ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Transmitiendo mensajes

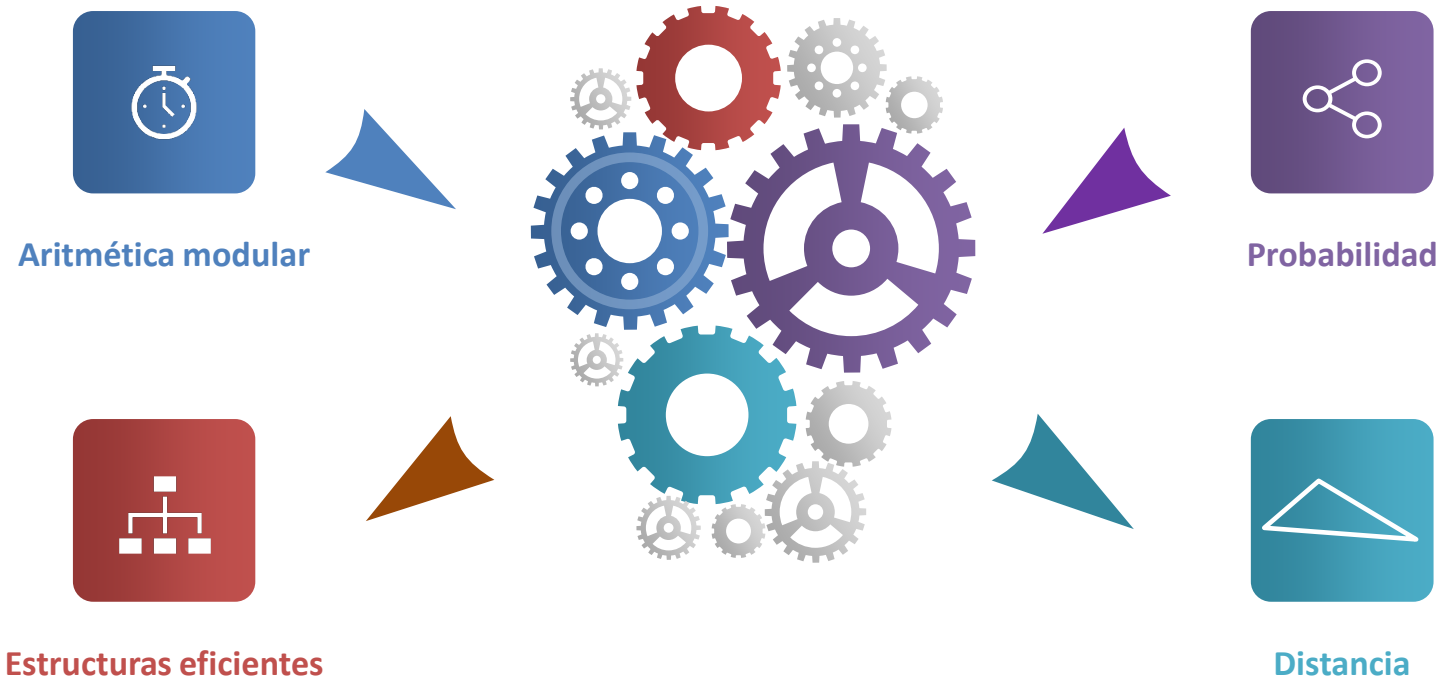
María Jesús Vázquez Gallo (UPM)/Pablo Fernández Gallardo (UAM)

Seminario Estalmat 05-04-2025

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
incibe_ INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD
UC Universidad de Cantabria
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España
Purposeful Ventures
CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos
Excmo. Ayuntamiento de Castro Urdiales

Segundo año: A vueltas con el azar + **Transmitiendo mensajes**

$\approx 75\ min.$



ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Motivación

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

incibe_ INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD

UC Universidad de Cantabria

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

Purposeful Ventures

CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

Imagina que tienes que transmitir instrucciones a un robot para que encienda o apague cierto sistema o para que se mueva en dirección Norte/Sur/Este/Oeste.

¿Cómo lo harías?

C. Shannon (1948):

unidad de información binaria: BIT *(binary digit)*

1 bit: 0, 1 — **2** posibles valores/mensajes

2 bits: 00, 01, 10, 11 — **4** posibles: 00, 01, 10, 11

…

8 bits (1 BYTE) → 256 mensajes

…

n bits → ¿cuántos posibles mensajes?

En la era de la transmisión de la información:
millones de dispositivos comunicándose a través de la red.
Compras, secretos, transacciones… **Ruidos, interferencias**…

Si se producen **errores** en la transmisión…

¿Cómo detectar errores automáticamente?
¿Y cómo corregirlos?

¿Cómo transmitir información de manera fiable y eficiente?

Ingeniero y matemático C. Shannon (trabajó para la telefónica Bell, hoy AT&T):
"Teoría matemática de la comunicación" en 1948.
(Internet nació hacia 1970!!!)

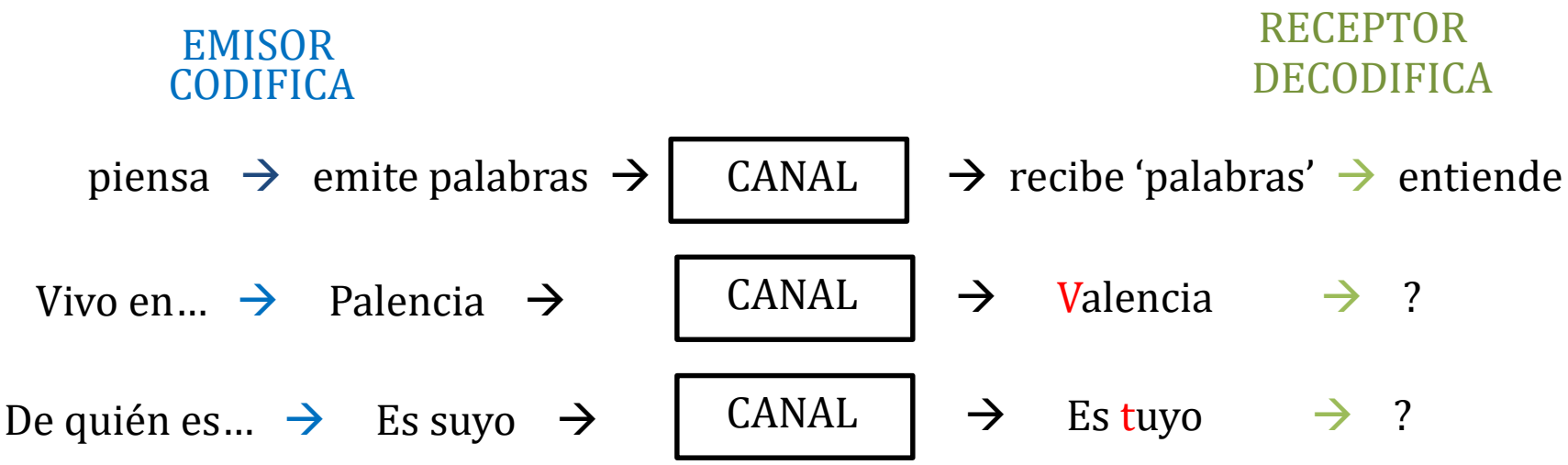
ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Ejemplos sencillos

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
incibe_ INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD
UC Universidad de Cantabria
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA
Purposeful Ventures
CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos
EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

Ejemplo: Al comunicarnos en un idioma usamos palabras del diccionario –código-.

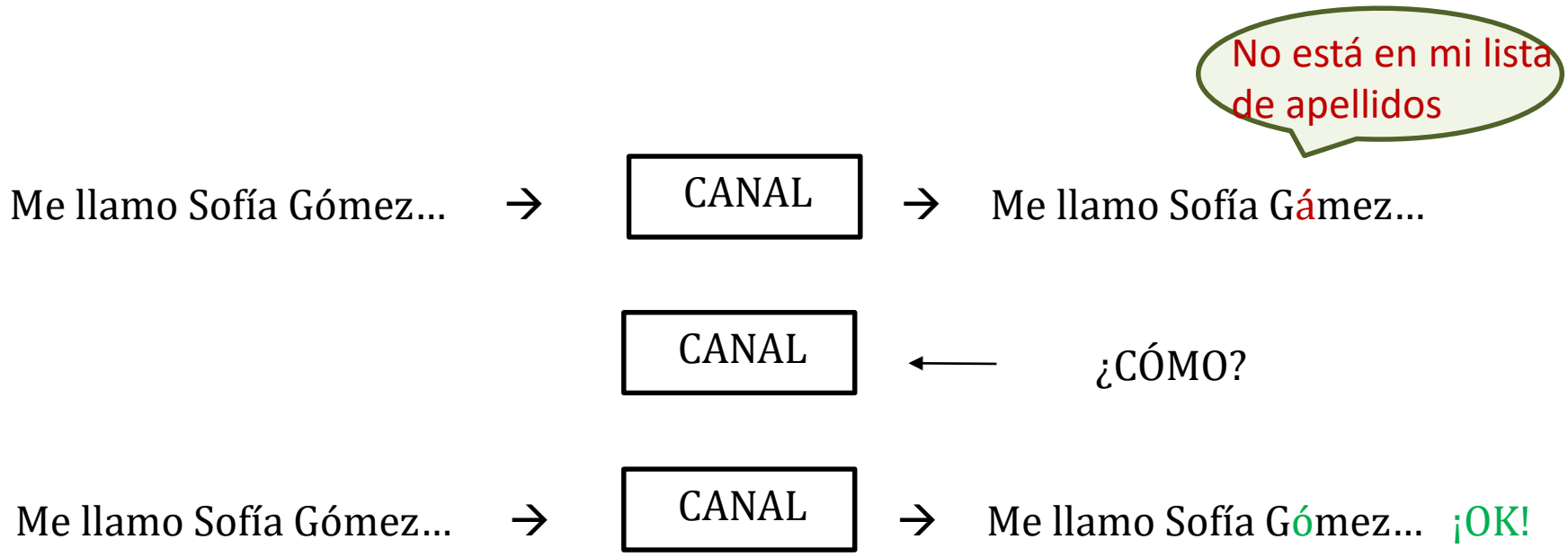


Queremos codificar y decodificar para detectar y corregir errores automáticamente

¿Cómo hacerlo?

Imagina que te han invitado a un concierto privado y tienes que dar tu nombre en la entrada…

¿Cómo detectamos y corregimos errores al comunicarnos?



Ideas del lenguaje común:

Detecta errores si una palabra no está en diccionario.

Corrige errores repitiendo, añadiendo redundancia.

Idea: ¡repetir!

- Codificar: 0 → 00, 1→11. **Código de repetición 2** : {00,11}

Detecta: No está en el diccionario

1101 → 11 11 00 11 → CANAL → 11 10 00 11 → 1 ? 0 1

codificación

¿Decodificación?

- Codificar: 0 → 000, 1→111. **Código de repetición 3** : {000,111}

Detecta: No está en el diccionario

1101 → 111 111 000 111 → CANAL → 111 110 000 111 → 1101

codificación

Decodificamos a la palabra más cercana

También en un idioma:

Mi bisidleta es negra…

Pues mi bicicleta es azul…

Idea: detectamos error si no está en diccionario y corregimos con la palabra más cercana.

¡Detección y corrección automática!

Ejercicio 1:

Código de repetición 3 para transmitir no (0) o sí (1).
¿Qué mensajes se pueden recibir? ¡Decodifícalos!

Ejercicio 1:

Código de repetición 3 para transmitir no (0) o sí (1).
¿Qué mensajes se pueden recibir? ¡Decodifícalos!

decodificación

000	→	000
100	→	000
010	→	000
001	→	000
110	→	111
101	→	111
011	→	111
111	→	111

¡OJO! Cuanta más repetición, mejor detección y corrección, pero ocupamos más espacio

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Reflexión

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

incibe_ INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD

UC Universidad de Cantabria

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

Purposeful Ventures

CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

¿Siempre podemos corregir con la palabra más cercana?

Me dejas tu cafa …

¿casa?, ¿caja?, ¿cama?, ¿gafa?…

Detectamos que ha habido un error pero
no siempre podemos corregir automáticamente

Idea: no sabemos corregir porque
hay varias palabras a *distancia mínima*
(y el contexto no decide).

Pero: ¿Y si se produce más de un error?
Si al codificar 1 bit con repetición 3, se recibe 110
¿decodificamos a 111 o a 000?

Incertidumbre… recuerda las ideas de probabilidad

Ejemplo: Sabemos que en cierto canal el 99% de los bits se transmiten correctamente.
Al aplicar un código de repetición 3 y decodificar a la palabra más cercana:

¿Nuevo porcentaje de transmisión correcta?

Ejemplo: Canal con **transmisión correcta del 99% de los bits**.

Sin código: Emitiendo

Probabilidad p: número entre 0 y 1

- **1 bit**: probabilidad(transmisión correcta)= **0.99**

  (probabilidad(error en 1 bit) $= 1 - 0.99 = 0.01 = p$).

- **100 bits**: transmisión correcta en los 100 bits

  $0.99^{100} \approx 0.3660 \rightarrow 36.60\%$

- **200 bits**: transmisión correcta en los 200 bits

  $0.99^{200} \approx 0.1334 \rightarrow 13.34\%$

Ejemplo: Canal con **transmisión correcta del 99% de los bits**.

Con código de repetición 3: Emitiendo

- **1 bit**: probabilidad(transmisión correcta)=

$$p(0\ errores) + p(1\ error^{*}) =$$

$$0.99^3 + 3\ 0.99^2\ 0.01 =$$

$$0.970299 + 0.029403 = 0.999702 \rightarrow \approx \mathbf{99.97\%}$$

* Decodificamos a la palabra más cercana.

- **100 bits**: transmisión correcta en los 100 bits

$$0.999702^{100} \approx 0.9706 \rightarrow \approx \mathbf{97.06\%}$$

- **200 bits**: transmisión correcta en los 200 bits

$$0.999702^{200} \approx 0.9421 \rightarrow \approx \mathbf{94.21\%}!!!$$

Mucho mejor que el $\approx 13.34\%$ *sin código*

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Buscando soluciones más eficientes

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

incibe_ INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD

UC Universidad de Cantabria

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

Purposeful Ventures

CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

Problema 1 :

Quieres enviar al Perseverance en Marte:
muévete en dirección Sur
(N: 00, S: 01, E: 10, O:11)

Sur → 01 → CANAL → 11 → Oeste ¡GLUB!

Codifica para ser capaz de detectar 1 error, minimizando la longitud de los mensajes.

Pista: no es un código de repetición.

00 → ? 01 → ? 10 →? 11 →?

Problema 1: Posible idea añadir un solo bit que controla la "paridad" de la suma de dígitos

$0 + 0 = 0$

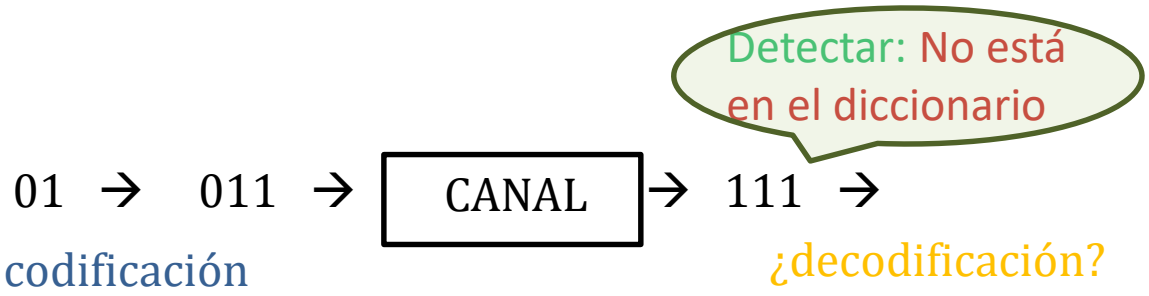
$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 0$ (impar+impar=par)

Codificamos:

00 → 000, 01 → 011 , 10 →101, 11 →110



En general: $a_1 a_2 \rightarrow a_1 a_2 a_3 \ con \ a_3 \equiv a_1 + a_2 \ mod \ 2$

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Visualizando

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

incibe_ INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD

UC Universidad de Cantabria

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

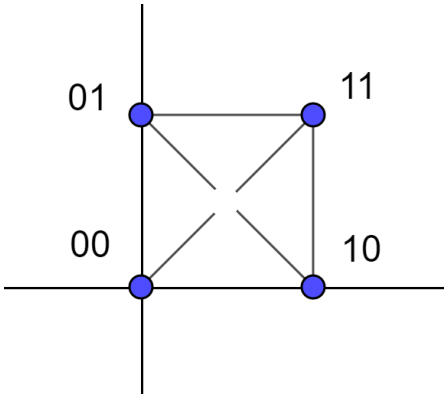
Purposeful Ventures

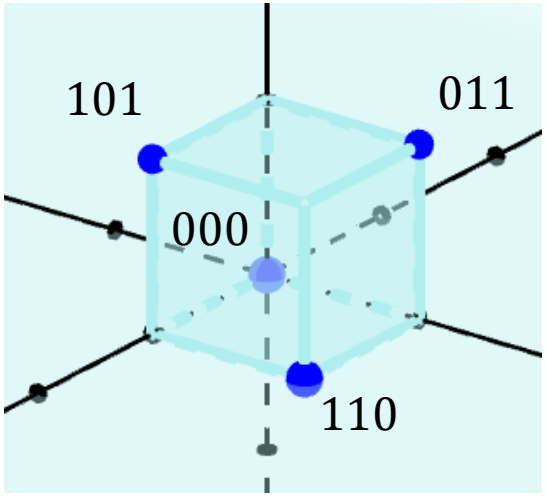
CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

Problema 2: Código de paridad ={000, 011, 101, 110}

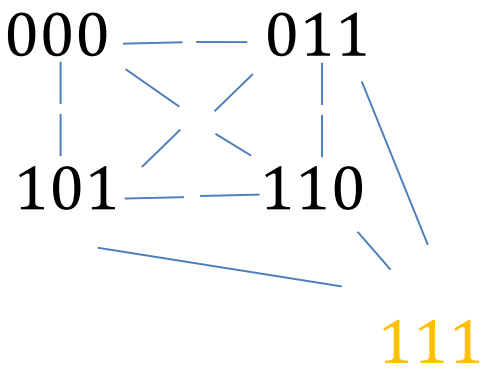
Sin código





1. ¿Por qué este código detecta 1 error?
2. ¿Puede corregirlo?
3. ¿Puede detectar 2 errores?

Problema 2: Código de paridad={000, 011, 101, 110}



1. Al producirse 1 error, caemos fuera del código.

2. No se puede corregir porque no existe la palabra más “cercana”

3. No se pueden detectar 2 errores porque hay palabras a “distancia” 2.

codificación decodificación

Emisor: 01 → 011 → CANAL → 101 → Receptor: NO detecta

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Abstrayendo

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

incibe_ INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD

UC Universidad de Cantabria

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

Purposeful Ventures

CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

Definición: La DISTANCIA (de Hamming) de un código es el mínimo nº de diferencias entre dos palabras cualesquiera.

Ejemplo: Código de paridad tiene "distancia 2":
00 → 000, 01 → 011 , 10 → 101, 11 → 110

Ejemplo: Código de repetición 3 {000,111} tiene distancia 3

0 → 000, 1 → 111

$$000 \quad \_\_ \quad \_\_ \quad 111 \qquad d = 3$$

Idea: A mayor distancia mayor **capacidad de detección**,
pero si d es muy grande puede haber pocas palabras disponibles.

Ejercicio 3:

¿Cuántos errores podrá detectar un código de distancia n?

Ejercicio 3

¿Cuántos errores podrá detectar un código de distancia n?

Un código de distancia n
detecta como máximo $n - 1$ errores,

Entre dos palabras del código hay al menos n diferencias, luego:

- si hay hasta $n - 1$ errores, la palabra recibida no está en código.

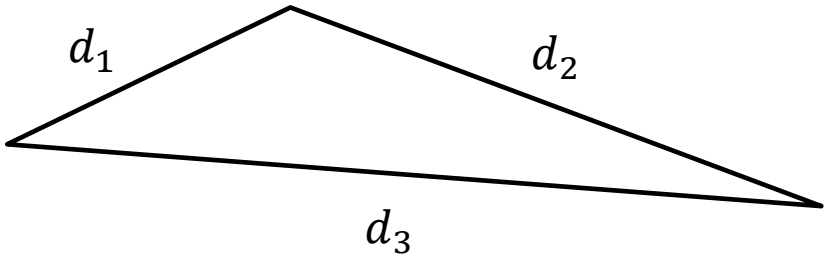
- si hay n errores o más: la palabra recibida puede estar el código (podemos haber saltado de una palabra del código a otra).

Observación:

La distancia de un código es una **distancia de verdad** (una buena manera de medir).

Explica por qué:

- ¡Nunca es negativa!
- La distancia entre dos … no depende del orden en la pareja.
- Se cumple la desigualdad *triangular*

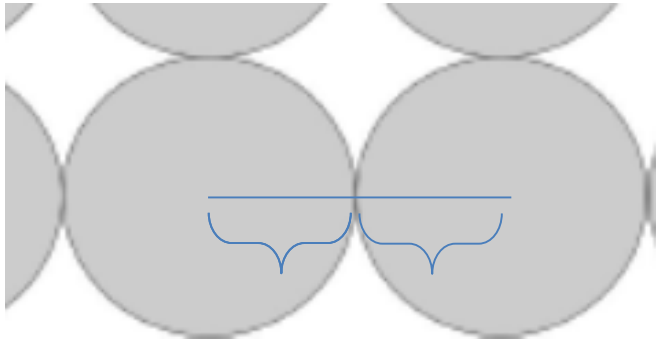


$$d_i \leq d_j + d_k$$

Problema 4: Capacidad de corrección

En general, dado un código con distancia d impar.
¿Cuántos errores será capaz de corregir?

000 ___ ___ 111



Problema 4: ¿Cuántos errores corrige un código con d impar?

Como $d = 2k + 1 = k + (k + 1)$, entonces:

- Hasta k errores, la palabra más cercana a la recibida es la original;
- Si hay $k + 1$ errores o más, puede haber otra palabra distinta de la original que sea su palabra más cercana.

Código corrige hasta $k = \frac{d-1}{2}$ errores.

Ejemplo: d=3 corrige 1 error, d=5, corrige 2 errores, etc.

000 _ _ 111

Obs: Si d par, $d = 2m$, corrige $\frac{d-2}{2}$ err. 0000 _ _ _ 1111

En general, corrige la parte entera de $\frac{d-1}{2}$.

Problema 5: Escribe demostración con desigualdad triangular.

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Saber más

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Gobierno de España · Ministerio para la Transformación Digital y de la Función Pública · Secretaría de Estado de Telecomunicaciones e Infraestructuras Digitales

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

incibe_ Instituto Nacional de Ciberseguridad

UC Universidad de Cantabria

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España

Purposeful Ventures

CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

Excmo. Ayuntamiento de Castro Urdiales

Otros códigos en la vida cotidiana:

Código de barras: Sistema *EAN-13* identifica cada producto con 13 dígitos:
El último dígito, a_{13} se calcula de forma que:
$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) + 3\,(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + a_{13}$
sea 0 (pero en la aritmética módulo 10).
Calcula a_{13} para estas 12 cifras 1 8 4 7 4 0 3 7 0 3 6 0. Comprueba. (Excel).

Código QR: (Quick Response) formado por
cuadrados negros (0) y blancos (1).
El mensaje se codifica en conjuntos de 8 cuadrados, (llamados codewords) que incluyen información y control de paridad.

Código letra NIF 00053224*W* Explora…

Y haciéndonos preguntas:

¿Cómo sistematizar los códigos de paridad? ¿Matrices?

¿Eficiencia al almacenar código?

¿Buenos códigos en relación con tasas como distancia/longitud?

¿Buenos códigos con palabras ‘bien’ colocadas?

¿Bit cuántico? ¿Continuo frente a discreto?

REFERENCIAS

- FERNÁNDEZ GALLARDO, Pablo; GIL ÁLVAREZ, Omar (2001):
  "Una introducción a los códigos detectores y correctores de errores".

- GIL, Omar (2011): *Matemáticamente tenemos chance*. Montevideo: Ed. Fin de Siglo.

- HAMMING, Richard W. (1950): "Error Detecting and Error Correcting Codes"
  en *The Bell System Technical Journal*, Vol. XXIX, Nº 2, 147-160.

- HAMMING, Richard W. (1980b): "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics" en
  American Mathematical Monthly, Vol. 87, Nº 2,pp. 81-90.

- SHANNON, Claude E. (1948): "A Mathematical Theory of Communication"
  en *The Bell System Technical Journal*, Vol. XXVII, pp. 379-423 (Julio), 623-656.

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT

Comunidad de Madrid

Jugando

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU

Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia

incibe_ INSTITUTO NACIONAL DE CIBERSEGURIDAD

UC Universidad de Cantabria

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE ESPAÑA

Purposeful Ventures

CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CASTRO URDIALES

Terminamos jugando:

Damos un número de 4 cifras a cada persona de un grupo.

Los números son: 1024, 2005, 3130, 2113, 1600, 5020, 4210, 7232, 1544, 8411, 9230…

Después de guardarlos un rato, nos los devuelven.

Entre esos números encontramos: 1024, 4300, 2032, 5020, 8123, 3502, 2354, 1085, 6001…

¿Alguien ha querido darnos el cambiazo?

ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

ESTALMAT
Comunidad de Madrid

Transmitiendo mensajes

María Jesús Vázquez Gallo/Pablo Fernández Gallardo

Seminario Estalmat 05-04-2025

Financiado por la Unión Europea NextGenerationEU
Gobierno de España · Ministerio para la Transformación Digital y de la Función Pública
Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia
incibe_ Instituto Nacional de Ciberseguridad
UC Universidad de Cantabria
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España
Purposeful Ventures
CIEM Centro Internacional de Encuentros Matemáticos
Excmo. Ayuntamiento de Castro Urdiales