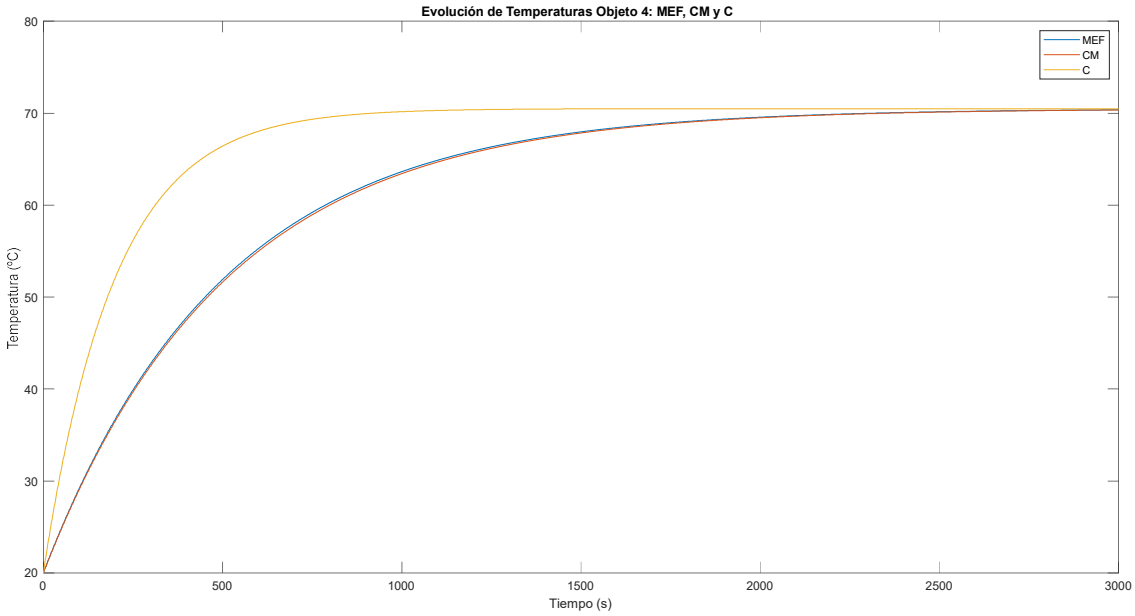


Figura 95: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 4 en el caso 2.

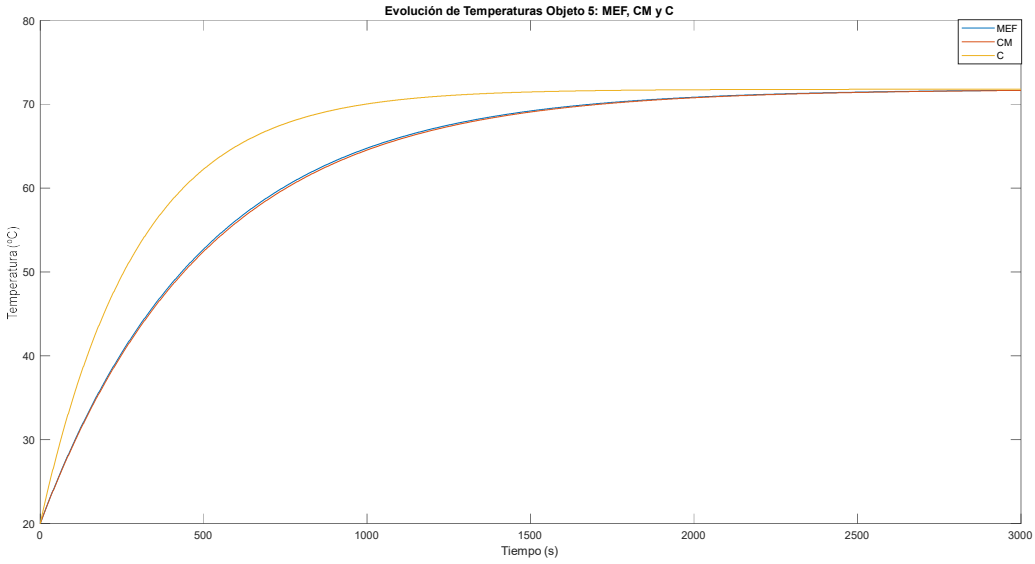


Figura 96: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 5 en el caso 2.

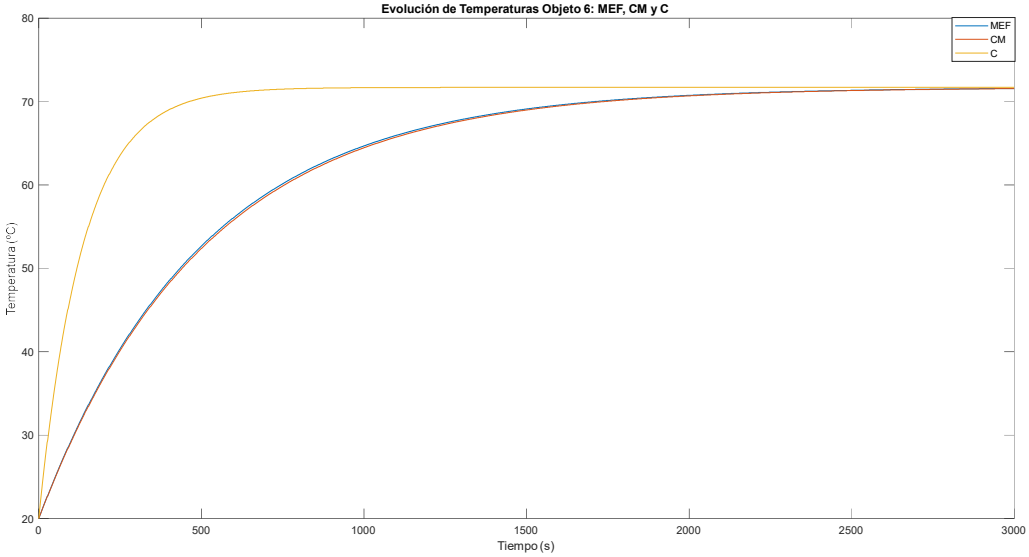


Figura 97: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 6 en el caso 2.

Comparando los resultados obtenidos en la simulación y en los tres modelos, los errores relativos en la superficie interior del devanado son los siguientes:

$Error\ Temperatura\ Régimen\ Permanente$	$8.45\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ MEF$	$-8.0\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ CM$	$-9.8\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ MEF$	$43.75\ \%$

Tabla 10: Errores Relativos en la superficie interior del devanado para el caso 2.

CASO 3:

Aplicando las pérdidas propuestas en el caso 3, obtenemos el siguiente perfil de temperaturas en el régimen permanente:

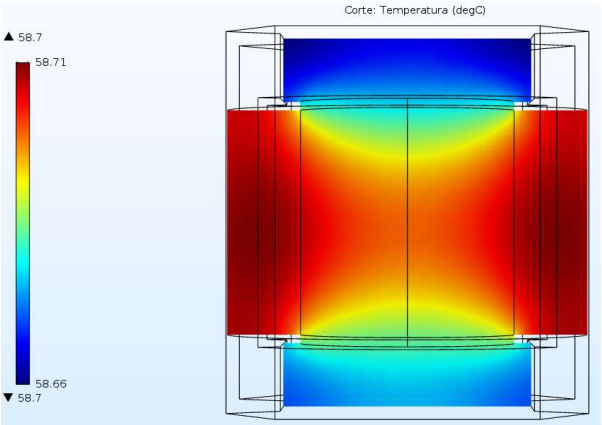


Figura 98: Perfil de temperaturas en (ºC) en el plano de corte y-z en el régimen permanente de la geometría no simplificado para el caso 3.

Siendo la evolución del transitorio en la cara interior del devanado (Superficie Objeto 5):

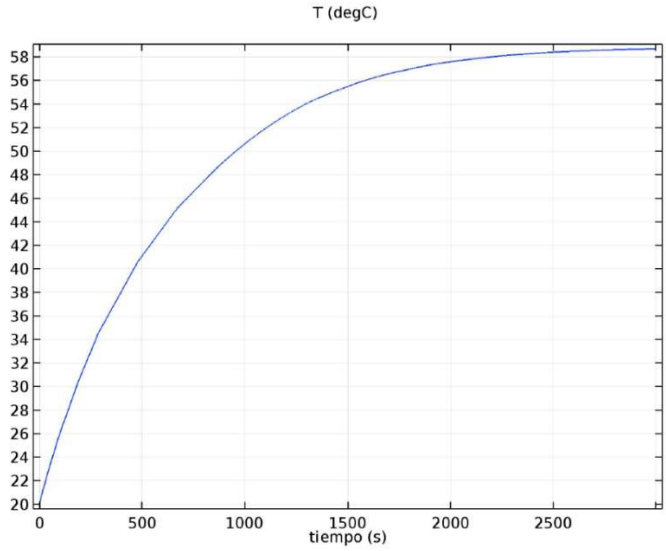


Figura 99: Evolución del transitorio térmico de temperaturas en la superficie exterior del objeto 5 para el caso 3.

Por otro lado, aplicando los tres modelos electrotérmicos desarrollados en el anterior apartado, obtenemos los siguientes resultados:

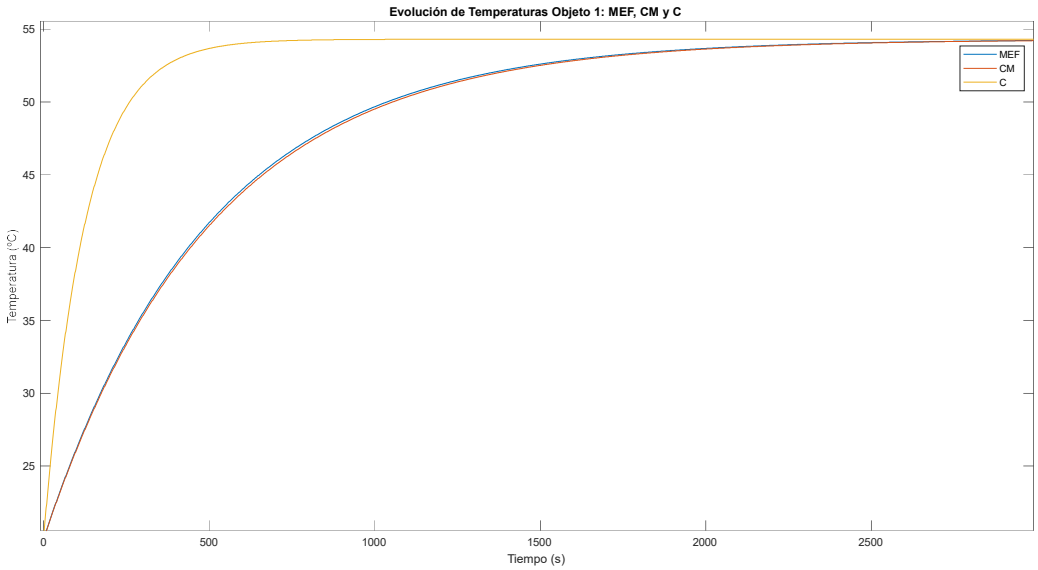


Figura 100: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 1 en el caso 3.

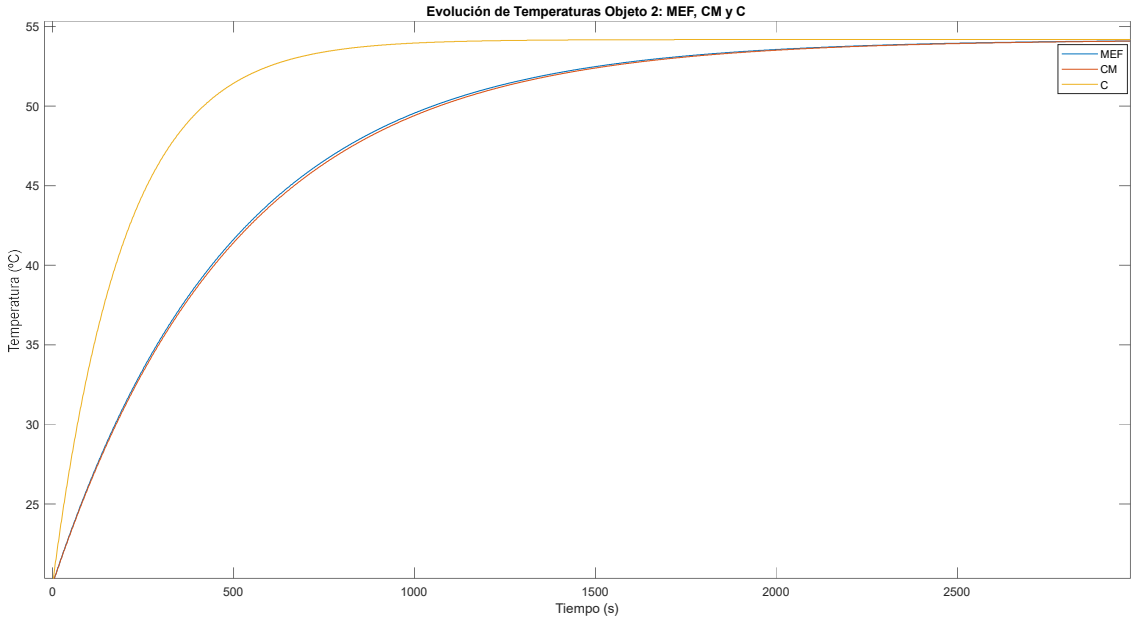


Figura 101: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie de los objetos 2 y 3 en el caso 3.

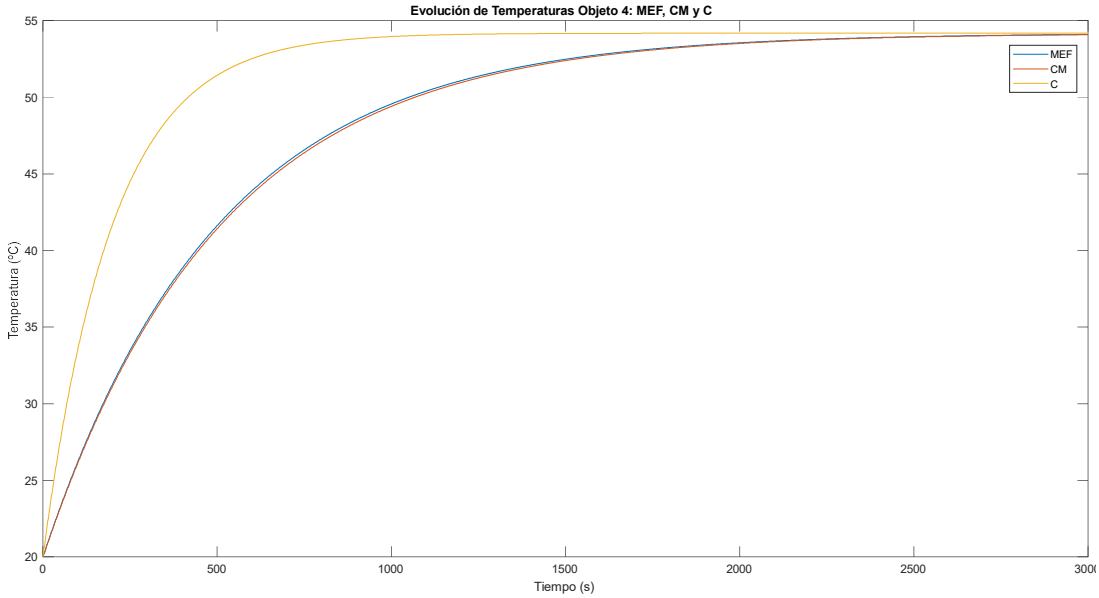


Figura 102: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 4 en el caso 3.

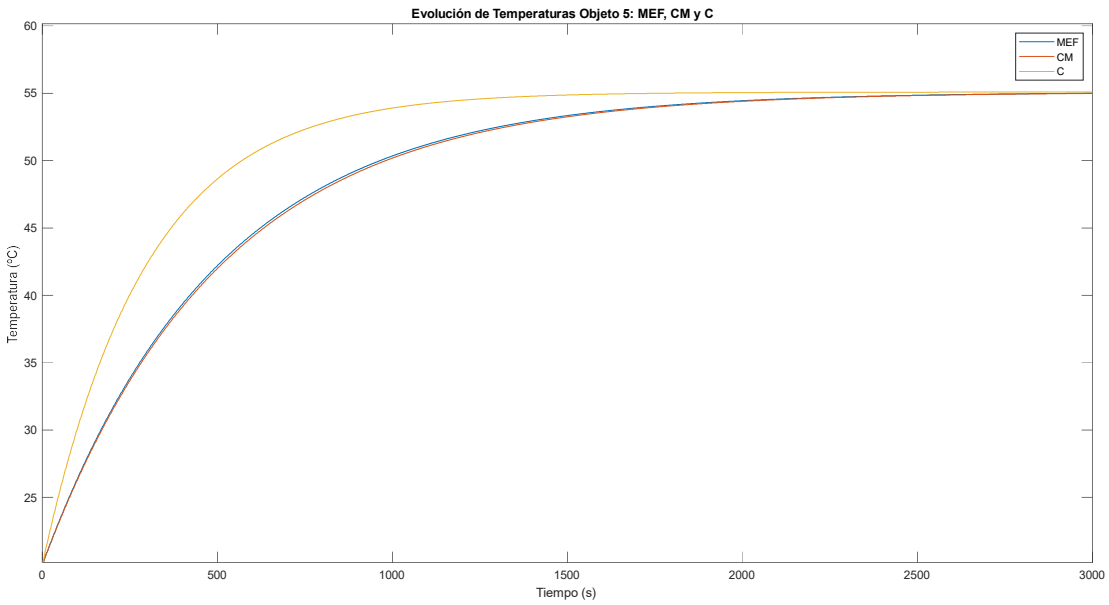


Figura 103: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 5 en el caso 3.

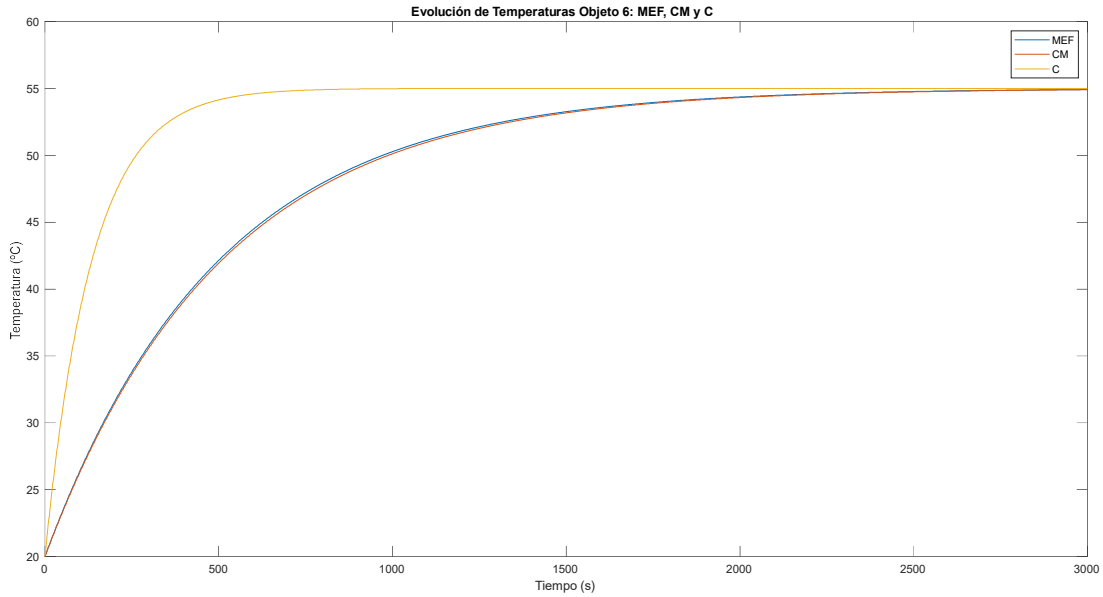


Figura 104: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 6 en el caso 3.

Comparando los resultados obtenidos en la simulación y en los tres modelos, los errores relativos en la superficie interior del devanado son los siguientes:

$Error\ Temperatura\ Régimen\ Permanente$	$7.2\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ MEF$	$-8.0\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ CM$	$-9.8\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ MEF$	$43.75\ \%$

Tabla 11: Errores Relativos en la superficie interior del devanado para el caso 3.

COMPARACIÓN CON MODELO EXPERIMENTAL

Para la comprobación experimental del modelo se realizó la captura del transitorio térmico del prototipo de la bobina expuesta en el desarrollo del capítulo cuando se calienta por estar alimentada con una onda de tensión senoidal. El circuito utilizado presenta la siguiente topología:

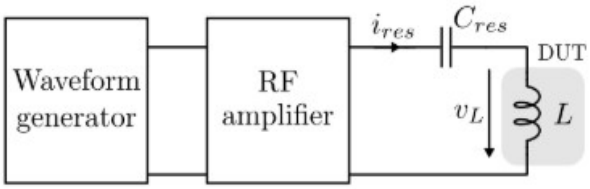


Figura 105: Topología de análisis experimental.[27]

Los datos relativos al experimento son los siguientes:

C_{res}	$3.3\ nF$
R_{Bobina}	$0.0340\ \Omega$
L_{Bobina}	$56.32\ uH$
B_{AC}	$458.775\ mT$
I_{eficaz}	$5.76\ A$
f	$150\ kHz$

Tabla 12: Datos de la bobina y la onda en el prototipo experimental.

Siendo el prototipo de la bobina utilizado para la toma de datos en condiciones de funcionamiento:

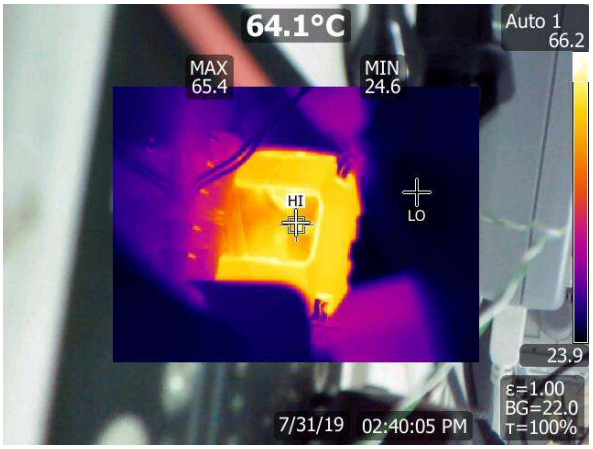


Figura 106: Imagen del prototipo experimental tomada mediante la cámara térmica para las condiciones de onda expuestas en la Tabla 12.

Para la onda senoidal utilizada en el experimento, las pérdidas en el núcleo magnético y en el devanado son las siguientes:

$$P_{core} = V_{Núcleo} * kf^{\propto}(B_{AC})^{\beta}\ (373)$$

$$\propto = 1.46$$

$$\beta = 2.75$$

$$k = 2.37 * 10^{-3}$$

$$P_{core} = 26.031\ mW$$

$$P_{devanado} = R_{Bobina} * {I_{eficaz}}^2$$

$$P_{devanado} = 1.128\ \mathrm{W}$$

Desarrollando el modelo térmico y comparando los resultados con los tomados por medio de un termopar en el contacto entre el devanado y el núcleo magnético (Superficie exterior Objeto 5) se obtiene:

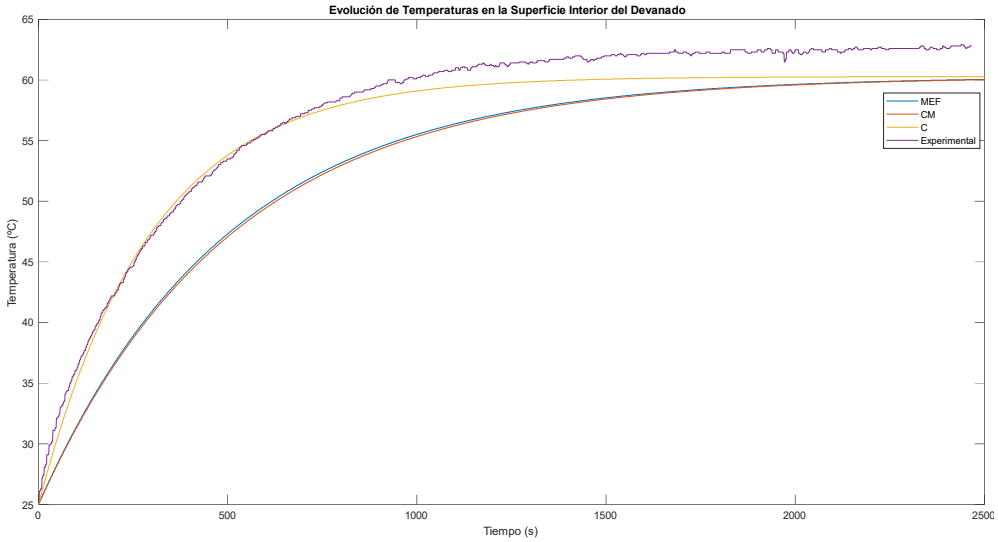


Figura 107: Gráfica comparativa del transitorio térmico entre los 3 modelos térmicos y los datos recogidos del prototipo experimental.

Por último, calculamos el valor de los errores relativos en la temperatura alcanzada en el régimen permanente y la constante temporal del transitorio térmico:

$Error\ Temperatura\ Régimen\ Permanente$	$3.8\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ MEF$	$-8.7\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ CM$	$-13.9\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ C$	$83.83\ \%$

Tabla 13: Errores Relativos en la superficie interior del devanado entre los modelos térmicos y los resultados del prototipo experimental.

COMPARACIÓN SIMULACIÓN CON GEOMETRÍA NO SIMPLIFICADA CON EXPERIMENTAL

En este subapartado final, se compararán los resultados obtenidos en la simulación con el prototipo experimental. Simulando la bobina para los valores de pérdidas estimados en el apartado anterior, se obtienen los siguientes perfiles de temperatura:

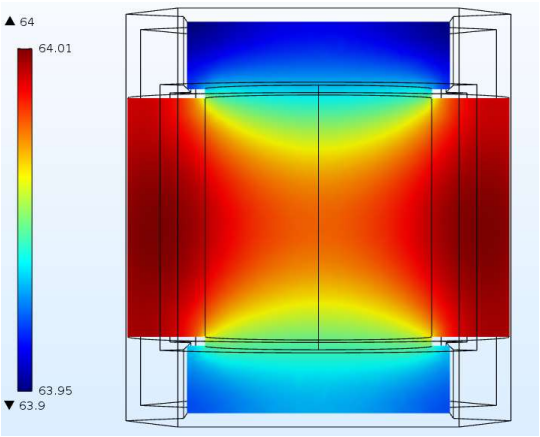


Figura 108: Perfil de temperaturas en ºC en el plano de corte y-z en el régimen permanente de la geometría no simplificado para las pérdidas del prototipo experimental.

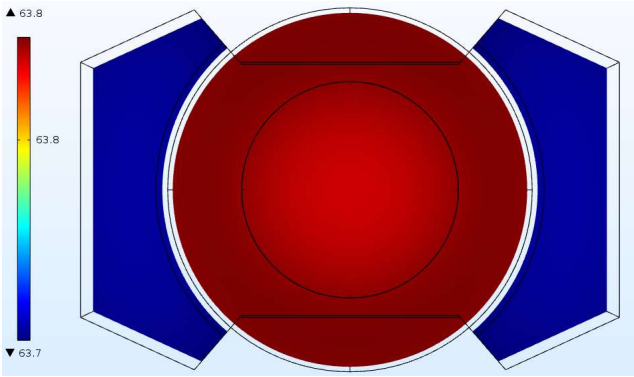


Figura 109: Perfil de temperaturas en ºC en el plano de corte x-y en el régimen permanente de la geometría no simplificado para las pérdidas del prototipo experimental

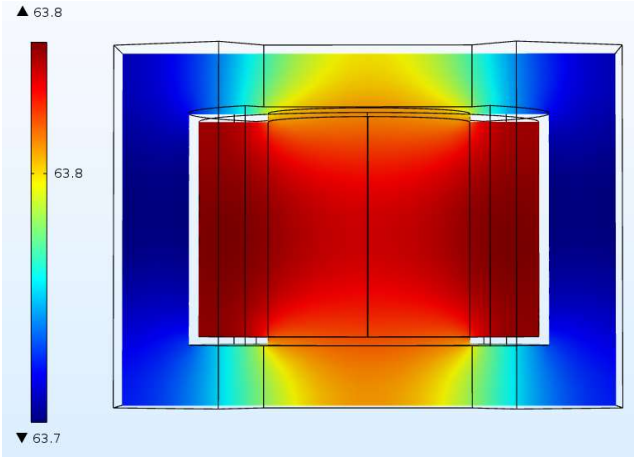


Figura 110: Perfil de temperaturas en ºC en el plano de corte x-y en el régimen permanente de la geometría no simplificado para las pérdidas del prototipo experimental.

Siendo la evolución del transitorio en la cara interior del devanado (Superficie Objeto 5):

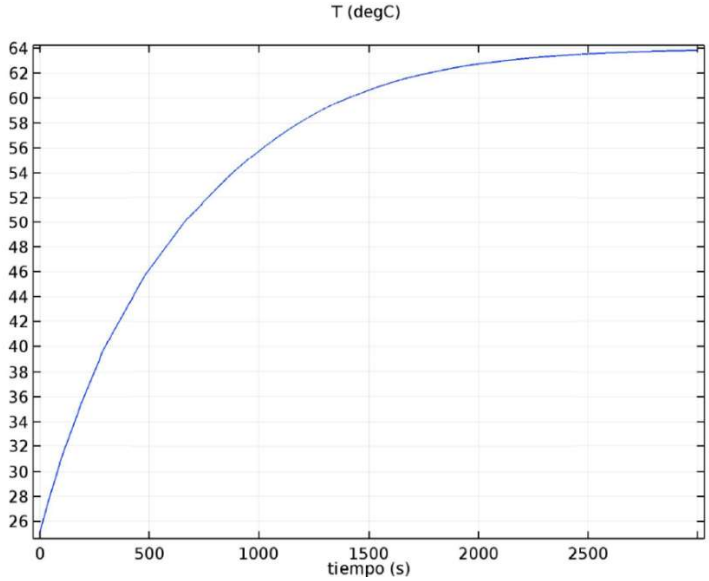


Figura 111: Evolución del transitorio térmico de temperaturas en la superficie exterior del objeto 5 para las pérdidas del prototipo experimental.

Por último, calculamos el valor de los errores relativos en la temperatura alcanzada en el régimen permanente y la constante temporal del transitorio térmico de la simulación de la geometría no simplificada en la superficie exterior del objeto 5 respecto a los resultados experimentales:

$Error\ Temperatura\ Régimen\ Permanente$	$-1.88\ \%$
$Error\ Constante\ Tiempo\ Simulación\ MEF$	$-4.3\ \%$

Tabla 14: Errores Relativos en la superficie interior del devanado entre la simulación de la geometría no simplificada y los resultados del prototipo experimental.

Analizando los resultados obtenidos en los 3 escenarios analizados, en el prototipo experimental y en la simulación de la geometría no simplificada, se concluye:

- El modelo MEF presenta los mejores resultados en la estimación de la constante temporal con un error relativo del 8%, seguido del modelo CM con 9 %, respecto al constante temporal extraída de la simulación de la geometría no simplificada. A su vez, el modelo MEF también presenta los mejores resultados cuando es comparado con el prototipo experimental.
- El modelo C presenta errores cercanos al 45%, cuando es comparado con la simulación de la geometría no simplificada, y cercanos 83% cuando es comparado con el prototipo experimental. Por otro lado, es el modelo que más se ajusta a la evolución del prototipo experimental en el primer tercio del transitorio térmico.
- Las temperaturas estimadas en régimen permanente presentan errores cercanos al 4 % cuando son comparadas con los resultados del prototipo experimental y varían entre el 6.7 % y 10 % cuando son comparadas con los resultados de las simulaciones de la geometría no simplificada. Para los tres casos analizados se observa, que el error en régimen permanente es mínimo para el caso 1, el más cercano a las condiciones de definición de la matriz $[R]$.

- La simulación de la geometría simplificada presenta errores relativos en valor absoluto cercanos al 2% en la estimación del régimen permanente y error relativo en valor absolutivo en la estimación de la constante de tiempo cercanos al 4.3 %

5 CONCLUSIONES

En este último apartado se buscará presentar las principales ventajas y desventajas de los modelos desarrollados a lo largo del TFG en base a los resultados obtenidos en el capítulo anterior, buscando establecer puntos de mejora para futuros trabajos:

- El modelo MEF presenta los mejores resultados en la estimación de la constante temporal con un error relativo en valor absoluto del 8.7%, seguido del modelo CM con 13.7 %, frente a un error relativo en valor absoluto del 4.7 % de la simulación de la geometría no simplificada, respecto a los resultados obtenidos de la toma de datos en el prototipo experimental. Por otro lado, el modelo C presenta un error relativo alto con un valor del 83.33%. Por tanto, los modelos térmicos MEF y CM reúnen eficiencia computacional y precisión, destacando principalmente el modelo CM que permite la redefinición del modelo para diferentes condiciones de contorno más eficientemente que el modelo MEF.
- El modelo C presenta errores cercanos al 45%, cuando es comparado con la simulación de la geometría no simplificada, y cercanos 83% cuando es comparado con el prototipo experimental. Por otro lado, es el modelo que más se ajusta a la evolución del prototipo experimental en el primer tercio del transitorio térmico. La semejanza entre el modelo C y los resultados obtenidos en la toma de datos del transitorio térmico del prototipo durante el primer tercio del transitorio vislumbran que el prototipo evoluciona más rápido que los modelos MEF y CM en los primeros instantes del transitorio, por lo que estimar la constante de tiempo del prototipo no es suficiente información para caracterizar el transitorio térmico en su totalidad.
- Las temperaturas estimadas en régimen permanente presentan errores cercanos al 4 % cuando son comparadas con los resultados del prototipo experimental y varían entre el 6.7 % y 10 % cuando son comparadas con los resultados de las simulaciones de la geometría no simplificada, por lo que el modelo estacionario desarrollado por Guillermo Salinas consigue estimar con una precisión alta la temperatura en régimen permanente. Comparando los errores relativos para los diferentes casos evaluados, se observa que el modelo térmico estacionario pierde precisión para valores de pérdidas alejados de P_{test}.
- El modelo térmico transitorio permite estimar la temperatura y la constante temporal del transitorio térmico para unas condiciones de contorno predefinidas y, por tanto, será útil su aplicación siempre en cuando las condiciones de contorno en las que opera el prototipo a analizar sean bastante uniformes. Tener que redefinir el modelo en numerosas ocasiones reduce su principal ventaja frente a las simulaciones FEM, su velocidad computacional.
- En el presente documento, no se ha tenido en cuenta la influencia de la mayor superficie de transferencia de calor que presenta un devanado frente a un cilindro, geometría en la que ha sido simplificado el mismo. Su consideración permitiría aumentar en gran medida la precisión y acercarse a los errores relativos de la geometría sin simplificar. Sin embargo, dicha consideración no podría ser tomada si se busca aplicar el modelo de CM, que requiere geometría lo más simplificada posible para su aplicación.
- En el documento no se ha tenido en cuenta la influencia de la temperatura en el cálculo de las pérdidas en el devanado, factor muy influyente en la conductividad eléctrica del cobre y, por tanto, en la resistencia del devanado.

- El criterio de Biot y el método C, no son coherentes en la estimación del transitorio térmico en el análisis multiobjetivo, y, por tanto, deberá ser redefinido el concepto de número de Biot para la aplicación de dicho análisis.
- La influencia del perfil de temperatura en el modelo CM se impone empleando los perfiles unidimensionales para cada dirección, por lo que mejorar la precisión de dichos perfiles es objeto para futuros estudios.
- El modelo CM presenta grandes limitaciones en geometrías no regulares que no presenten direcciones uniformes de análisis, por lo que en dichos casos será recomendable utilizar el modelo MEF.
- Las simulaciones MEF permiten obtener una estimación del perfil de temperaturas en el régimen transitorio y durante el transitorio térmico. Estimar de forma simplificada dicho perfil, será objeto para futuros estudios.
- Como resultado de la verosimilitud de lo modelos desarrollados en el presente documento, se concluye que pueden ser utilizados para la estimación de temperatura, facilitando la selección del volumen mínimo durante el dimensionamiento del componente magnético.

ANEXO I: SCRIPTS DE MATLAB PARA EL CÁLCULO NUMÉRICO

SCRIPT DE CÁLCULO DE LOS TRANSITORIOS TÉRMICOS EN EL MÉTODO CM

```
function [] = ThermalTransitoryResponse(A) %11.6,7,18,13,7
    B=A;
    Obj_Capac_Mod=zeros(3001,6);
    %%Propiedades de los materiales
    Dif_Ferrita=1.1111e-06;
    Dif_CableCobre= 1.1596e-04;
    %%Dimensiones Bobina
    %Objeto 1
    Lx1=0.0232;
    Ly1=0.011;
    Lz1=0.0028;
    %Objeto 2
    Lx2=0.00309;
    Ly2=0.011;
    Lz2=0.0164;
    %Objeto 3
    Lx3=0.00309;
    Ly3=0.011;
    Lz3=0.0164;
    %Objeto 6
    Lx6=0.0232;
    Ly6=0.011;
    Lz6=0.0028;
    %Objetos 4 y 6
    Lz4_5=0.0164;
    Rint4= 0.0045;
    Rext4 = 0.00695;
    l = Rext4 / Rint4;
    %Funciones Objeto1
    L1= (Lz1*Lx1*Ly1)/(2*Lx1*Ly1+2*Lx1*Lz1+2*Ly1*Lz1);

    Objeto1_z = @(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L1^2)*((-2*B(2,1)-2*B(1,1)-2*B(1,1)*B↙
(2,1))/(2+B(1,1))/((-B(2,1)-B(1,1)*((1+B(2,1)/2)/(1+B(1,1)/2)))/6+B(2,1)/2+1)  ) );
    Objeto1_x = @(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L1^2)*((-2*B(4,1)-2*B(3,1)-2*B(3,1)*B↙
(4,1))/(2+B(3,1))/((-B(4,1)-B(3,1)*((1+B(4,1)/2)/(1+B(3,1)/2)))/6+B(4,1)/2+1)  ) );
    Objeto1_y = @(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L1^2)*((-2*B(6,1)-2*B(5,1)-2*B(5,1)*B↙
(6,1))/(2+B(5,1))/((-B(6,1)-B(5,1)*((1+B(6,1)/2)/(1+B(5,1)/2)))/6+B(6,1)/2+1)  ) );

    %Funcions Objeto 2 y 3
    L2= (Lz2*Lx2*Ly2)/(2*Lx2*Ly2+2*Lx2*Lz2+2*Ly2*Lz2);
    Objeto2_z =@(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L2^2)*((-2*B(8,1)-2*B(7,1)-2*B(7,1)*B↙
(8,1))/(2+B(7,1))/((-B(8,1)-B(7,1)*((1+B(8,1)/2)/(1+B(7,1)/2)))/6+B(8,1)/2+1)  ) );
    Objeto2_x =@(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L2^2)*((-2*B(10,1)-2*B(9,1)-2*B(9,1)*B↙
(10,1))/(2+B(9,1))/((-B(10,1)-B(9,1)*((1+B(10,1)/2)/(1+B(9,1)/2)))/6+B(10,1)/2+1)↙
) );
    Objeto2_y =@(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L2^2)*((-2*B(12,1)-2*B(11,1)-2*B(11,1)↙
*B(12,1))/(2+B(11,1))/((-B(12,1)-B(11,1)*((1+B(12,1)/2)/(1+B(11,1)/2)))/6+B(12,1)↙
/2+1)  ) );

    %Funciones Objeto6
    L6= (Lz6*Lx6*Ly6)/(2*Lx6*Ly6+2*Lx6*Lz6+2*Ly6*Lz6);
    Objeto6_z =@(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L6^2)*((-2*B(20)-2*B(19)-2*B(19)*B(20))↙
/(2+B(19))/((-B(20)-B(19)*((1+B(20)/2)/(1+B(19)/2)))/6+B(20)/2+1)  ) );
```

```
    Objeto6_x =@(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L6^2)*((-2*B(22)-2*B(21)-2*B(21)*B(22)) ↙
/(2+B(21))/((-B(22)-B(21)*((1+B(22)/2)/(1+B(21)/2)))/6+B(22)/2+1)  ) );
    Objeto6_y =@(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L6^2)*((-2*B(24)-2*B(23)-2*B(23)*B(24)) ↙
/(2+B(23))/((-B(24)-B(23)*((1+B(24)/2)/(1+B(23)/2)))/6+B(24)/2+1)  ) );

    %Funcion Objeto4
    L4 = (pi*( Rext4^2 - Rint4^2)*Lz4_5)/((2*pi*Rint4 + 2*pi*Rext4)*Lz4_5 + 2*pi* ↙
(Rext4^2 - Rint4^2));
    N = (1-(1/l)^4)/6;
    M = -l*(l+(1/l)^2*(log(1/l)-1))/4;
    L = (1-(1/l)^2);
    A2 = (B(29,1)*(l*(1+B(28,1))/(B(29,1)-B(29,1)/B(28,1))) + B(28,1)*l)/(2*(1/l - ↙
l));
    A1 = (B(29,1)*(l*(1+B(28,1))/(B(29,1)-B(29,1)/B(28,1)))+ B(28,1)*(2*l-1/l))/ ↙
(1/l -l);
    A0 = 1 + ((B(29,1)/B(28,1))*(l*(1+B(28,1))/(B(29,1)-B(29,1)/B(28,1)))+l)/(2* ↙
(1/l -l));
    Objeto4_r = @(t) 1 - exp( (Dif_CableCobre*t/L4^2)*(B(28,1)+B(29,1)*(l*(1+B ↙
(28,1))/(B(29,1)-B(29,1)/B(28,1)))))/(A2*N+A1*M+A0*L ));
    %Funcion Objeto5
    L5 = (pi*(Rint4^2)*Lz4_5)/((2*pi*Rint4)*Lz4_5 + 2*pi*Rint4^2);
    Objeto5_r = @(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L5^2)*(-B(32,1)/(1+B(32,1)/3)));
    Objeto5_z = @(t) 1 - exp( (Dif_Ferrita*t/L5^2)*((-2*B(31,1)-2*B(30,1)-2*B(30,1) ↙
*B(31,1))/(2+B(30,1))/((-B(31,1)-B(30,1)*((1+B(31,1)/2)/(1+B(30,1)/2)))/6+B(31,1) ↙
/2+1)  ) );

    for i=1:3001
        Obj_Capac_Mod(i,1)=Objeto1_z(i-1)*Objeto1_x(i-1)*Objeto1_y(i-1);
        Obj_Capac_Mod(i,2)=Objeto2_z(i-1)*Objeto2_x(i-1)*Objeto2_y(i-1);
        Obj_Capac_Mod(i,3)=Objeto2_z(i-1)*Objeto2_x(i-1)*Objeto2_y(i-1);
        Obj_Capac_Mod(i,4)=Objeto4_r(i-1);
        Obj_Capac_Mod(i,5)=Objeto5_r(i-1)*Objeto5_z(i-1);
        Obj_Capac_Mod(i,6)=Objeto6_z(i-1)*Objeto6_x(i-1)*Objeto6_y(i-1);

    end
    figure;
    plot(0:3000,Obj_Capac_Mod(:,1));
    hold on
    plot(0:3000,Obj_Capac_Mod(:,2));
    plot(0:3000,Obj_Capac_Mod(:,4));
    plot(0:3000,Obj_Capac_Mod(:,5));
    plot(0:3000,Obj_Capac_Mod(:,6));

end
```

SCRIPT DE CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE PELÍCULA

```
function [h] = Transitory_h_Average ( dTmax)

h = zeros(1,5);

    %Objeto 1
    Lx1=0.0232;
    Ly1=0.011;
    Lz1=0.0028;
    %Objeto 2
    Lx2=0.00309;
    Ly2=0.011;
    Lz2=0.0164;
    %Objeto 3
    Lx3=0.00309;
    Ly3=0.011;
    Lz3=0.0164;
    %Objeto 6
    Lx6=0.0232;
    Ly6=0.011;
    Lz6=0.0028;
    %Objetos 4 y 5
    Lz4_5=0.0164;
    Rint4= 0.0045;
    Rext4 = 0.00695;

Tamb = 25;
h(1,2)= 1.42*((dTmax /L))^0.25 ;
h(1,5)= h(1,2);
h(1,3)= 1.42*((dTmax /0.0164))^0.25;
h(1,4)= 1.42*((dTmax /0.0164))^0.25;
h(1,1) = 1.32*(dTmax /((4*Lx1*Ly1)/(2*Lx1+2*Ly1)))^0.25 ;


end
```

SCRIPT DE CÁLCULO DE LOS TRANSITORIOS TÉRMICOS EN EL MÉTODO C

```
function[Temp,Objt,Bi] = Transit_Capacitance (hconv_CS_1,hconv_CL_1,hconv_CL_23, ↙
hconv_CL_4,hconv_CL_6 )
    %%Definición de variables
    Bi = zeros(1, 6); %Constantes Biot para el modelo capacitancia
    Temp = zeros(1, 6);
    Objt = zeros(6,2001);
    %%Propiedades de los materiales
    Dif_Ferrita=1.1111e-06;
    Dif_CableCobre= 1.1596e-04;
    k_ferrita= 4;
    k_CableCobre= 400;
    %%Dimensiones Bobina
    %Objeto 1
    Lx1=0.0232;
    Ly1=0.011;
    Lz1=0.0028;
    %Objeto 2
    Lx2=0.00309;
    Ly2=0.011;
    Lz2=0.0164;
    %Objeto 3
    Lx3=0.00309;
    Ly3=0.011;
    Lz3=0.0164;
    %Objeto 6
    Lx6=0.0232;
    Ly6=0.011;
    Lz6=0.0028;
    %Objetos 4 y 5
    Lz4_5=0.0164;
    Rint4= 0.0045;
    Rext4 = 0.00695;

    %Calculate L caracteristica de cada objeto
    L_1 = (Ly1*Lx1*Lz1)/(2*Lx1*Ly1 + 2*Lx1*Lz1 + 2*Ly1*Lz1);
    L_2 = (Ly1*Lx1*Lz1)/(2*Lx2*Ly2 + 2*Lx2*Lz2 + 2*Ly2*Lz2);
    L_3 = (Ly1*Lx1*Lz1)/(2*Lx3*Ly3 + 2*Lx3*Lz3 + 2*Ly3*Lz3);
    L_6 = (Ly1*Lx1*Lz1)/(2*Lx6*Ly6 + 2*Lx6*Lz6 + 2*Ly6*Lz6);
    L_4 = (pi*( Rext4^2 - Rint4^2)*Lz4_5)/((2*pi*Rint4 + (pi/2)*Rext4)*Lz4_5 + ↙
2*pi*(Rext4^2 - Rint4^2));
    L_5 = (pi*(Rint4^2)*Lz4_5)/((2*pi*Rint4)*Lz4_5 + 2*pi*Rint4^2);

     % Calculo de Resistencias Térmicas de Convección
    Rconv_1_CS = 1/(hconv_CS_1*Lx1*Ly1);
    Rconv_1_CL = 1/(hconv_CL_1*(2*Lx1*Lz1+2*Ly1*Lz1));
    Rconv_6_CL = 1/(hconv_CL_6*(2*Lx6*Lz6+2*Ly6*Lz6));
    Rconv_2 = 1/(hconv_CL_23*(2*Lx2*Lz2+2*Ly2*Lz2));
    Rconv_3 =  Rconv_2;
    Rconv_4 = 1/(hconv_CL_4*2*pi*Rext4*Lz4_5);
    % Calculo de Resistencias Térmicas de Conducción
    Rcond_1 = 1/(k_ferrita*(Lx1*Ly1/Lz1));
    Rcond_6 = Rcond_1;
    Rcond_2 = 1/(k_ferrita*(Lx2*Ly2/Lz2));
```

```
    Rcond_3 = Rcond_2;
    Rcond_5 = 1/(k_ferrita*(pi*Rint4^2)/Lz4_5);
    Rcond_4 = log(Rext4/Rint4)/(k_CableCobre*2*pi*Lz4_5);
    % Cálculo de Resistencias medias de Conducción
    Rcond_1_media = Rcond_1/2;
    Rcond_6_media = Rcond_6/2;
    Rcond_2_media = Rcond_2/2;
    Rcond_3_media = Rcond_3/2;
    Rcond_5_media = Rcond_5/2;



    % Cálculo de coeficientes de película equivalentes

    %DIRECCION Z
%     R1 = Resist_Paral(Rcond_2,Resist_Paral(Rcond_3,Rcond_5)) + (Rcond_6_media +↙
Rconv_6_CL);
%     R2 = Resist_Paral(Rcond_2_media + Rconv_2,Resist_Paral(Rcond_3_media +↙
Rconv_3,Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4));
    R1 = Rcond_2_media + Rconv_2;
    R2 = Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4;
    hconv_CI_1= 1/ (Resist_Paral(R1/2,R2)*(Lx1*Ly1));

    R1 = Rcond_2_media + Rconv_2;
    R2 = Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4;
    hconv_CS_6= 1/( Resist_Paral(R1/2,R2)*(Lx6*Ly6));
    hconv_CI_6 = 0;

    hconv_CS_2 = 1 / ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(Lx2*Ly2));
    hconv_CS_3 =1/ ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(Lx3*Ly3));
    hconv_CS_5 = 1/ ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(pi*Rint4^2));

    hconv_CI_2 = 1/((Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(Lx2*Ly2));
    hconv_CI_3 = 1/((Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(Lx3*Ly3));
    hconv_CI_5 = 1/(Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(pi*Rint4^2);
    hconv_CL_ext_5 = 1/((Rcond_4 + Rconv_4)*(2*pi*Lz4_5*Rint4));
    R1 =  Resist_Paral(Rcond_1_media + Rconv_1_CL,Resist_Paral(Rcond_1 +↙
Rconv_1_CS,Rcond_6_media + Rconv_6_CL));
    hconv_CL_int_4 = 1/((R1 + Rcond_5_media)*(2*pi*Lz4_5*Rint4));



    %Calculo de los coeficientes de película equivalentes de cada Objeto
    h_1 = (hconv_CS_1*Lx1*Ly1 + (2*Lx1*Lz1+2*Ly1*Lz1)*hconv_CL_1 +↙
hconv_CI_1*Lx1*Ly1)/(2*Lx1*Ly1 + 2*Lx1*Lz1 + 2*Ly1*Lz1);
    h_2 = (hconv_CS_2*Lx2*Ly2 + (2*Lx2*Lz2+2*Ly2*Lz2)*hconv_CL_23 +↙
hconv_CI_2*Lx2*Ly2)/(2*Lx2*Ly2 + 2*Lx2*Lz2 + 2*Ly2*Lz2);
    h_3 = (hconv_CS_3*Lx3*Ly3 + (2*Lx3*Lz3+2*Ly3*Lz3)*hconv_CL_23 +↙
hconv_CI_3*Lx3*Ly3)/(2*Lx3*Ly3 + 2*Lx3*Lz3 + 2*Ly3*Lz3);
    h_6 = (hconv_CS_6*Lx6*Ly6 + (2*Lx6*Lz6+2*Ly6*Lz6)*hconv_CL_6 +↙
```

```
hconv_CI_6*Lx6*Ly6)/(2*Lx6*Ly6 + 2*Lx6*Lz6 + 2*Ly6*Lz6);
    h_4 = ((2*pi*Rint4* hconv_CL_int_4 + 2*pi*Rext4*hconv_CL_4)*Lz4_5)/((2*pi*Rint4 ↙
+ 2*pi*Rext4)*Lz4_5 + 2*pi*(Rext4^2 - Rint4^2));
    h_5 =((hconv_CS_5+hconv_CI_5)*(pi*Rint4^2)+(2*pi*Rint4*Lz4_5)*hconv_CL_ext_5)/ ↙
((2*pi*Rint4)*Lz4_5 + 2*pi*Rint4^2);

    %Calculo del número de Biot de cada Objeto
    Bi(1,1)=h_1*L_1/k_ferrita;
    Bi(1,2)=h_2*L_2/k_ferrita;
    Bi(1,3)=h_3*L_3/k_ferrita;
    Bi(1,6)=h_6*L_6/k_ferrita;
    Bi(1,4)=h_4*L_4/k_CableCobre;
    Bi(1,5)=h_5*L_5/k_ferrita;

    %Cálculo de las constantes temporales
    Temp(1,1)= L_1^2/(Bi(1,1)*Dif_Ferrita);
    Temp(1,2)= L_2^2/(Bi(1,2)*Dif_Ferrita);
    Temp(1,3)= L_3^2/(Bi(1,3)*Dif_Ferrita);
    Temp(1,4)= L_4^2/(Bi(1,4)*Dif_CableCobre);
    Temp(1,5)= L_5^2/(Bi(1,5)*Dif_Ferrita);
    Temp(1,6)= L_6^2/(Bi(1,6)*Dif_Ferrita);

    %Cálculo de la función transitorio en cada Objeto
    Objeto1 = @(t) 1-exp(-t*Bi(1,1)*Dif_Ferrita/ L_1^2);
    Objeto2 = @(t) 1-exp(-t*Bi(1,2)*Dif_Ferrita/ L_2^2);
    Objeto3 = @(t) 1-exp(-t*Bi(1,3)*Dif_Ferrita/ L_3^2);
    Objeto4 = @(t) 1-exp(-t*Bi(1,4)*Dif_CableCobre/ L_4^2);
    Objeto5 = @(t) 1-exp(-t*Bi(1,5)*Dif_Ferrita/ L_5^2);
    Objeto6 = @(t) 1-exp(-t*Bi(1,6)*Dif_Ferrita/ L_6^2);
    %Computo del Transitorio en el método de la capacitancia

    for i=1:2001
        Objt(1,i) = Objeto1(i-1);
        Objt(2,i) = Objeto2(i-1);
        Objt(3,i) = Objeto3(i-1);
        Objt(4,i) = Objeto4(i-1);
        Objt(5,i) = Objeto5(i-1);
        Objt(6,i) = Objeto6(i-1);
    end

    %Generar Gráficas
    figure
    plot(0:2000,Objt(1,:));
    hold on
    plot(0:2000,Objt(2,:));
    plot(0:2000,Objt(3,:));
    plot(0:2000,Objt(4,:));
    plot(0:2000,Objt(5,:));
    plot(0:2000,Objt(6,:));
```

SCRIPT DE CÁLCULO DE LOS CONDICIONES DE CONTORNO EN EL MÉTODO CM

```
function [B] = ThermalResistanceCalculation(hconv_CS_1,hconv_CL_1,hconv_CL_23, ↙
hconv_CL_4,hconv_CL_6 )
    %%Propiedades de los materiales
    k_ferrita= 4;
    k_CableCobre= 400;
    %%Dimensiones Bobina


    %Objeto 1
    Lx1=0.0232;
    Ly1=0.011;
    Lz1=0.0028;

    %Objeto 2
    Lx2=0.00309;
    Ly2=0.011;
    Lz2=0.0164;
    %Objeto 3
    Lx3=0.00309;
    Ly3=0.011;
    Lz3=0.0164;
    %Objeto 6
    Lx6=0.0232;
    Ly6=0.011;
    Lz6=0.0028;
    %Objetos 4 y 5
    Lz4_5=0.0164;
    Rint4= 0.0045;
    Rext4 = 0.00695;

    L= (2*Ly1*Lx1*Lz1 + 2* Ly2*Lx2*Lz2 + pi*(Rext4^2)*Lz4_5)/(Lx1*Ly1 + 4*Lx1*Lz1 + ↙
4*Ly1*Lz1 + 4*Lx2*Lz2 + 4*Ly2*Lz2+ 2*pi*(Rext4)*Lz4_5);

    L_1 = L;
    L_2 = L;
    L_3 = L;
    L_4 = L;
    L_5 = L;
    L_6 = L;


    % Calculo de Resistencias Térmicas de Convección
    Rconv_1_CS = 1/(hconv_CS_1*Lx1*Ly1);
    Rconv_1_CL = 1/(hconv_CL_1*(2*Lx1*Lz1+2*Ly1*Lz1));
    Rconv_6_CL = 1/(hconv_CL_6*(2*Lx6*Lz6+2*Ly6*Lz6));
    Rconv_2 = 1/(hconv_CL_23*(2*Lx2*Lz2+2*Ly2*Lz2));
    Rconv_3 =  Rconv_2;
    Rconv_4 = 1/(hconv_CL_4*2*pi*Rext4*Lz4_5);
    % Calculo de Resistencias Térmicas de Conducción
    Rcond_1 = 1/(k_ferrita*(Lx1*Ly1/Lz1));
    Rcond_6 = Rcond_1;
    Rcond_2 = 1/(k_ferrita*(Lx2*Ly2/Lz2));
    Rcond_3 = Rcond_2;
```

```
    Rcond_5 = 1/(k_ferrita*(pi*Rint4^2)/Lz4_5);
    Rcond_4 = log(Rext4/Rint4)/(k_CableCobre*2*pi*Lz4_5);
    % Cálculo de Resistencias medias de Conducción
    Rcond_1_media = Rcond_1/2;
    Rcond_6_media = Rcond_6/2;
    Rcond_2_media = Rcond_2/2;
    Rcond_3_media = Rcond_3/2;
    Rcond_5_media = Rcond_5/2;



    % Cálculo de coeficientes de pelicula equivalentes

    %DIRECCION Z
%     R1 = Resist_Paral(Rcond_2,Resist_Paral(Rcond_3,Rcond_5)) + (Rcond_6_media +↙
Rconv_6_CL);
%     R2 = Resist_Paral(Rcond_2_media + Rconv_2,Resist_Paral(Rcond_3_media +↙
Rconv_3,Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4));
    R1 = Rcond_2_media + Rconv_2;
    R2 = Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4;
    hconv_CI_1= 1/ (Resist_Paral(R1/2,R2)*(Lx1*Ly1));

    R1 = Rcond_2_media + Rconv_2;
    R2 = Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4;
    hconv_CS_6= 1/( Resist_Paral(R1/2,R2)*(Lx6*Ly6));
    hconv_CI_6 = 0;
    hconv_CS_2 = 1 / ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(Lx2*Ly2)),
    hconv_CS_3 =1/ ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(Lx3*Ly3));
    hconv_CS_5 = 1/ ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(pi*Rint4^2));

    hconv_CI_2 = 1/((Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(Lx2*Ly2));
    hconv_CI_3 = 1/((Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(Lx3*Ly3));
    hconv_CI_5 = 1/(Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(pi*Rint4^2);
    hconv_CL_ext_5 = 1/((Rcond_4 + Rconv_4)*(2*pi*Lz4_5*Rint4));
    R1 =  Resist_Paral(Rcond_1_media + Rconv_1_CL,Resist_Paral(Rcond_1 +↙
Rconv_1_CS,Rcond_6_media + Rconv_6_CL));
    hconv_CL_int_4 = 1/((R1 + Rcond_5_media)*(2*pi*Lz4_5*Rint4));



    % Calculo de las constantes B
    %OBJETO 1
    B(1,1) = (hconv_CS_1*L_1)/k_ferrita;
    B(2,1) = (hconv_CI_1*L_1)/k_ferrita;
    B(3,1) = (hconv_CL_1*L_1)/k_ferrita;
    B(4,1) = (hconv_CL_1*L_1)/k_ferrita;
    B(5,1) = (hconv_CL_1*L_1)/k_ferrita;
    B(6,1) = (hconv_CL_1*L_1)/k_ferrita;
    %OBJETO 2
```

```
    B(7,1) = (hconv_CS_2*L_2)/k_ferrita;
    B(8,1) = (hconv_CI_2*L_2)/k_ferrita;
    B(9,1) = (hconv_CL_23*L_2)/k_ferrita;
    B(10,1) = (hconv_CL_23*L_2)/k_ferrita;
    B(11,1) = (hconv_CL_23*L_2)/k_ferrita;
    B(12,1) = (hconv_CL_23*L_2)/k_ferrita;
    %OBJETO 3
    B(13,1) = (hconv_CS_3*Lz3)/k_ferrita;
    B(14,1) = (hconv_CI_3*Lz3)/k_ferrita;
    B(15,1) = (hconv_CL_23*Lx3)/k_ferrita;
    B(16,1) = (hconv_CL_23*Lx3)/k_ferrita;
    B(17,1) = (hconv_CL_23*Ly3)/k_ferrita;
    B(18,1) = (hconv_CL_23*Ly3)/k_ferrita;
    %OBJETO 6
    B(19,1) = (hconv_CS_6*L_6)/k_ferrita;
    B(20,1) = 0;
    B(21,1) = (hconv_CL_6*L_6)/k_ferrita;
    B(22,1) = (hconv_CL_6*L_6)/k_ferrita;
    B(23,1) = (hconv_CL_6*L_6)/k_ferrita;
    B(24,1) = (hconv_CL_6*L_6)/k_ferrita;
    %OBJETO 4

    B(25,1) = 0;
    B(27,1) = 0;
    B(28,1) = (hconv_CL_4*L_4)/k_CableCobre;
    B(29,1) = (hconv_CL_int_4*L_4)/k_CableCobre;
    %OBJETO 5
    B(30,1) = (hconv_CS_5*L_5)/k_ferrita;
    B(31,1) = (hconv_CI_5*L_5)/k_ferrita;
    B(32,1) = (hconv_CL_ext_5*L_5)/k_ferrita;

end
```

SCRIPT DE CÁLCULO DE P_{Test}

```
function [Ptest] = CalculatePtest( dT1,dT2,dT3,dT4,dT5,dT6,hconv_CS_1,hconv_CL_1,↙
hconv_CL_23,hconv_CL_4,hconv_CL_6)
    %%Definición de variables
    Ptest = zeros(1,6);
    Tamb =25; % En °C
    %%Propiedades de los materiales
    k_ferrita= 4;
    k_CableCobre= 400;
    Emisividad_Ferrita = 0.85;
    Emisividad_CableCobre = 0.85;
    Cte_Stephan_Boltzmann = 5.6703*10^-8;
    %%Dimensiones Bobina
    %Objeto 1
    Lx1=0.0232;
    Ly1=0.011;
    Lz1=0.0028;
    %Objeto 2
    Lx2=0.00309;
    Ly2=0.011;
    Lz2=0.0164;
    %Objeto 3
    Lx3=0.00309;
    Ly3=0.011;
    Lz3=0.0164;
    %Objeto 6
    Lx6=0.0232;
    Ly6=0.011;
    Lz6=0.0028;
    %Objetos 4 y 5
    Lz4_5=0.0164;
    Rint4= 0.0045;
    Rext4 = 0.00695;


    % Calculo de Resistencias Térmicas de Convección
    Rconv_1_CS = 1/(hconv_CS_1*Lx1*Ly1);
    Rconv_1_CL = 1/(hconv_CL_1*(2*Lx1*Lz1+2*Ly1*Lz1));
    Rconv_6_CL = 1/(hconv_CL_6*(2*Lx6*Lz6+2*Ly6*Lz6));
    Rconv_2 = 1/(hconv_CL_23*(2*Lx2*Lz2+2*Ly2*Lz2));
    Rconv_3 =  Rconv_2;
    Rconv_4 = 1/(hconv_CL_4*2*pi*Rext4*Lz4_5);
    % Calculo de Resistencias Térmicas de Conducción
    Rcond_1 = 1/(k_ferrita*(Lx1*Ly1/Lz1));
    Rcond_6 = Rcond_1;
    Rcond_2 = 1/(k_ferrita*(Lx2*Ly2/Lz2));
    Rcond_3 = Rcond_2;
    Rcond_5 = 1/(k_ferrita*(pi*Rint4^2)/Lz4_5);
    Rcond_4 = log(Rext4/Rint4)/(k_CableCobre*2*pi*Lz4_5);
    % Cálculo de Resistencias medias de Conducción
    Rcond_1_media = Rcond_1/2;
    Rcond_6_media = Rcond_6/2;
    Rcond_2_media = Rcond_2/2;
    Rcond_3_media = Rcond_3/2;
```

```
    Rcond_5_media = Rcond_5/2;



    % Cálculo de coeficientes de película equivalentes

    %DIRECCION Z
%     R1 = Resist_Paral(Rcond_2,Resist_Paral(Rcond_3,Rcond_5)) + (Rcond_6_media +↙
Rconv_6_CL);
%     R2 = Resist_Paral(Rcond_2_media + Rconv_2,Resist_Paral(Rcond_3_media +↙
Rconv_3,Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4));
    R1 = Rcond_2_media + Rconv_2;
    R2 = Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4;
    hconv_CI_1= 1/ (Resist_Paral(R1/2,R2)*(Lx1*Ly1));

    R1 = Rcond_2_media + Rconv_2;
    R2 = Rcond_5_media + Rconv_4 +  Rcond_4;
    hconv_CS_6= 1/( Resist_Paral(R1/2,R2)*(Lx6*Ly6));
    hconv_CI_6 = 0;

    hconv_CS_2 = 1 / ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(Lx2*Ly2));
    hconv_CS_3 =1/ ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(Lx3*Ly3));
    hconv_CS_5 = 1/ ((Resist_Paral(Rconv_1_CL,Rcond_1_media + Rconv_1_CS) ↙
+Rcond_1_media)*(pi*Rint4^2));

    hconv_CI_2 = 1/((Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(Lx2*Ly2));
    hconv_CI_3 = 1/((Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(Lx3*Ly3));
    hconv_CI_5 = 1/(Rcond_6_media + Rconv_6_CL)*(pi*Rint4^2);
    hconv_CL_ext_5 = 1/((Rcond_4 + Rconv_4)*(2*pi*Lz4_5*Rint4));
    R1 =  Resist_Paral(Rcond_1_media + Rconv_1_CL,Resist_Paral(Rcond_1 +↙
Rconv_1_CS,Rcond_6_media + Rconv_6_CL));
    hconv_CL_int_4 = 1/((R1 + Rcond_5_media)*(2*pi*Lz4_5*Rint4));
    %Calculo de los coeficientes de película equivalentes de cada Objeto
    h_1 = (hconv_CS_1*Lx1*Ly1 + (2*Lx1*Lz1+2*Ly1*Lz1)*hconv_CL_1 +↙
hconv_CI_1*Lx1*Ly1)/(2*Lx1*Ly1 + 2*Lx1*Lz1 + 2*Ly1*Lz1);
    h_2 = (hconv_CS_2*Lx2*Ly2 + (2*Lx2*Lz2+2*Ly2*Lz2)*hconv_CL_23 +↙
hconv_CI_2*Lx2*Ly2)/(2*Lx2*Ly2 + 2*Lx2*Lz2 + 2*Ly2*Lz2);
    h_3 = (hconv_CS_3*Lx3*Ly3 + (2*Lx3*Lz3+2*Ly3*Lz3)*hconv_CL_23 +↙
hconv_CI_3*Lx3*Ly3)/(2*Lx3*Ly3 + 2*Lx3*Lz3 + 2*Ly3*Lz3);
    h_6 = (hconv_CS_6*Lx6*Ly6 + (2*Lx6*Lz6+2*Ly6*Lz6)*hconv_CL_6 +↙
hconv_CI_6*Lx6*Ly6)/(2*Lx6*Ly6 + 2*Lx6*Lz6 + 2*Ly6*Lz6);
    h_4 = ((2*pi*Rint4* hconv_CL_int_4 + 2*pi*Rext4*hconv_CL_4)*Lz4_5)/((2*pi*Rint4↙
+ 2*pi*Rext4)*Lz4_5 + 2*pi*(Rext4^2 - Rint4^2));
    h_5 =((hconv_CS_5+hconv_CI_5)*(pi*Rint4^2)+(2*pi*Rint4*Lz4_5)*hconv_CL_ext_5)/↙
((2*pi*Rint4)*Lz4_5 + 2*pi*Rint4^2);

    %Calculo de la transferencia de Calor por Convección
    Qconv_1 = h_1*(2*Lx1*Ly1 + 2*Lx1*Lz1 + 2*Ly1*Lz1)*dT1;
    Qconv_2 = h_2*(2*Lx2*Ly2 + 2*Lx2*Lz2 + 2*Ly2*Lz2)*dT2;
    Qconv_3 = h_3*(2*Lx3*Ly3 + 2*Lx3*Lz3 + 2*Ly3*Lz3)*dT3;
    Qconv_6 = h_6*(2*Lx6*Ly6 + 2*Lx6*Lz6 + 2*Ly6*Lz6)*dT6;
```

```
    Qconv_4 = h_4*((2*pi*Rint4 + 2*pi*Rext4)*Lz4_5 + 2*pi*(Rext4^2 - Rint4^2))*dT4;
    Qconv_5 = h_5*((2*pi*Rint4)*Lz4_5 + 2*pi*Rint4^2)*dT5;

    %Calculo de la transferencia de Calor por Radiación
    Qrad_1 = Emisividad_Ferrita*Cte_Stephan_Boltzmann*((dT1+Tamb+273)^4-(Tamb+273) ↙
^4)*(Lx1*Ly1 + 2*Lx1*Lz1 + 2*Ly1*Lz1);
    Qrad_2 = Emisividad_Ferrita*Cte_Stephan_Boltzmann*((dT2+Tamb+273)^4-(Tamb+273) ↙
^4)*(2*Lx2*Lz2 + Ly2*Lz2);
    Qrad_3 = Emisividad_Ferrita*Cte_Stephan_Boltzmann*((dT3+Tamb+273)^4-(Tamb+273) ↙
^4)*(2*Lx3*Lz3 + Ly3*Lz3);
    Qrad_6 = Emisividad_Ferrita*Cte_Stephan_Boltzmann*((dT6+Tamb+273)^4-(Tamb+273) ↙
^4)*( 2*Lx6*Lz6 + 2*Ly6*Lz6);
    Qrad_4 = Emisividad_CableCobre*Cte_Stephan_Boltzmann*((dT4+Tamb+273)^4- ↙
(Tamb+273)^4)*((1/2)*pi*Rext4*Lz4_5);
    Qrad_5 = 0;

    %Cálculo de Ptest
    Ptest(1,1)= Qconv_1 + Qrad_1;
    Ptest(1,2)= Qconv_2 + Qrad_2;
    Ptest(1,3)= Qconv_3 + Qrad_3;
    Ptest(1,4)= Qconv_4 + Qrad_4;
    Ptest(1,5)= Qconv_5 + Qrad_5;
    Ptest(1,6)= Qconv_6 + Qrad_6;
```

SCRIPTS GENERACIÓN GRÁFICAS MODELOS MEF, CM Y C

```
function [T_Estac] = Modelo_RM_8_I( P_loss, Tamb)

    Losses = P_loss;
    T_MEF =zeros(6,3001);
    T_CM =zeros(6,3001);
    T_C =zeros(6,3001);
    R = [30.65 30.65 30.65 29.94 30.61 30.54;
         30.59 30.85 30.39 29.83 30.50 30.61;
         30.59 30.39 30.85 29.83 30.50 30.61;
         30.59 30.52 30.52 30.67 30.64 30.61;
         30.59 30.52 30.52 30.65 30.66 30.61;
         30.52 30.65 30.65 30.58 30.61 30.69];
     T_Estac = R*Losses + Tamb;
    % Influencia de la Temperatura en las pérdidas f= 1KHz y 3F3
    C_2= 1.14;
    C_1= 8.1*10^(-3);
    C_0= 6.7*10^(-5);
    %Transitorio térmico en Modelo Basado MEF
    Trans_FEM = @(t) 1 - exp(-t/500);
    %Transitorio térmico en Modelo Teórico Capacitancia Modificado
    Trans_CM_123 = @(t) 1 - exp(-t/500);
    Trans_CM_4 = @(t) 1 - exp(-t/510);
    Trans_CM_5 = @(t) 1 - exp(-t/400);
    Trans_CM_6 = @(t) 1 - exp(-t/450);
    %Transitorio térmico en Modelo Teórico Capacitancia
    Trans_C_1 = @(t) 1 - exp(-t/125.44);
    Trans_C_2 = @(t) 1 - exp(-t/198.43);
    Trans_C_3 = @(t) 1 - exp(-t/198.43);
    Trans_C_4 = @(t) 1 - exp(-t/588.10);
    Trans_C_5 = @(t) 1 - exp(-t/295.28);
    Trans_C_6 = @(t) 1 - exp(-t/135.11);
```

```
%Valores Iniciales
T_MEF(1,1) = Tamb;
T_MEF(2,1) = Tamb;
T_MEF(3,1) = Tamb;
T_MEF(4,1) = Tamb;
T_MEF(5,1) = Tamb;
T_MEF(6,1) = Tamb;
T_CM(1,1) = Tamb;
T_CM(2,1) = Tamb;
T_CM(3,1) = Tamb;
T_CM(4,1) = Tamb;
T_CM(5,1) = Tamb;
T_CM(6,1) = Tamb;
T_C(1,1) = Tamb;
T_C(2,1) = Tamb;
T_C(3,1) = Tamb;
T_C(4,1) = Tamb;
T_C(5,1) = Tamb;
T_C(6,1) = Tamb;

for i=2:3001


    Loss_T_Inf_EM = [Losses(1,1)*(C_0*(T_MEF(1,i-1))^2 -C_1*(T_MEF(1,i-1))+ ↙
C_2); Losses(2,1)*(C_0*(T_MEF(2,i-1))^2 -C_1*(T_MEF(2,i-1))+ C_2); Losses(3,1)* ↙
(C_0*(T_MEF(3,i-1))^2 -C_1*(T_MEF(3,i-1))+ C_2); Losses(4,1);Losses(5,1)*(C_0* ↙
(T_MEF(5,i-1))^2 -C_1*(T_MEF(5,i-1))+ C_2); Losses(6,1)*(C_0*(T_MEF(6,i-1))^2 -C_1* ↙
(T_MEF(6,i-1))+ C_2) ];

    T_MEF(1,i) = R(1,:)*Loss_T_Inf_EM*Trans_FEM(i-1)+Tamb;
    T_MEF(2,i) = R(2,:)*Loss_T_Inf_EM*Trans_FEM(i-1)+Tamb;
    T_MEF(3,i) = R(3,:)*Loss_T_Inf_EM*Trans_FEM(i-1)+Tamb;
    T_MEF(4,i) = R(4,:)*Loss_T_Inf_EM*Trans_FEM(i-1)+Tamb;
    T_MEF(5,i) = R(5,:)*Loss_T_Inf_EM*Trans_FEM(i-1)+Tamb;
    T_MEF(6,i) = R(6,:)*Loss_T_Inf_EM*Trans_FEM(i-1)+Tamb;

    Loss_T_Inf_CM = [Trans_CM_123(i-1)*Losses(1,1)*(C_0*(T_CM(1,i-1))^2 -C_1* ↙
(T_CM(1,i-1))+ C_2);Trans_CM_123(i-1)*Losses(2,1)*(C_0*(T_CM(2,i-1))^2 -C_1*(T_CM ↙
(2,i-1))+ C_2); Trans_CM_123(i-1)*Losses(3,1)*(C_0*(T_CM(3,i-1))^2 -C_1*(T_CM(3,i- ↙
1))+ C_2); Trans_CM_4(i-1)*Losses(4,1);Trans_CM_5(i-1)*Losses(5,1)*(C_0*(T_CM(5,i- ↙
1))^2 -C_1*(T_CM(5,i-1))+ C_2); Trans_CM_6(i-1)*Losses(6,1)*(C_0*(T_CM(6,i-1))^2 - ↙
C_1*(T_CM(6,i-1))+ C_2) ];

    T_CM(1,i) = R(1,:)*Loss_T_Inf_CM+Tamb;
    T_CM(2,i) = R(2,:)*Loss_T_Inf_CM+Tamb;
    T_CM(3,i) = R(3,:)*Loss_T_Inf_CM+Tamb;
    T_CM(4,i) = R(4,:)*Loss_T_Inf_CM+Tamb;
    T_CM(5,i) = R(5,:)*Loss_T_Inf_CM+Tamb;
    T_CM(6,i) = R(6,:)*Loss_T_Inf_CM+Tamb;

    Loss_T_Inf_C = [Losses(1,1)*(C_0*(T_C(1,i-1))^2 -C_1*(T_C(1,i-1))+ C_2); ↙
Losses(2,1)*(C_0*(T_C(2,i-1))^2 -C_1*(T_C(2,i-1))+ C_2); Losses(3,1)*(C_0*(T_C(3,i- ↙
1))^2 -C_1*(T_C(3,i-1))+ C_2); Losses(4,1);Losses(5,1)*(C_0*(T_C(5,i-1))^2 -C_1* ↙
(T_C(5,i-1))+ C_2); Losses(6,1)*(C_0*(T_C(6,i-1))^2 -C_1*(T_C(6,i-1))+ C_2) ];
```

```
        T_C(1,i) = R(1,:)*Loss_T_Inf_C*Trans_C_1(i-1)+Tamb;
        T_C(2,i) = R(2,:)*Loss_T_Inf_C*Trans_C_2(i-1)+Tamb;
        T_C(3,i) = R(3,:)*Loss_T_Inf_C*Trans_C_3(i-1)+Tamb;
        T_C(4,i) = R(4,:)*Loss_T_Inf_C*Trans_C_4(i-1)+Tamb;
        T_C(5,i) = R(5,:)*Loss_T_Inf_C*Trans_C_5(i-1)+Tamb;
        T_C(6,i) = R(6,:)*Loss_T_Inf_C*Trans_C_6(i-1)+Tamb;
    end
    figure;
    plot(0:3000,T_MEF(1,:));
    hold on
    plot(0:3000,T_CM(1,:));
    plot(0:3000,T_C(1,:));
    title("Evolución de Temperaturas Objeto 1: MEF, CM y C");
    figure;
    plot(0:3000,T_MEF(2,:));
    hold on
    plot(0:3000,T_CM(2,:));
    plot(0:3000,T_C(2,:));
    title("Evolución de Temperaturas Objeto 2: MEF, CM y C");
    figure;
    plot(0:3000,T_MEF(3,:));

    hold on
    plot(0:3000,T_CM(3,:));
    plot(0:3000,T_C(3,:));
    title("Evolución de Temperaturas Objeto 4: MEF, CM y C");
    figure;
    plot(0:3000,T_MEF(5,:));
    hold on
    plot(0:3000,T_CM(5,:));
    plot(0:3000,T_C(5,:));
    title("Evolución de Temperaturas Objeto 5: MEF, CM y C");
    figure;
    plot(0:3000,T_MEF(6,:));
    hold on
    plot(0:3000,T_CM(6,:));
    plot(0:3000,T_C(6,:));
    title("Evolución de Temperaturas Objeto 6: MEF, CM y C");

end
```

ANEXO II: PLANIFICACIÓN Y PRESUPUESTO

DIAGRAMA DE GANTT

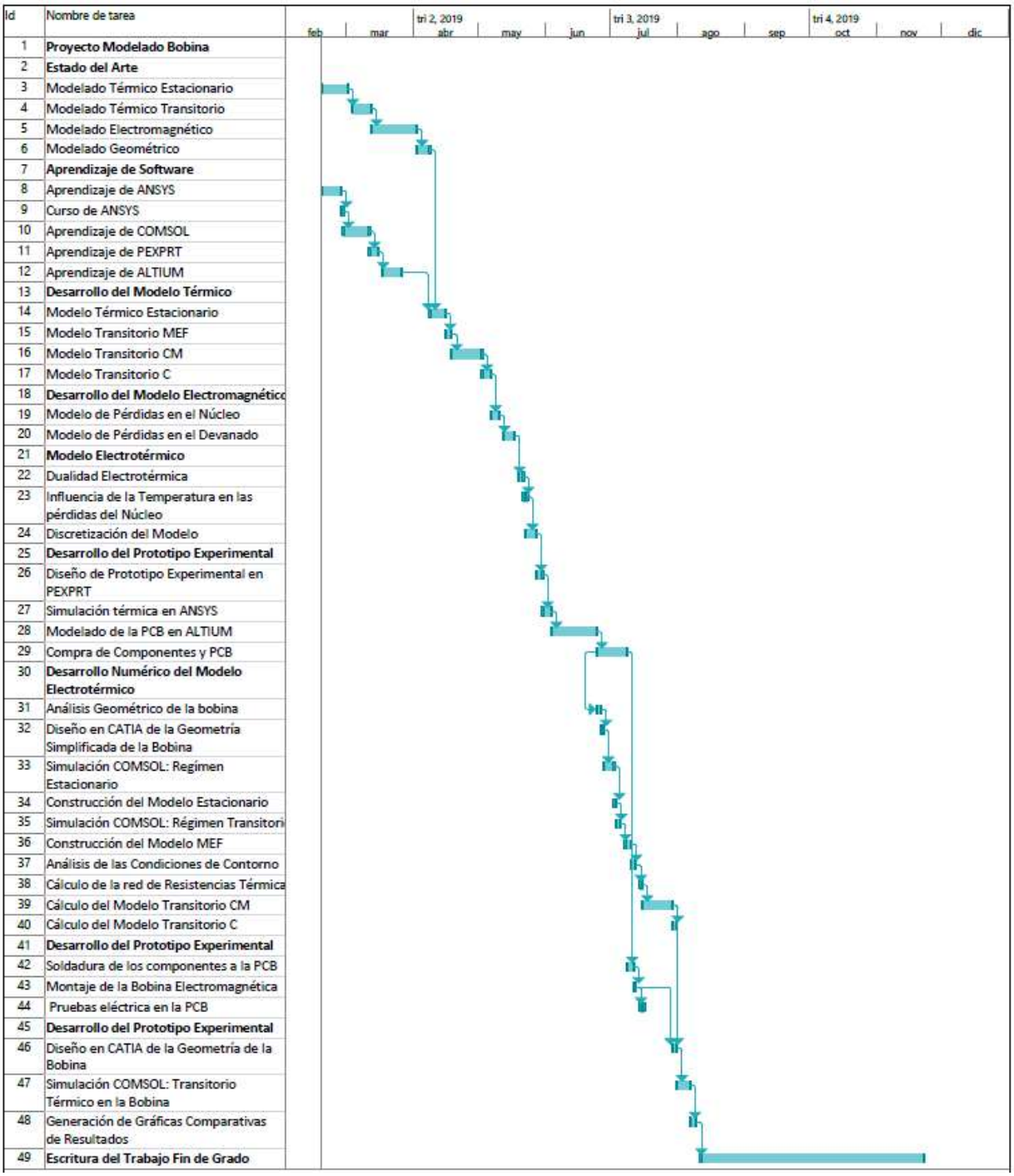


Figura 112: Diagrama de Gantt del TFG.

ESTRUCTURA DE DESCOMPOSICIÓN DEL PROYECTO

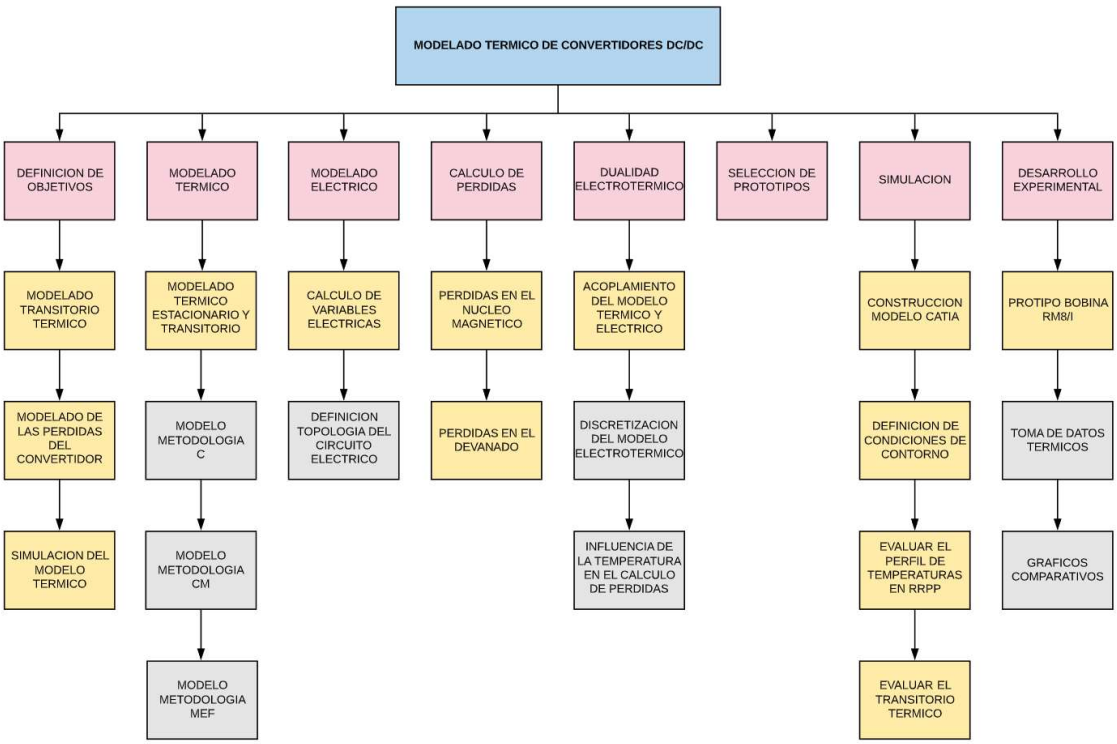


Figura 113: Estructura de Descomposición del TFG.

PRESUPUESTO

PRESUPUESTO ELABORACIÓN TRABAJO FIN DE GRADO

COSTE RECURSOS HUMANOS			
CONCEPTO	HORAS	COSTE HORARIO	TOTAL
Tutor	40.00 €	45.00 €	1,800.00 €
Doctorando	100.00 €	30.00 €	3,000.00 €
Seguridad Social	23%		1,104.00 €
TOTAL			5,904.00 €

COSTES ELEBORACIÓN TFG	
CONCEPTO	COSTE
COSTE RECURSOS HUMANOS	5,904.00 €
COSTE DE LICENCIAS E INSTRUMENTACIÓN	109.26 €
COSTE COMPONENTES PCB	121.60 €
TOTAL	6,134.86 €

COSTE DE LICENCIAS E INSTRUMENTACIÓN				
CONCEPTO	COSTE UNITARIO	VIDA ÚTIL	TIEMPO EMPLEADO	AMORTIZACIÓN
Licencia MATLAB	800.00 €	1	25	11.25 €
Licencia ANSYS	3,000.00 €	1	30	50.62 €
Licencia ALTIUM	1,700.00 €	1	40	38.25 €
Paquete Office	100.00 €	1	160	9.00 €
Pistola Térmica	1,300.00 €	10	2	0.15 €
TOTAL (IVA incluido)				109.26 €

COSTE COMPONENTES PCB			
CONCEPTO	COSTE UNITARIO	UNIDADES	COSTE
Núcleos RM8/I, N97	2.43 €	4	9.72 €
Clips RM8	0.25 €	10	2.50 €
Núcleos P26/16, N87	0.49 €	4	1.96 €
Carrete P26/16	0.56 €	4	2.24 €
Núcleos P36/22, N87	6.84 €	4	27.36 €
Carrete P36/22	0.90 €	4	3.60 €
Núcleos E25/13/7, N87	0.54 €	4	2.16 €
Carretes Verticales E25/13/7	0.97 €	2	1.94 €
Carrete RM8/I	0.66 €	5	3.30 €
Carretes RM8/I Horizontal	1.09 €	8	8.72 €
Termopares	8.42 €	5	42.10 €
UC3843AN	1.40 €	2	2.80 €
STF20NF20	1.40 €	2	2.80 €
NTSJ20100CTG	1.24 €	2	2.48 €
WA-T220-101E	2.20 €	1	2.20 €
2N2222	2.01 €	2	4.02 €
Potenciometro 1K 9mm	0.85 €	2	1.70 €
TOTAL (IVA incluido)			121.60 €

Figura 114: Presupuesto para llevar a cabo el TFG.

ANEXO III: ESQUEMÁTICO Y PCB BUCK

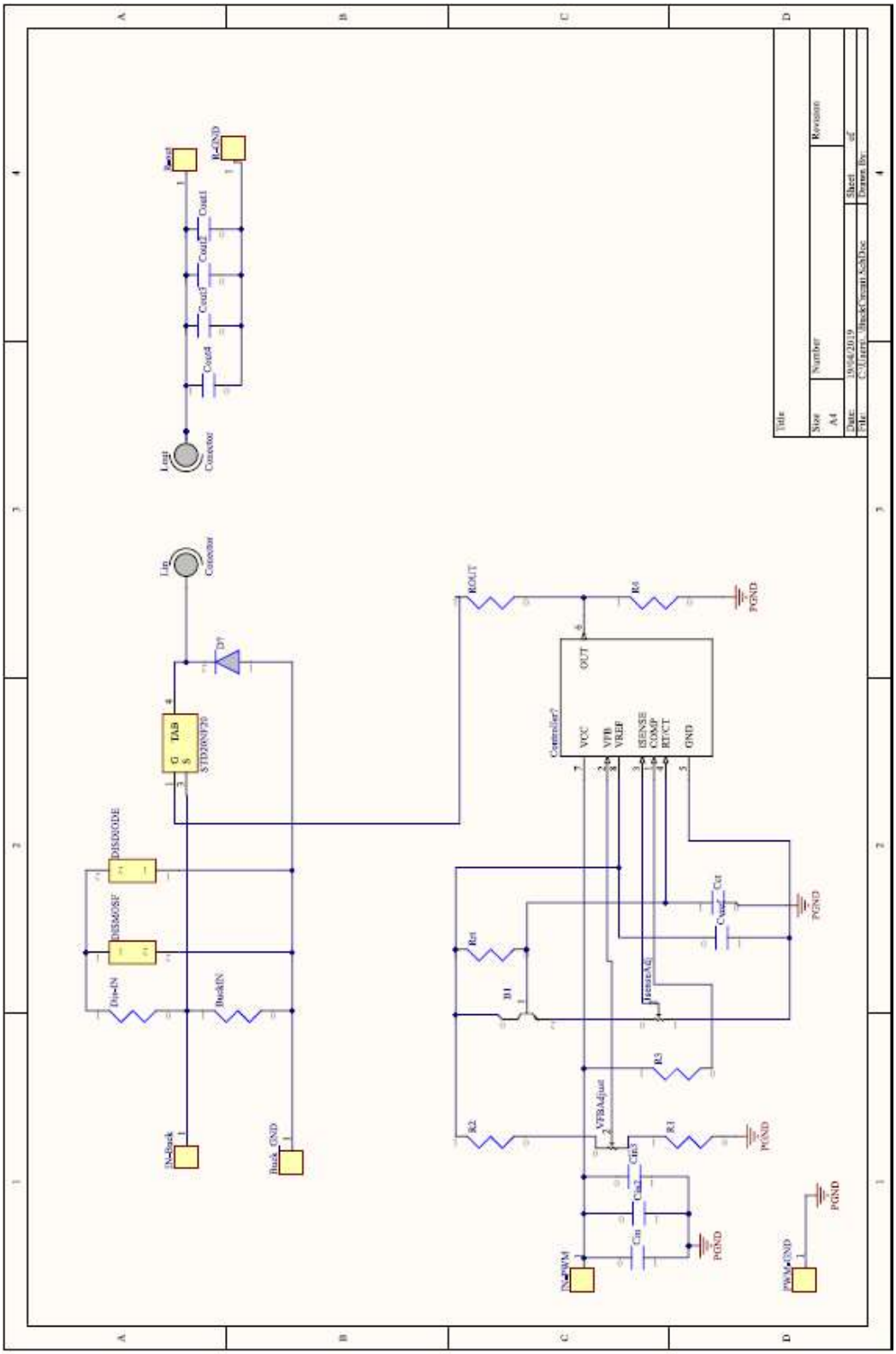


Figura 115: Esquemático Prototipo Convertidor Reductor (Buck).

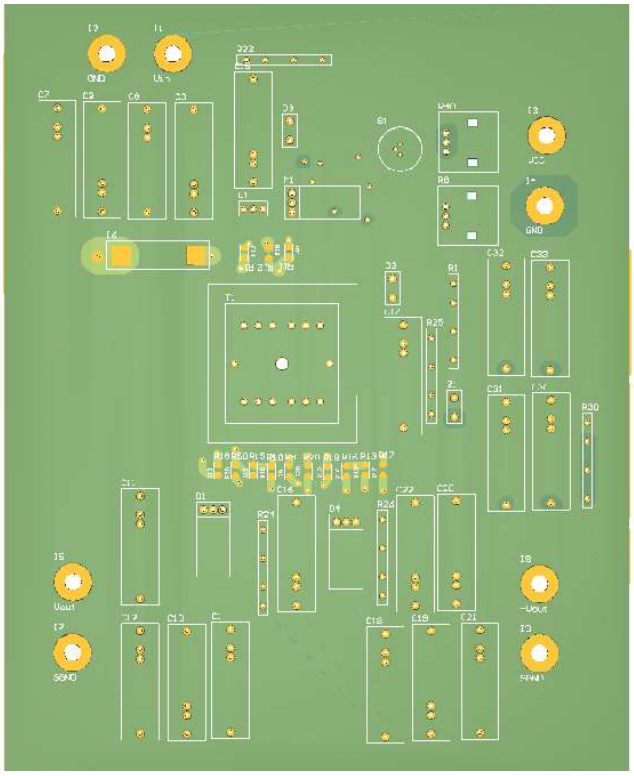


Figura 116: Vista superior PCB del convertidor.

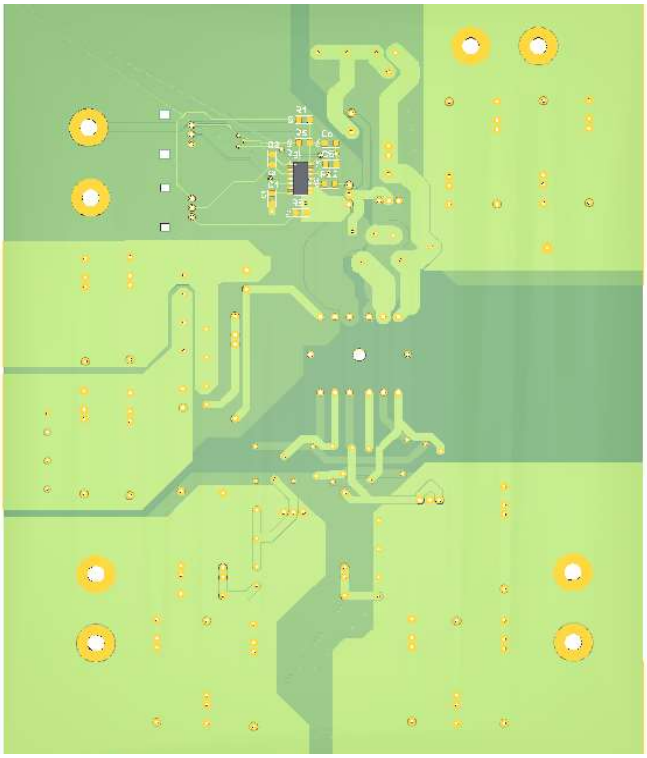


Figura 117: Vista inferior PCB del convertidor

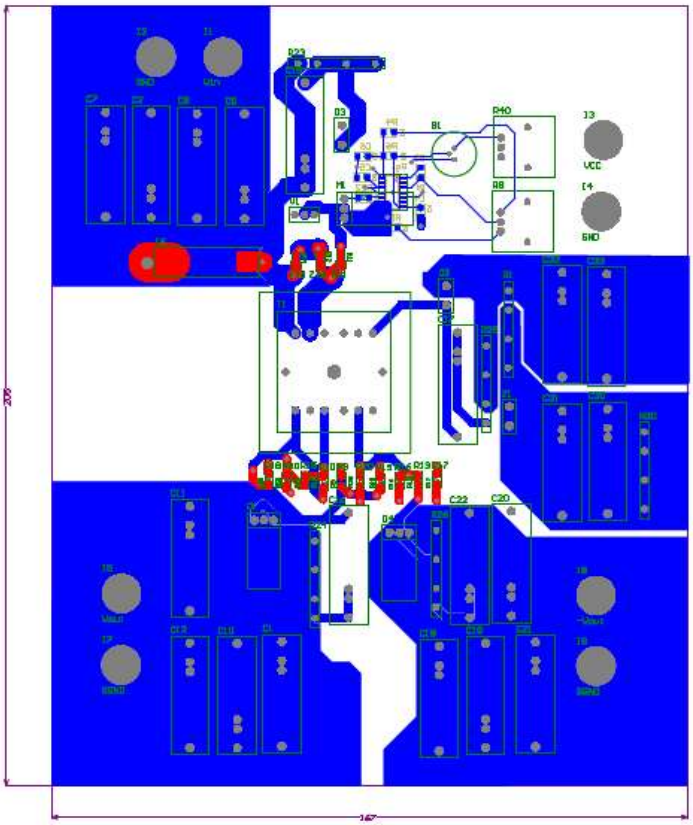


Figura 118: Capas de Conexión PCB.

Figura 119: Prototipo experimental de la PCB con componentes soldados.

ANEXO IV: MODELO NÚCLEO CATIA Y PROTOTIPO REAL

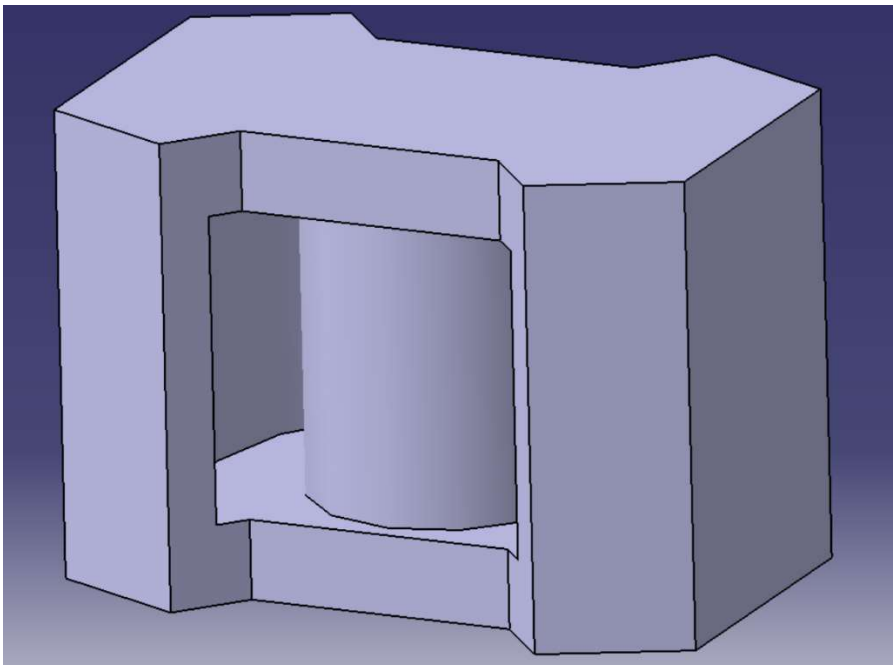


Figura 120: Diseño en CATIA del núcleo RM8/I.

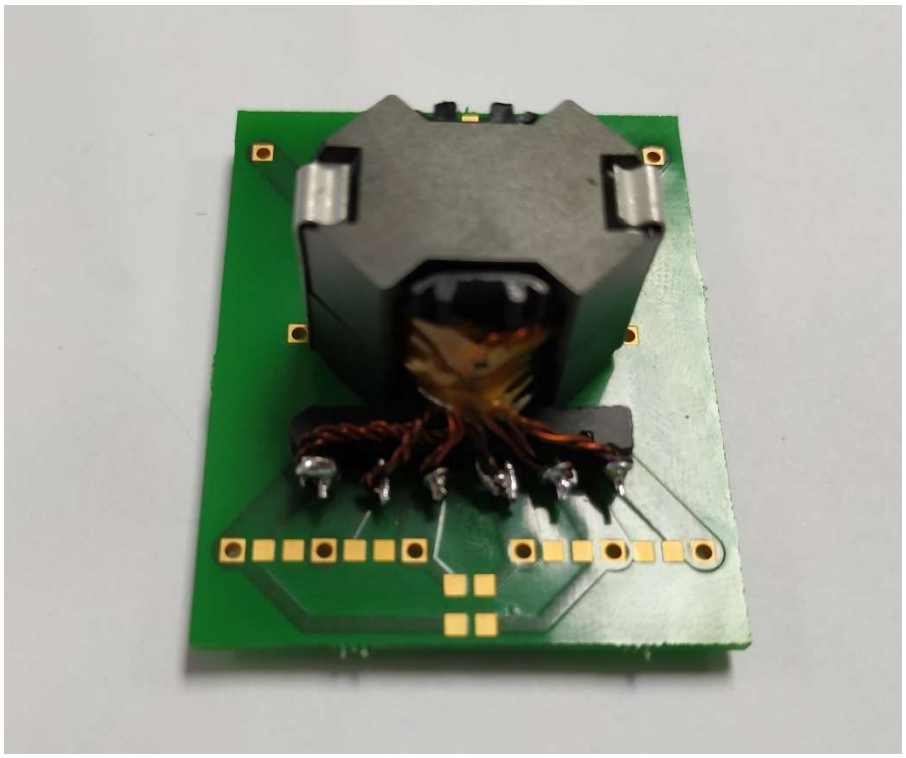


Figura 121: Prototipo experimental Bobina acoplada a su PCB.

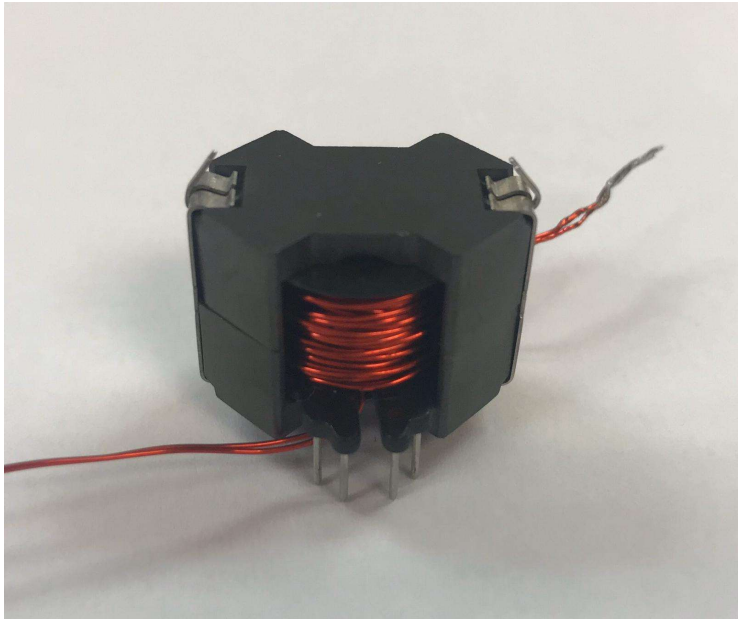


Figura 122: Bobina objeto del ensayo experimental.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Tipos de Convertidores Eléctricos 6
Figura 2: Circuito magnético con fuente de tensión variable con el tiempo [28] 8
Figura 3: Diagrama B-H durante la magnetización de un núcleo magnético [28] 8
Figura 4: Diagrama B-H durante la desmagnetización de un núcleo magnético [28] 9
Figura 5: Ciclo de Histéresis en material ferromagnéticos [28] 9
Figura 6: Corrientes de Foucault en núcleo magnético [20]. 10
Figura 7: Pérdidas en el núcleo magnético en función de la densidad de flujo magnético. [18] 12
Figura 8: Pérdidas magnéticas específicas como función de la Temperatura. [19] 12
Figura 9: Sección devanado en núcleo magnético RM8/I 14
Figura 10: Datos experimentales de la variación de la resistencia de cobre con la temperatura. [22] 16
Figura 11: Barra de longitud dx, sección S y conductividad térmica k atravesada por un flujo J [1]. 19
Figura 12: Coeficiente de Película en Convección Natural para diferentes geometrías. [7] 21
Figura 13: Resistencias térmicas de conducción, radiación, convección y contacto 23
Figura 14. Cálculo del Factor de Forma S para diferentes geometrías [6]. 24
Figura 15: Cálculo del Factor de Forma S para diferentes geometrías [6]. 24
Figura 16: Resistencias Térmicas de Conducción del Objeto 2 en 2 direcciones. En la imagen de la izquierda se muestra la resistencia de conducción en dirección 1 y en la imagen de la derecha en dirección 2. 24
Figura 17: Influencia del número de Biot en el transitorio térmico (PiroBloc, 2016) [26] 26
Figura 18: Evolución del Transitorio térmico utilizando el Método de la Capacitancia 27
*Figura 19: Barra de sección a*b infinita [14]* 28
Figura 20: Análisis multidimensional del Transitorio Térmico [14]. 29
Figura 21: Análisis multidimensional del Transitorio Térmico [14]. 29
Figura 22: Diagrama de Bloques del modelo realimentando el valor de la temperatura. 30
Figura 23:Diagrama de Bloques del Modelo Térmico Estacionario. 31
Figura 24: Diagrama de Diagrama de Bloques del Modelo Térmico Transitorio. 34
Figura 25: Geometría ejemplo de cálculo del coeficiente de película equivalente. 39
Figura 26: Esquema Nodal de la Geometría Ejemplo. 40
Figura 27: Árbol de Resistencias Térmicas Objeto 1-Objeto 2-Ambiente 40
Figura 28: Árbol de Resistencias Cara lateral derecha Objeto 1 - Ambiente 41
Figura 29: Régimen Permanente cuando el cubo tiene generación interna de calor. 42
Figura 30: Árbol de Resistencias Cara Lateral Derecha Cubo- Ambiente 42
Figura 31: Régimen Permanente cuando el paralepípedo es sustituido por el coeficiente de película equivalente. 43
Figura 32: Régimen Transitorio cuando el paralepípedo es sustituido por el coeficiente de película equivalente. 44
Figura 33: Régimen Permanente cuando el paralepípedo es sustituido por el coeficiente de película equivalente y la longitud equivalente. Adicionalmente, se aumentan las pérdidas respecto a la Figura 32 44
Figura 34: Conjunto de 4 objeto representados en 2D donde el objeto presenta generación interna de calor. 46
Figura 35: Pared plana con generación interna de calor que presenta la pared izquierda adiabática y la pared derecha disipa calor al ambiente con un coeficiente de película h. 49
Figura 36: Transitorio Térmico para B=0.75. 52
Figura 37: Perfil de Temperaturas respecto a T-Tamb en RRPP en el punto x=1 para B=0.75. 52
Figura 38: Transitorio Térmico en x=0.25 para diferentes valores de x. 53
Figura 39: Evolución de la Potencia para valores de discretización de la constante temporal de dt = 1s y dt = 10s. 55
Figura 40: Especificaciones en el Convertidor DC:DC 56
Figura 41: Gráficas Voltaje y Corriente en la Bobina del Convertidor DC:DC 57

Figura 42: Especificaciones constructivas bobina para Convertidor DC:DC. 57
Figura 43: Bobina con Núcleo RM8/I 3C90. 58
Figura 44: Resultados comportamiento eléctrico convertidor DC:DC en ANSIS 58
Figura 45:Peso de las Pérdidas y porcentaje de ventana en el devanada 58
Figura 46: Simplificación geométrica del núcleo RM8/I de la bobina del convertidor DC: DC. 59
Figura 47: Simplificación de la geometría de la bobina del convertidor DC:DC. 59
Figura 48: División geométrica de la geometría simplificada de la bobina del convertidor CD:CD en 6 objetos. El Objeto 4 representa el devanado y el resto de los objetos, el núcleo magnético. 60
Figura 49: Ejes principales de análisis del Objeto 3. 60
Figura 50: Direcciones principales de análisis de los objetos 5 y 4. 61
Figura 51: Dimensiones Geometría simplificada. L representa una longitud lineal y R una longitud lineal. Los subíndices representan la dirección principal de análisis y el objeto respectivamente. 61
Figura 52: Árbol nodal de la geometría simplificada en dirección z. 62
Figura 53: Árbol de resistencias térmicas Objeto 6 - Objeto 2 – Ambiente en dirección z. 63
Figura 54: Árbol de resistencias térmicas Objeto 6 - Objeto 2 - Objeto 1 – Ambiente en dirección z. 63
Figura 55: Evaluación en paralelo de las resistencias térmicas de convección en las caras laterales y la cara superior del objeto 1. 63
Figura 56: Árbol de resistencias térmicas Objeto 1 - Ambiente en dirección z. 64
Figura 57: Árbol de resistencias térmicas Objeto 6 - Ambiente en dirección z. 65
Figura 58: Árbol de resistencias térmicas Objeto 2 - Ambiente, Objeto 3 - Ambiente y Objeto 5 - Ambiente en dirección z. 66
Figura 59: Árbol nodal del componente magnético en dirección x. 67
Figura 60: Árbol nodal del componente magnético en dirección y. 68
Figura 61: Árbol nodal del componente magnético en dirección R. 68
Figura 62: Árbol de resistencias térmicas Objeto 5 - Ambiente en dirección R. 68
Figura 63: Árbol de resistencias térmicas Objeto 4 - Ambiente en dirección R. 69
Figura 64: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 1 tiene como generación interna de calor $Ptest,1$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y. 76
Figura 65: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 2 tiene como generación interna de calor $Ptest,2$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y. 76
Figura 66: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 3 tiene como generación interna de calor $Ptest,3$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y. 76
Figura 67: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 4 tiene como generación interna de calor $Ptest,4$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y. 77
Figura 68: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 5 tiene como generación interna de calor $Ptest,5$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y. 77
Figura 69: Resultados en Régimen Permanente de la simulación del componente magnético cuando el Objeto 6 tiene como generación interna de calor $Ptest,6$. La Imagen de la izquierda representa la temperatura en la superficie y la imagen de la derecha representa la temperatura en 5 planos de corte paralelos al plano x-y. 77
Figura 70: Objeto 1 en el corte del plano x-z. 80
Figura 71: Objeto 1 en el corte del plano x-z. 83
Figura 72:Objeto 1 en el corte del plano y-z 85
Figura 73: Objeto 2 en el corte del plano x-z. 86

Figura 74: Objeto 2 en el corte del plano x-z 88
Figura 75: Objeto 2 en el corte del plano y-z. 89
Figura 76: Objeto 4 en el corte de cualquier plano R-z 91
Figura 77: Objeto 5 en el corte de cualquier plano R-z 97
Figura 78: Objeto 5 en el corte de cualquier plano R-z 100
Figura 79: Objeto 6 en el corte con el plano x-z. 101
Figura 80: Objeto 6 en el corte con el plano x-z. 104
Figura 81: Objeto 6 en el corte con el plano y-z. 105
Figura 82: Resultado del transitorio térmico en la superficie de cada uno de los objetos con el método de la Capacitancia Modificado. 107
Figura 83: Función que modela el transitorio térmico extraída de la simulación en régimen transitorio. Es equivalente para todos los objetos y simulaciones. 108
Figura 84: Perfil de temperaturas en el plano de corte y-z en el régimen permanente de la geometría no simplificado para el caso 1. 116
Figura 85: Evolución del transitorio térmico de temperaturas en la superficie exterior del objeto 5 para el caso 1. 116
Figura 86: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 1 en el caso 1. 116
Figura 87: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie de los objetos 2 y 3 en el caso 1. 117
Figura 88. Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 4 en el caso 1. 117
Figura 89. Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 5 en el caso 1. 118
Figura 90: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 6 en el caso 1. 118
Figura 91: Perfil de temperaturas en ºC en el plano de corte y-z en el régimen permanente de la geometría no simplificado para el caso 2. 119
Figura 92: Evolución del transitorio térmico de temperaturas en la superficie exterior del objeto 5 para el caso 2. 119
Figura 93: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 1 en el caso 2. 120
Figura 94: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie de los objetos 2 y 3 en el caso 2. 120
Figura 95: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 4 en el caso 2. 121
Figura 96: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 5 en el caso 2. 121
Figura 97: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 6 en el caso 2. 122
Figura 98: Perfil de temperaturas en (ºC) en el plano de corte y-z en el régimen permanente de la geometría no simplificado para el caso 3. 122
Figura 99: Evolución del transitorio térmico de temperaturas en la superficie exterior del objeto 5 para el caso 3. 123
Figura 100: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 1 en el caso 3. 123
Figura 101: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie de los objetos 2 y 3 en el caso 3. 124
Figura 102: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 4 en el caso 3. 124
Figura 103: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 5 en el caso 3. 125
Figura 104: Evolución del transitorio térmico de los 3 modelos en la superficie del objeto 6 en el caso 3. 125

Figura 105: Topología de análisis experimental.[27] 126
Figura 106: Imagen del prototipo experimental tomada mediante la cámara térmica para las condiciones de onda expuestas en la Tabla 12. 126
Figura 107: Gráfica comparativa del transitorio térmico entre los 3 modelos térmicos y los datos recogidos del prototipo experimental. 127
Figura 108: Perfil de temperaturas en ºC en el plano de corte y-z en el régimen permanente de la geometría no simplificado para las pérdidas del prototipo experimental. 128
Figura 109: Perfil de temperaturas en ºC en el plano de corte x-y en el régimen permanente de la geometría no simplificado para las pérdidas del prototipo experimental 128
Figura 110: Perfil de temperaturas en ºC en el plano de corte x-y en el régimen permanente de la geometría no simplificado para las pérdidas del prototipo experimental. 128
Figura 111: Evolución del transitorio térmico de temperaturas en la superficie exterior del objeto 5 para las pérdidas del prototipo experimental. 129
Figura 112: Diagrama de Gantt del TFG. 147
Figura 113: Estructura de Descomposición del TFG. 148
Figura 114: Presupuesto para llevar a cabo el TFG. 148
Figura 115: Esquemático Prototipo Convertidor Reductor (Buck). 149
Figura 116: Vista superior PCB del convertidor. 150
Figura 117: Vista inferior PCB del convertidor 150
Figura 118: Capas de Conexión PCB. 151
Figura 119: Prototipo experimental de la PCB con componentes soldados. 151
Figura 120: Diseño en CATIA del núcleo RM8/I. 152
Figura 121: Prototipo experimental Bobina acoplada a su PCB. 152
Figura 122: Bobina objeto del ensayo experimental. 153

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Constantes de la ecuación de Steinmetz para los diferentes rangos de valor de frecuencia. [18] 13
Tabla 2:Rangos de frecuencia de la Ecuación de Steinmetz. [18] 13
Tabla 3: Errores Relativos de las simulaciones de los escenarios 1 y 2 respecto a la simulación de la geometría completa. 45
Tabla 4: Propiedades del componente magnético. 62
Tabla 5: Propiedades de los materiales y temperatura límite. 75
Tabla 6: Temperatura medias en la superficie en cada objeto para cada simulación. El primer subíndice representa el objeto y el segundo representa el objeto al que ha sido asignado $Ptest$. 78
Tabla 7: Número de Biot de cada objeto para aplicar el criterio de la capacitancia. 79
Tabla 8: Pérdidas en el núcleo y el devanado para los 3 casos evaluados. 115
Tabla 9: Errores Relativos en la superficie interior del devanado para el caso 1. 119
Tabla 10: Errores Relativos en la superficie interior del devanado para el caso 2. 122
Tabla 11: Errores Relativos en la superficie interior del devanado para el caso 3. 125
Tabla 12: Datos de la bobina y la onda en el prototipo experimental. 126
Tabla 13: Errores Relativos en la superficie interior del devanado entre los modelos térmicos y los resultados del prototipo experimental. 127
Tabla 14: Errores Relativos en la superficie interior del devanado entre la simulación de la geometría no simplificada y los resultados del prototipo experimental. 129

ABREVIATURAS Y ACRÓNIMOS

- AEF – Análisis por Elementos Finitos
- C – Capacitancia.
- CA – Corriente alterna.
- CEI – Centro de Electrónica Industrial
- CM – Capacitancia Modificada
- DC – Corriente Continua.
- IGBT – Insulated Gate Bipolar Transistor.
- JFET – Junction Field-Effect Transitory.
- MEF – Modelado por Elementos Finitos.
- MOSFET – Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor.
- PCB – P*rinted Circuit Board.*
- TFG – Trabajo Final de Grado.
- UPM – Universidad Politécnica de Madrid.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ángel Franco Gracia. (2008, Mayo). *Fenómenos de Transporte*. Retrieved from http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/transporte/cond_calor/conduccion/conduccion.html

[2] BEHERA, P. (2009). *ANALYSIS OF TRANSIENT HEAT CONDUCTION IN DIFFERENT GEOMETRIES.* Rourkela.

[3] Bertotti, G. (1992). Dynamic Generalization of the Scalar Preisach Model of Hysteresis col. 29. In G. Bertotti.

[4] CENGEL, Y. A. (2006). Basic of Heat Transfer. In Y. A. CENGEL, *HEAT TRANFER 2º EDITION* (pp. 11-25).

[5] CENGEL, Y. A. (2006). BIOT NUMBER APROACH FOR LUMPED ANALYSIS. In *HEAT TRANSFER 2º EDITION* (p. 2012).

[6] Cengel, Y. A. (2006). COEFIENTE S. In Y. A. CENGEL, *HEAT TRANFER 2º EDITION* (p. 171).

[7] CENGEL, Y. A. (2006). Cooling of Electronic Equipment. In Y. A. CENGEL, *HEAT TRANFER 2º EDITION* (p. 815).

[8] CENGEL, Y. A. (2006). Fourier Number. In Y. A. CENGEL, *CENGEL, YUNUS A.* (p. 223).

[9] CENGEL, Y. A. (2006). Heat Conduction Equation. In Y. A. CENGEL, *HEAT TRANFER 2º EDITION* (pp. 62-81).

[10] CENGEL, Y. A. (2006). Heisler Graphs. In Y. A. CENGEL, *HEAT TRANSFER 2º EDITION* (pp. 218-222).

[11] CENGEL, Y. A. (2006). LUMPED SYSTEM ANALYSIS. In *HEAT TRANSFER 2º EDITION* (pp. 210-211).

[12] CENGEL, Y. A. (2006). Steady Heat Conduction. In Y. A. CENGEL, *HEAT TRANSFER SECOND EDITION* (pp. 171-172).

[13] CENGEL, Y. A. (2006). Transient Heat Conduction. In Y. A. CENGEL, *HEAT TRANFER 2º EDITION* (pp. 209-239).

[14] CENGEL, Y. A. (2006). Transient Heat Conduction in Multidimensional Systems. In Y. A. CENGEL, *HEAT TRANSFER 2º EDITION* (pp. 231-234).

[15] Diccionario Actual. (2019). *¿Qué es un convertidor Eléctrico?* Retrieved from https://diccionarioactual.com/convertidor-electrico

[16] Editorial, T. (2015, Junio 5). *Skin and Proximity Effects of AC Current*. Retrieved from https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/skin-and-proximity-effects-of-ac-current/

[17] Encyclopaedia Britannica. (n.d.). *Hysteresis*. Retrieved from https://www.britannica.com/science/hysteresis#ref2692

[18] FERROXCUBE. (2009). *FERROXCUBE 3F3 Ferrite DataBook.*

[19] FERROXCUBE. (2009). *FERROXCUBE DATA HANDBOOK.*

[20] FreePng. (n.d.). *Corrientes de Foucault, Freepng*. Retrieved from Freepng.es

[21] Kapil Venkatachalani, C. R. (2002). *Accurate Prediction of Ferrite Core Loss with Nonsinusoidal Waveforms.* Buenos Aires.

[22] Laboratorio de física 2 – Unive. Favaloro. (2001). Variación de la resistencia con la temperatura. In I. Arata, F. Arrufat, P. Palacios, & S. Folie.

[23] *Min H. Kao Department of Electrical Engineering & Computer Science.* (2019). Retrieved from FERROCUBE Design: http://web.eecs.utk.edu/courses/spring2019/ece482/components/magnetics/Ferrox%20Cube%20Design.pdf

[24] Muhlethaler, J. (2012). Improved Core-Loss Calculation for Magnetic. *IEEE*, 10.

[25] P. R. Wilson, S. M. (2002). Simulation of Magnetic Component Models in Electric Circuits Including Dynamic Thermal Effects. In S. M. P. R. Wilson.

[26] PiroBloc. (2016, Noviembre 9). *CÓMO SIMPLIFICAR PARA NÚMEROS DE BIOT PEQUEÑOS*. Retrieved from https://www.pirobloc.com/blog-es/como-simplificar-para-numeros-de-biot-pequenos/

[27] Salinas, G. (2019). *Thermal Model of Inductors and Transformers Based on 3D FEA for Circuit Simulators.*

[28] Universidad de Cordoba. (2019). *Pérdidas Magnéticas por efecto de Histéresis.* Retrieved from http://www.uco.es/grupos/giie/cirweb/teoria/tema_11/tema_11_17.pdf

[29] *Wikipedia*. (2019, Octubre 17). Retrieved from Señales Eléctricas: https://es.wikipedia.org/wiki/Se%C3%B1al_el%C3%A9ctrica

[30] Wikipedia. (2019, Diciembre). *Función Onda Periódica*. Retrieved from https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_peri%C3%B3dica

[31] Wikipedia. (2019, Septiembre 21). *Joule heating*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Joule_heating

[32] Wikipedia. (2019). *Thermal Runaway*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_runaway

[33] Wikipedia. (2020, Enero). *Corrientes de Foucault*. Retrieved from https://es.wikipedia.org/wiki/Corriente_de_Foucault