



POLITÉCNICA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

José Gutiérrez Abascal, 2. 28006 Madrid
Tel.: 91 336 3060
info.industriales@upm.es

www.industriales.upm.es



Víctor Hugo Ponce Alcañiz

05 TRABAJO FIN DE GRADO

INDUSTRIALES

TRABAJO FIN DE GRADO

ESTUDIO GEOMÉTRICO DE UN MODELO DE CONTAGIO

TRABAJO FIN DE GRADO PARA
LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
GRADUADO EN INGENIERÍA EN
TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

SEPTIEMBRE 2022

Víctor Hugo Ponce Alcañiz

TUTORES DEL TRABAJO FIN DE GRADO:

Cristina Sardón Muñoz
Fernando Jiménez Alburquerque



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Trabajo Fin de Grado

Estudio geométrico de un modelo de contagio

Víctor Hugo Ponce Alcañiz

Tutora: Cristina Sardón Muñoz

Cotutor: Fernando Jiménez Alburquerque

Septiembre de 2022

Resumen

En este trabajo se estudian algunas propiedades de un modelo de contagio Susceptible-Infectado-Susceptible en el contexto de la geometría diferencial, consiguiendo así facilitar la obtención de soluciones numéricas fiables y de manera más eficiente computacionalmente.

En concreto, se comprueba que dicho modelo es un sistema de Lie, lo que permite obtener soluciones con diferentes condiciones iniciales a partir de una solución existente y evita tener que volver a integrar numéricamente. Además, al admitir una formulación hamiltoniana, se pueden utilizar integradores simplécticos que dan soluciones cercanas a la dinámica real en simulaciones con intervalos temporales largos.

En los capítulos 1 y 2 se resume el cálculo en variedades y se explora brevemente su aplicación a la Mecánica Clásica mediante la geometría simpléctica y la geometría de Poisson. En los capítulos 3 y 4 se exploran los integradores Runge-Kutta simplécticos y los sistemas de Lie. Por último, en el capítulo 5 se aplica lo estudiado al modelo de contagio SIS con fluctuaciones propuesto por Nakamura y Martinez en [19] y generalizado en [20].

Lista de símbolos y abreviaturas

V^*	Dual del espacio vectorial V
$\text{Hom}(U, V)$	Homomorfismos (aplicaciones lineales) entre U y V
$\text{Aut}(V)$	Automorfismos (homomorfismos invertibles) en V
$[T]_{(\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)}$	Matriz de $T \in \text{Hom}(U, V)$ respecto a las bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_V$
$\otimes$	Producto tensorial
$\wedge$	Producto exterior
$(M, \mathcal{A})$	Variedad diferenciable
$(U, \mathbf{x})$	Carta
$(x^1, \dots, x^n)$	Coordenadas locales
γ, δ	Curvas en una variedad
$D_{[\gamma]}(p)$	Derivada direccional de la clase de curvas equivalentes a γ en p
$T_p M$	Espacio tangente a M en el punto p
$T_p^* M$	Espacio cotangente a M en el punto p
$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big _p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big _p$	Base local de $T_p M$ asociada a las coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$
$\mathbf{d}_p x^1, \dots, \mathbf{d}_p x^n$	Base local de $T_p^* M$ asociada a las coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$
$E \xrightarrow{\pi} M$	Fibrado de espacio total E , espacio base M y proyección π
$\Gamma(M, E)$	Secciones del fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$
$TM \xrightarrow{\tau} M$	Fibrado tangente de M
$T^*M \xrightarrow{\pi} M$	Fibrado cotangente de M
$T_s^r(V)$	Espacio tensorial de orden (r, s) $V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$
$\mathcal{T}_s^r(M)$	Espacio de campos tensoriales de orden (r, s) en la variedad M
$\mathfrak{X}(M)$	Espacio de campos vectoriales en M , $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{T}_0^1(M)$
$\mathfrak{X}^*(M)$	Espacio de campos covectoriales en M , $\mathfrak{X}^*(M) = \mathcal{T}_1^0(M)$
$\Omega^k(M)$	Espacio de k -formas en M
X, Y	Campos vectoriales en una variedad
$\mathbf{d}$	Derivada exterior
$\mathbf{i}_X$	Contracción con un campo X
F_*	<i>Push-forward</i> de F
F^*	<i>Pull-back</i> de F
Φ^X	Flujo del campo X
$\{\Phi_t^X\}$	Grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\Phi_t^X = \Phi^X(\cdot, t)$
$\mathfrak{X}_t(M)$	Espacio de campos vectoriales dependientes del tiempo
$X \sim \{X_t\}$	Campo vectorial dependiente del tiempo
$(V, [\cdot, \cdot])$	Álgebra de Lie
$[X, Y]$	Conmutador de dos campos vectoriales
$\mathcal{L}_X$	Derivada de Lie respecto al campo X
$\omega, (M, \omega)$	Forma simpléctica y variedad simpléctica
$\omega^b, \omega^\sharp$	Aplicaciones musicales bemol y sostenida
J	Matriz simpléctica $\begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix}$
$(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$	Coordenadas de Darboux de una variedad simpléctica
Ω_ω	Forma de volumen asociada a la forma simpléctica ω
$\{\cdot, \cdot\}$	Corchete de Poisson
Λ	Bivector de Poisson
$(P, \{\cdot, \cdot\})$ ó (P, Λ)	Variedad de Poisson
q^i, p_i	Coordenadas generalizadas y momentos conjugados
X_f	Campo hamiltoniano asociado a f

(M, ω, H) ó (P, Λ, H)	Sistema hamiltoniano
$\mathbf{F}, \mathbf{X}$	Campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$
RK	Runge-Kutta
Ψ_h	Integrador Runge-Kutta de paso h
$\frac{a_{ij}}{b_i}$	Tabla de Butcher
$\Phi(x_1, \dots, x_n; k)$	Regla de superposición
VG	Vessiot-Guldberg
V^X	Álgebra minimal del campo X
$X^{[k]}$	Prolongación diagonal k -ésima del campo X
SIS	Susceptible-Infectado-Susceptible
SISf	SIS con fluctuaciones
$E[X]$	Esperanza de la variable aleatoria X . Otra notación, común en física, es $\langle X \rangle$
$\text{Var}(X)$	Varianza de la variable aleatoria X . Otra notación es σ_X^2

Índice general

Resumen	III
Lista de símbolos y abreviaturas	IV
Introducción	1
Sistemas de Lie	1
Integración geométrica	2
Objetivos	3
1. Fundamentos geométricos	5
1.1. Variedades diferenciables	5
1.2. Vectores y covectores en variedades: el espacio tangente	7
1.3. Campos tensoriales en variedades: fibrados y secciones	11
1.4. Ecuaciones diferenciales en variedades	16
1.5. $\mathfrak{X}(M)$ como álgebra de Lie	18
1.6. Geometría simpléctica	21
1.7. Geometría de Poisson	26
2. Mecánica Geométrica	29
2.1. Introducción	29
2.2. Mecánica hamiltoniana en variedades	30
3. Integradores simplécticos	35
3.1. Fundamentos de la integración numérica	35
3.2. Integradores Runge-Kutta simplécticos	41
4. Sistemas de Lie	49
4.1. Definiciones generales	49
4.2. Obtención de reglas de superposición	51
5. Aplicación a un modelo de contagio	59
5.1. El modelo SIS con fluctuaciones	59
5.2. Regla de superposición del SISf como sistema de Lie	60
5.3. Integración simpléctica del SISf como sistema hamiltoniano	64
Conclusiones	67
A. Método de las características	69
B. Código de algoritmos e integradores en Octave	71
B.1. Autonomización de un campo vectorial	71
B.2. Regla de superposición para el SISf	72
B.3. Euler explícito	73

B.4. Euler implícito	74
B.5. Punto medio	75
B.6. Trapecio	76
B.7. Runge-Kutta 4 clásico	77
B.8. Euler simplético I	78
B.9. Euler simplético II	80
B.10. Runge-Kutta 4 simplético	82
C. Planificación y presupuesto	85
Bibliografía	87

Introducción

Sistemas de Lie

Un sistema de Lie es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, no autónomo, y cuya solución general se puede escribir mediante una *regla de superposición* de una familia genérica de soluciones particulares y varias constantes de integración que determinan la condición inicial.

A pesar de constituir una clase muy reducida de ecuaciones diferenciales, su interés radica en el hecho de que

1. Hace uso de gran número de ramas de la Geometría Diferencial: estructuras geométricas, análisis de conexiones, simetrías, etc.
2. Aparecen en muchos problemas de diversas áreas científicas como la Física, la Ingeniería o la Biología.
3. La disponibilidad de la regla de superposición hace innecesarias nuevas integraciones numéricas si se dispone de las suficientes soluciones particulares aproximadas.

El inicio del estudio de los sistemas de Lie se remonta a finales del siglo XIX con los trabajos pioneros de Vessiot, Guldberg y Lie.

En 1885, Sophus Lie propuso la primera definición de estos sistemas y demostró el ahora conocido como *teorema de Lie-Scheffers*. Este teorema, en la terminología actual, caracteriza los sistemas de Lie como aquellos que *admiten un álgebra de Vessiot-Guldberg*. También relaciona la dimensión de dicho álgebra con el número de soluciones particulares necesarias para la regla de superposición, resultado que ahora conocemos como *condición de Lie*.

Por su parte, Vessiot y Guldberg, generalizando un resultado de Königsberger de 1883, demostraron en 1893 que las ecuaciones diferenciales en la recta real que admiten un principio de superposición son necesariamente sistemas lineales, afines, de Riccati, o se pueden transformar en dichos sistemas mediante un cambio de coordenadas independiente del tiempo.

Aunque en los siguientes años Vessiot y Lie siguieron desarrollando la teoría y generalizaron algunos resultados, los sistemas de Lie dejaron de suscitar interés durante varias décadas.

Ya en los 80-90 del siglo pasado, Pavel Winternitz y sus colegas del Centre de Recherches Mathématiques de la Universidad de Montreal —la conocida como *escuela CRM*, formada por el propio Winternitz, Harnad, Hussin, Grundland y otros más— dieron a esta teoría un nuevo impulso. Desarrollaron varios métodos de obtención de reglas de superposición: el primero basado en la demostración original de Lie, y otro basado en la acción de un grupo y una curva en el grupo de Lie asociado. Winternitz también estudió los sistemas de Lie «más elementales» (los llamados *no desacoplables*) y clasificó sus álgebras de Lie para dar reglas de superposición. Durante este periodo, muchos autores volvieron a investigar los sistemas de Lie y sus aplicaciones a nuevas áreas, como la Teoría de Control.

Tras varios años de investigación en esta área, los autores de la escuela CRM pasaron a trabajar en otros temas, y la investigación de los sistemas de Lie pasó a manos de nuevos autores como José Cariñena, Javier de Lucas y Cristina Sardón, entre otros. Estos autores se centran ahora en el estudio de los sistemas de Lie mediante técnicas geométricas más modernas. Por

ejemplo, en [14] se estudian los sistemas de Lie en distintas estructuras geométricas: simplécticas, de Poisson, de Jacobi y k -simplécticas, entre otras.

Para una exposición más detallada de la historia de los sistemas de Lie se puede consultar [14] y su extensa colección de referencias bibliográficas históricas.

En la actualidad, se trabaja, entre otras cosas, en buscar generalizaciones de los sistemas de Lie, aplicaciones a sistemas estocásticos, sistemas de Lie discretos (ecuaciones en diferencias) y aplicaciones a la Teoría de Control [18].

Integración geométrica

El inicio de la integración numérica se inició —como viene siendo habitual— de la mano de Leonhard Euler, que en 1768 dio el primer algoritmo de integración numérica, el conocido como *método de Euler*. Más de un siglo más tarde, Carl Runge exploró nuevos algoritmos más precisos. El algoritmo original de Euler se puede escribir como la aproximación de una integral mediante una suma de Riemann, y en su paper de 1895, Runge logró definir métodos más precisos usando otras reglas de cuadratura, como la del trapecio o la del punto medio. Como estas cuadraturas exigen saber el valor de la función a aproximar en puntos desconocidos, usó variantes del método de Euler para aproximar estos valores y así poder usar las nuevas reglas de cuadratura. De esta manera, surgen los métodos numéricos *de varias etapas*. En 1900, Karl Heun propuso el método de tercer orden que lleva su nombre y exploró métodos de orden 4. Por su parte, Wilhelm Kutta (1901) llegó a analizar métodos de orden 5 (para ecuaciones simples, no sistemas) e introdujo el famoso método de orden 4 (Runge-Kutta 4 clásico: B.7) tan extendido hasta el día de hoy.

La obtención de algoritmos de órdenes mayores es compleja, pues requiere métodos de un gran número de pasos sujetos a un número de condiciones que crece rápidamente con el orden deseado. Sin embargo, los algoritmos de orden alto son más eficientes que los métodos de orden bajo con pasos de integración pequeños, por lo que tienen gran interés en la actualidad. Varios autores como Butcher, Hairer o Wanner, entre otros, han dedicado buena parte de su carrera al estudio de integradores de órdenes superiores.

Cuando las capacidades de los computadores eran más limitadas, se intentaban diseñar algoritmos explícitos y con tablas de Butcher que, por ejemplo, redujesen el almacenamiento de datos necesarios en los pasos intermedios. Ahora que ese problema no es tan crítico, se priorizan otros aspectos. Por ejemplo, a partir de los años 80 del siglo pasado, se han empezado a estudiar los integradores que preserven propiedades geométricas. Vogelaere, Feng-Kang, Sanz-Serna, Lasagni, Suris y otros autores estudiaron los integradores simplécticos. Estos integradores son apropiados para sistemas hamiltonianos porque se mantienen cerca de la solución real —incluso en intervalos largos de simulación— y conservan mejor la energía. Esto se puede justificar mediante el *Backward Error Analysis*, concepto introducido por James Wilkinson en 1960 en el ámbito del álgebra lineal numérica e introducido años más tarde por Warming y Hyett en el estudio de la integración numérica de ecuaciones diferenciales. La idea clásica del estudio del error (el *Forward Error Analysis*) es comparar la solución exacta del sistema a integrar y su aproximación numérica, mientras que el *Backward Error Analysis* compara el sistema original con un *sistema modificado* cuya solución exacta es la proporcionada por el algoritmo de integración empleado. Este enfoque resulta más útil en el estudio de la convergencia y estabilidad de los métodos numéricos de ecuaciones diferenciales. Permite, por ejemplo, explicar por qué los integradores simplécticos aplicados a sistemas hamiltonianos conservan la energía de manera aproximada y no exacta [9].

Otros ejemplos de algoritmos de integración que hacen uso de propiedades geométricas son los métodos de Magnus y los Runge-Kutta-Munthe-Kaas, que aproximan ecuaciones diferenciales en grupos de Lie. Estos algoritmos se han usado recientemente [18] en la integración de sistemas de Lie, pues recordemos que su solución general en forma de regla de superposición se puede obtener mediante una única solución particular de otro sistema de Lie relacionado al sistema

original, pero definido en un grupo de Lie asociado su álgebra de Vessiot-Guldberg [14, §3.5].

Objetivos

En este trabajo se van a aplicar técnicas geométricas a un modelo de contagio (SISf, ver capítulo 5) para obtener simulaciones precisas a la vez que se reduce el coste computacional necesario en caso de usar los métodos tradicionales. En concreto, los objetivos son

1. Exponer resumidamente la teoría de Geometría Diferencial y Mecánica Geométrica, necesarias para poder definir y aplicar dichas técnicas.
2. Desarrollar integradores simplécticos en Octave para aplicarlos al sistema SISf planteado como sistema hamiltoniano, obteniendo así resultados más fiables para intervalos largos de simulación que con integradores no simplécticos.
3. Encontrar una regla de superposición del sistema SISf que permita obtener nuevas soluciones (para distintas condiciones iniciales) a partir de una solución obtenida por integración numérica. Estas nuevas soluciones, al venir dadas por una expresión algebraica, apenas tienen coste computacional y tienen un orden de precisión similar al de la solución integrada.

Capítulo 1

Fundamentos geométricos

En este capítulo se exponen las principales definiciones y resultados necesarios para generalizar el cálculo en espacios euclídeos a espacios más generales: las variedades diferenciables. A continuación, se definen las variedades simplécticas y de Poisson, y se explora brevemente la relación que existe entre ellas.

Se han omitido las demostraciones por considerarse contenido básico. Para una exposición concisa y más detallada del tema se puede consultar [1, 2].

1.1. Variedades diferenciables

Un espacio euclídeo es un conjunto $\mathbb{R}^n$ con estructura de espacio vectorial y equipado con un producto interior que permite definir la norma euclídea. Las operaciones $(+, \cdot, \|\cdot\|)$ permiten definir una métrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, y a partir del espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ se construye la topología estándar en $\mathbb{R}^n$. Una vez construida la topología estándar se pueden definir las nociones de continuidad y diferenciabilidad.

En conjuntos más generales muchas veces ni siquiera contamos con la estructura de espacio vectorial, por lo que no se puede seguir el camino anterior. Para poder dar una definición de continuidad análoga a la del análisis en $\mathbb{R}^n$, recurrimos a la definición abstracta de espacio topológico.

Definición 1.1. Una *topología* en un conjunto M es una clase de subconjuntos $(\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M))$, llamados *conjuntos abiertos* de M , tal que

1. El conjunto vacío y todo M son abiertos: $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.
2. La unión arbitraria de abiertos es abierta: $\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{O} : \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$.
3. La intersección finita de abiertos es abierta: $\forall \{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \mathcal{O} : \bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{O}$.

El par $(M, \mathcal{O})$ recibe el nombre de *espacio topológico*.

Definición 1.2. Una aplicación $F : M \rightarrow N$ entre espacios topológicos $(M, \mathcal{O}_M)$ y $(N, \mathcal{O}_N)$ es *continua* en $p \in M$ si (Figura 1.1)

$$\forall V \in \mathcal{O}_N : F(p) \in V \implies \exists U \in \mathcal{O}_M : \\ p \in U \text{ y } F(U) \subseteq V.$$

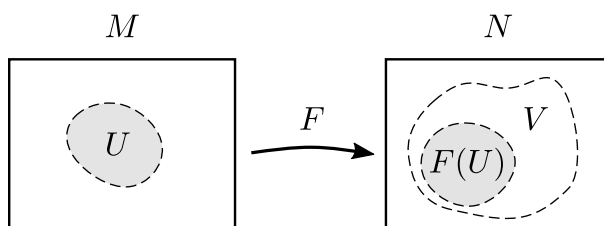


Figura 1.1: Continuidad de $F : M \rightarrow N$

Se dice que F es continua en $U \in \mathcal{O}_M$ si es continua en todos los puntos de U .

Definición 1.3. Una aplicación $F : M \rightarrow N$ entre espacios topológicos $(M, \mathcal{O}_M)$ y $(N, \mathcal{O}_N)$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva y tanto F como F^{-1} son continuas en todo M y N , respectivamente. Si existe un homeomorfismo entre M y N , se dice que ambos espacios son *homeomorfos*.

Definimos ahora la noción de variedad topológica. De manera intuitiva, una variedad topológica es un espacio topológico que localmente «parece» euclídeo. A diferencia del espacio euclídeo —en el que hablábamos indistintamente de *puntos* y *vectores*—, en una variedad topológica solamente podemos hablar de puntos. Para introducir la idea de *vector* se necesita estructura adicional hasta llegar a las llamadas *variedades diferenciables*.

Definición 1.4. Una *carta* en un espacio topológico $(M, \mathcal{O})$ es un par $(U, \mathbf{x})$, donde

- U es un conjunto abierto de M : $U \in \mathcal{O}$.
- $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo llamado *sistema de coordenadas locales* en U . Se suele escribir $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, y cada x^i es una *coordenada local* en M .

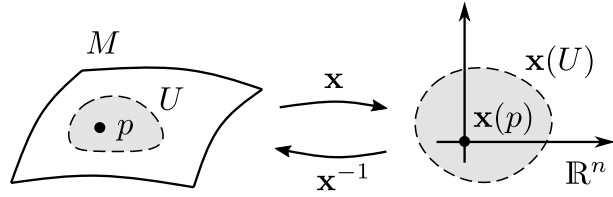


Figura 1.2: Carta $(U, \mathbf{x})$ de M centrada en p

Si $p \in U$, se dice que M es *localmente euclídeo* de dimensión n en p . Si $\mathbf{x}(p) = \mathbf{0}$, se dice que la carta $(U, \mathbf{x})$ está *centrada* en p (Figura 1.2).

Definición 1.5. Una *variedad topológica* de dimensión n es un espacio topológico localmente euclídeo de dimensión n en todos sus puntos.

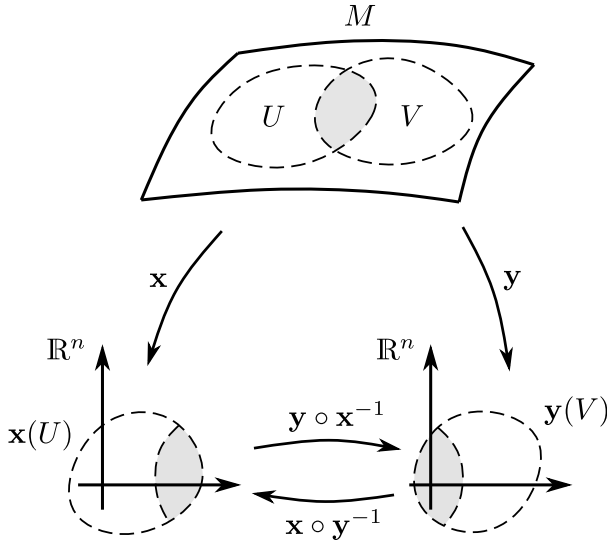


Figura 1.3: Cartas compatibles

Definición 1.6. Dos cartas $(U, \mathbf{x})$ y $(V, \mathbf{y})$ de una variedad topológica M son *compatibles* C^∞ si $U \cap V = \emptyset$, o si las *aplicaciones de transición*

$$\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{y}(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1} : \mathbf{y}(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{x}(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

que son inversas entre sí, son de clase C^∞ (Figura 1.3).

Definición 1.7. Un *atlas* de una variedad topológica $(M, \mathcal{O})$ es un conjunto de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ que son compatibles entre sí y que recubren M ($M = \bigcup_\alpha U_\alpha$).

Se dice que una carta $(V, \mathbf{y})$ es *compatible* con el atlas $\mathcal{A}$ si es compatible con cualquier carta $(U, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}$.

La relación de compatibilidad entre cartas es reflexiva y simétrica, pero no transitiva. Sin embargo, tenemos la siguiente

Proposición 1.8. Si dos cartas son compatibles con un atlas, entonces son compatibles entre sí.

Definición 1.9. Un atlas de M es *máximo* si contiene todas las cartas compatibles con él. Equivalentemente, un atlas máximo es una clase de equivalencia de cartas compatibles entre sí y que recubren M .

Una variedad topológica puede tener distintos atlas máximos.

Definición 1.10. Una *variedad diferenciable* de dimensión n es un par $(M, \mathcal{A})$, donde

- M es una variedad topológica $(M, \mathcal{O})$ de dimensión n .
- $\mathcal{A}$ es un atlas máximo de M , que recibe el nombre de *estructura diferenciable* de M .

Para definir la diferenciabilidad y otros conceptos asociados a aplicaciones entre variedades diferenciables, así como para demostrar muchos resultados, se suele usar la misma estrategia:

1. Elegir cartas y componer la aplicación entre variedades con coordenadas y sus inversas hasta obtener una aplicación entre espacios euclídeos que «represente» a la aplicación original.
2. Usar esa aplicación resultante para la definición o demostración.
3. Comprobar que el resultado es independiente de las cartas utilizadas.

Las Definiciones 1.11 y 1.12 ilustran lo anterior.

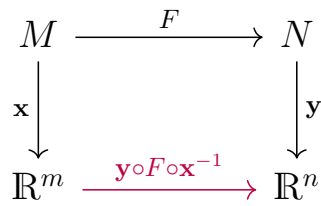


Figura 1.4: Diferenciabilidad de $F : M \rightarrow N$

Definición 1.11. Sean $(M, \mathcal{A}_M)$ y $(N, \mathcal{A}_N)$ dos variedades diferenciables de dimensiones m y n . Se dice que un homeomorfismo $F : M \rightarrow N$ es *suave* o C^∞ en $p \in M$ si existen $(U, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}_M$ y $(V, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}_N$, con $p \in U$ y $F(p) \in V$ tales que la aplicación entre espacios euclídeos¹

$$\mathbf{y} \circ F \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es C^∞ en $\mathbf{x}(p)$ (Figura 1.4). Se dice que F es C^∞ en $U \in \mathcal{O}_M$ si es C^∞ en todo punto de U . Al conjunto de funciones $F : M \rightarrow N$ que son C^∞ en todo M lo llamaremos $C^\infty(M, N)$. Si $N = \mathbb{R}$, escribimos simplemente $C^\infty(M)$.

La condición de compatibilidad C^∞ de la estructura diferenciable es necesaria porque permite demostrar que si se cumple la definición anterior con las cartas $(U, \mathbf{x})$ y $(V, \mathbf{y})$, se cumplirá también para cualquier otro par de cartas $(U', \mathbf{x}') \in \mathcal{A}_M$ y $(V', \mathbf{y}') \in \mathcal{A}_N$, con $p \in U'$ y $F(p) \in V'$.

1.2. Vectores y covectores en variedades: el espacio tangente

En $\mathbb{R}^n$ hablábamos indistintamente de puntos y de vectores, pues cada punto p se puede identificar biunívocamente con una «flecha» $\mathbf{p} = p - 0$ que parte del origen y acaba en p . De esta manera, además de poder sumar vectores, podemos sumar un vector a un punto y obtener otro punto.

En una variedad en general no es posible restar puntos, a no ser que se considere *embebida* en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ de dimensión igual o superior a la de la propia variedad ($m \geq n$).² En tal caso se puede adoptar la resta euclídea al poder considerarse que $M \subset \mathbb{R}^m$, pero también $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $M \subset \mathbb{R}^{m+2}$, ...

Es preferible dar una definición *intrínseca* de vectores en variedades. Esto es, sin recurrir a un espacio euclídeo de dimensión superior que permita considerar M como el conjunto de nivel de cierta función en dicho espacio euclídeo. Para dar esta definición intrínseca de vectores, recurrimos a las derivadas direccionales.

En $\mathbb{R}^n$, la derivada de una función f en un punto p según la dirección de $\mathbf{v}$ se definía como

$$(D_{\mathbf{v}}f)(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\mathbf{v}) - f(p)}{t}.$$

¹Al tratarse de un homeomorfismo, podemos elegir $U \in \mathcal{O}_M$ tal que $F(U) \subseteq V$, de manera que el dominio de $\mathbf{y} \circ F \circ \mathbf{x}^{-1}$ pueda ser todo $\mathbf{x}(U)$. Si no hacemos esto, deberíamos tomar como dominio $\mathbf{x}(\text{preim}_F V \cap U)$.

²Por ejemplo, la esfera de dimensión 2 (S^2) se puede considerar el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que cumplen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

De esta manera, podemos identificar para cada $\mathbf{v}$ el operador $D_{\mathbf{v}}$.³ En este caso podemos hacer la combinación lineal $p + t\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. En una variedad generalmente no podemos restar puntos ni multiplicarlos por escalares, por lo que la definición anterior no es aplicable. Sin embargo, si definimos $\gamma(t) := p + t\mathbf{v}$, resulta que

$$(D_{\mathbf{v}}f)(p) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0),$$

y esta definición sí se puede implementar en variedades. De hecho, la fórmula anterior es válida para cualquier curva γ que pase por p en $t = 0$ y cuya derivada sea $\mathbf{v}$ al pasar por p .

Por lo tanto, la manera en la que se definen los vectores en variedades es como operadores que dan derivadas direccionales.

Definición 1.12. Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Diremos que dos curvas $\gamma : I_\gamma \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ y $\delta : I_\delta \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ son *equivalentes* en p ($\gamma \sim_p \delta$), si (Figura 1.5)

1. Ambas pasan por p . Existen $t_\gamma \in I_\gamma$ y $t_\delta \in I_\delta$ tales que $\gamma(t_\gamma) = \delta(t_\delta) = p$.
2. «Tienen la misma velocidad en p ». Elegida una carta $(U, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}$ que cubre p , la curvas en $\mathbb{R}^n$ definidas con la carta son derivables y tienen mismo vector tangente en $\mathbf{x}(p)$:

$$\frac{d(\mathbf{x} \circ \gamma)}{dt}(t_\gamma) = \frac{d(\mathbf{x} \circ \delta)}{dt}(t_\delta).$$

Si se cumple la ecuación anterior para la carta $(U, \mathbf{x})$, por la condición de compatibilidad C^∞ en $\mathcal{A}$, se cumplirá también para cualquier otra carta que cubra p .

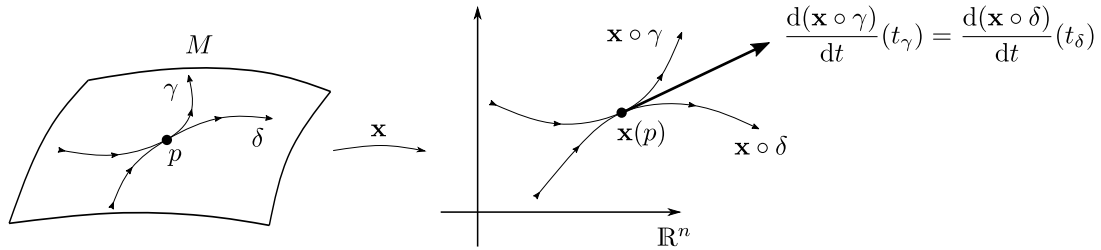


Figura 1.5: Curvas equivalentes en p : $\gamma \sim_p \delta$

Definición 1.13. Si llamamos $\ell(M, p)$ al conjunto de curvas en M que pasan por p , definimos

$$\tilde{T}_p M := \ell(M, p) / \sim_p .$$

Por lo tanto, un elemento de $\tilde{T}_p M$ es una clase de equivalencia $[\gamma](p)$ de curvas equivalentes en p . En lo que sigue supondremos que hemos elegido curvas centradas en p como representantes de dichas clases. Es decir, curvas que pasan por p en $t = 0$.

El conjunto $\tilde{T}_p M$ es un espacio vectorial si definimos para todas $[\gamma](p), [\delta](p) \in \tilde{T}_p M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [\gamma](p) + [\delta](p) &:= [\rho](p) , & \rho(t) &:= \mathbf{x}^{-1}((\mathbf{x} \circ \gamma)(t) + (\mathbf{x} \circ \delta)(t) - \mathbf{x}(p)) . \\ \lambda \cdot [\gamma](p) &:= [\sigma](p) , & \sigma(t) &:= \mathbf{x}^{-1}(\lambda(\mathbf{x} \circ \gamma)(t) + (1 - \lambda)\mathbf{x}(p)) . \end{aligned}$$

Con estas definiciones se cumple

$$\frac{d(\mathbf{x} \circ \rho)}{dt}(0) = \frac{d(\mathbf{x} \circ \gamma)}{dt}(0) + \frac{d(\mathbf{x} \circ \delta)}{dt}(0) \quad \text{y} \quad \frac{d(\mathbf{x} \circ \sigma)}{dt}(0) = \lambda \frac{d(\mathbf{x} \circ \gamma)}{dt}(0) .$$

³En realidad es un operador $D_{\mathbf{v}}$ en cada punto p .

El espacio vectorial $\tilde{T}_p M$ es de dimensión finita, y se cumple que $\dim(\tilde{T}_p M) = n = \dim M$. Con ayuda de la carta $(U, \mathbf{x})$ podemos construir la base $[\xi_1](p), \dots, [\xi_n](p)$ definiendo (Figura 1.6)

$$\xi_i(p) := \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(p) + t\mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

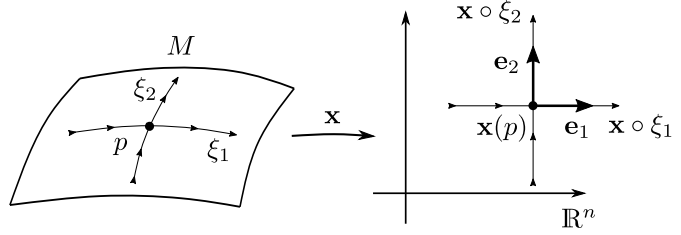


Figura 1.6: Construcción de la base de $\tilde{T}_p M$

Definición 1.14. Se define el *vector tangente* a M en p asociado a $[\gamma](p) \in \tilde{T}_p M$ como el operador lineal $D_{[\gamma](p)} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por (Figura 1.7)

$$D_{[\gamma](p)}(f) := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_p),$$

donde t_p es el punto del dominio de γ en el que $\gamma(t_p) = p$.

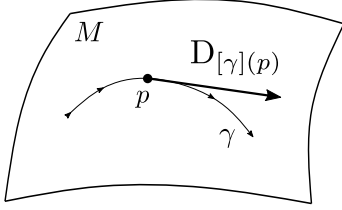


Figura 1.7: Vector tangente a M en p

Se puede comprobar que la definición no depende de la representante elegida en $[\gamma](p)$.

Estos operadores son *derivaciones*. Es decir, además de ser lineales, cumplen la regla de Leibniz

$$\forall f, g \in C^\infty(M) : D_{[\gamma](p)}(fg) = (D_{[\gamma](p)}f)g(p) + f(p)(D_{[\gamma](p)}g).$$

Definición 1.15. El *espacio tangente* a M en p es el conjunto de vectores tangentes a M en p

$$T_p M := \{D_{[\gamma](p)} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid [\gamma](p) \in \tilde{T}_p M\}.$$

El espacio tangente tiene estructura de espacio vectorial si definimos

$$\begin{aligned} \forall [\gamma](p), [\delta](p) \in \tilde{T}_p M : & \quad D_{[\gamma](p)} + D_{[\delta](p)} := D_{[\gamma](p) + [\delta](p)}. \\ \forall [\gamma](p) \in \tilde{T}_p M, \forall \lambda \in \mathbb{R} : & \quad \lambda \cdot D_{[\gamma](p)} := D_{\lambda[\gamma](p)}. \end{aligned}$$

O equivalentemente,

$$\forall f \in C^\infty(M) : (D_{[\gamma](p)} + \lambda \cdot D_{[\delta](p)})(f) := D_{[\gamma](p)}(f) + \lambda D_{[\delta](p)}(f).$$

Definición 1.16. Si $[\xi_1](p), \dots, [\xi_n](p)$ es la base de $\tilde{T}_p M$ construida con la carta $(U, \mathbf{x})$, las *derivadas parciales respecto al sistema de coordenadas* $\mathbf{x}$ son los vectores

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p := D_{[\xi_k](p)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

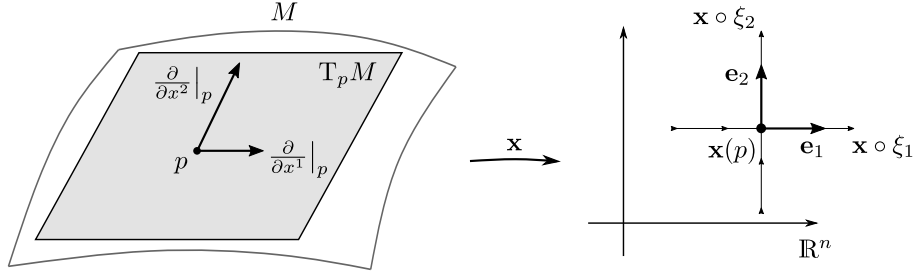
Teorema 1.17. Dada una carta $(U, \mathbf{x})$ que cubre $p \in M$, los vectores $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$ forman una base de $T_p M$ (Figura 1.8). Por lo tanto, $\dim(T_p M) = n = \dim M$. Además,

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right|_p := \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p (x^i) = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

De la definición $\left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p = D_{[\xi_k](p)}$ y expresando convenientemente $f \circ \xi_k = \underbrace{f \circ \mathbf{x}^{-1}}_{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \circ \underbrace{\mathbf{x} \circ \xi_k}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n}$, se puede demostrar con la regla de la cadena que

$$\forall f \in C^\infty(M) : \left. \frac{\partial f}{\partial x^k} \right|_p = \partial_k (f \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{x}(p)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Es decir, que las derivadas parciales en $p \in M$ se calculan como derivadas parciales en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ en el punto $\mathbf{x}(p)$.

Figura 1.8: Base de $T_p M$ asociada a las coordenadas $\mathbf{x}$.

Definición 1.18. El *espacio cotangente* a M en p es el dual del tangente a M en p

$$T_p^* M := (T_p M)^*.$$

Los elementos de $T_p M$ se llaman *covectores* tangentes a M en p .

Si $\frac{\partial}{\partial x^1} |_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_p$ es la base de $T_p M$ construida con la carta $(U, \mathbf{x})$, su base dual se representa como $\mathbf{d}_p x^1, \dots, \mathbf{d}_p x^n$, por lo que

$$\forall D_{[\gamma](p)} \in T_p M : \quad D_{[\gamma](p)} = \mathbf{d}_p x^k (D_{[\gamma](p)}) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p = \frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt}(t_p) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p. \quad (1.1)$$

Por definición, $\mathbf{d}_p x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (x^i)$. Generalizando esta igualdad a cualquier función y a cualquier vector tangente, tenemos la siguiente

Definición 1.19. El *gradiente*⁴ de $f \in C^\infty(M)$ en $p \in M$ es el covector $\mathbf{d}_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definido mediante

$$\forall X \in T_p M : \quad (\mathbf{d}_p f)(X) := X(f).$$

Dada una aplicación entre variedades diferenciables $F : M \rightarrow N$, podemos construir aplicaciones lineales entre espacios tangentes y cotangentes. Aplicaciones lineales que transforman vectores «hacia delante» (*push-forward* de M a N) o covectores «hacia atrás» (*pull-back* de N a M).

Definición 1.20. La *aplicación lineal tangente* en $p \in M$ de $F : M \rightarrow N$ (o *push-forward* de F en p) es la aplicación lineal $F_{*,p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ definida mediante (Figura 1.9)

$$F_{*,p} \left(D_{[\gamma](p)}^M \right) := D_{[F \circ \gamma](F(p))}^N.$$

Los superíndices especifican la variedad en la que está definido cada operador.

La parte derecha de la ecuación anterior no depende de la curva elegida en la clase de equivalencia. Además, la definición anterior es equivalente a la ecuación del siguiente teorema.

Teorema 1.21. Dada $F : M \rightarrow N$, para cada $X \in T_p M$ se cumple que

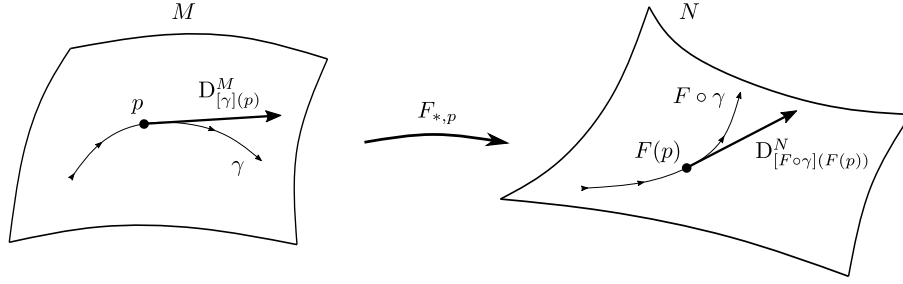
$$\forall f \in C^\infty(N) : \quad (F_{*,p} X)(f) = X(f \circ F).$$

A $F_{*,p}$ también se le llama a veces *diferencial* de F en p , y se cumple el siguiente

Teorema 1.22 (Regla de la cadena). Sean $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ aplicaciones C^∞ entre variedades diferenciables. Se cumple que

$$\forall p \in M : \quad (G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}.$$

⁴La representación matricial de $\mathbf{d}_p f$ en la base $\mathbf{d}_p x^1, \dots, \mathbf{d}_p x^n$ de $T_p^* M$ resulta ser $\left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right]$.

Figura 1.9: El *push-forward* de F en p

Considerando $\mathbb{R}$ una variedad diferenciable con la estructura que contiene el atlas $\{(\mathbb{R}, \text{Id}_{\mathbb{R}})\}$, llamando $t := \text{Id}_{\mathbb{R}}$, tenemos otra manera de caracterizar los vectores tangentes:

$$\forall t_0 \in \mathbb{R} : \quad D_{[\gamma](\gamma(t_0))} = \gamma_{*,t_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} \right) =: \dot{\gamma}(t_0).$$

Definición 1.23. La *aplicación diferencial cotangente* en $p \in M$ de $F : M \rightarrow N$ (o *pull-back* de F en p) es la aplicación lineal $F_p^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ definida mediante

$$\forall \omega \in T_{F(p)}^* N : \quad \forall X \in T_p M : \quad (F_p^* \omega)X := \omega(F_{*,p} X).$$

Por la regla de la cadena del *push-forward* se cumple la siguiente regla para el *pull-back*

Proposición 1.24. Sean $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ aplicaciones C^∞ entre variedades diferenciables. Se cumple que

$$\forall p \in M : \quad (G \circ F)_p^* = F_p^* \circ G_{F(p)}^*.$$

1.3. Campos tensoriales en variedades: fibrados y secciones

Un fibrado es un conjunto que localmente «parece» el producto cartesiano de un *espacio base* al que se le asigna una *fibra* a cada punto. En nuestro caso, los fibrados de interés serán los fibrados vectoriales obtenidos tras «pegar» un espacio vectorial a cada punto de una variedad diferenciable, de manera que el fibrado resultante sea otra variedad diferenciable.

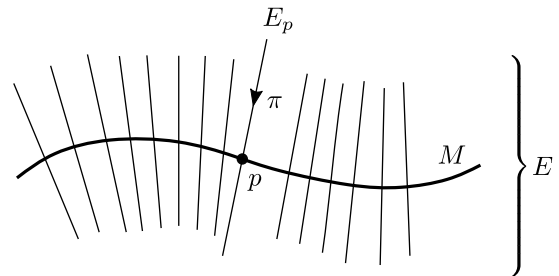
Más formalmente, partimos de la siguiente

Definición 1.25. Un *fibrado vectorial* $E \xrightarrow{\pi} M$ es una terna (E, π, M) en la que (Figura 1.10)

1. E es un conjunto, llamado *espacio total*.
2. M es otro conjunto, llamado *espacio base*.
3. $\pi : E \rightarrow M$, llamada *proyección* de E sobre M , es una aplicación suprayectiva tal que para cada $p \in M$, el conjunto

$$E_p := \text{preim}_{\pi}\{p\},$$

llamado *fibra* en p , es un espacio vectorial.

Figura 1.10: Fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$

Supondremos además que en un fibrado vectorial todas las fibras tienen la misma dimensión.

Con esta definición pasamos a definir los fibrados tangente y cotangente, que son el punto de partida del desarrollo formal de la Mecánica Lagrangiana y la Mecánica Hamiltoniana.

Definición 1.26. El *fibrado tangente* de la variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ se define como $TM \xrightarrow{\tau} M$, donde

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M), \quad \tau(p, X) := p.$$

Definición 1.27. El *fibrado cotangente* de la variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ se define como $T^*M \xrightarrow{\pi} M$, donde

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p^*M), \quad \pi(p, \omega) := p.$$

El símbolo $\bigsqcup_p$ representa la llamada *unión disjunta*, y permite que los elementos del conjunto resultante sean de la forma $(p, \mathbf{v})$, donde p pertenece al espacio base M y $\mathbf{v}$ al espacio vectorial fijado a p (la fibra en p). Sin embargo, podríamos haber utilizado la unión simple $\bigcup$, ya que (p, X) no da más información que simplemente X .⁵ Por lo tanto, con abuso de notación, escribiremos muchas veces $X \in TM$ en vez de $(p, X) \in TM$. De la misma manera, en ocasiones escribiremos $\omega \in T^*M$ en vez de $(p, \omega) \in T^*M$.

Como podemos calcular $\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$ y $\mathbf{d}_p x^k$ para cada $p \in U$, tenemos bases de los espacios tangentes y cotangentes en cualquier punto de U , y podemos definir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} : U &\longrightarrow TM & \mathbf{d}x^k : U &\longrightarrow T^*M \\ p &\longmapsto \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p & p &\longmapsto \mathbf{d}_p x^k \end{aligned}$$

Dadas $F \in C^\infty(M, N)$ y $f \in C^\infty(M)$, también podemos calcular en cada $p \in M$ las aplicaciones $\mathbf{d}_p f$, $F_{*,p}$ y F_p^* . Si definimos los fibrados

$$\mathrm{Hom}_F(TM, TN) := \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{Hom}(T_p M, T_{F(p)} N), \quad \mathrm{Hom}_F(T^*N, T^*M) := \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{Hom}(T_{F(p)}^* N, T_p^* M),$$

entonces podemos extender las definiciones prescindiendo del punto de aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{d}f : M &\longrightarrow T^*M & F_* : M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_F(TM, TN) & F^* : M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_F(T^*N, T^*M) \\ p &\longmapsto \mathbf{d}_p f & p &\longmapsto F_{*,p} & p &\longmapsto F_p^* \end{aligned}$$

Los fibrados tangente y cotangente tienen estructura de variedad diferenciable, y a partir de un atlas $\mathcal{A}_M$ de M se pueden construir sendos atlas $\mathcal{A}_{TM}$ y $\mathcal{A}_{T^*M}$. Si una carta $(U, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}_M$ permite identificar un punto $p \in U \subseteq M$ con sus componentes cartesianas $(x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$, para caracterizar $(p, X) \in TM$ podemos usar otra vez las componentes x^i para p y las componentes de X en la base de $T_p M$ inducida por $\mathbf{x}$ (1.1). Es decir

$$(p, X) \in TM \sim (x^1(p), \dots, x^n(p), \mathbf{d}_p x^1(X), \dots, \mathbf{d}_p x^n(X)) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

De la misma manera podemos identificar un covector $(p, \varphi) \in T^*M$ usando las coordenadas de p y las componentes de φ en la base de T_p^*M inducidas por $\mathbf{x}$. Interpretando los $\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$ como elementos del dual del cotangente⁶ $(T_p^*M)^*$ de la manera usual

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(p) := \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right) \longrightarrow \forall \varphi \in T_p^*M : \omega = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(p) \mathbf{d}_p x^k,$$

⁵Cada $X \in \bigsqcup_p T_p M$ pertenece a un único $T_p M$, pues por construcción los $T_p M$ son espacios disjuntos. Lo mismo pasa en T_p^*M .

⁶En espacios vectoriales de dimensión finita, V y $(V^*)^*$ son isomorfos.

podemos hacer

$$(p, \varphi) \in T^*M \sim \left(x^1(p), \dots, x^n(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}(p) \right) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

De hecho, tenemos el siguiente

Teorema 1.28. Si $\mathcal{A}_M = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ es un atlas de la variedad diferenciable M de dimensión n , entonces $\mathcal{A}_{TM} = \{(TU_\alpha, \mathbf{x}'_\alpha)\}$ es un atlas de TM , donde cada $\mathbf{x}' : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ viene dada por

$$\mathbf{x}' := (x^1 \circ \tau, \dots, x^n \circ \tau, \mathbf{d}x^1, \dots, \mathbf{d}x^n),$$

y $\mathcal{A}_{T^*M} = \{(T^*U_\alpha, \mathbf{x}''_\alpha)\}$ es un atlas de T^*M , donde cada $\mathbf{x}'' : T^*U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ viene dado por

$$\mathbf{x}'' := \left(x^1 \circ \pi, \dots, x^n \circ \pi, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right).$$

Por lo tanto, $\dim(TM) = \dim(T^*M) = 2 \dim M$.

Igual que hemos construido estos dos fibrados, podemos construir para cada $k = 1, \dots, \dim M$ el fibrado que asocia a cada punto el espacio vectorial de tensores antisimétricos de orden k en el tangente correspondiente ($p \mapsto \bigwedge^k(T_p^*M)$). Si $\mathbf{d}_p x^1, \dots, \mathbf{d}_p x^n$ es una base de T_p^*M , entonces

$$\forall \omega \in \bigwedge^k(T_p^*M) : \omega = \sum_{I \in C_k^n} \underbrace{\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_p \right)}_{\frac{\partial \omega}{\partial x^I}(p)} \underbrace{\mathbf{d}_p x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}_p x^{i_k}}_{\mathbf{d}_p x^I},$$

donde $C_k^n = \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid i_1 < \dots < i_k\}$. Por lo tanto, los $\binom{n}{k}$ tensores antisimétricos $\mathbf{d}_p x^I$ forman una base de $\bigwedge^k(T_p^*M)$. Imitando la construcción anterior, si definimos el conjunto

$$\bigwedge^k(T^*M) := \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k(T_p^*M),$$

podemos convertirlo en un fibrado con la proyección $\pi^k(p, \omega) := p$ y en una variedad diferenciable de dimensión $n + \binom{n}{k}$ definiendo a partir de cartas de $(U, \mathbf{x})$ de M las cartas $(\bigwedge^k(T^*U), \mathbf{x}''')$

$$\mathbf{x}''' := \left(x^1 \circ \pi^k, \dots, x^n \circ \pi^k; \left(\frac{\partial}{\partial x^I} \right)_{I \in C_k^n} \right),$$

En particular, tenemos que $\bigwedge^1(T^*M) = T^*M$, y definimos $\bigwedge^0(T^*M) := C^\infty(M)$.

De manera parecida se puede convertir en variedad diferenciable cualquier fibrado vectorial que nos pueda ser de utilidad. Por ejemplo, podríamos considerar también el fibrado $T_s^r(M) \xrightarrow{\pi} M$ que a cada punto $p \in M$ le asigna el espacio vectorial de tensores $T_s^r(T_p M)$.⁷ Si $(U, \mathbf{x})$ es una carta que cubre p , una base de $T_s^r(T_p M)$ viene dada por los

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \Big|_p \otimes \mathbf{d}_p x^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_p x^{j_s}, \quad (i_1, \dots, i_r) \in \{1, \dots, n\}^r, (j_1, \dots, j_s) \in \{1, \dots, n\}^s,$$

por lo que se pueden construir coordenadas usando la base dual

$$\mathbf{d}x^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}x^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}, \quad (i_1, \dots, i_r) \in \{1, \dots, n\}^r, (j_1, \dots, j_s) \in \{1, \dots, n\}^s.$$

⁷Dado un espacio vectorial V , definimos $T_s^r(V) := V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$, el espacio vectorial de aplicaciones multilineales *contravariantes* de orden r y *covariantes* de orden s .

Con la estructura de fibrado podemos definir fácilmente campos vectoriales y tensoriales. Al ser estos fibrados variedades diferenciables, podemos usar coordenadas y definir operadores diferenciales en ellos.

Un campo en un fibrado se definirá como una *sección*: una aplicación $s : M \rightarrow E$ que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector $s(p)$ en su fibra E_p .

Definición 1.29. Una *sección* en un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ es una aplicación $s : M \rightarrow E$ tal que (Figura 1.11)

$$\forall p \in M : s(p) \in E_p.$$

Si E y M son variedades diferenciables, el conjunto de secciones C^∞ en el fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ lo representaremos como $\Gamma(M, E)$. Equivalentemente, tenemos que

$$\Gamma(M, E) = \{s \in C^\infty(M, E) \mid \pi \circ s = \text{Id}_M\}.$$

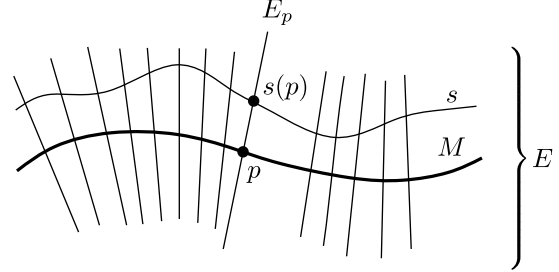


Figura 1.11: Sección $s : M \rightarrow E$

Definición 1.30. Sea M una variedad diferenciable.

- Un *campo vectorial* (suave) X es una sección en el fibrado tangente: $X \in \Gamma(M, TM)$. El conjunto de campos vectoriales en M se representa como $\mathfrak{X}(M)$.
- Una *k-forma diferencial* (o simplemente *k-forma*) ω es una sección en el fibrado de tensores alternados de orden k : $\omega \in \Gamma(M, \wedge^k(T^*M))$. El conjunto de k -formas en M se representa como $\Omega^k(M)$, y a las 1-formas las llamamos *campos covectoriales*, $\mathfrak{X}^*(M) := \Omega^1(M)$. Además, definimos $\Omega^0(M) := C^\infty(M)$.
- Un *campo tensorial* (suave) de orden (r, s) es una sección $A \in \Gamma(M, T_s^r(M))$. El conjunto de campos tensoriales suaves de orden (r, s) se representa como $\mathcal{T}_s^r(M)$.

Si $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$, podemos definir el campo escalar $\omega(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ mediante

$$[\omega(X_1, \dots, X_k)](p) := \omega(p)(X_1(p), \dots, X_k(p)).$$

También podemos definir la *contracción*⁸ con $X \in \mathfrak{X}(M)$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_X : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(M) & k &= 1, \dots, n. \\ \omega &\longmapsto \mathbf{i}_X \omega & \mathbf{i}_X(\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) &:= \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}), \end{aligned}$$

y $\mathbf{i}_X(\omega) := 0$ si $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

En la sección anterior definimos para toda $f \in C^\infty(M)$, $\mathbf{d}f : M \rightarrow T^*M$ mediante $(\mathbf{d}f)(p) = \mathbf{d}_p f$. Usando ahora f como variable, tenemos un operador $\mathbf{d} : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$. Como definimos $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, tenemos que $\mathbf{d} : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$. Podemos extender recursivamente la definición de $\mathbf{d}$ manteniendo este comportamiento.

Definición 1.31. La *derivada exterior* en una variedad M es el operador lineal $\mathbf{d}$ definido mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{d} : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(M) \\ \omega &\longmapsto \mathbf{d}\omega \end{aligned} \quad \omega = \sum_{I \in C_k^n} \omega_I \mathbf{d}x^I \quad \longmapsto \quad \mathbf{d}\omega := \sum_{I \in C_k^n} \mathbf{d}\omega_I \wedge \mathbf{d}x^I.$$

⁸También llamada *multiplicación interior*, nombre que evitaremos para no confundirlo con el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en un espacio vectorial.

Se puede comprobar que la definición no depende de la carta elegida para representar ω .

Teorema 1.32. *La derivada exterior es una antiderivación. Si $\varphi \in \Omega^k(M)$ y $\psi \in \Omega^l(M)$, se cumple que*

$$\mathbf{d}(\varphi \wedge \psi) = (\mathbf{d}\varphi) \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge \mathbf{d}\psi.$$

Podemos extender la definición de F_* y F^* a campos tensoriales.

Sea $F : M \rightarrow N$ y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. En general, el *push-forward* de un campo vectorial mediante una aplicación F no está bien definido

- Si F no es inyectiva —por ejemplo, si $F(p_1) = F(p_2) = q \in N$ —, habría que decidir si $[F_*(X)](q)$ es $F_{*,p_1}X(p_1)$ ó $F_{*,p_2}X(p_2)$, que no tienen por qué ser iguales.
- Si F no es suprayectiva —por ejemplo, $q \in N$ no es imagen de ningún punto de M —, entonces no hay forma razonable de definir $[F_*(X)](q)$.

Si F es biyectiva se evitan las dos situaciones anteriores.

En el caso del *pull-back* de covectores no se dan estos problemas.

Definición 1.33. Sea $F : M \rightarrow N$ un difeomorfismo (biyectiva y C^∞ en ambos sentidos). El *push-forward* de $X \in \mathfrak{X}(M)$ bajo F es el campo vectorial $F_*X : N \rightarrow TN$ definido mediante

$$\forall q \in N : (F_*X)(q) := F_{*,F^{-1}(q)}X(F^{-1}(q)).$$

O dicho de otra forma, el campo $F_*X \in \mathfrak{X}(N)$ que cumple $(F_*X)(F(p)) = F_{*,p}X(p)$.

Definición 1.34. Sea $F \in C^\infty(M, N)$. El *pull-back* de $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$ bajo F es la aplicación $F^*\omega : M \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ definida mediante

$$\forall p \in M : (F^*\omega)(p) := F_p^*\omega.$$

En el caso de que $F : M \rightarrow N$ sea un difeomorfismo, también es posible también enviar vectores «hacia atrás» y covectores «hacia delante»:

$$\begin{aligned} \forall Y \in \mathfrak{X}(N) : \quad F^*Y &:= (F^{-1})_*Y \in \mathfrak{X}(M). \\ \forall \psi \in \mathfrak{X}^*(M) : \quad F_*\psi &:= (F^{-1})^*\psi \in \mathfrak{X}^*(N). \end{aligned}$$

Con estas definiciones, se cumple que $(F_*)^{-1} = F^*$ y $(F^*)^{-1} = F_*$.

Finalmente, se puede extender recursivamente la definición de *push-forward* y *pull-back* a tensores de cualquier orden mediante

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathcal{T}(M) : \quad F_*(\alpha \otimes \beta) &:= F_*\alpha \otimes F_*\beta \\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{T}(N) : \quad F^*(\alpha \otimes \beta) &:= F^*\alpha \otimes F^*\beta \end{aligned}$$

definiendo también

$$\begin{aligned} \forall f \in C^\infty(M) : \quad F_*f &:= f \circ F^{-1} \in C^\infty(N). \\ \forall g \in C^\infty(N) : \quad F^*g &:= g \circ F \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

1.4. Ecuaciones diferenciales en variedades

Pasamos ahora a definir las ecuaciones diferenciales de primer orden en variedades basándonos en la teoría de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.35. La *ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden autónoma* en la variedad M asociada al campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es

$$\dot{\gamma} = X(\gamma). \quad (1.2)$$

Se dice que la curva en M $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ es *solución* de (1.2), o *curva integral* de X con condición inicial $p \in M$ si (Figura 1.12)

$$\forall t \in I : D_{[\gamma](\gamma(t))} = X(\gamma(t)). \quad (1.3a)$$

$$\gamma(0) = p. \quad (1.3b)$$

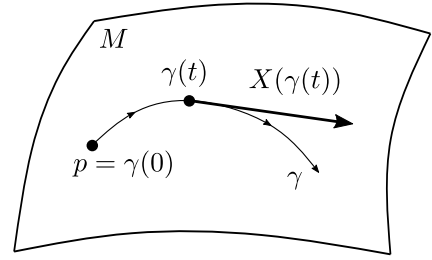


Figura 1.12: Curva integral de X con condición inicial p

Elegida una carta $(U, \mathbf{x})$, si el campo X viene dado como $X(p) = X^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$, entonces (1.3a) es equivalente a la EDO en $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt}(t) = X^k(\gamma(t)), \quad k = 1, \dots, n,$$

con condición inicial $(\mathbf{x} \circ \gamma)(0) = \mathbf{x}(p)$.

Al ser X por definición una sección C^∞ , por la teoría de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^n$ existe solución única $\mathbf{x} \circ \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de dicho sistema, que nos permite obtener $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ con su condición inicial $\gamma(0) = p$.

Dada una ecuación diferencial $\dot{\gamma} = X(\gamma)$, con $X \in \mathfrak{X}(M)$, calculando para cada condición inicial $p \in M$ su curva integral γ_p^X , obtenemos una familia $\{\gamma_p^X\}_{p \in M}$ de curvas en M a partir de las cuales podemos recuperar el campo X :

$$X(p) = \frac{d(x^k \circ \gamma_p^X)}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p.$$

Definición 1.36. El *flujo* del campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es la aplicación $\Phi^X : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ definida mediante⁹

$$\Phi^X(p, t) := \gamma_p^X(t),$$

donde $\{\gamma_p^X\}_{p \in M}$ es la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ parametrizada por la condición inicial.

Del flujo podemos recuperar las curvas integrales ($\gamma_p^X = \Phi^X(p, \cdot)$), y por lo tanto, el propio campo X .

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, por cada punto de M pasa una y sólo una curva integral, lo que implica que las aplicaciones $\Phi_t^X : p \mapsto \gamma_p^X(t)$ son difeomorfismos en M .

Fijado $s \in \mathbb{R}$, al ser las curvas $\gamma_{\gamma_p^X(s)}^X(t)$ y $\gamma_p^X(s+t)$ (como funciones de t) curvas que pasan inicialmente por $\gamma_p^X(s)$, por la unicidad de las soluciones de la ecuación diferencial, debe ser

$$\forall s, t \in \mathbb{R} : \gamma_{\gamma_p^X(s)}^X(t) = \gamma_p^X(s+t). \quad (1.4)$$

⁹En realidad el dominio de Φ no es todo $M \times \mathbb{R}$, pues cada γ_p^X tendrá su intervalo máximo $I_p \subseteq \mathbb{R}$. En realidad el dominio sería el espacio total del fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ cuyas fibras son $E_p = I_p$. Para simplificar la exposición no tendremos esto en cuenta.

Esta igualdad equivale a $\Phi^X(\Phi^X(p, s), t) = \Phi^X(p, s + t)$, e implica que los difeomorfismos $\Phi_t^X : M \rightarrow M$ cumplen que $\Phi_s^X \circ \Phi_t^X = \Phi_{s+t}^X = \Phi_t^X \circ \Phi_s^X$, por lo que forman un grupo conmutativo con la composición $\circ$ cuya identidad es $\Phi_0^X = \text{Id}_M$.

Definición 1.37. El grupo uniparamétrico de difeomorfismos en M asociados a $X \in \mathfrak{X}(M)$ es el grupo conmutativo $(\{\Phi_t^X\}_{t \in \mathbb{R}}, \circ)$ de difeomorfismos en M definidos con el flujo Φ^X de X mediante $\Phi_t^X : p \mapsto \Phi^X(p, t)$.

Una vez más, a partir del grupo uniparamétrico de difeomorfismos podemos recuperar el flujo. Por lo tanto, se pueden hacer las siguientes identificaciones

$$X \longleftrightarrow \{\gamma_p^X\}_{p \in M} \longleftrightarrow \Phi^X \longleftrightarrow \{\Phi_t^X\}_{t \in \mathbb{R}},$$

donde $A \longleftrightarrow B$ significa que se puede obtener A a partir de B , y viceversa.

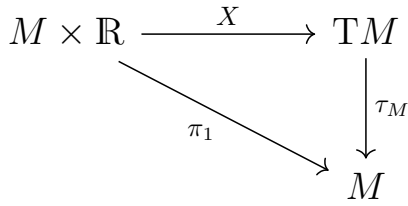


Figura 1.13: Campos variables en el tiempo

Definición 1.38. Un campo vectorial dependiente del tiempo en M es una aplicación $X : M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ que es C^∞ y tal que

$$\forall (p, t) \in M \times \mathbb{R} : \quad X(p, t) \in T_p M.$$

El conjunto de campos vectoriales en M variables en el tiempo lo representaremos como $\mathfrak{X}_t(M)$.

Equivalentemente, si $\pi_1 : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ es la proyección sobre el primer factor — $\pi_1(p, t) = p$ — y τ_M es la proyección del fibrado tangente, tenemos que (Figura 1.13)

$$\mathfrak{X}_t(M) = \{X \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, TM) \mid \tau_M \circ X = \pi_1\}.$$

Dado $X \in \mathfrak{X}_t(M)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ podemos definir $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ mediante $X_t : p \mapsto X(p, t)$, obteniendo así un conjunto uniparamétrico de campos vectoriales constantes en el tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

$$X \longleftrightarrow \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Definición 1.39. La ecuación diferencial ordinaria de primer orden no autónoma en la variedad M asociada al campo vectorial dependiente del tiempo $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ es

$$\dot{\gamma} = X_t(\gamma) \tag{1.5}$$

Se dice que la curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ es *solución* de (1.5), o *curva integral* de $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ con condición inicial p si

$$\forall t \in I : \quad D_{[\gamma](\gamma(t))} = X(\gamma(t), t). \tag{1.6a}$$

$$\gamma(0) = p. \tag{1.6b}$$

Elegida una carta $(U, \mathbf{x})$, si el campo X viene dado como $X(p, t) = \xi^k(p, t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$, entonces (1.6a) es equivalente a la EDO en $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt}(t) = \xi^k(\gamma(t), t), \quad k = 1, \dots, n,$$

con condición inicial $(\mathbf{x} \circ \gamma)(0) = \mathbf{x}(p)$.

Podemos convertir una EDO no autónoma en M ($\dot{\gamma} = X$) en una EDO autónoma en $M \times \mathbb{R}$ ($\dot{\tilde{\gamma}} = \bar{X}$) mediante la *autonomización* de $X \in \mathfrak{X}_t(M)$, el campo $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ definido mediante¹⁰

$$\bar{X}(p, t) := \xi^k(p, t) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{(p, t)} + \frac{\partial}{\partial t'} \Big|_{(p, t)}.$$

¹⁰Si $(U; x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{A}_M$ nos da X en coordenadas, elegimos $(U \times \mathbb{R}; x^1, \dots, x^n, t') \in \mathcal{A}_{(M \times \mathbb{R})}$ para representar $\bar{X}$, donde $t'(p, t) = t$. La definición resulta ser independiente de la carta $(U, \mathbf{x})$ elegida.

La solución del sistema autónomo en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{cases} \frac{d(x^k \circ \bar{\gamma})}{dt}(t) = \xi^k(\bar{\gamma}(t)) , & k = 1, \dots, n \\ \frac{d(t' \circ \bar{\gamma})}{dt}(t) = 1 \end{cases}$$

es de la forma $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), t)$, donde $\gamma(t)$ es la solución del sistema no autónomo original.

Dada una ecuación diferencial $\dot{\gamma} = X_t(\gamma)$, con $X \in \mathfrak{X}_t(M)$, calculando para cada condición inicial $p \in M$ e instante inicial $s \in \mathbb{R}$ la curva integral $\gamma_{p,s}^X$, obtenemos una familia $\{\gamma_{p,s}^X\}_{p \in M}^{s \in \mathbb{R}}$ de curvas en M .

Definición 1.40. El *flujo* del campo vectorial dependiente del tiempo $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ es la aplicación $\Psi^X : M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow M$ definida mediante

$$\Psi^X(p, s; t) := \gamma_{p,s}^X(t),$$

donde $\{\gamma_{p,s}^X\}_{p \in M}^{s \in \mathbb{R}}$ es la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial $\dot{\gamma} = X$ parametrizada por la condición inicial e instante inicial.

Del flujo generalizado podemos recuperar las curvas integrales ($\gamma_{p,s}^X = \Psi^X(p, s; \cdot)$).

Es necesario ahora introducir el instante inicial s , pues si solamente tomásemos $\{\gamma_p^X\}_{p \in M} = \{\gamma_{p,0}^X\}_{p \in M}$ entonces, γ_p^X pasa por $\gamma_p^X(s)$ en el instante s , mientras que $\gamma_{\gamma_p^X(s)}^X$ pasa por $\gamma_p^X(s)$ en el instante 0. Como el campo vectorial varía con el tiempo, la evolución de ambas curvas no tiene por qué coincidir (Figura 1.14). Por lo tanto, por cada punto pueden pasar distintas curvas integrales en distintos instantes de tiempo, y dichas curvas ya no cumplen necesariamente que $\gamma_{\gamma_p^X(s)}^X(t) = \gamma_p^X(s+t)$, por lo que las Φ_t^X ya no forman un grupo conmutativo.

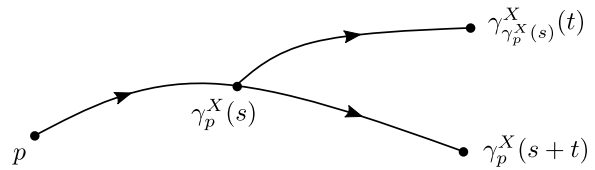


Figura 1.14: Flujo de un campo X dependiente del tiempo

1.5. $\mathfrak{X}(M)$ como álgebra de Lie

Dada una variedad diferenciable M , el conjunto de campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ es un espacio vectorial real si definimos

$$\begin{aligned} + : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) & \cdot : \mathbb{R} \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto X + Y & (\lambda, X) &\longmapsto \lambda \cdot X \end{aligned}$$

mediante

$$(X + Y)(p) := X(p) + Y(p) \quad \text{y} \quad (\lambda \cdot X)(p) := \lambda X(p).$$

También es interesante considerarlo un módulo sobre $C^\infty(M)$ definiendo

$$\begin{aligned} \cdot : C^\infty(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) & (f \cdot X)(p) &:= f(p)X(p), \\ (f, X) &\longmapsto f \cdot X \end{aligned}$$

pues dada una carta $(U, \mathbf{x})$, podemos descomponer en U

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) : \quad X|_U = \mathbf{d}x^k(X) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

De esta manera, los campos $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}$ se convierten en una base local de $\mathfrak{X}(M)$, siendo las componentes de X en dicha base las funciones $\mathbf{d}x^k(X) \in C^\infty(U)$.¹¹

Hay otra estructura algebraica que se le puede dar a $\mathfrak{X}(M)$ y que nos será de utilidad: la de *álgebra de Lie*.

Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, podemos definir $Xf \in C^\infty(M)$ mediante

$$(Xf)(p) := X(p)f.$$

De esta manera, los campos vectoriales se pueden entender como operadores $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos definir $(XY)f \in C^\infty(M)$ mediante

$$[(XY)f](p) := X(p)(Yf),$$

que también se puede interpretar como el resultado de aplicar un operador $XY : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ a f y evaluar en p . Esta vez, $XY \notin \mathfrak{X}(M)$, pues no cumple la regla de Leibniz:

$$XY(fg) = XY(f) \cdot g + Yf \cdot Xg + Xf \cdot Yg + f \cdot XY(g).$$

Sin embargo, el operador $XY - YX$ sí que la cumple, por lo que $XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 1.41. Dada una variedad diferencial M , se define el *conmutador* de campos vectoriales como

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned} \quad \forall f \in C^\infty(M) : \quad [X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf).$$

Por definición, el conmutador además de bilineal es antisimétrico

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) : \quad [Y, X] = -[X, Y].$$

También se comprueba que

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) : \quad [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Dada una carta $(U, \mathbf{x})$, si $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ e $Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, entonces $[X, Y]$ en coordenadas viene dado por

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Definición 1.42. Un *álgebra de Lie* sobre $\mathbb{K}$ es un par $(V, [\cdot, \cdot])$, donde V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ es una operación, llamada *corchete de Lie*, tal que

1. Es bilineal: $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$[\mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_2, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{v}] + \lambda [\mathbf{u}_2, \mathbf{v}].$$

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}_1] + \lambda [\mathbf{u}, \mathbf{v}_2].$$

2. Es antisimétrica: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \quad [\mathbf{v}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{v}].$

3. Cumple la *identidad de Jacobi*: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \quad [\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0.$

Un *subálgebra de Lie* de $(V, [\cdot, \cdot])$ es un subespacio U de V cerrado bajo el corchete de Lie:

$$[\cdot, \cdot]|_U : U \times U \longrightarrow U.$$

Es decir, U es subálgebra de Lie de V si $[U, U] \subseteq U$.

¹¹En general no existen bases globales definidas en todo M (véase el *problema de la bola peluda*).

Obsérvese que un álgebra de Lie no es un álgebra en el sentido usual.¹²

Por lo expuesto anteriormente, tenemos que $\mathfrak{X}(M)$ con su conmutador $[\cdot, \cdot]$ es un álgebra de Lie.

De manera intuitiva, el conmutador da una idea del grado de no conmutatividad de los flujos de dos campos vectoriales. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos calcular sendos grupos uniparamétricos de difeomorfismos $\{\Phi_s^X\}_{s \in \mathbb{R}}$ y $\{\Phi_t^Y\}_{t \in \mathbb{R}}$. Para cuantificar la diferencia entre $\Phi_s^X \circ \Phi_t^Y$ y $\Phi_t^Y \circ \Phi_s^X$, podemos evaluar una función $f \in C^\infty(M)$ después de ambas aplicaciones y tomar su diferencia. Se puede comprobar [7, §39-C] que el primer término no nulo del desarrollo en serie de Taylor de dicha diferencia es

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \right|_{s=t=0} \{f[(\Phi_s^X \circ \Phi_t^Y)(p)] - f[(\Phi_t^Y \circ \Phi_s^X)(p)]\} = [X, Y](p)f.$$

De hecho, lo anterior es igual a $\mathcal{L}_X[\mathcal{L}_Y f](p) - \mathcal{L}_Y[\mathcal{L}_X f](p)$, siendo $\mathcal{L}$ el operador que se define a continuación y que, en cierto modo, generaliza la idea de derivada direccional de campos en $\mathbb{R}^n$ a campos vectoriales y formas en variedades.

Si F es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ y γ es una curva en $\mathbb{R}^n$, podemos evaluar el cambio instantáneo de F al recorrer γ en el punto $\gamma(0) = p$ mediante

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(p)}{t}.$$

En variedades esto no es posible generalmente, pues en cada $t \neq 0$, $F(\gamma(t))$ y $F(p)$ no se pueden restar al no estar ni siquiera en el mismo espacio vectorial.

Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha \in \mathcal{T}_s^r(M)$. Calculado el flujo de X obtenemos su grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\{\Phi_t^X\}_{t \in \mathbb{R}}$ y su conjunto de curvas integrales $\{\gamma_p^X\}_{p \in M}$, y podemos usar para cada $t \in \mathbb{R}$ el *pull-back* de Φ_t^X para «traer» $\alpha(\gamma_p^X(t))$ a $T_s^r(T_p M)$ y poder así restarle $\alpha(p)$.

Definición 1.43. Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha \in \mathcal{T}_s^r(M)$, la *derivada de Lie* de α respecto a X en $p \in M$ es (Figura 1.15)

$$(\mathcal{L}_X \alpha)(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [(\Phi_t^X)^* \alpha] \in T_p M.$$

Si tomamos la derivada en otro instante distinto de cero, del hecho de que $\Phi_{s+t}^X = \Phi_s^X \circ \Phi_t^X$ y de la regla de la cadena del *pull-back* se demuestra fácilmente el siguiente

Teorema 1.44. Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha \in \mathcal{T}_s^r(M)$, se cumple que

$$\frac{d}{dt} [(\Phi_t^X)^* \alpha] = (\Phi_t^X)^* \mathcal{L}_X \alpha.$$

Teorema 1.45. La derivada de Lie de campos vectoriales coincide con el conmutador. Más concretamente,

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) : \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Teorema 1.46 (Fórmula mágica de Cartan). Para las formas diferenciales se cumple que

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) : \quad \mathcal{L}_X = \mathbf{i}_X \circ \mathbf{d} + \mathbf{d} \circ \mathbf{i}_X.$$

Es decir, $\forall \omega \in \Omega^k(M) : \quad \mathcal{L}_X(\omega) = \mathbf{i}_X(\mathbf{d}\omega) + \mathbf{d}(\mathbf{i}_X \omega).$

Proposición 1.47. $\forall X \in \mathfrak{X}(M) : \quad \forall f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M) : \quad \mathcal{L}_X f = Xf.$

¹²La operación de un álgebra tiene que ser bilineal y asociativa, y la asociatividad es incompatible con las condiciones 2 y 3 definidas para álgebras de Lie excepto en el caso trivial de que la operación siempre dé el vector nulo.

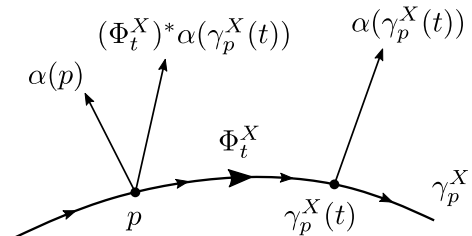


Figura 1.15: Derivada de Lie de α respecto a X en p

1.6. Geometría simpléctica

Una geometría o estructura geométrica en una variedad es un campo tensorial de cierto orden con ciertas propiedades. En este trabajo hay dos estructuras geométricas de interés que están estrechamente relacionadas: la estructura *simpléctica* y la estructura *de Poisson*. En esta sección nos ocupamos de la primera de ellas. Una vez más, se omiten demostraciones y resultados intermedios, que se pueden consultar en [5, 6]. Primero definiremos la *simplecticidad* en espacios vectoriales, y luego en variedades.

Definición 1.48. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Se dice que una $\omega \in T_2^0(V)$ es *no degenerada* si

$$\forall \mathbf{v} \in V : \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (1.7)$$

Equivalentemente, $\omega \in T_2^0(V)$ es no degenerada si dada una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de V , la matriz de ω respecto a dicha base — $\omega_{ij} := \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ —, es no singular. En tal caso, la matriz con cualquier otra base tampoco será singular.

Cualquier tensor $\omega \in T_2^0$ no degenerado induce un isomorfismo canónico entre V y V^* . Sea $\mathcal{B}^* = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ la base dual de $\mathcal{B}$. Fijado $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ (un objeto «con índices arriba»), la función $\omega(\mathbf{u}, \cdot) : \mathbf{v} \mapsto \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ envía vectores de V a $\mathbb{R}$, por lo que es un covector: $\omega(\mathbf{u}, \cdot) = v_j \varepsilon^j \in V^*$ (un objeto «con índices abajo»). Queda así definida una aplicación «que baja índices». Se cumple que

$$v_j = \omega_{ij} u^i,$$

y la condición de que ω sea no degenerada equivale a que la relación anterior sea invertible, quedando definida una aplicación «que sube índices»: $u^i = (\omega^{-1})^{ij} v_j$. Mas formalmente, tenemos la siguiente

Definición 1.49. Sea V un espacio vectorial y sea $\omega \in T_2^0(V)$. Se define la aplicación ω *bemol*, $\omega^\flat : V \longrightarrow V^*$, mediante $\omega^\flat(\mathbf{u}) := \omega(\mathbf{u}, \cdot)$, o también

$$\forall \mathbf{v} \in V : [\omega^\flat(\mathbf{u})](\mathbf{v}) := \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

ω es no degenerada si y sólo si $\omega^\flat$ es invertible, y en tal caso a su inversa se llama ω *sostenida*: $\omega^\sharp := (\omega^\flat)^{-1}$.¹³

Definición 1.50. La *transpuesta* de $\omega \in T_2^0(V)$ es la aplicación $\omega^\top \in T_2^0(V)$ definida mediante $\omega^\top(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \omega(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

- Se dice que ω es *simétrica* si $\omega^\top = \omega$.
- Se dice que ω es *antisimétrica* si $\omega^\top = -\omega$.

El *rango* de ω es el rango de su matriz ω_{ij} respecto a cualquier base (no depende de la base elegida).

Elijiendo una base y su dual, se comprueba fácilmente la siguiente

Proposición 1.51. Sea $\omega \in T_2^0(V)$, y sea $\mathcal{B}$ una base de V con base dual $\mathcal{B}^*$. Se cumple que

$$[\omega^\flat]_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)} = [\omega]_{\mathcal{B}}^\top.$$

Si además ω es no degenerada, se tendrá

$$[\omega^\sharp]_{(\mathcal{B}^*, \mathcal{B})} = ([\omega]_{\mathcal{B}}^\top)^{-1}.$$

¹³Hay una variante más débil de no degeneración que consiste en exigir que $\forall \mathbf{v} \in V : \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}$, que sería lo mismo que exigir que $\omega^\flat$ sea inyectiva, en vez de invertible. Por supuesto, esta distinción sólo entra en juego en espacios vectoriales de dimensión infinita, que aquí no consideramos.

Proposición 1.52. Si $\omega \in T_2^0(V)$ es antisimétrica, entonces

- El rango r de ω es par: $r = 2n \leq m = \dim V$.
- Se puede elegir una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ de V con base dual $\mathcal{B}^* = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$ tal que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \wedge \varepsilon^{n+i},$$

de manera que la matriz de ω en dicha base es

$$\begin{vmatrix} O & I_n & O \\ -I_n & O & O \\ O & O & O \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{vmatrix}, \quad I_n \text{ la identidad de orden } n,$$

dependiendo de si $2n < \dim V$ (izda., degenerada) ó si $2n = \dim V$ (dcha., no degenerada).

Definición 1.53. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Una *forma simpléctica* en V es una forma $\omega \in T_2^0(V)$ antisimétrica y no degenerada. Al par (V, ω) se le llama *espacio vectorial simpléctico*.

Por la proposición anterior, un espacio vectorial simpléctico debe tener dimensión par, y existe una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n})$ de V tal que la matriz de ω en dicha base es de la forma

$$J := \begin{vmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{vmatrix}, \quad I_n \text{ la identidad de orden } n.$$

Además, como $J^\top = -J$ y $J^2 = -I$, de la Proposición 1.51 resulta

Proposición 1.54. Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico de dimensión $2n$. Si $\mathcal{B}$ es una base de Darboux de V y $\mathcal{B}^*$ es su base dual, se cumple que

$$[\omega^\flat]_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)} = J^\top = \begin{bmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\omega^\sharp]_{(\mathcal{B}^*, \mathcal{B})} = J = \begin{bmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Se puede comprobar que a partir de una forma simpléctica se puede obtener una forma de volumen tomando el producto exterior consigo misma n veces ($2n = \dim V$). Si $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{2n})$ es la base dual de la base $\mathcal{B}$ anterior, se cumple que

$$\omega^n := \omega \wedge \overset{n \text{ veces}}{\dots} \wedge \omega = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n! \cdot (\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^{2n}).$$

Se toma entonces en un espacio vectorial simpléctico (V, ω) la forma de volumen

$$\Omega_\omega := \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \omega \wedge \overset{n \text{ veces}}{\dots} \wedge \omega.$$

Definición 1.55. Sean (V, ω) y (U, φ) dos espacios vectoriales simplécticos. Se dice que $T \in \text{Hom}(V, U)$ es *simpléctica* si «preserva las estructuras simplécticas», es decir, si $\omega = T^* \varphi$. Más explícitamente, esto es

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \quad \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(T\mathbf{u}, T\mathbf{v}).$$

Teorema 1.56. Sean (V, ω) y (U, φ) dos espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión. Si $T \in \text{Hom}(V, U)$ es simpléctica, entonces T es invertible y preserva el volumen y la orientación: $\Omega_\omega = T^* \Omega_\varphi$.

Eligiendo una base, se comprueba fácilmente la siguiente

Proposición 1.57. Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico. $T \in \text{Aut}(V)$ es simpléctica si y sólo si, para cualquier base

$$[T]^\top [\omega][T] = [\omega].$$

Se puede comprobar que los isomorfismos lineales simplécticos en (V, ω) forman un grupo con la composición, llamado *grupo simpléctico* de (V, ω) , y que se suele denotar como $\text{Sp}(V, \omega)$.

Pasamos ahora a definir la *simplecticidad* en variedades. Básicamente repetiremos las definiciones anteriores en campos tensoriales de orden $(0, 2)$ haciendo que las definiciones vistas hasta ahora se cumplan en cada fibra de TM .

Definición 1.58. Sea M una variedad diferenciable. Se dice que $\omega \in \mathcal{T}_2^0(M)$ es *no degenerada* si en cada $p \in M$, $\omega(p) \in T_2^0(T_p M)$ es no degenerada.

Definición 1.59. Dada una $\omega \in \mathcal{T}_2^0(M)$, se define $\omega^\flat : TM \rightarrow T^*M$ mediante

$$\omega^\flat(p) := [\omega(p)]^\flat.$$

Si ω es no degenerada, se puede comprobar que $\omega^\flat$ es un difeomorfismo, y su inversa se representa como $\omega^\sharp$.

Para obtener la representación análoga a la de la Proposición 1.52, es necesaria una hipótesis adicional: que ω sea cerrada ($d\omega = 0$).

Teorema 1.60 (Darboux). Sea M una variedad diferenciable de dimensión $2n$, y sea $\omega \in \Omega^2(M)$ no degenerada. En tal caso, se cumple que $d\omega = 0$ si y sólo si para cada $p \in M$, existe una carta $(U, \mathbf{x})$ centrada en p , con $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$, tal que

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i.$$

En tal caso, se dice que las coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ son *canónicas* o de Darboux.

Definición 1.61. Una *forma simpléctica* en una variedad M es una forma $\omega \in \mathcal{T}_2^0(M)$ antisimétrica ($\omega \in \Omega^2(M)$), no degenerada ($\omega^\flat$ invertible) y cerrada ($d\omega = 0$).

Al par (M, ω) se le llama *variedad simpléctica*.

Una variedad simpléctica debe ser de dimensión par, y si se eligen las coordenadas canónicas (x^i, y_j) , cuya existencia está garantizada por el teorema de Darboux, su representación matricial en la base asociada tiene la forma $\begin{vmatrix} O & I \\ -I & O \end{vmatrix}$. De la misma manera, podemos definir la forma de volumen

$$\Omega_\omega := \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \omega \wedge \overset{n \text{ veces}}{\dots} \wedge \omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n,$$

de manera que una variedad simpléctica es siempre *orientable*.¹⁴

Definición 1.62. Sean (M, ω) y (N, φ) dos variedades simplécticas, y sea $F : M \rightarrow N$. Se dice que F es *simpléctica* o una *transformación canónica* si «preserva las estructuras simplécticas», es decir, si $\omega = F^*\varphi$. Más explícitamente, esto es

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) : \quad \omega(X, Y) = \varphi(F_*X, F_*Y).$$

Si F es un difeomorfismo simpléctico, se dice que es un *simplectomorfismo*.

¹⁴Una variedad M es orientable si existe una $\Omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ que no se anula en ningún punto: $\forall p \in M : \Omega(p) \neq 0$. Es únicamente en las variedades orientables donde se pueden definir las integrales de formas diferenciales.

Proposición 1.63. Si $F : M \rightarrow N$ es un *simplectomorfismo* ($F^*\omega_N = \omega_M$), entonces $F^{-1} : N \rightarrow M$ también lo es, y se cumple que $F_*\omega_M = (F^{-1})^*\omega_N = \omega_N$.

Teorema 1.64. Sean (M, ω) y (N, φ) dos variedades *simpléticas* de la misma dimensión. Si $F : M \rightarrow N$ es *simplética*, entonces también es un *difeomorfismo* (un *simplectomorfismo*) que *preserva el volumen y la orientación*: $\Omega_\omega = F^*\Omega_\varphi$.

Aplicando la Proposición 1.57 a cada fibra de TM , con el hecho de que para una transformación $F : M \rightarrow M$ la matriz de su *push-forward* en un punto $p \in M$ respecto a una carta $(U, \mathbf{x})$ (su matriz jacobiana) viene dada por

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(p) \right]_j^i = \frac{\partial (x^i \circ F)}{\partial x^j}(p),$$

tenemos la siguiente

Proposición 1.65. Sea (M, ω) una variedad *simplética*. La transformación $F : M \rightarrow M$ es *simplética* si y sólo si en cada punto su *push-forward* $F_{*,p} : T_p M \rightarrow T_p M$ es *simplético*, lo que implica que elegidas una coordenadas locales $\mathbf{x}$ se cumple que

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(p) \right]^\top [\omega(p)] \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(p) \right] = [\omega(p)].$$

Veamos ahora que cualquier fibrado cotangente admite una forma *simplética* natural.¹⁵ Sea Q una variedad diferenciable cualquiera. Su fibrado cotangente $M := T^*Q$ tiene dimensión par. Consideremos la proyección natural $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$. Por definición, su *pull-back*

$$\pi_Q^* : \underbrace{T^*Q}_M \rightarrow \underbrace{T^*(T^*Q)}_{T^*M}$$

define un campo covectorial en M , es decir, una 1-forma $\pi_Q^* \in \mathfrak{X}^*(M) = \Omega^1(M)$. Pues resulta que $-\mathbf{d}\pi_Q \in \Omega^2(M)$ es cerrada y no degenerada, como comprobaremos mediante el uso de coordenadas locales.

Definición 1.66. Sea $M \xrightarrow{\pi_Q} Q$ el fibrado cotangente de Q ($M = T^*Q$). Se define la *forma de Liouville* en M como $\theta_M := \pi_Q^* \in \mathfrak{X}^*(M) = \Omega^1(M)$.

Intentemos representar en coordenadas la forma de Liouville. Para ello, vamos a evaluarla en un punto $\sigma \in M$ genérico. Sea $(U, (x^1, \dots, x^n))$ una carta de Q . Si $\sigma \in M = T^*Q$, entonces

$$\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \mathbf{d}x^i.$$

Definiendo las coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ en el cotangente $M = T^*Q$ como vimos en la sección 1.3:

$$q^i := x^i \circ \pi_Q, \quad p_j := \frac{\partial}{\partial x^j},$$

podemos escribir

$$\sigma = p_i(\sigma) \mathbf{d}x^i \implies \theta_M(\sigma) = \pi_Q^*(p_i(\sigma) \mathbf{d}x^i) = p_i(\sigma) \pi_Q^*(\mathbf{d}x^i).$$

Como $\pi_Q^*(\mathbf{d}x^i) \in T^*M$, en las bases inducidas por las coordenadas en M , podemos escribir

$$\pi_Q^*(\mathbf{d}x^i) = [\pi_Q^*(\mathbf{d}x^i)] \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right) \mathbf{d}q^j + [\pi_Q^*(\mathbf{d}x^i)] \left(\frac{\partial}{\partial p_j} \right) \mathbf{d}p_j.$$

¹⁵En el sentido de que se puede definir únicamente con los objetos que definen la estructura sin ninguna elección arbitraria, como por ejemplo, elegir cartas concretas.

Por la definición del *pull-back* y del *push-forward*:

$$\begin{aligned} [\pi_Q^*(\mathbf{d}x^i)] \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right) &= \mathbf{d}x^i \left[(\pi_Q)_* \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right) \right] = \left[(\pi_Q)_* \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right) \right] (x^i) \\ &= \frac{\partial(x^i \circ \pi_Q)}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i. \end{aligned}$$

De la misma manera, se comprueba que

$$[\pi_Q^*(\mathbf{d}x^i)] \left(\frac{\partial}{\partial p_j} \right) = \frac{\partial q^i}{\partial p_j} = 0,$$

por lo que resulta

$$\pi_Q^*(\mathbf{d}x^i) = \delta_j^i \mathbf{d}q^j + 0 \mathbf{d}p_j = \mathbf{d}q^i.$$

Así, finalmente obtenemos que $\theta_M(\sigma) = p_i(\sigma) \mathbf{d}q^i$, por lo que la forma de Liouville en coordenadas viene dada por

$$\theta_M = p_i \mathbf{d}q^i,$$

y la 2-forma

$$\omega_M := -\mathbf{d}\theta_M = -\mathbf{d}p_i \wedge \mathbf{d}q^i = \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i$$

es evidentemente cerrada y no degenerada. De hecho, (q^i, p_j) son coordenadas de Darboux en la variedad $M = T^*Q$ para la forma simpléctica ω_M .

Teorema 1.67. Sea $M \xrightarrow{\pi_Q} Q$ el fibrado cotangente de Q ($M = T^*Q$). Si $\theta_M = \pi_Q^*$ es la 1-forma de Liouville en M , entonces la 2-forma $\omega_M := -\mathbf{d}\theta_M$ es cerrada y no degenerada, por lo que (M, ω) es una variedad simpléctica.

Teorema 1.68. Sea $M \xrightarrow{\pi_Q} Q$ el fibrado cotangente de Q ($M = T^*Q$). Si a partir de unas coordenadas cualquiera $(x^1, \dots, x^n)$ de Q se construyen las coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ mediante $q^i := x^i \circ \pi_Q$ y $p_j := \frac{\partial}{\partial x^j}$, entonces la forma de Liouville $\theta_M = \pi_Q^*$ y la forma simpléctica $\omega_M = -\mathbf{d}\theta_M$ vienen dadas por

$$\boxed{\theta_M = p_i \mathbf{d}q^i} \quad , \quad \boxed{\omega_M = \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i}.$$

Veamos finalmente varios objetos inducidos por la estructura simpléctica que enlazan con la geometría de Poisson de la siguiente sección. Las propiedades de dichos objetos se estudiarán en el capítulo de Mecánica Geométrica.

Definición 1.69. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. El *campo hamiltoniano* asociado a $f \in C^\infty(M)$ se define mediante

$$X_f := \omega^\sharp(\mathbf{d}f).$$

Equivalentemente, $\omega^\flat(X_f) = \mathbf{i}_{X_f}(\omega) = \omega(X_f, \cdot) = \mathbf{d}f$.

Al ser $\mathbf{d}$ una antiderivación y $\omega^\sharp$ lineal, se comprueba fácilmente la siguiente

Proposición 1.70. La operación $f \mapsto X_f$ que asigna a cada función su campo hamiltoniano asociado es una derivación:

$$\begin{aligned} \forall f, g \in C^\infty(M) : \quad & X_{fg} = gX_f + fX_g. \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad \forall f, g \in C^\infty(M) : \quad & X_{f+\lambda g} = X_f + \lambda X_g. \end{aligned}$$

Definición 1.71. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. El *corchete de Poisson* inducido por la estructura simpléctica es la operación $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definida mediante

$$\forall f, g \in C^\infty(M) : \quad \{f, g\} := -\omega(X_f, X_g) = X_f(g).$$

En coordenadas de Darboux, el corchete de Poisson toma la forma

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

La definición de $\{\cdot, \cdot\}$ tiene sentido para cualquier $\omega \in \Omega^2(M)$ no degenerada. Prescindiendo momentáneamente de la hipótesis $\mathbf{d}\omega = 0$, expresando en coordenadas $\omega = \omega_{ij} \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j$, se puede comprobar que

$$\mathbf{d}\omega(X_f, X_g, X_h) = 2[\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\}].$$

Por lo tanto, $\mathbf{d}\omega = 0$ si y sólo si $\{\cdot, \cdot\}$ cumple la identidad de Jacobi.

Teorema 1.72. $\forall f, g, h \in C^\infty(M) : \quad \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$

Por último, generalizando $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\omega(\omega^\sharp(\mathbf{d}f), \omega^\sharp(\mathbf{d}g))$, vemos que es posible definir a partir de $\omega \in \mathcal{T}_0^2(M)$ (covariante de grado 2) otro tensor $\Lambda \in \mathcal{T}_2^0(M)$ (contravariante de grado 2, conocido como *bivector de Poisson*), mediante

$$\forall \varphi, \psi \in \mathfrak{X}^*(M) : \quad \Lambda(\varphi, \psi) := -\omega(\omega^\sharp(\varphi), \omega^\sharp(\psi)), \quad (1.9)$$

de manera que se cumple que

$$\{f, g\} = \Lambda(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g).$$

1.7. Geometría de Poisson

La geometría de Poisson generaliza las propiedades obtenidas en el corchete de Poisson inducido por la estructura simpléctica de la sección anterior, relajando la hipótesis de no degeneración. Esto permite aplicar el formalismo hamiltoniano a nuevos sistemas.

Definición 1.73. Una *variedad de Poisson* es un par $(P, \{\cdot, \cdot\})$ tal que

1. P es una variedad diferenciable.
2. $(C^\infty(P), \{\cdot, \cdot\})$ es un álgebra de Lie.
3. $\{\cdot, \cdot\}$, llamado *corchete de Poisson*, es una (bi)derivación en P :

$$\forall f, g, h \in C^\infty(P) : \quad \{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}.$$

Al inicio de la sección anterior se dijo que una estructura geométrica en una variedad es un campo tensorial definido en la misma con ciertas restricciones, pero la definición anterior consiste en una operación entre las funciones de P . Veremos que es posible identificar $\{\cdot, \cdot\}$ con un tensor $\Lambda \in \mathcal{T}_0^2(P)$, que se puede considerar una versión contravariante de la geometría simpléctica siempre y cuando Λ sea no degenerada.¹⁶

Fijada $f \in C^\infty(P)$, el operador $\{f, \cdot\} : C^\infty(P) \longrightarrow C^\infty(P)$ es una derivación, por lo que existe un campo vectorial X_f en P tal que $\forall g \in C^\infty(P) : \quad X_f(g) = \{f, g\}.$

Definición 1.74. Sea $(P, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson. El *campo hamiltoniano* asociado a $f \in C^\infty(P)$ es la derivación

$$X_f := \{f, \cdot\}.$$

¹⁶La definición de no degeneración de Λ se define de manera análoga a la de ω .

Veamos qué forma tienen los campos hamiltonianos en coordenadas locales. Sea $(U, x^1, \dots, x^n)$ una carta de P . Dadas $f, g \in C^\infty(P)$,

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= X_f(g) = \mathbf{d}x^j(X_f) \frac{\partial g}{\partial x^j} = X_f(x^j) \frac{\partial g}{\partial x^j} = \{f, x^j\} \frac{\partial g}{\partial x^j} = -\{x^j, f\} \frac{\partial g}{\partial x^j} = -X_{x^j}(f) \frac{\partial g}{\partial x^j} \\ &= -\mathbf{d}x^i(X_{x^j}) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = -X_{x^j}(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = -\{x^j, x^i\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Es decir, que

$$X_f = \{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{y} \quad \{f, g\} = \{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

por lo que el corchete de Poisson localmente está completamente determinado por las funciones $\{x^i, x^j\}$, llamadas *funciones de estructura*, que tendrán ciertas restricciones impuestas por las propiedades de $\{\cdot, \cdot\}$. Por ejemplo, por la antisimetría de $\{\cdot, \cdot\}$, debe ser $\{x^j, x^i\} = -\{x^i, x^j\}$.

De la misma manera que existe una biyección entre las derivaciones en un punto de una variedad y los vectores tangentes a dicho punto, podemos asociar biyectivamente la *biderivación* $\{\cdot, \cdot\}$ con un *bivector* [3]. Dados los vectores (o campos vectoriales) X e Y en P , si definimos

$$\forall f, g \in C^\infty(P) : \quad (X \otimes Y)(f, g) := X(f)Y(g),$$

la operación $\{\cdot, \cdot\}$ corresponderá a un cierto $\Lambda = \{x^i, x^j\} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{T}_0^2(P)$. Es más, al ser $\{\cdot, \cdot\}$ una operación antisimétrica (por ser un corchete de Lie), deberá ser $\Lambda \in \mathfrak{X}^2(P) := \Gamma(P, \wedge^2(TP))$. Además, este bivector cumplirá la identidad de Jacobi.

De hecho, tenemos el siguiente

Teorema 1.75. *Existe una biyección entre los corchetes de Poisson definibles en una variedad y los bivectores antisimétricos que cumplen la igualdad de Jacobi*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Corchetes de Poisson} \\ \{ \cdot, \cdot \} \text{ en } P \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Bivectores } \Lambda \in \mathfrak{X}^2(P) \\ \text{que cumplen la identidad de Jacobi.} \end{array} \right\}.$$

Esta biyección está caracterizada por la igualdad

$$\forall f, g \in C^\infty(P) : \quad \{f, g\} = \Lambda(f, g).$$

Esto justifica la siguiente definición alternativa

Definición 1.76. Una *variedad de Poisson* es un par (P, Λ) tal que

1. P es una variedad diferenciable.
2. $\Lambda \in \mathfrak{X}^2(P) = \Gamma(P, \wedge^2(TP))$, llamado *bivector de Poisson*, cumple la identidad de Jacobi:

$$\forall f, g, h \in C^\infty(P) : \quad \Lambda(f, \Lambda(g, h)) + \Lambda(h, \Lambda(f, g)) + \Lambda(g, \Lambda(h, f)) = 0.$$

De manera análoga a la definición de $\omega^\flat$ vista en la sección anterior, a partir de un bivector $\Lambda : \mathfrak{X}^*(P) \times \mathfrak{X}^*(P) \longrightarrow C^\infty(P)$, fijando una $\varphi \in \mathfrak{X}^*(P)$, la aplicación $\Lambda(\varphi, \cdot)$ convierte linealmente 1-formas en funciones, por lo que se puede considerar que $\Lambda(\varphi, \cdot) \in \mathfrak{X}(P)$. La aplicación $\varphi \mapsto \Lambda(\varphi, \cdot)$ «sube índices».

Definición 1.77. Sea $\Lambda \in \mathfrak{X}^2(P)$. La aplicación Λ *sostenida*, $\Lambda^\sharp : \mathfrak{X}^*(P) \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$ se define mediante $\varphi \mapsto \Lambda(\varphi, \cdot)$, o también

$$\forall \psi \in \mathfrak{X}^*(P) : \quad [\Lambda^\sharp(\varphi)](\psi) := \Lambda(\varphi, \psi).$$

Nótese que en la Definición 1.76 no requerimos que el bivector de Poisson Λ sea no degenerado. En caso de que lo sea, por motivos similares al caso simpléctico, la dimensión de P tiene que ser par, podemos definir $\Lambda^b := (\Lambda^\sharp)^{-1}$, y de manera análoga a (1.9), podemos definir una 2-forma ω mediante

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(P) : \quad \omega(X, Y) := -\Lambda(\Lambda^b(X), \Lambda^b(Y)). \quad (1.10)$$

Es por esto que, en variedades de dimensión par, podemos considerar los bivectores de Poisson objetos duales a las formas simplécticas. La relación (1.10) establece una biyección entre los bivectores de $\mathfrak{X}^2(P)$ no degenerados y las 2-formas de $\Omega^2(P)$ no degeneradas. Introduciendo además la condición de la igualdad de Jacobi, tenemos el siguiente

Teorema 1.78. *La relación (1.10) establece una biyección entre los bivectores de Poisson no degenerados y las formas simplécticas.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bivectores de Poisson} \\ \text{no degenerados } \Lambda \in \mathfrak{X}^2(P) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Formas simplécticas} \\ \omega \in \Omega^2(P) \end{array} \right\}.$$

De hecho, si una forma simpléctica $\omega \in \Omega^2(T^*Q)$ viene dada en coordenadas por

$$\omega = \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i.$$

entonces el bivector de Poisson asociado viene dado por

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Es más, si el bivector de Poisson Λ y la forma simpléctica ω están relacionadas por (1.10) (o por (1.9)), se cumple que $\Lambda^\sharp = \omega^\sharp$ y $\Lambda^b = \omega^b$, por lo que en coordenadas de Darboux $[\Lambda^\sharp] = J$ y $[\Lambda^b] = -J$.

También se cumple, si $\omega \sim \Lambda \sim \{\cdot, \cdot\}$, que las definiciones dadas de campo hamiltoniano coinciden:

$$X_f = \omega^\sharp(\mathbf{d}f) = \Lambda^\sharp(\mathbf{d}f) = \Lambda(\mathbf{d}f, \cdot) = \{f, \cdot\}.$$

Capítulo 2

Mecánica Geométrica

En este capítulo se resume la formulación de la Mecánica Clásica en términos geométricos.

2.1. Introducción

Tras la introducción de *coordenadas generalizadas* $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ para describir un sistema mecánico de n grados de libertad, ya sea mediante el principio de los trabajos virtuales o mediante el principio de mínima acción hamiltoniana, se obtienen las *ecuaciones de Euler-Lagrange* [4]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \right] = \frac{\partial L}{\partial q^k}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

donde $L : D \subseteq \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, conocida como *función lagrangiana*, se suele tomar como la diferencia entre la energía cinética y la potencial:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, determinan la dinámica de las coordenadas generalizadas q^i .

Introduciendo los *momentos generalizados*¹

$$p_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2.2)$$

y si en cada punto $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ el lagrangiano es *regular*

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \neq 0,$$

entonces por el teorema de la aplicación implícita existe una biyección local entre los momentos generalizados y las velocidades generalizadas ($\mathbf{p} \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}}$). Se puede entonces definir la *función hamiltoniana* como la transformada de Legendre [4, 7] de la lagrangiana respecto a las velocidades generalizadas

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}^k - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ se obtiene como función de $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ mediante la biyección (2.2).

¹Se puede comprobar mediante ejemplos sencillos que si q_k tiene dimensiones de longitud, entonces su p_k asociado tiene dimensiones de momento lineal (masa $\times$ velocidad).

Con estas nuevas definiciones y las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1) se obtienen las *ecuaciones de Hamilton*

$$\begin{cases} \dot{q}^k(t) = \frac{\partial H}{\partial p_k}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \\ \dot{p}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^k}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Esta vez la dinámica del sistema viene dada por $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

2.2. Mecánica hamiltoniana en variedades

Las ecuaciones de Hamilton (2.3) se pueden expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial H / \partial \mathbf{q} \\ \partial H / \partial \mathbf{p} \end{bmatrix},$$

donde O_n e I_n son las matrices cuadradas nula e identidad de dimensión n , respectivamente.

La matriz anterior corresponde a una aplicación lineal simpléctica. Por lo tanto, parece que la formulación geométrica más apropiada de la mecánica hamiltoniana sea considerar una variedad simpléctica, siempre y cuando en (2.3) no haya dependencia explícita del tiempo en H . Identificando el vector columna de la izquierda como la matriz de un campo vectorial X , y el vector columna de la derecha como la matriz de una 1-forma $\mathbf{d}H$, la matriz cuadrada puede ser la matriz $J = [\omega^\sharp]$ de una aplicación musical $\omega^\sharp$ que transforma covectores en vectores. Por lo tanto, parece plausible una formulación de la forma $X = \omega^\sharp(\mathbf{d}H)$.

Si consideramos que las coordenadas generalizadas son coordenadas locales $x^1, \dots, x^n$ de una variedad diferenciable Q , llamada *espacio de configuración*, entonces consideraremos que el dominio del sistema mecánico es el fibrado cotangente T^*Q , que se suele llamar *espacio de fases*. Definiendo, como vimos en la sección 1.6, las coordenadas de Darboux

$$q^i := x^i \circ \pi_Q \quad \text{y} \quad p_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

podemos considerar que los vectores $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$ de la sección anterior son puntos de T^*Q dados en coordenadas locales.

Si ω es la forma simpléctica canónica de T^*Q , a partir de la estructura simpléctica (T^*Q, ω) se puede formular la dinámica (2.3) de manera global. A partir de un hamiltoniano $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir su campo hamiltoniano asociado

$$X_H := \omega^\sharp(\mathbf{d}H),$$

o equivalentemente

$$\mathbf{i}_{X_H}(\omega) = \mathbf{d}H. \quad (2.4)$$

En coordenadas locales,

$$\mathbf{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^i} \mathbf{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathbf{d}p_i \quad \text{y} \quad X_H = A_i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

mientras que

$$\mathbf{i}_{X_H}(\omega) = \omega(X_H, \cdot) = (\mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i)(X_H, \cdot) = \mathbf{d}q^i(X_H)\mathbf{d}p_i - \mathbf{d}p_i(X_H)\mathbf{d}q^i = -B_i\mathbf{d}q^i + A_i\mathbf{d}p_i.$$

El campo hamiltoniano (2.4) resulta entonces, en coordenadas locales

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

por lo que sus curvas integrales satisfacen las ecuaciones de Hamilton

$$\boxed{\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad , \quad i = 1 \dots, n} \quad . \quad (2.5)$$

De manera más general, se pueden definir sistemas hamiltonianos en cualquier variedad simpléctica, no necesariamente un fibrado cotangente con su forma simpléctica natural.

Definición 2.1. Un *sistema hamiltoniano (simpléctico)* es una terna (M, ω, H) , donde

- (M, ω) es una variedad simpléctica.
- H es una función en M ($H \in C^\infty(M)$) conocida como *hamiltoniano* o *función de energía* del sistema.

La *ecuación de Hamilton* del sistema (M, ω, H) es la ecuación diferencial $\dot{\gamma} = X_H(\gamma)$, donde $X_H = \omega^\sharp(\mathbf{d}H)$ es el *campo hamiltoniano del sistema*. En el caso de elegir coordenadas de Darboux (q^i, p_i) , esta ecuación equivale a las ecuaciones de Hamilton (2.5).

Teorema 2.2 (conservación de la energía). *Dado un sistema hamiltoniano (M, ω, H) , la energía se conserva a lo largo de las curvas integrales del campo X_H :*

$$\forall p \in M : \quad \frac{d}{dt}(H \circ \gamma_p^{X_H}) = 0.$$

Equivalentemente, $\forall t \in \mathbb{R} : (H \circ \Phi_t^{X_H}) = H$ ó $(\Phi_t^{X_H})^*H = H$.

Demostración. Sea $p \in M$. Si $\gamma_p^{X_H} = \Phi^X(\cdot, p)$ es la curva integral de X_H con condición inicial p , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d(H \circ \gamma_p^{X_H})}{dt}(t) &= D_{[\gamma_p^{X_H}](\gamma_p^{X_H}(t))}H = X_H(\gamma_p^{X_H}(t))H = [\mathbf{d}H(X_H)](\gamma_p^{X_H}(t)) \\ &= [\omega^\flat(X_H) \cdot X_H](\gamma_p^{X_H}(t)) = \omega(X_H, X_H)(\gamma_p^{X_H}(t)) = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la antisimetría de ω . Por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $p \in M$ se cumple que $(H \circ \gamma_p^{X_H})(t) = (H \circ \Phi_t^{X_H})(p)$ es constante en el tiempo. Elijiendo $t = 0$, como $\Phi_0^{X_H} = \text{Id}_M$, se sigue que para cada $t \in \mathbb{R}$, $H \circ \Phi_t^{X_H} = H$. $\square$

Elegidas coordenadas de Darboux, por la forma de $[\omega^\sharp] = J$ es fácil comprobar la siguiente

Proposición 2.3. *Dado un sistema hamiltoniano (M, ω, H) , todo campo vectorial se puede expresar localmente como combinación lineal de campos hamiltonianos. En particular, si $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ son coordenadas de Darboux de M , se cumple que*

$$\frac{\partial}{\partial q^i} = X_{p_i} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial p_i} = X_{-q^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Proposición 2.4. *En una variedad simpléctica (M, ω) , la derivada de Lie de la forma simpléctica respecto a un campo hamiltoniano es nula.*

$$\forall H \in C^\infty(M) : \quad \mathcal{L}_{X_H}\omega = 0.$$

Demostración. $\mathcal{L}_{X_H}\omega = \mathbf{i}_{X_H}(\mathbf{d}\omega) + \mathbf{d}(\mathbf{i}_{X_H}\omega) = \mathbf{i}_{X_H}0 + \mathbf{d}(0) = 0 + 0 = 0.$ $\square$

Como consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema 2.5. *Las transformaciones del grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\{\Phi_t^{X_H}\}_{t \in \mathbb{R}}$ de un campo hamiltoniano X_H son simplécticas (simplectomorfismos).*

$$\forall H \in C^\infty(M) : \forall t \in \mathbb{R} : \quad (\Phi_t^{X_H})^*\omega = \omega.$$

Demostración. $\frac{d}{dt}(\Phi_t^{X_H})^*\omega = (\Phi_t^{X_H})^*\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0.$ Por lo que $(\Phi_t^{X_H})^*\omega$ es constante en el tiempo. Eligiendo $t = 0$, $(\Phi_0^{X_H})^*\omega = \text{Id}_{\Omega^2(M)}(\omega) = \omega.$ $\square$

Por el Teorema 1.64, obtenemos como corolario el Teorema de Liouville

Teorema 2.6 (Liouville). *El flujo de un campo hamiltoniano X_H en una variedad simpléctica (M, ω) preserva el volumen Ω_ω . Es decir*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad (\Phi_t^{X_H})^*\Omega_\omega = \Omega_\omega.$$

Pasemos ahora a estudiar las propiedades de las aplicaciones simplécticas. La Definición 1.62 de simplecticidad para $\Phi : M \longrightarrow N$ es

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) : \quad \omega_M(X, Y) = \omega_N(\Phi_*X, \Phi_*Y).$$

Usando la notación musical, esta condición es igual a

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) : \quad \left[\omega_M^\flat(X) \right] (Y) = \left\{ \Phi^* \left[\omega_N^\flat(\Phi_*X) \right] \right\} (Y),$$

por lo que tenemos una definición equivalente de simplecticidad

Proposición 2.7. *Dadas dos variedades simplécticas (M, ω_M) y (N, ω_N) , $\Phi : M \longrightarrow N$ es simpléctica si y sólo si*

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) : \quad \omega_M^\flat(X) = \Phi^* \left[\omega_N^\flat(\Phi_*X) \right].$$

En la proposición anterior no se supone Φ biyectiva. Si exigimos que Φ sea un difeomorfismo, tenemos otra manera de caracterizar los simplectomorfismos por cómo transforman los campos hamiltonianos: el *push-forward* del campo hamiltoniano en M asociado a H es el campo hamiltoniano en N asociado al *push-forward* de H .

Teorema 2.8. *Un difeomorfismo $\Phi : M \longrightarrow N$ entre variedades simplécticas es simpléctico si y sólo si*

$$\forall H \in C^\infty(M) : \quad \Phi_*X_H^M = X_{\Phi_*H}^N.$$

Demostración. Sea $H \in C^\infty(M).$

$\Rightarrow$ Supongamos que Φ es simpléctica. Por la Proposición 2.7, debe cumplirse que

$$\omega_M^\flat(X_H^M) = \Phi^* \left[\omega_N^\flat(\Phi_*X_H^M) \right].$$

Como por definición de X_H^M se cumple que $\omega_M^\flat(X_H^M) = \mathbf{d}H$, resulta

$$\mathbf{d}H = \Phi^* \left[\omega_N^\flat(\Phi_*X_H^M) \right].$$

Cabe preguntarse si la 1-forma en N $\omega_N^\flat(\Phi_*X_H^M)$ es $\mathbf{d}(\Phi_*H) = \mathbf{d}(H \circ \Phi^{-1})$. En efecto

$$\Phi^*[\mathbf{d}(\Phi_*H)] = \mathbf{d}[\Phi^*(\Phi_*H)] = \mathbf{d}H,$$

y al ser Φ^* invertible por ser Φ un difeomorfismo, esto implica que

$$\mathbf{d}(\Phi_*H) = \omega_N^b(\Phi_*X_H^M).$$

Aplicando ahora $\omega_N^\sharp$ a la ecuación anterior, resulta que $X_{\Phi_*H}^N = \Phi_*X_H^M$.

$\Leftarrow$ Sea $\Phi : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo tal que

$$\forall H \in C^\infty(M) : \quad \Phi_*X_H^M = X_{\Phi_*H}^N.$$

Deshaciendo los pasos anteriores, llegamos a que

$$\forall H \in C^\infty(M) : \quad \omega_M^b(X_H^M) = \Phi^* \left[\omega_N^b(\Phi_*X_H^M) \right].$$

Es decir, que se cumple la condición de simplecticidad de la Proposición 2.7 para todos los campos hamiltonianos. Por el Teorema 2.5 y la linealidad de ω_M^b , Φ^* , ω_N^b y Φ_* , podemos concluir que

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) : \quad \omega_M^b(X) = \Phi^* \left[\omega_N^b(\Phi_*X) \right],$$

por lo que Φ es simpléctica. $\square$

Analicemos ahora cómo se traduce la definición de simplecticidad a los corchetes de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ y los bivectores Λ asociados a las formas simplécticas ω . Al ser Λ un objeto contravariante, partamos de $\Phi^{-1} : N \longrightarrow M$.

Si $\Phi : M \longrightarrow N$ es un simplectomorfismo, entonces $\Phi^{-1} : N \longrightarrow M$ también lo es, y por el Teorema 2.8 se cumplirá que $\forall G \in C^\infty(N) : (\Phi^{-1})_*X_H^N = X_{(\Phi^{-1})_*G}^M$, o lo que es lo mismo,

$$\forall G \in C^\infty(N) : \quad X_G^N = \Phi_*X_{\Phi^*G}^M.$$

Sean $F, G \in C^\infty(M)$. Por definición, $\{F, G\}_N = -\omega_N(X_F^N, X_G^N)$, y por la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \{F, G\}_N &= -\omega_N(\Phi_*X_{\Phi^*F}^M, \Phi_*X_{\Phi^*G}^M) = -(\Phi^*\omega_N)(X_{\Phi^*F}^M, X_{\Phi^*G}^M) \\ &= -\omega_M(X_{\Phi^*F}^M, X_{\Phi^*G}^M) = \{\Phi^*F, \Phi^*G\}_M. \end{aligned}$$

Acabamos de demostrar el siguiente

Teorema 2.9. *Un difeomorfismo $\Phi : M \longrightarrow N$ entre dos variedades simplécticas (M, ω_M) y (N, ω_N) es simpléctico si y sólo si los corchetes de Poisson asociados cumplen que*

$$\forall F, G \in C^\infty(N) : \quad \{F, G\}_N = \{\Phi^*F, \Phi^*G\}_M.$$

En términos de bivectores de Poisson, esto es equivalente a

$$\forall F, G \in C^\infty(N) : \quad \Lambda_N(\mathbf{d}F, \mathbf{d}G) = \Lambda_M(\mathbf{d}(\Phi^*F), \mathbf{d}(\Phi^*G)),$$

y por la conmutatividad de Φ^* con $\mathbf{d}$ y la definición del *pull-back*, tenemos que

$$\forall F, G \in C^\infty(N) : \quad \Lambda_N(\mathbf{d}F, \mathbf{d}G) = (\Phi_*\Lambda_M)(\mathbf{d}F, \mathbf{d}G).$$

Eligiendo como F y G coordenadas de N , por la bilinealidad de los Λ se cumplirá que

$$\forall \varphi, \psi \in \mathfrak{X}^*(N) : \quad \Lambda_N(\varphi, \psi) = (\Phi_*\Lambda_M)(\varphi, \psi).$$

Por lo que el Teorema 2.9 equivale al siguiente

Teorema 2.10. *Un difeomorfismo $\Phi : M \rightarrow N$ entre dos variedades simplécticas (M, ω_M) y (N, ω_N) es simpléctico si y sólo si preserva las estructuras de Poisson*

$$\Phi_* \Lambda_M = \Lambda_N.$$

Finalizamos el capítulo viendo cómo es posible generalizar la noción de sistema hamiltoniano a variedades de Poisson, no necesariamente simplécticas. Partamos del siguiente

Teorema 2.11. *Sea (M, ω, H) un sistema hamiltoniano, y sea $f \in C^\infty(M)$. La evolución de f en las trayectorias de X_H viene dada por el corchete de Poisson con H :*

$$\forall p \in M : \quad \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_p^{X_H}) = \{H, f\} \circ \gamma_p^{X_H}.$$

Equivalentemente $\frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t^{X_H}) = \{H, f\} \circ \Phi_t^{X_H}$.

Demostración. Razonando de manera similar al Teorema 2.2, llegamos a que en cada $p \in M$

$$\frac{d(f \circ \gamma_p^{X_H})}{dt}(t) = \omega(X_f, X_H)(\gamma_p^{X_H}(t)) = (\{H, f\} \circ \gamma_p^{X_H})(t).$$

La segunda fórmula es consecuencia de que para cualquier $g \in C^\infty(M)$ se cumple que $\forall t, p \in \mathbb{R} \times M : (g \circ \gamma_p^{X_H})(t) = (g \circ \Phi_t^{X_H})(p)$. $\square$

El teorema anterior se suele expresar abreviadamente como

$$\boxed{\dot{f} = \{H, f\} = \Lambda(\mathbf{d}H, \mathbf{d}f)}.$$

En particular, eligiendo como f las coordenadas de Darboux q^i, p_i , obtenemos las ecuaciones de Hamilton en función de la estructura de Poisson

$$\boxed{\dot{q}^i = \{H, q^i\} = \Lambda(\mathbf{d}H, \mathbf{d}q^i) \quad , \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\} = \Lambda(\mathbf{d}H, \mathbf{d}p_i). \quad i = 1 \dots, n}.$$

Las ecuaciones anteriores permiten generalizar los sistemas hamiltonianos a variedades de Poisson (P, Λ) no necesariamente relacionadas a una estructura simpléctica, lo que permite ampliar el formalismo hamiltoniano a variedades de dimensión impar, o de dimensión par con bivectores Λ degenerados.

Definición 2.12. Un *sistema hamiltoniano (de Poisson)* es una terna (P, Λ, H) , donde

- (P, Λ) es una variedad de Poisson.
- H es una función en P ($H \in C^\infty(P)$) conocida como *hamiltoniano* o *función de energía* del sistema.

La *ecuación de Hamilton* del sistema (P, Λ, H) es la ecuación diferencial $\dot{f} = \{H, f\} := \Lambda(\mathbf{d}H, \mathbf{d}f)$, y el *campo hamiltoniano del sistema* se define como $X_H = \Lambda^\sharp(\mathbf{d}H)$.

Capítulo 3

Integradores simplécticos

En este capítulo exploramos algoritmos numéricos que aprovechan la estructura simpléctica de los sistemas hamiltonianos para dar soluciones más precisas y robustas frente a simulaciones largas.

Veremos que, imponiendo la simplecticidad a un método numérico (esto es, que preserve la forma simpléctica), se consigue aproximadamente una preservación en la energía que no es posible obtener con los métodos convencionales, de manera que la solución obtenida reflejará más fielmente la dinámica real del sistema.

3.1. Fundamentos de la integración numérica

En muchos problemas concretos de la ciencia y la ingeniería, es necesario resolver una ecuación diferencial ordinaria¹

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n,$$

siendo $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido en un abierto de $\mathbb{R}^n$ y que consideraremos suave. La mayoría de las veces no es posible obtener $\mathbf{x}(t)$ analíticamente, por lo que es necesario obtener aproximaciones discretas de dicha curva.

Si el intervalo a integrar es $I = [0, T]$, se toman $t_0, t_1, \dots, t_N \in I$, con $t_0 = 0$ y $t_N = T$, que supondremos equiespaciadas una distancia h

$$h := \frac{T}{N}, \quad t_k := kh \implies t_{k+1} = t_k + h.$$

Con este muestreo temporal, se pretende encontrar $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ que aproximen la solución original:

$$\mathbf{x}_k \approx \mathbf{x}(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

siendo $\mathbf{x}(t)$ la solución real en el instante t .

Si partimos de $\mathbf{x}_k \approx \mathbf{x}(t_k)$, para hallar $\mathbf{x}_{k+1}$, por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k + h) = \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_k+h} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) dt \approx \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_k+h} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) dt. \quad (3.1)$$

Los *integradores de un paso* tratan de aproximar la integral anterior por medio de una regla de cuadratura $\int_{t_k}^{t_k+h} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) dt \approx h \mathbf{F}_h(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ (Figura 3.1) de manera que la aproximación propuesta para $\mathbf{x}_{k+1}$ sea

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{F}_h(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}).$$

¹Asumiremos que trabajamos con un sistema autónomo, pues como vimos en la sección 1.4, todo sistema no autónomo se puede convertir en uno autónomo.

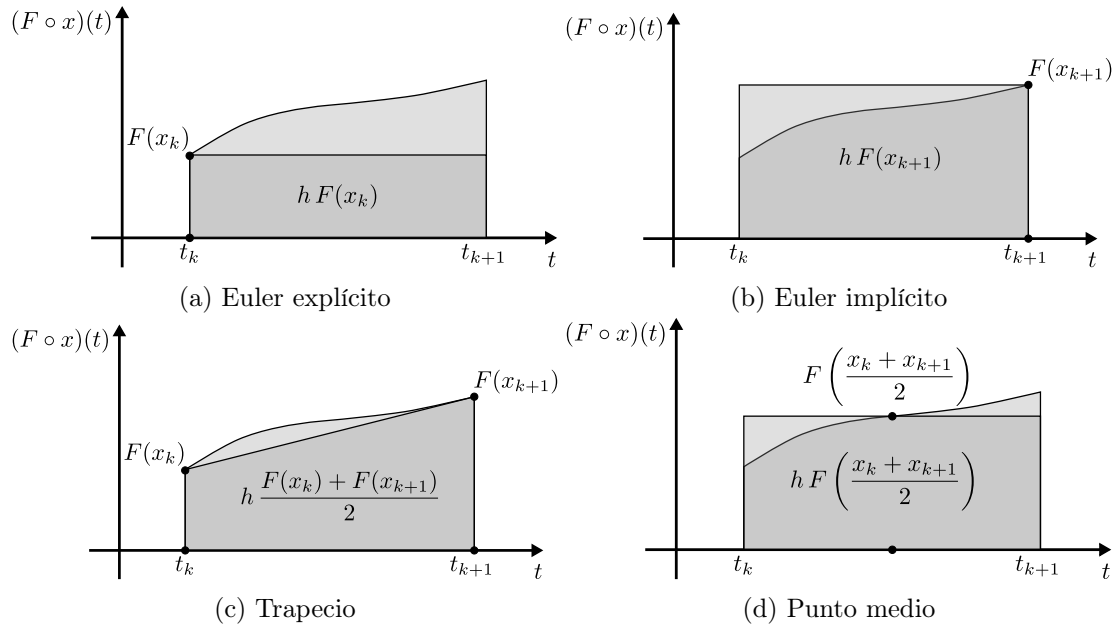


Figura 3.1: Reglas de cuadratura en una dimensión, asumiendo que $x(t_i) \approx x_i$.

Ejemplo (Euler explícito). $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$.

Ejemplo (Euler implícito). $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1})$.

Ejemplo (regla del trapecio). $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1}))$.

Ejemplo (punto medio). $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{F}(\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k+1}))$.

Definición 3.1. Un *integrador de un paso* es un algoritmo de integración numérica definido por

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + h \mathbf{F}_h(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$$

En el caso de que $\mathbf{F}_h$ no dependa de $\mathbf{x}_{k+1}$, se dice que el integrador es *explícito*. En caso contrario, se dice que es *implícito*.

Los métodos implícitos requieren resolver un sistema de ecuaciones —generalmente no lineal— para obtener $\mathbf{x}_{k+1}$, por lo que requieren un mayor esfuerzo computacional que los explícitos.

Los ejemplos vistos anteriormente son casos particulares de *métodos de Runge-Kutta* (RK). Para motivarlos, volvamos a la ecuación (3.1). Queremos aproximar la integral mediante una regla de cuadratura. Una opción sería tomar instantes intermedios entre t_k y $t_k + h$

$$t_k + c_1 h, \dots, t_k + c_s h, \quad \text{con } 0 = c_0 < c_1 < \dots < c_{s-1} < c_s = 1,$$

y ponderar los valores $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k + c_i h))$ con unos pesos b_i :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \, dt \approx \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k + c_i h)).$$

El problema de esto es que requeriría conocer la solución exacta $\mathbf{x}(t)$, por lo que hay que aproximar también cada $\mathbf{K}_i = \mathbf{x}(t_k + c_i h)$. Para ello, una posible solución sería suponer que vienen dados por su propia regla de cuadratura,

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{x}(t_k + c_i h) = \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + c_i h} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \, dt \approx \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_k + c_i h} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \, dt.$$

A su vez,

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_k+c_i h} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \, dt &= \int_0^{c_i h} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k+t)) \, dt = h \int_0^{c_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k+ht)) \, dt \\ &= h \sum_{j=1}^{i-1} \int_{c_j}^{c_{j+1}} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k+ht)) \, dt \approx h \sum_{j=1}^{i-1} \int_{c_j}^{c_{j+1}} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t_k+c_j h)) \, dt = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{K}_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto, definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &:= \mathbf{x}_k \\ \mathbf{K}_2 &:= \mathbf{x}_k + h a_{21} \mathbf{K}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{K}_s &:= \mathbf{x}_k + h(a_{s1} \mathbf{K}_1 + \cdots a_{s,s-1} \mathbf{K}_{s-1}) \end{aligned}$$

tenemos que $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \, dt \approx \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{F}(\mathbf{K}_i)$, de manera que tenemos un nuevo método definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{K}_j(\mathbf{x})) \quad i = 1, \dots, s \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{F}(\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_k)) \end{aligned}$$

para ciertas constantes $\{b_i\}$ y $\{a_{ij}\}$.² Este integrador se conoce como *método de Runge-Kutta explícito de s etapas*. Se llama explícito porque cada $\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_k)$ se obtiene a partir de las $\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)$ ya calculadas ($j < i$). Generalizando lo anterior, tenemos el *método de Runge-Kutta implícito de s etapas*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{K}_j(\mathbf{x})) \quad i = 1, \dots, s \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{F}(\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_k)) \end{aligned}$$

que se llama implícito por tener que resolver las $\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_k)$ definidas implícitamente para poder obtener $\mathbf{x}_{k+1}$.

Definición 3.2. El *método de Runge-Kutta* de s etapas asociado a la *tabla de Butcher*³

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

²Si considerásemos sistemas no autónomos, también intervendrían las constantes $\{c_j\}$.

³En honor al matemático neozelandés John C. Butcher, que adoptó esta representación de los coeficientes a_{ij} , b_i y c_i en forma de tabla. Véase

JOHN C. BUTCHER. *On Runge-Kutta processes of high order*. Journal of the Australian Mathematical Society. Vol. 4. Issue 2, pp. 179-194. (1964).

es el algoritmo de integración definido por $\mathbf{x}_{k+1} = \Psi_h(\mathbf{x}_k)$, siendo

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi_h(\mathbf{x}) &:= \mathbf{x} + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{F}(\mathbf{K}_i(\mathbf{x})) \\ \mathbf{K}_i(\mathbf{x}) &:= \mathbf{x} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{K}_j(\mathbf{x})) \quad i = 1, \dots, s\end{aligned}}.$$

El método es *explícito* si la matriz $A = [a_{ij}]$ es triangular inferior con diagonal nula, y es *implícito* en caso contrario.

Nótese que el término general $\mathbf{x}_k$ de un método de Runge-Kutta viene dado por

$$\mathbf{x}_k = \Psi_h^k(\mathbf{x}_0) = (\Psi_h \circ \overset{k \text{ veces}}{\dots} \circ \Psi_h)(\mathbf{x}_0).$$

Ejemplo. Los métodos mencionados anteriormente son casos particulares de métodos de Runge-Kutta, y sus tablas de Butcher son las siguientes

0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Euler explícito (B.3)	Euler implícito (B.4)	Punto medio (B.5)	Trapezio (B.6)	

Como ejemplo comprobamos el método del trapezio. Partiendo de su definición

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + h \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1}),$$

deducimos que $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ si

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k + h \cdot 0 \mathbf{F}(\mathbf{K}_1(\mathbf{x}_k)) + h \cdot 0 \mathbf{F}(\mathbf{K}_2(\mathbf{x}_k)) \\ \mathbf{K}_2(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{K}_1(\mathbf{x}_k)) + h \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{K}_2(\mathbf{x}_k))\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $a_{11} = a_{12} = 0$ y $a_{21} = a_{22} = \frac{1}{2}$.

Reescritos como métodos de Runge-Kutta, estos métodos son todos explícitos según la primera Definición 3.1, aunque haya que resolver implícitamente las $\mathbf{K}$ en los métodos del trapezio y punto medio. Por ello, en la práctica llamaremos explícito o implícito a un método numérico dependiendo de si hay que resolver ecuaciones implícitas o no, lo que viene condicionado por $A = [a_{ij}]$.

Para que un integrador sea útil, debe aproximarse a la solución real al elegir pasos temporales h cada vez más pequeños.

Definición 3.3. El *error local de truncación* de un método numérico $\mathbf{x}_{k+1} = \Psi_h(\mathbf{x}_k)$ es la diferencia entre la evolución de un punto inicial $\mathbf{x}_0$ bajo la acción del algoritmo Ψ_h y bajo dinámica real $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ en el instante h

$$e_h(\mathbf{x}_0) := \Psi_h(\mathbf{x}_0) - \Phi_h^{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0).$$

El *error global tras N iteraciones* de un método numérico $\mathbf{x}_{k+1} = \Psi_h(\mathbf{x}_k)$ es la diferencia entre la evolución de un punto inicial $\mathbf{x}_0$ tras N iteraciones de Ψ_h y tras la dinámica real $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ en el instante Nh

$$E_h(\mathbf{x}_0) := \Psi_h^N(\mathbf{x}_0) - \Phi_{Nh}^{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0).$$

El nombre *error local de truncación* viene por ser práctica habitual diseñar Ψ_h haciendo que el mayor número de los primeros término de su serie de Taylor en h coincidan con los de $\mathbf{x}(h) = \Phi_h^{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)$, de manera que $e_h(\mathbf{x}_0)$ es un resto de Taylor.

Para ilustrar lo anterior, calculemos los primeros términos del error local de truncación para un Runge-Kutta genérico de s etapas ($\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_0))$):

$$\begin{aligned}
 \Psi_h(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{x}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{F}(\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{F} \left(\mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_0)) \right) \\
 &= \mathbf{x}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \left[\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{F}(\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_0)) + O(h^2) \right] \\
 &= \mathbf{x}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \left[\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + h \sum_{j=1}^s \left(a_{ij} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + O(h) \right) \right] \\
 &= \mathbf{x}_0 + h \left(\sum_{i=1}^s b_i \right) \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + h^2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \left[\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_i a_{ij} \right] \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + O(h^3). \\
 \mathbf{x}(h) &= \mathbf{x}(0) + h \dot{\mathbf{x}}(0) + \frac{h^2}{2} \ddot{\mathbf{x}}(0) + O(h^3) = \mathbf{x}_0 + h \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) h^2 + O(h^3). \\
 e_h(\mathbf{x}_0) &= \Psi_h(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(h) \\
 &= h \left(\sum_{i=1}^s b_i - 1 \right) \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + h^2 \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_i a_{ij} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + O(h^3). \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Para que un algoritmo tienda a la solución real a medida que el paso temporal h decrece debe cumplirse que

$$\forall \mathbf{x}_0 \in D : \quad \lim_{h \rightarrow 0} E_h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

y lo hará más rápidamente cuanto mayor sea el orden de convergencia de E_h .

Es de esperar que el orden del error global será mayor cuanto mayor sea el orden del error local. De hecho, tenemos el siguiente

Teorema 3.4. *Si para un método numérico $\mathbf{x}_{k+1} = \Psi_h(\mathbf{x}_k)$ aplicado a un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{F}$ de Lipschitz⁴, se cumple que $e_h = O(h^{r+1})$, entonces $E_h = O(h^r)$.*

Definición 3.5. Diremos que un método numérico $\mathbf{x}_{k+1} = \Psi_h(\mathbf{x}_k)$ es de orden r si el error global en el dominio⁵ es de orden r :

$$\forall \mathbf{x}_0 \in D : \quad E_h(\mathbf{x}_0) = O(h^r).$$

Diremos que es *consistente* si es de orden 1 o superior.

Equivalentemente, un método numérico Ψ_h es de orden r si su error local de truncación e_h es $O(h^{r+1})$, lo que quiere decir que la serie de Taylor (3.2) tiene sus r primeros términos nulos.

Para que un método se aproxime a la solución real, es necesario que sea consistente. Si queremos que lo haga «más rápido», debe elegirse del orden más alto posible. De la ecuación (3.2) se deduce la siguiente

Proposición 3.6. *Un integrador Runge-Kutta de s etapas es consistente si*

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

⁴Esto es, que existe una constante L tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D : \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

⁵Puede ser que Ψ_h no esté definida en todo el dominio D de $\mathbf{F}$. En general dependerá de h .

Será de orden 2 si además

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_i a_{ij} = \frac{1}{2}.$$

Expandiendo (3.2) para dar más términos en h se obtienen condiciones para órdenes superiores. Un Runge-Kutta de s etapas está determinado por n^2 parámetros a_{ij} más n parámetros b_i . Al imponer un orden de convergencia r se imponen varias ecuaciones algebraicas que esos $n^2 + n$ parámetros deben cumplir. Por lo tanto, para órdenes r bajos habrá más libertad de elección de los parámetros a_{ij} y b_i , y al exigir mayores órdenes de convergencia llegará un punto en el que se obtenga un sistema incompatible de ecuaciones. Si además queremos que el método sea explícito, tendremos aún menos parámetros libres.

Para que un RK de una etapa sea consistente, debe cumplirse que $b_1 = 1$. Si además $a_{11} = \frac{1}{2}$, el método será de orden 2. Por lo tanto, los métodos de Euler explícito e implícito son de orden 1 (consistentes), y el método del punto medio es de orden 2. Al tener 2 parámetros y 2 ecuaciones, no es posible obtener un RK de una etapa de tercer orden.

Un RK de dos etapas depende de 6 parámetros. Con las fórmulas del teorema anterior se pueden conseguir algoritmos de orden 2. De hecho, el método del trapecioide es de orden 2. Para que un RK sea de orden 3 debe cumplirse además que [8]

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s b_i a_{ij} a_{ik} = \frac{1}{3}, \quad \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} = \frac{1}{6},$$

lo cual no es posible con $s = 2$.

Para un RK de tres etapas sí es posible alcanzar el tercer orden, y el cuarto orden se consigue con un RK de cuatro etapas. Sin embargo, por motivos algebraicos no es posible obtener un RK de s etapas de orden s para $s \geq 5$. De hecho, el problema se complica considerablemente al expandir el polinomio de Taylor a órdenes muy grandes, aunque se puede abordar el problema usando *árboles* (ver [8, §II.2]).

Un algoritmo muy utilizado es el Runge-Kutta 4 clásico propuesto directamente por Kutta en 1901,⁶ que es de cuatro etapas, explícito y de cuarto orden. Su tabla de Butcher es la siguiente

$$\text{Runge-Kutta 4 clásico (B.7)} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Una manera visual de comprobar el orden de los integradores es graficar el error global en función de h . Si un algoritmo es de orden r , entonces $E_h = C h^r$, por lo que $\log(E_h) = \log(C) + r \log h$. Representando h y E_h en escala logarítmica, el orden de un algoritmo será la pendiente de la recta $(\log h, \log E_h)$.

Ejemplo. Consideremos el oscilador armónico de masa y constante elástica iguales a la unidad $\mathbf{F}(q, p) = (p, -q)$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} \quad \text{con condición inicial } (q_0, p_0) = (1, 0).$$

La solución analítica del problema planteado es $(q, p)(t) = (\cos t, -\sin t)$, cuya trayectoria es un círculo de radio unidad centrado en el origen, recorrido en sentido horario.

⁶MARTIN W. KUTTA. *Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen*. Zeitschrift für Mathematik und Physik **46**: pp 435–453 (1901).

En este problema en concreto, el método del punto medio y del trapecio coinciden, pues $\mathbf{F}\left(\frac{q_1+q_2}{2}, \frac{p_1+q_2}{2}\right) = \frac{\mathbf{F}(q_1,p_1)+\mathbf{F}(q_2,p_2)}{2}$.

Eliendo el intervalo $[0, 2\tau]$ y dando distintos valores de $h = \frac{2\tau}{N}$ a la fórmula $E_h(q_0, p_0) = \Psi_h^N(q_0, p_0) - (q, p)(Nh)$ para cada algoritmo descrito, las rectas $(\log h, \log E_h(q_0, p_0))$ se muestran en la figura 3.2.

Las trayectorias descritas en dos vueltas ($I = [0, 2\tau]$) por los métodos de Euler explícito e implícito para un paso h concreto se muestran en la Figura 3.3.

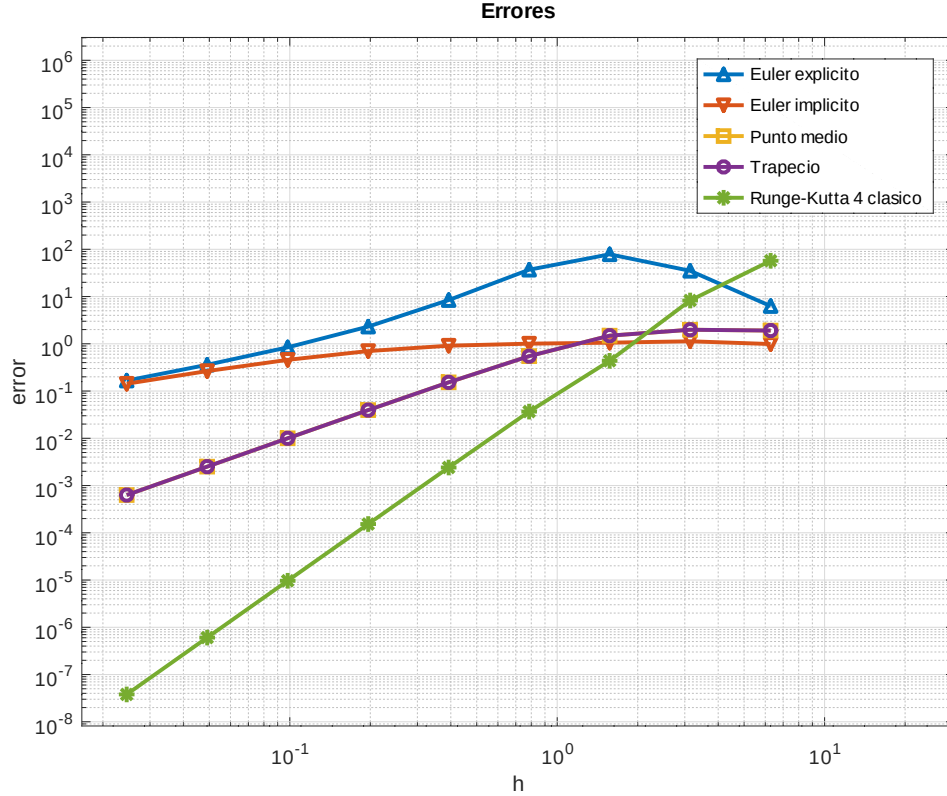


Figura 3.2: Errores globales de varios integradores

Las trayectorias descritas por el método del punto medio y el RK4 clásico para un paso temporal h concreto se muestran en la Figura 3.4. Para esta simulación se ha elegido un intervalo temporal más largo, de 8 ciclos ($I = [0, 8\tau]$). Resulta llamativo comprobar que el método del punto medio se mantiene más cerca de la trayectoria real que el RK4 clásico en simulaciones largas a pesar de ser dos órdenes menor. El motivo de esto es que el método del punto medio es un algoritmo *simpléctico*. En la siguiente sección veremos qué significa eso y qué consecuencias tiene.

3.2. Integradores Runge-Kutta simplécticos

En esta sección consideraremos sistemas hamiltonianos (M, ω, H) , donde M será un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ en donde elegimos la forma simpléctica $\omega = \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}p_i$ dada por las coordenadas canónicas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = (x^1, \dots, x^{2n})$, de manera que $[\omega] = [\omega^\sharp] = J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$. El hamiltoniano $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ lo supondremos suave y con hessiana $\nabla^2 H$ invertible.

Como ya vimos, si Φ es el flujo de $\mathbf{X}_H$, entonces los difeomorfismos Φ_t son simplécticos. Un Runge-Kutta aplicado a $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{x})$ viene dado por una aplicación Ψ_h construida a partir de $\mathbf{X}_H$. Si el algoritmo es consistente, es de esperar que para h pequeños, $\Psi_h \approx \Phi_h$, pero no tiene por qué cumplirse que los Ψ_h sean difeomorfismos, ni que formen un grupo con la composición

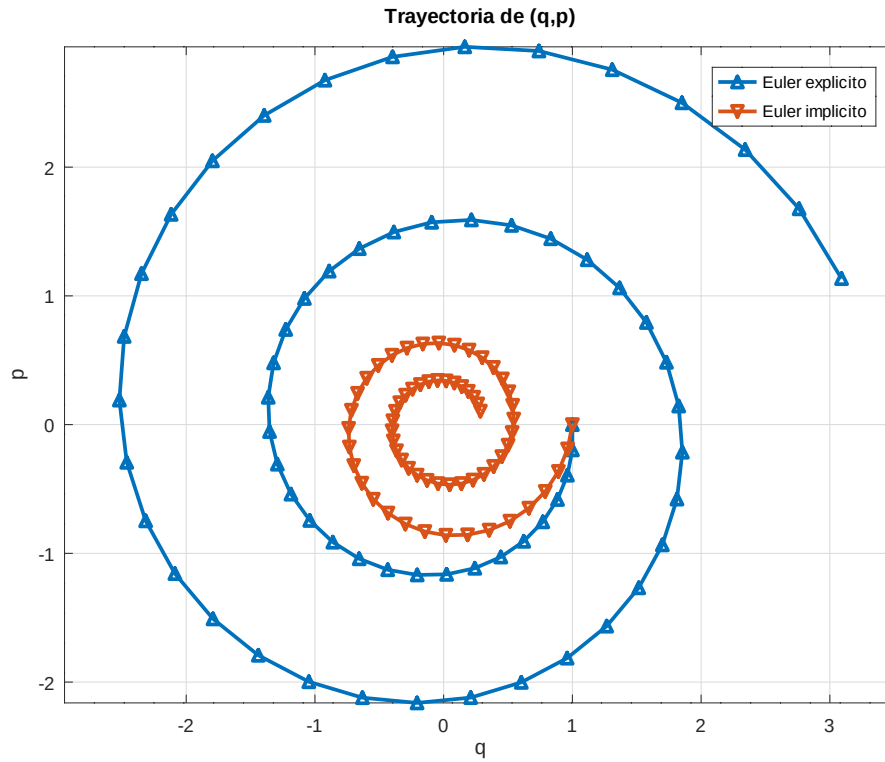


Figura 3.3: Trayectorias de Euler explícito y Euler implícito

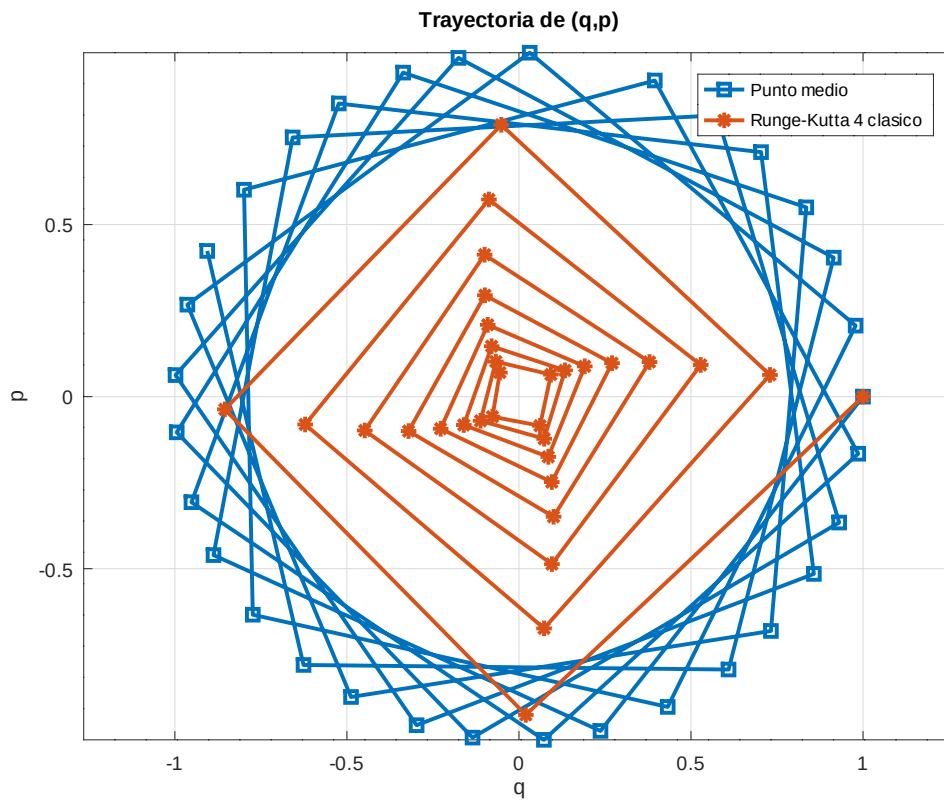


Figura 3.4: Trayectorias de punto medio y RK4 clásico

tal que $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$. Sin embargo, podemos requerir que las Ψ_h sean simplécticas, pues la definición de simplecticidad no requiere ninguna de esas propiedades.

Definición 3.7. Un integrador Runge-Kutta $\mathbf{x}_{k+1} = \Psi_h(\mathbf{x}_k)$ es *simplético* si, aplicado a un sistema hamiltoniano $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{x})$, Ψ_h es simplética. Por la Proposición 1.65, esto equivale a

$$\left(\frac{\partial \Psi_h}{\partial \mathbf{x}}\right)^\top J \left(\frac{\partial \Psi_h}{\partial \mathbf{x}}\right) = J.$$

Aplicando la regla de la cadena a $\Psi_h^{k+1} = \Psi_h \circ \Psi_h^k$, se demuestra fácilmente la siguiente

Proposición 3.8. Ψ_h es simplética si y sólo si

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \left(\frac{\partial \Psi_h^{k+1}}{\partial \mathbf{x}}\right)^\top J \left(\frac{\partial \Psi_h^{k+1}}{\partial \mathbf{x}}\right) = \left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}\right)^\top J \left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}\right).$$

Con ayuda de la proposición anterior podemos obtener una condición de symplecticidad para un Runge-Kutta de s etapas.

Teorema 3.9 (Prof. Melvin Leok⁷). Sea Ψ_h un integrador de Runge-Kutta definido con un campo hamiltoniano $\mathbf{X}_H$. Si la matriz hessiana de H es invertible, es condición suficiente para que Ψ_h sea simplética que

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j \quad i, j = 1, \dots, s.$$

Demostración. Un RK de s etapas $\mathbf{x}_{k+1} = \Psi_h(\mathbf{x}_k)$ aplicado a un sistema hamiltoniano $\mathbf{X}_H = J\nabla H$ toma la forma

$$\begin{aligned} \Psi_h(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{G}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{G}_i(\mathbf{x}) &= J\nabla H \left(\mathbf{x} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{G}_j(\mathbf{x}) \right) \end{aligned}$$

tenemos que $\Psi_h^{k+1}(\mathbf{x}) = \Psi_h^k(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{G}_i(\Psi_h^k(\mathbf{x}))$, por lo que

$$\frac{\partial \Psi_h^{k+1}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^s b_i \frac{\partial (\mathbf{G}_i \circ \Psi_h^k)}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}).$$

Definiendo

$$A_i(\mathbf{x}) := \frac{\partial (\mathbf{G}_i \circ \Psi_h^k)}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}),$$

resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi_h^{k+1}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)^\top J \left(\frac{\partial \Psi_h^{k+1}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\right) &= \left[\left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)^\top + h \sum_{i=1}^s b_i A_i^\top(\mathbf{x})\right] \left[J \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + h \sum_{i=1}^s b_i J A_i(\mathbf{x})\right] \\ &= \left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}\right)^\top J \left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}\right) + h \sum_{i=1}^s b_i \left[A_i^\top(\mathbf{x}) J \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)^\top J A_i(\mathbf{x})\right] \\ &\quad + h^2 \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_i b_j A_i^\top(\mathbf{x}) J A_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

⁷Curso en vídeo *Numerical Ordinary Differential Equations (Graduate)*. Lección 53: Condition for a Runge-Kutta method to be symplectic. <https://www.youtube.com/watch?v=3UzWoQJdSaI>

Por la Proposición 3.8, Ψ_h será simpléctica si y sólo si

$$\sum_{i=1}^s b_i \left[A_i^\top(x) J \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^\top J A_i(\mathbf{x}) \right] + h \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_i b_j A_i^\top(\mathbf{x}) J A_j(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.3)$$

Desarrollando ahora A_i :

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{x}) &= \frac{\partial(\mathbf{G}_i \circ \Psi_h^k)}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{x}}(\Psi_h^k(\mathbf{x})) \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \\ &= J \nabla^2 H \left(\Psi_h^k(\mathbf{x}) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{G}_j(\Psi_h^k(\mathbf{x})) \right) \left[I + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial \mathbf{x}}(\Psi_h^k(\mathbf{x})) \right] \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Definiendo

$$B_i(\mathbf{x}) := \nabla^2 H \left(\Psi_h^k(\mathbf{x}) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{G}_j(\Psi_h^k(\mathbf{x})) \right),$$

que asumimos invertible por hipótesis y simétrica por ser H suave, resulta

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{x}) &= J B_i(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + h \sum_{i=1}^s a_{ij} \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial \mathbf{x}}(\Psi_h^k(\mathbf{x})) \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right] \\ &= J B_i(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + h \sum_{i=1}^s a_{ij} \frac{\partial(\mathbf{G}_j \circ \Psi_h^k)}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right] = J B_i(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + h \sum_{i=1}^s a_{ij} A_j(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned}$$

Como B_i y J son invertibles ($J^{-1} = J^\top = -J$), podemos despejar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) &= B_i^{-1}(\mathbf{x}) J^{-1} A_i(\mathbf{x}) - h \sum_{j=1}^s a_{ij} A_j(\mathbf{x}) = -B_i^{-1}(\mathbf{x}) J A_i(\mathbf{x}) - h \sum_{j=1}^s a_{ij} A_j(\mathbf{x}) \\ \left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^\top &= +A_i^\top(\mathbf{x}) J B_i^{-1}(\mathbf{x}) - h \sum_{j=1}^s a_{ij} A_j^\top(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la simetría de B_i^{-1} . El primer término de (3.3) queda entonces

$$\begin{aligned} A_i^\top(\mathbf{x}) J \frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial \Psi_h^k}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right)^\top J A_i(\mathbf{x}) &= -A_i^\top(\mathbf{x}) J B_i^{-1}(\mathbf{x}) J A_i(\mathbf{x}) - h \sum_{j=1}^s a_{ij} A_i^\top(\mathbf{x}) J A_j(\mathbf{x}) \\ &\quad + A_i^\top(\mathbf{x}) J B_i^{-1}(\mathbf{x}) J A_i(\mathbf{x}) - h \sum_{j=1}^s a_{ij} A_j^\top(\mathbf{x}) J A_i(\mathbf{x}) \\ &= h \sum_{j=1}^s a_{ij} \left(A_i^\top(\mathbf{x}) J A_j(\mathbf{x}) + A_j^\top(\mathbf{x}) J A_i(\mathbf{x}) \right). \end{aligned}$$

Introduciendo esto en la ecuación (3.3), concluimos que Ψ_h es simpléctica si y sólo si

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (b_i b_j - b_i a_{ij} - b_j a_{ji}) A_i^\top(\mathbf{x}) J A_j(\mathbf{x}) = 0.$$

Una manera posible de que se anule esta suma es que se anule término a término, por lo que si $b_i b_j - b_i a_{ij} - b_j a_{ji} = 0$ para $i, j = 1, \dots, s$, entonces Ψ_h será simpléctica. $\square$

No existen métodos explícitos que cumplan la ecuación anterior, todos son implícitos.

Ejemplo (Punto medio). Considerando RK de un paso $\frac{a_{11}}{b_1}$, para que sea de primer orden debe cumplirse que $b_1 = 1$. Si además queremos que sea simplético, debe ser $b_1 a_{11} + b_1 a_{11} = b_1 b_1 \iff 2a_{11} = 1 \iff a_{11} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, el único RK de un paso simplético es la regla del punto medio

$$\text{Regla del punto medio (B.5)} \quad \frac{1}{2}. \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{F} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1} \right).$$

que también es de segundo orden por cumplir que $b_1 a_{11} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo (Euler simpléticos). También son simpléticos los siguientes integradores de primer orden

$$\begin{aligned} \text{Euler simplético I (B.8)} \quad & (\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k) + h \mathbf{F}(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{p}_k). \\ \text{Euler simplético II (B.9)} \quad & (\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k) + h \mathbf{F}(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_{k+1}). \end{aligned}$$

estos métodos, que no se pueden expresar con una tabla de Butcher como la que hemos visto, son ejemplos de métodos de Runge-Kutta *particionados*. Esto quiere decir que en realidad hay dos tablas de Butcher, una para las componentes $(q^1, \dots, q^n)$ y otra para las $(p_1, \dots, p_n)$.

Ejemplo (Un Runge-Kutta de 4º orden simplético). La siguiente tabla de Butcher (ver [12] para más ejemplos) corresponde a uno de los posibles métodos de 4 etapas, de cuarto orden y simplético

$$\text{Runge Kutta de 4º orden simplético (B.10)} \quad \begin{array}{cccc} \frac{1}{24} & \frac{-1-\sqrt{5}}{48} & \frac{-1+\sqrt{5}}{48} & 0 \\ \frac{21+\sqrt{5}}{240} & \frac{5}{24} & \frac{25-13\sqrt{5}}{120} & \frac{-1+\sqrt{5}}{240} \\ \frac{21-\sqrt{5}}{240} & \frac{25+13\sqrt{5}}{120} & \frac{5}{24} & \frac{-1-\sqrt{5}}{240} \\ \frac{1}{12} & \frac{21-\sqrt{5}}{48} & \frac{21+\sqrt{5}}{48} & \frac{1}{24} \\ \hline \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}$$

Si aplicamos estos integradores al oscilador armónico $\mathbf{X}_H(q, p) = (p, -q)$ de la sección anterior, cuyo hamiltoniano es

$$H(q, p) = \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} p^2,$$

obtenemos los siguientes resultados

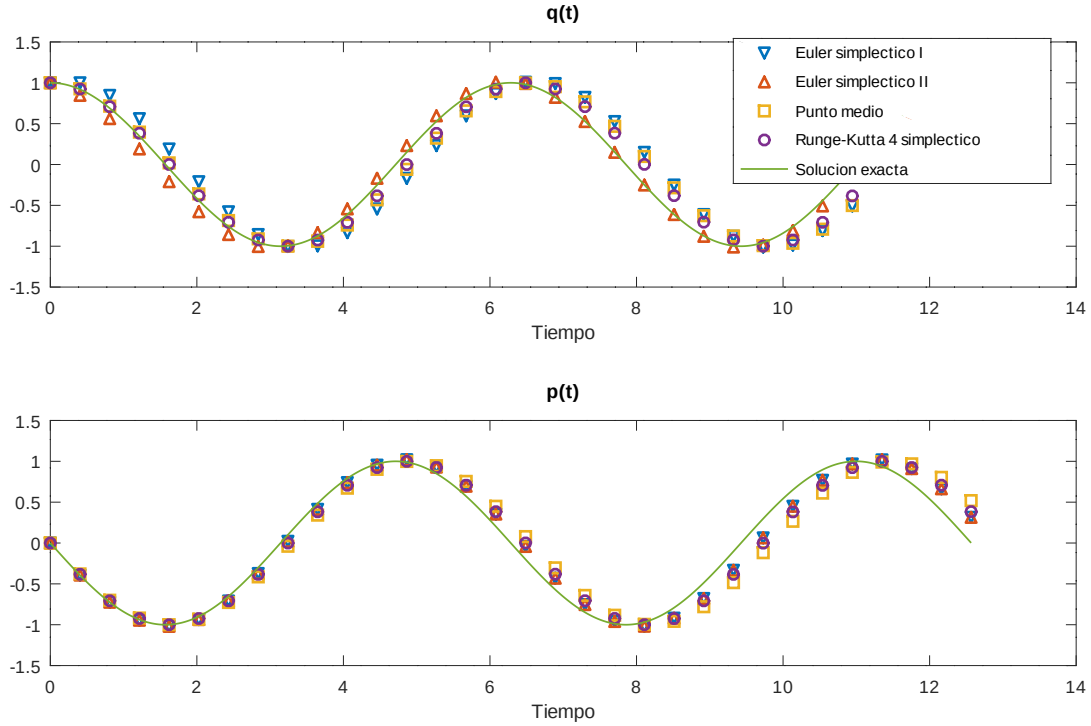


Figura 3.5: Evolución de $q(t)$ y $p(t)$.

Se observa que las trayectorias se mantienen cercanas a la solución real incluso con los métodos de Euler —de primer orden— a diferencia de los métodos de Euler explícito e implícito de antes.

Por otra parte, el hamiltoniano también oscila en torno al valor real $H \equiv \frac{1}{2}$ (Figura 3.7).

Por último, comprobamos que el orden de cada algoritmo es el esperado

Recordemos que, si $\Phi^{\mathbf{X}_H} \sim \{\Phi_t^{\mathbf{X}_H}\}$ es el flujo del campo hamiltoniano $\mathbf{X}_H$, entonces cada $\Phi_t^{\mathbf{X}_H}$ es simpléctica y $H \circ \Phi_t^{\mathbf{X}_H} = H$. Sin embargo, al no ser $\Psi_h \in \{\Phi_t^{\mathbf{X}_H}\}$, nada garantiza que Ψ_h preserve H .

Suponiendo que Ψ_h es un difeomorfismo, ¿existirá un campo $\tilde{\mathbf{X}}$ tal que $\Phi_h^{\tilde{\mathbf{X}}} = \Psi_h$? Es decir, queremos saber si existe algún *sistema modificado* $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ «parecido» al original $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{x})$ tal que Ψ_h sea su solución exacta. Esta es la principal idea del *Backward Error Analysis*.

Se puede demostrar que la ecuación modificada $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ de un sistema hamiltoniano $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{x})$ usando un integrador simpléctico Ψ_h es también un sistema hamiltoniano (ver, por ejemplo, [8, §II.16]). Más concretamente, existen $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}^+} \subset C^\infty(M)$ tales que $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_{\tilde{H}} = \omega^\sharp(d\tilde{H})$, siendo

$$\tilde{H} = H + h H_1 + h^2 H_2 + h^3 H_3 + \dots,$$

de manera que Ψ_h preserve este $\tilde{H}$. Por lo tanto

$$H \circ \Psi_h = \underbrace{(\tilde{H} \circ \Psi_h)}_{\text{cte.}} - \sum_{k=1}^{\infty} h^k (H_k \circ \Psi_h),$$

de donde se concluye que, si las H_i están acotadas, el valor de H en las trayectorias de Ψ_h oscilará cerca del valor constante $\tilde{H}$. Esto explica el comportamiento observado en la Figura 3.7.

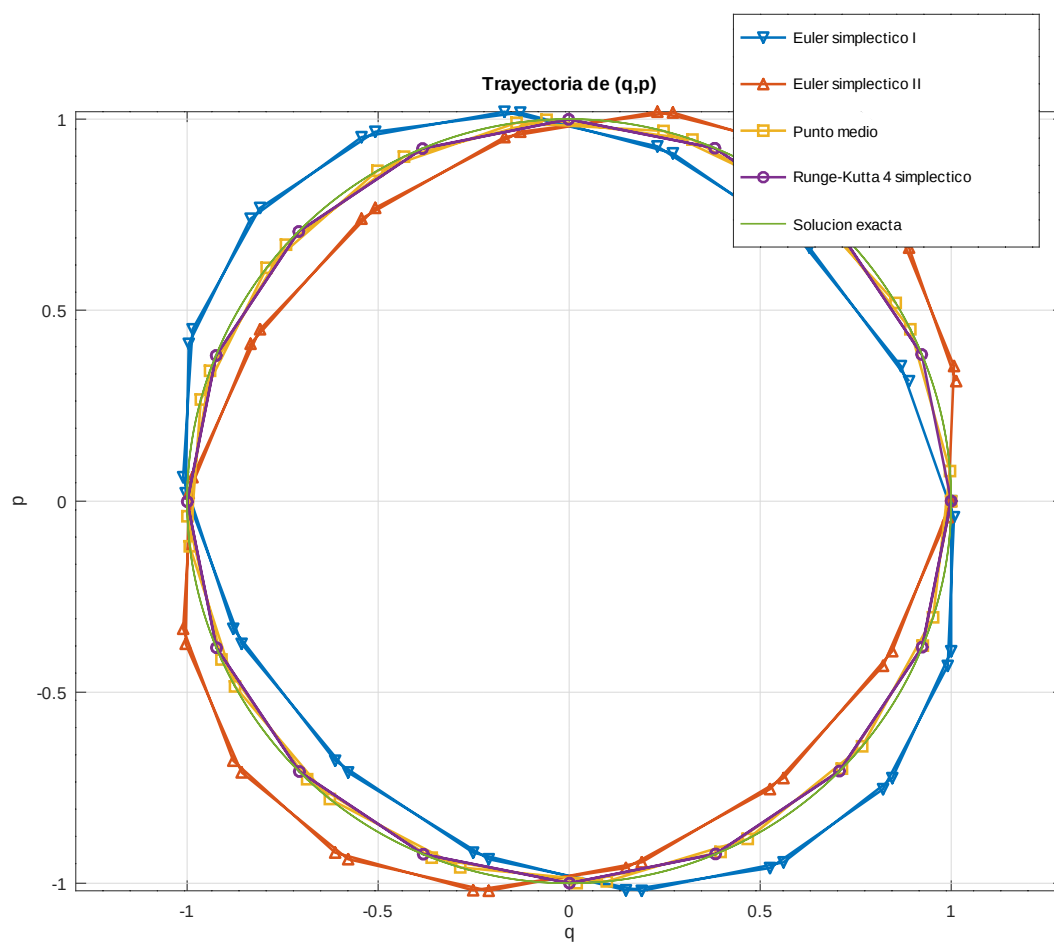


Figura 3.6: Trayectorias.

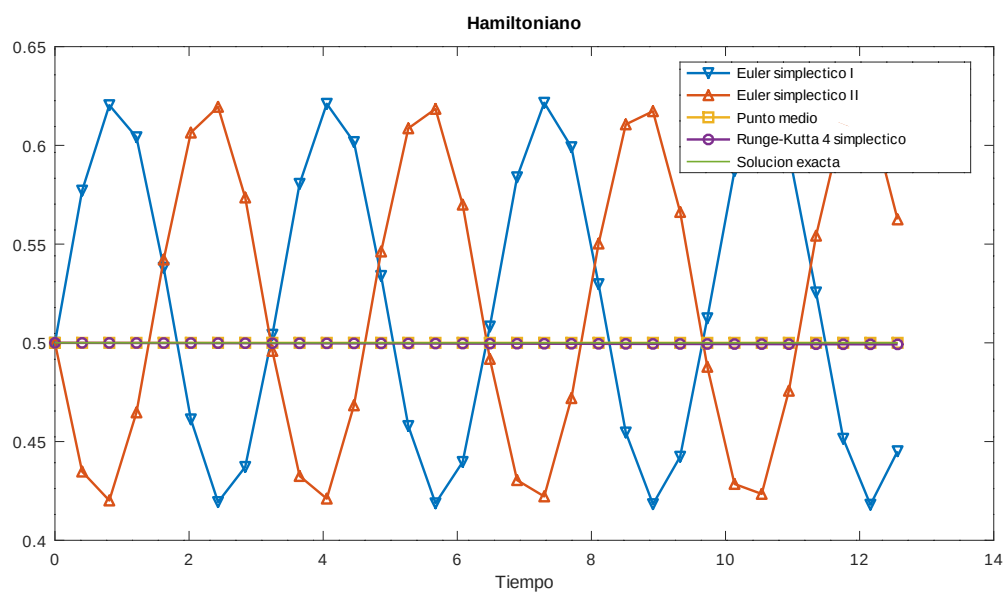


Figura 3.7: Hamiltoniano.

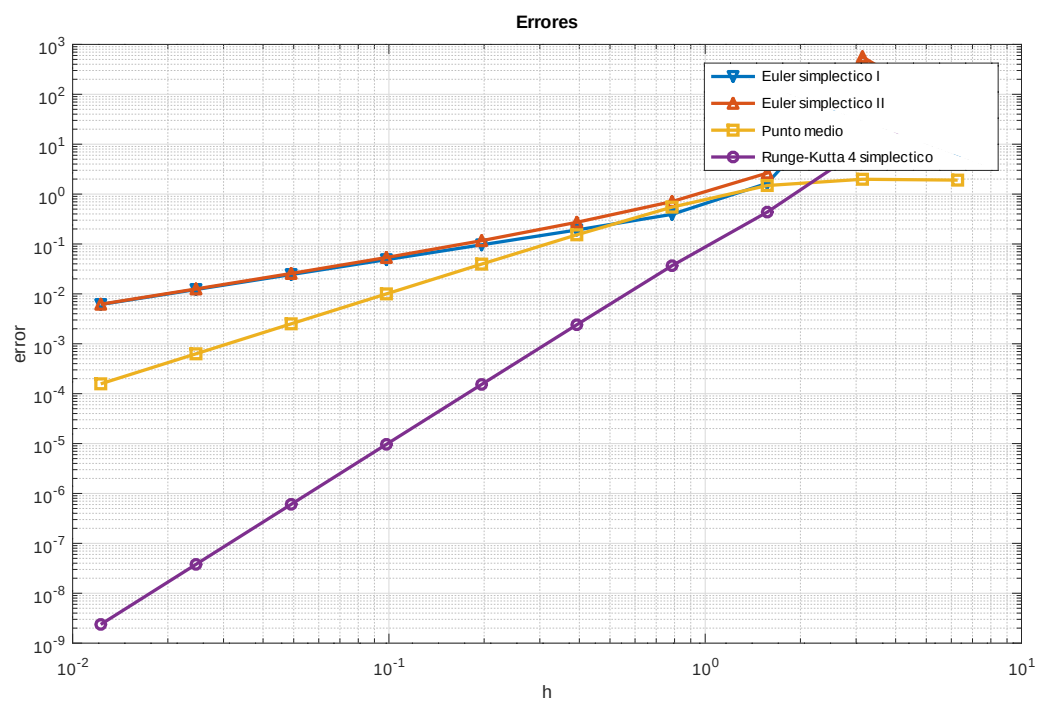


Figura 3.8: Errores globales.

Capítulo 4

Sistemas de Lie

Un sistema de Lie es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no autónoma en una variedad M que admite un *principio de superposición*. Esto quiere decir que existe una aplicación $\Phi : M^m \times M \longrightarrow M$ que a partir de varias soluciones particulares $x_1(t), \dots, x_m(t)$ permite obtener una solución general $x(t) = \Phi(x_1(t), \dots, x_m(t), k)$, donde $k \in M$ determina la condición inicial.

En este capítulo se da una caracterización geométrica de los sistemas de Lie y se expone el procedimiento general para obtener reglas de superposición.

4.1. Definiciones generales

Partiremos de la definición original de los sistemas de Lie y daremos los primeros resultados descubiertos por Lie.¹ Recuérdese que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no autónoma está determinada por un campo vectorial dependiente del tiempo $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ (sección 1.4).

Definición 4.1. Un *sistema de Lie* en una variedad diferenciable M es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no autónoma

$$\dot{x} = X(t, x), \quad X \in \mathfrak{X}_t(M) \quad (4.1)$$

que admite una *regla de superposición*. Esto es, una aplicación $\Phi : M^m \times M \longrightarrow M$ tal que toda solución $x(t)$ de la ecuación (4.1) se puede expresar mediante

$$x(t) = \Phi(x_1(t), \dots, x_m(t), k), \quad (4.2)$$

donde $x_1, \dots, x_m$ son soluciones particulares de (4.1), y $k \in M$ determina la condición inicial de la nueva solución x .

En realidad, muchas veces la ecuación (4.2) permite obtener *casi* todas las soluciones.² Sin embargo, en este trabajo consideraremos que todas las definiciones tienen validez global para no complicar la exposición.

Para enunciar el teorema de Lie-Scheffers, que da una caracterización práctica de los sistemas de Lie, necesitamos la siguiente

Definición 4.2. Un *álgebra de Vessiot-Guldberg*³ en una variedad diferenciable M es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ de dimensión finita.

¹M. SOPHUS LIE, GEORG SCHEFFERS. *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*. Teubner, Leipzig (1893).

²Esto quiere decir que, fijadas las soluciones particulares $x_1, \dots, x_n$, la ecuación (4.1) permite obtener todas las soluciones excepto algunas con condiciones iniciales en un conjunto de medida nula [14].

³Quizá sea más correcto (y más largo) el término *álgebra de Lie de Vessiot-Guldberg*.

Recordando la definición de subálgebra de Lie (Definición 1.42), un álgebra de Vessiot-Guldberg (VG) en M es un subespacio vectorial $V \subset \mathfrak{X}(M)$ de dimensión finita y tal que el corchete de Lie de dos campos cualquiera de V pertenece a V .

Teorema 4.3 (Lie-Scheffers [14, §3.8, Main Theorem 1]). *Una ecuación diferencial no autónoma $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ es un sistema de Lie si y sólo si se puede expresar $X \sim \{X_t\}$ como*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad X_t = \sum_{\alpha=1}^r b_\alpha(t) X_\alpha,$$

siendo $b_1, \dots, b_r$ funciones dependientes del tiempo y $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriales no dependientes del tiempo tal que su clausura lineal $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ es un álgebra de Vessiot-Guldberg.

Ejemplo. Excluyendo los sistemas lineales, el ejemplo más sencillo de sistema de Lie posiblemente sea la ecuación de Riccati de primer orden

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2.$$

El campo vectorial en $M = \mathbb{R}$ asociado a este sistema es

$$X_t = (a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2) \frac{\partial}{\partial x},$$

que se puede reescribir como

$$X_t = a_0(t) \frac{\partial}{\partial x} + a_1(t)x \frac{\partial}{\partial x} + a_2(t)x^2 \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{\alpha=0}^2 a_\alpha(t) X_\alpha,$$

donde $X_0 := \frac{\partial}{\partial x}$, $X_1 := x \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 := x^2 \frac{\partial}{\partial x}$.

Por el teorema de Lie-Scheffers, debemos comprobar que el espacio vectorial tridimensional⁴ $V := \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ está cerrado respecto al corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ en $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$. En efecto, se puede comprobar que

$$[X_0, X_1] = X_0 \in V, \quad [X_1, X_2] = X_2 \in V, \quad [X_2, X_0] = -2X_1 \in V,$$

y al ser (X_1, X_2, X_3) una base de V , para cualquier par de campos $A, B \in V$, $[A, B] \in V$. Por lo tanto, la ecuación de Riccati de primer orden admite un principio de superposición, que obtendremos en la siguiente sección.

En general, cada $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ no admite un único álgebra de VG. Si $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ es un álgebra de VG de X ($\forall t : X_t = \sum b_\alpha(t) X_\alpha$), entonces, si $X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$ no depende linealmente de $X_1, \dots, X_r$ y $[\langle X_1, \dots, X_r, X_{r+1} \rangle, X_{r+1}] \subset \langle X_1, \dots, X_r, X_{r+1} \rangle$, el espacio $\langle X_1, \dots, X_r, X_{r+1} \rangle$ también es un álgebra de VG de X , pues $X_t = \sum b_\alpha(t) X_\alpha + 0 \cdot X_{r+1}$. Esto motiva la siguiente

Definición 4.4. El *álgebra de Lie minimal* de $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ es la intersección de todas las subálgebras de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ que contienen a $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Esto es lo mismo que decir que V^X es el subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ más pequeño que contiene a todos los X_t .

Otra manera de obtener V^X es mediante corchetes sucesivos de campos X_t . Considerando la clausura lineal de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, $A := \langle (X_t)_{t \in \mathbb{R}} \rangle$,⁵ entonces

$$V^X = A + [A, A] + [A, [A, A]] + [[A, A], [A, A]] + [A, [A, [A, A]]] + \dots$$

⁴Nótese que X_0 , X_1 y X_2 son linealmente independientes como elementos del espacio vectorial $(\mathfrak{X}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Serían linealmente dependientes en el módulo $(\mathfrak{X}(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}))$.

⁵Consideramos que A se forma con combinaciones lineales finitas de campos X_t .

Si $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ es un sistema de Lie, entonces V^X será de dimensión finita, por lo que es un álgebra de VG que además es la intersección de todas las álgebras de VG que admite X

$$V^X = \bigcap_{V \in \text{VG}(X)} V, \quad \text{VG}(X) := \{V \subset \mathfrak{X}(M) \mid V \text{ es álgebra de VG de } X\}.$$

Recíprocamente, si V^X es de dimensión finita, por definición es un álgebra de VG de X , por lo que tenemos el siguiente

Teorema 4.5 (Lie-Scheffers abreviado). *$X \in \mathfrak{X}_t(M)$ es un sistema de Lie si y sólo si V^X es de dimensión finita.*

Por lo tanto, otra manera de entender los sistemas de Lie X es considerarlos como curvas suaves en un subálgebra de Lie $V^X \subset \mathfrak{X}(M)$ de dimensión finita.

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\longrightarrow V^X, & \dim V^X &\in \mathbb{N}. \\ t &\longmapsto X_t \end{aligned}$$

La dimensión del álgebra de Vessiot-Guldberg V encontrada para X condiciona el número de soluciones particulares necesarias para la regla de superposición.

Teorema 4.6 (condición de Lie). *Un sistema de Lie $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ admite una regla de superposición que depende de m soluciones particulares si y sólo si admite un álgebra de Vessiot-Guldberg V tal que*

$$m \cdot \dim(M) \geq \dim(V).$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea la dimensión del álgebra de VG encontrado para X , mayor número de soluciones particulares serán necesarias para la regla de superposición. El mejor caso se da para $V = V^X$, que no siempre es sencillo de obtener.

4.2. Obtención de reglas de superposición

En esta sección describimos un método de obtención de reglas de superposición mediante las llamadas *prolongaciones diagonales*, que permiten obtener, mediante el *método de las características* (ver apéndice A), constantes del movimiento de un sistema asociado en M^{m+1} , siendo $m \in \mathbb{N}$ el número de la condición de Lie de arriba. Estas constantes del movimiento, bajo las hipótesis adecuadas, permiten obtener reglas de superposición.

Definición 4.7. Dado un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$, su k -ésima *prolongación diagonal* es el fibrado $E^k \xrightarrow{\pi^k} M^k$, donde

$$\forall (e_1, \dots, e_k) \in E^k : \quad \pi^k(e_1, \dots, e_k) := (\pi(e_1), \dots, \pi(e_k)).$$

Es inmediato comprobar que

$$\forall (m_1, \dots, m_k) \in M^k : \quad E^k_{(m_1, \dots, m_k)} = E_{m_1} \times \dots \times E_{m_k},$$

por lo que definiendo en cada fibrado la estructura de espacio vectorial producto de la manera usual

$$\forall e, a \in E^k : \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad (e_1, \dots, e_k) + \lambda(a_1, \dots, a_k) := (e_1 + \lambda a_1, \dots, e_k + \lambda a_k),$$

el fibrado $E^k \xrightarrow{\pi^k} M^k$ es un fibrado vectorial.

Dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$, se podría definir su k -ésima *prolongación diagonal* como la sección $X^{[k]} \in \Gamma(M^k, (TM)^k)$ que cumple

$$\forall (m_1, \dots, m_k) \in M^k : \quad X^{[k]}(m_1, \dots, m_k) := (X(m_1), \dots, X(m_k)),$$

pero nos interesa más definirla como un campo vectorial en TM^k . Es decir, queremos un $X^{[k]} \in \Gamma(M^k, TM^k) = \mathfrak{X}(M^k)$ que se parezca a la definición anterior.

Definición 4.8. Dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, su k -ésima prolongación diagonal es el campo $X^{[k]} \in \mathfrak{X}(M^k)$ que cumple

$$(\text{pr}_j)_* X^{[k]} = X$$

para las k proyecciones $\text{pr}_j : (m_1, \dots, m_k) \in M^k \mapsto m_j \in M$.

Tal campo $X^{[k]}$ siempre existe y es único. Si $x^1, \dots, x^n$ son coordenadas locales en M , definiendo en M^k las coordenadas

$$(x_j^i := x^i \circ \text{pr}_j)_{j=1:k}^{i=1:n},$$

si el campo X viene dado por $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces su prolongación diagonal $X^{[k]}$ es

$$X^{[k]} = (X^i \circ \text{pr}_j) \frac{\partial}{\partial x_j^i}.$$

Ejemplo. Si en $\mathbb{R}^2$ tenemos el campo

$$X = f(x^1, x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + g(x^1, x^2) \frac{\partial}{\partial x^2},$$

su prolongación diagonal tercera sería el campo en $(\mathbb{R}^2)^3 \simeq \mathbb{R}^6$ dado por

$$X^{[3]} = \left(f(x_1^1, x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_1^1} + g(x_1^1, x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_1^2} \right) + \left(f(x_2^1, x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2^1} + g(x_2^1, x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) + \left(f(x_3^1, x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_3^1} + g(x_3^1, x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_3^2} \right).$$

De manera intuitiva, una prolongación diagonal k -ésima supone «copiar» el campo original k veces. La idea es definir en M^k un campo vectorial tal que, en sus curvas integrales $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_k(t))$, cada $x_i(t)$ tenga la misma dinámica que la impuesta por X . Si logramos encontrar $n = \dim M$ constantes del movimiento de $X^{[m+1]}$ y despejar una $x_i(t)$ en función del resto de $x_j(t)$ y dichas constantes, obtenemos una regla de superposición en función de m soluciones particulares.

A partir de este concepto de prolongación diagonal es posible dar una demostración geométrica del teorema de Lie-Scheffers. Dicha demostración, que aquí omitimos (ver [14, §3.8]), sugiere un método de obtención de reglas de superposición.

En el siguiente teorema supondremos que en M^{m+1} numeramos de 0 a m $((x_0, x_1, \dots, x_m) \in M^{m+1})$ y que hemos elegido las coordenadas $(x^i \circ \text{pr}_j)_{j=1:n}^{i=0:m}$.

Teorema 4.9 (Algoritmo de obtención de reglas de superposición). *Sea $X \in \mathfrak{X}_t(M)$ un sistema de Lie y sea $V = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$ un álgebra de Vessiot-Guldberg r -dimensional de X . Se cumple que*

1. *El m de la condición de Lie (Teorema 4.6) es el mínimo número natural tal que las prolongaciones diagonales $X_1^{[m]}, \dots, X_r^{[m]}$ son linealmente independientes en el módulo $(\mathfrak{X}(M^m), C^\infty(M^m))$. Esto es, si $f_1, \dots, f_r \in C^\infty(M^m)$, entonces*

$$\sum_{\alpha=1}^r f_\alpha X_\alpha^{[m]} = 0 \quad \implies \quad f_1 = \dots = f_r = 0.$$

2. *Si se encuentran $n = \dim M$ integrales primeras $F_1, \dots, F_n$ comunes a todos los campos $X_1^{[m+1]}, \dots, X_r^{[m+1]}$, funcionalmente independientes y tales que*

$$\det \left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_0^1, \dots, x_0^n)} \right) \neq 0, \quad (4.3)$$

igualando estas integrales primeras a constantes

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)) &= k_1 \\ &\vdots \\ F_n(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)) &= k_n \end{aligned}$$

es posible, gracias a la condición (4.3), despejar $\mathbf{x}_0(t)$ en función de $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$ y $\mathbf{k}$, obteniendo así una regla de superposición.

La obtención de las integrales primeras $F_1, \dots, F_n$ se hace mediante el método de las características, que se resume en el apéndice A.

Ejemplo. Vimos en la sección anterior que la ecuación de Riccati de primer orden ($\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$) es un sistema de Lie en $M = \mathbb{R}$, y que los vectores

$$X_0 := \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_1 := x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 := x^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

constituían una base de un álgebra de Vessiot-Guldberg de X .

Para aplicar el método anterior y obtener una regla de superposición, debemos encontrar el menor m tal que $X_0^{[m]}, X_1^{[m]}$ y $X_2^{[m]}$ sean linealmente independientes en el módulo $(\mathfrak{X}(\mathbb{R}^m), C^\infty(\mathbb{R}^m))$. Probando con $m = 2$, tenemos las prolongaciones

$$\begin{aligned} X_0^{[2]} &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}, & X_1^{[2]} &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ X_2^{[2]} &= (x_0)^2 \frac{\partial}{\partial x_0} + (x_1)^2 \frac{\partial}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Para que sean linealmente independientes

$$f_0 X_0^{[2]} + f_1 X_1^{[2]} + f_2 X_2^{[2]} = (f_0 + f_1 x_0 + f_2 (x_0)^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + (f_0 + f_1 x_1 + f_2 (x_1)^2) \frac{\partial}{\partial x_1} = 0$$

debe cumplirse que

$$\begin{cases} f_0 + f_1 x_0 + f_2 (x_0)^2 = 0 \\ f_0 + f_1 x_1 + f_2 (x_1)^2 = 0 \end{cases} \implies f_0 = f_1 = f_2 = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Tomando, por ejemplo

$$f_0(x_0, x_1) := x_0 x_1, \quad f_1(x_0, x_1) := -(x_1 + x_0), \quad f_2(x_0, x_1) := 1$$

resulta que $\sum f_\alpha X_\alpha^{[2]} = 0$, por lo que $m \neq 2$.

Si elegimos $m = 3$

$$\begin{aligned} X_0^{[3]} &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, & X_1^{[3]} &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ X_2^{[3]} &= (x_0)^2 \frac{\partial}{\partial x_0} + (x_1)^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2)^2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

la condición $\sum f_\alpha X_\alpha^{[3]}$ es equivalente a

$$\begin{cases} f_0 + f_1 x_0 + f_2 (x_0)^2 = 0 \\ f_0 + f_1 x_1 + f_2 (x_1)^2 = 0 \\ f_0 + f_1 x_2 + f_2 (x_2)^2 = 0 \end{cases} \implies f_0 = f_1 = f_2 = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

El sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y como

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 \end{bmatrix} = (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_0),$$

que es no nulo en cualquier punto $(x_0, x_1, x_2) \in M^3$ con x_i distintos, la igualdad del sistema implica que las f_i valen cero en todo M^3 salvo, a lo sumo, el conjunto de medida nula de puntos (x_0, x_1, x_2) con $x_i = x_j$, $i \neq j$. Como las f_i tienen que ser C^∞ , no pueden ser no nulas en dicho conjunto.

Por lo tanto, $m = 3$. Como $\dim M = 1$, hay que encontrar sólo una integral primera F común a $X_0^{[4]}$, $X_1^{[4]}$ y $X_2^{[4]}$.

Si F es integral primera de $X_0^{[4]}$, debe cumplirse la EDP

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0.$$

Las curvas características del sistema son las curvas integrales del campo en $\mathbb{R}^5$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + 0 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

que son de la forma

$$x_0(t) = t + c_0, \quad x_1(t) = t + c_1, \quad x_2(t) = t + c_2, \quad x_3(t) = t + c_3, \quad x_4(t) \equiv \varphi$$

y cumplen que $\varphi \equiv F(x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. A su vez, las curvas $t \mapsto (x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ son intersecciones de lugares geométricos

$$x_1 - x_0 = c_{10}, \quad x_2 - x_0 = c_{20}, \quad x_3 - x_0 = c_{30},$$

por lo que $\varphi = \varphi(x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0)$. Por lo tanto, F debe ser de la forma

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0). \quad (4.4)$$

Como F también debe ser integral primera de $X_1^{[4]}$, debe cumplirse que

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0.$$

Sustituyendo la ecuación (4.4) en esta última EDP y agrupando términos, resulta que F es integral primera de $X_1^{[4]}$ y $X_2^{[4]}$ siempre que

$$\forall x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \quad (x_1 - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + (x_2 - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + (x_3 - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = 0,$$

donde las derivadas parciales de φ están evaluadas en $(x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0)$. Esto es equivalente a exigir que

$$\forall y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R} : \quad y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(y_1, y_2, y_3) + y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}(y_1, y_2, y_3) + y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Usando una vez más el método de las características para obtener la forma de φ , partimos del campo en $\mathbb{R}^4$

$$y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} + 0 \frac{\partial}{\partial y_4},$$

cuyas curvas características son

$$y_1(t) = c_1 e^t, \quad y_2(t) = c_2 e^t, \quad y_3(t) = c_3 e^t, \quad y_4(t) \equiv \psi.$$

Como $\frac{y_2(t)}{y_1(t)} = c_{21}$ e $\frac{y_3(t)}{y_1(t)} = c_{31}$, debe ser $\psi = \psi\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}\right)$, por lo que φ es de la forma

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \psi\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}\right).$$

Por lo tanto, todas las funciones F que cumplen

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0) = \psi\left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}, \frac{x_3 - x_0}{x_1 - x_0}\right) \quad (4.5)$$

son integrales primeras de $X_0^{[4]}$ y $X_1^{[4]}$.

Por último, F debe ser también integral de $X_2^{[4]}$, por lo que debe cumplirse que

$$(x_0)^2 \frac{\partial F}{\partial x_0} + (x_1)^2 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (x_2)^2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + (x_3)^2 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0.$$

Sustituyendo (4.5) en esta igualdad y reordenando, resulta

$$\begin{aligned} \forall x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \\ \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} (x_2 - x_1) \frac{\partial \psi}{\partial z_1} \left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}, \frac{x_3 - x_0}{x_1 - x_0} \right) + \frac{x_3 - x_0}{x_1 - x_0} (x_3 - x_1) \frac{\partial \psi}{\partial z_2} \left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}, \frac{x_3 - x_0}{x_1 - x_0} \right) = 0, \end{aligned}$$

lo que equivale a decir que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R} : \quad z_1(x_2 - x_1) \frac{\partial \psi}{\partial z_1}(z_1, z_2) + z_2(x_3 - x_1) \frac{\partial \psi}{\partial z_2}(z_1, z_2) = 0$$

siempre que existan x_0, x_1, x_2, x_3 tales que $z_1 = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}$ y $z_2 = \frac{x_3 - x_0}{x_1 - x_0}$.

Fijados x_0 y x_1 (con $x_1 - x_0 \neq 0$), siempre existen $x_2 = x_0 + z_1(x_1 - x_0)$ y $x_3 = x_0 + z_2(x_1 - x_0)$ que cumplen lo anterior, por lo que la EDP anterior queda

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R} : \quad (x_1 - x_0) z_1 (z_1 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial z_1}(z_1, z_2) + (x_1 - x_0) z_2 (z_2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial z_2}(z_1, z_2) = 0$$

para cualquier $x_1 - x_0 \neq 0$, que se puede simplificar a

$$z_1(z_1 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + z_2(z_2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial z_2} = 0.$$

Las curvas características de esta EDP son las curvas integrales de

$$z_1(z_1 - 1) \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2(z_2 - 1) \frac{\partial}{\partial z_2} + 0 \frac{\partial}{\partial z_3},$$

que son

$$z_1(t) = \frac{1}{1 + c_1 e^t}, \quad z_2(t) = \frac{1}{1 + c_2 e^t}, \quad z_3(t) \equiv \alpha.$$

Como $\frac{z_2(t)[z_1(t)-1]}{z_1(t)[z_2(t)-1]}$ es constante, resulta que $\alpha = \alpha\left(\frac{z_2(z_1-1)}{z_1(z_2-1)}\right)$, por lo que finalmente, para que F sea integral primera de los tres campos $X_0^{[4]}$, $X_1^{[4]}$ y $X_2^{[4]}$, debe ser de la forma

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \alpha \left(\frac{\frac{x_3-x_0}{x_1-x_0} \left(\frac{x_2-x_0}{x_1-x_0} - 1 \right)}{\frac{x_2-x_0}{x_1-x_0} \left(\frac{x_3-x_0}{x_1-x_0} - 1 \right)} \right) = \alpha \left(\frac{x_3-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} \right).$$

para cualquier función derivable α . Tomando $\alpha = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, una integral primera en $\mathbb{R}^4$ es

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}.$$

Si x_0, x_1, x_2, x_3 son soluciones de la ecuación de Riccati de primer orden, entonces F es constante en la curva $t \mapsto (x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, por lo que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \frac{x_3(t) - x_0(t)}{x_2(t) - x_0(t)} \cdot \frac{x_2(t) - x_1(t)}{x_3(t) - x_1(t)} = k,$$

donde k dependerá de las condiciones iniciales de las x_i . Despejando $x_0(t)$ de la expresión anterior, resulta

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad x_0(t) = \frac{x_3(t)[x_2(t) - x_1(t)] - kx_2(t)[x_3(t) - x_1(t)]}{[x_2(t) - x_1(t)] - k[x_3(t) - x_1(t)]},$$

por lo que la regla de superposición es

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, k) = \frac{x_3(x_2 - x_1) - kx_2(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1) - k(x_3 - x_1)}.$$

De esta manera, si se conocen 3 soluciones particulares x_1, x_2, x_3 , dada una condición inicial $x(0)$, eligiendo

$$k = \frac{x_3(0) - x(0)}{x_2(0) - x(0)} \cdot \frac{x_2(0) - x_1(0)}{x_3(0) - x_1(0)},$$

se cumplirá que la solución de la ecuación de Riccati con la condición inicial deseada viene dada por

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad x(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t), x_3(t), k).$$

En la siguiente figura se compara la solución obtenida con la regla de superposición y la obtenida con una nueva integración numérica.

Ejemplo. Una generalización de la ecuación de Riccati es la ecuación de Riccati matricial, que aparece de manera natural en problemas de control óptimo [18]

$$\dot{P} = M_1(t) + M_2(t)P + PM_3(t) + PM_4(t)P$$

En este caso, tanto la incógnita P como los coeficientes M_1, M_2, M_3 y M_4 son matrices dependientes del tiempo de las dimensiones adecuadas. Incluso con un caso simple

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ b_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ b_1(t) & b_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) & c_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

el álgebra de VG asociado es de dimensión 8

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= x \frac{\partial}{\partial x}, & X_3 &= y \frac{\partial}{\partial x}, & X_4 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_5 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_6 &= x \frac{\partial}{\partial y}, & X_7 &= y \frac{\partial}{\partial y}, & X_8 &= xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

La integración de las prolongaciones diagonales de tantos campos llega a ser inviable en la práctica, siendo mejor recurrir al método de obtención de reglas de superposición que hacen uso de la acción de un grupo asociado al álgebra de VG del sistema (ver [14]).

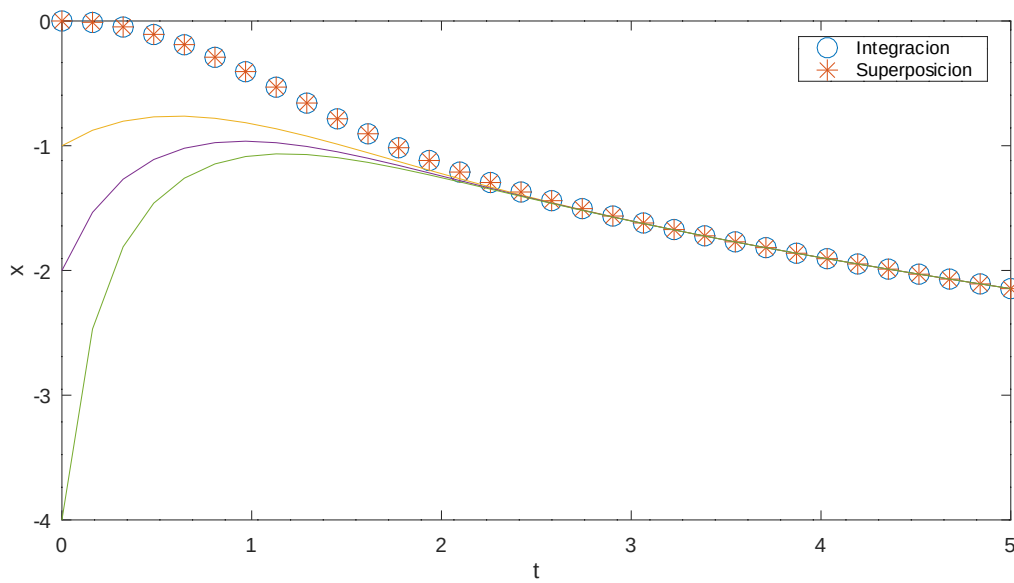


Figura 4.1: Comparación entre superposición e integración para la ecuación de Riccati $\dot{x} = x^2 - t$ en el intervalo $[0, 5]$ usando un RK4 clásico con paso $h = \frac{5}{2^8} = 0,15625$ y partiendo de $x(0) = 0$. Las soluciones particulares usadas se integraron bajo las mismas condiciones, pero partiendo de -1 , -2 y -4 .

Capítulo 5

Aplicación a un modelo de contagio

En este último capítulo aplicaremos la teoría vista hasta ahora a un modelo de contagio sencillo. Primero comprobaremos que es un sistema de Lie y obtendremos una regla de superposición. A continuación, veremos que es posible una formulación hamiltoniana de sus ecuaciones y aplicaremos los integradores simplécticos, comparando su error con el de los integradores convencionales.

5.1. El modelo SIS con fluctuaciones

El modelo considerado es una generalización del conocido como modelo *Susceptible-Infected-Susceptible* (SIS). El SIS considera que, en una población de N individuos en la que se cumple la hipótesis de *mezcla aleatoria*,¹ hay dos posibles estados para cada individuo: *infectado* (I) y *susceptible* (S). Si definimos la densidad de infectados $\rho := \frac{I}{N}$, el modelo SIS considera que

1. ρ crece proporcionalmente al producto de la densidad de infectados y la densidad de susceptibles (contagios de infectados a susceptibles). Su constante de proporcionalidad se conoce como *tasa de transmisión* α .
2. ρ decrece proporcionalmente a la densidad de infectados (recuperación de infectados). Su constante de proporcionalidad se conoce como *tasa de recuperación* γ .

Por lo tanto, una aproximación continua viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \alpha\rho(1 - \rho) - \gamma\rho.$$

Reescalando el tiempo como $t := \alpha\tau$ y definiendo $\rho_0 := 1 - \frac{\gamma}{\alpha}$, la ecuación anterior se simplifica a

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho(\rho_0 - \rho),$$

de donde se deduce que los puntos de equilibrio son $\rho = 0$ y $\rho = \rho_0$.

Este modelo no tiene en cuenta posibles heterogeneidades en la población al suponer que todos los individuos son estadísticamente equivalentes. Nakamura y Martinez [19] plantearon la transmisión de la enfermedad introduciendo una variable aleatoria tipo cadena de Markov, y llegaron a que

$$\begin{aligned}\frac{dE[\rho]}{dt} &= E[\rho] (\rho_0 - E[\rho]) - \text{Var}(\rho), \\ \frac{d\text{Var}(\rho)}{dt} &= 2\text{Var}(\rho) (\rho_0 - E[\rho]) - 2(E[\rho^3] - E[\rho]^3) + \frac{1}{N}E[\rho(1 - \rho)] + \frac{\gamma}{N\alpha}E[\rho].\end{aligned}$$

¹Esto quiere decir que todos los individuos pueden tener contacto entre sí con la misma probabilidad sin distinción entre grupos poblacionales.

A partir de este resultado, validado mediante simulaciones, consideraron que con $E[\rho]$ y $\text{Var}(\rho)$ ya se obtiene una generalización del SIS, pudiendo despreciar momentos de orden superior. Suponiendo que es despreciable el coeficiente de asimetría

$$\tilde{\mu}_3(\rho) = E \left[\left(\frac{\rho - E[\rho]}{\text{Var}(\rho)^{\frac{1}{2}}} \right)^3 \right] = \frac{(E[\rho^3] - E[\rho]^3) - 3E[\rho]\text{Var}(\rho)}{\text{Var}(\rho)^{\frac{3}{2}}},$$

se puede aproximar $E[\rho^3] - E[\rho]^3 \approx 3E[\rho]\text{Var}(\rho)$, llegando al sistema

$$\text{SIS con fluctuaciones (SISf)} : \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d \log(E[\rho])}{dt} &= \rho_0 - E[\rho] - \frac{\text{Var}(\rho)}{E[\rho]} \\ \frac{1}{2} \frac{d \log(\text{Var}(\rho))}{dt} &= \rho_0 - 2E[\rho] \end{aligned}}.$$

Este sistema se puede resolver analíticamente, y resulta

$$E[\rho](t) = \frac{\rho_0(1 + c_1 e^{-\rho_0 t})}{1 + 2c_1 e^{-\rho_0 t} + c_2 e^{-2\rho_0 t}}, \quad \text{Var}(\rho)(t) = \frac{E[\rho]^2(t)(c_1^2 - c_2)e^{-2\rho_0 t}}{(1 + c_1 e^{-\rho_0 t})^2},$$

donde c_1 y c_2 son constantes que dependen de la condición inicial y que recuperan la solución de (5.1) cuando $c_2 = c_1^2$.

Por último, definiendo las variables $q := E[\rho]$ y $p := \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(\rho)}}$, el sistema resultante

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= q(\rho_0 - q) - \frac{1}{p^2}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\rho_0 p + 2qp. \end{aligned}$$

es hamiltoniano:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \text{donde } H = qp(\rho_0 - q) + \frac{1}{p}. \quad (5.1)$$

5.2. Regla de superposición del SISf como sistema de Lie

En [20] se generaliza (5.1) al considerar ρ_0 variable en el tiempo. Por esta dependencia temporal, el sistema deja de ser hamiltoniano en el sentido de la mecánica geométrica, pero a cambio se obtiene un sistema de Lie. En esta sección obtendremos una regla de superposición para el modelo SISf. Para seguir los pasos aquí descritos es muy recomendable usar algún programa de cálculo simbólico.

El sistema de ecuaciones del modelo SISf es

$$\begin{cases} \dot{q} = \rho_0(t)q - q^2 - \frac{1}{p^2} \\ \dot{p} = -\rho_0(t)p + 2qp \end{cases} \quad (5.2)$$

Dicho sistema está definido en $M := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, donde se elige la estructura diferenciable que contiene la carta $(M, \text{Id}_{\mathbb{R}^2}|_M)$.

Las ecuaciones diferenciales son las asociadas al campo vectorial dependiente del tiempo

$$X_t = \rho_0(t) \left(q \frac{\partial}{\partial q} - p \frac{\partial}{\partial p} \right) + \left[\left(-q^2 - \frac{1}{p^2} \right) \frac{\partial}{\partial q} + 2qp \frac{\partial}{\partial p} \right] \in \mathfrak{X}_t(M).$$

Definiendo los campos

$$X_1 := q \frac{\partial}{\partial q} - p \frac{\partial}{\partial p}, \quad X_2 := \left(-q^2 - \frac{1}{p^2} \right) \frac{\partial}{\partial q} + 2qp \frac{\partial}{\partial p},$$

que cumplen que

$$[X_1, X_2] = X_2,$$

se concluye que $X_t = \rho_0(t)X_1 + X_2$ es un sistema de Lie, por lo que admite una regla de superposición.

Para hallar dicha regla, hay que encontrar el menor m tal que las prolongaciones diagonales $X_1^{[m]}$ y $X_2^{[m]}$ sean linealmente independientes como elementos del módulo $(\mathfrak{X}(M^m), C^\infty(M))$. Probando con $m = 1$, $f_1X_1 + f_2X_2 = 0$ si y sólo si

$$\begin{bmatrix} q & -q^2 - \frac{1}{p^2} \\ -p & 2qp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz del sistema es $q^2p - \frac{1}{p}$. Si $q \neq \pm \frac{1}{p}$, dicho determinante es no nulo, por lo que para que se cumpla la igualdad del sistema, debe ser $f_i(q, p) = 0$ en todos los $(q, p) \in M$ con $q \neq \pm \frac{1}{p}$. Si además exigimos que las f_i sean C^∞ , debe ser $f_1 = f_2 = 0$ en todo M . Por lo tanto, $m = 1$.

El siguiente paso para obtener una regla de superposición es obtener $2 = \dim M$ integrales primeras de los campos $X_1^{[m+1]}$ y $X_2^{[m+1]}$

$$\begin{aligned} X_1^{[2]} &= q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_2}. \\ X_2^{[2]} &= \left(-(q_1)^2 - \frac{1}{(p_1)^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_1} + \left(-(q_2)^2 - \frac{1}{(p_2)^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_2} + 2q_1p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + 2q_2p_2 \frac{\partial}{\partial p_2}. \end{aligned}$$

Si f es integral primera de f , debe cumplirse la EDP

$$q_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial f}{\partial q_2} - p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0.$$

Las curvas características de esta ecuación vienen dadas por el sistema

$$\frac{dq_1}{q_1} = \frac{dq_2}{q_2} = \frac{-dp_1}{p_1} = \frac{-dp_2}{p_2},$$

de donde se obtiene que

$$\frac{q_2}{q_1} = c_1, \quad q_1p_1 = c_2, \quad q_1p_2 = c_3.$$

Por lo tanto, si f es integral primera de $X_1^{[2]}$, tiene que ser de la forma

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) = \varphi \left(\frac{q_2}{q_1}, q_1p_1, q_1p_2 \right), \quad (5.3)$$

para cierta $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suave.

Si queremos que a la vez sea integral primera de $X_2^{[2]}$, sustituyendo (5.3) en la ecuación $X_2^{[2]}f = 0$ y reagrupando en función de $x_1 := \frac{q_2}{q_1}$, $x_2 := q_1p_1$ y $x_3 := q_1p_2$, se llega a que debe cumplirse

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \quad & q_1 \left(x_1 - (x_1)^2 - \frac{1}{(x_3)^2} + \frac{x_1}{(x_2)^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ & + q_1 \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \\ & + q_1 \left(2x_3x_1 - x_3 - \frac{x_3}{(x_2)^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{aligned}$$

para cualquier constante $q_1 \neq 0$. Esto se puede simplificar a

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \quad & \left(x_1 - (x_1)^2 - \frac{1}{(x_3)^2} + \frac{x_1}{(x_2)^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ & + \left(2x_3x_1 - x_3 - \frac{x_3}{(x_2)^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0. \end{aligned}$$

Las curvas características de la EDP anterior vienen dadas por el sistema

$$\frac{dx_1}{x_1 - (x_1)^2 - \frac{1}{(x_3)^2} + \frac{x_1}{(x_2)^2}} = \frac{dx_2}{x_2 - \frac{1}{x_2}} = \frac{dx_3}{2x_3x_1 - x_3 - \frac{x_3}{(x_2)^2}},$$

que resultan

$$\frac{(x_1x_2x_3)^2 - x_1(x_2x_3)^2 + x_1(x_3)^2 - (x_2)^2}{x_3[(x_2)^2 - 1]} = c_1 \quad \frac{x_2[(x_1x_3)^2 - 1]}{x_3[(x_2)^2 - 1]} = c_2.$$

De aquí se concluye que

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \psi \left(\frac{(x_1x_2x_3)^2 - x_1(x_2x_3)^2 + x_1(x_3)^2 - (x_2)^2}{x_3[(x_2)^2 - 1]}, \frac{x_2[(x_1x_3)^2 - 1]}{x_3[(x_2)^2 - 1]} \right),$$

por lo que, para que f sea integral primera de $X_1^{[2]}$ y $X_2^{[2]}$ a la vez, debe ser de la forma

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) = \psi \left(\frac{q_2(p_2)^2 - q_1(p_1)^2[1 + q_2(p_2)^2(q_1 - q_2)]}{p_2[(q_1p_1)^2 - 1]}, \frac{p_1[(q_2p_2)^2 - 1]}{p_2[(q_1p_1)^2 - 1]} \right),$$

para cualquier ψ suave de dos variables.

Tomando $\psi_1(y_1, y_2) := y_1$ y $\psi_2(y_1, y_2) := y_2$, definimos las integrales primeras f_1 y f_2 de las prolongaciones diagonales

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2, p_1, p_2) &:= \frac{q_2(p_2)^2 - q_1(p_1)^2[1 + q_2(p_2)^2(q_1 - q_2)]}{p_2[(q_1p_1)^2 - 1]}, \\ f_2(q_1, q_2, p_1, p_2) &:= \frac{p_1[(q_2p_2)^2 - 1]}{p_2[(q_1p_1)^2 - 1]}. \end{aligned}$$

Estas funciones son constantes en las trayectorias $t \mapsto (q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$, siendo cada par (q_1, p_1) y (q_2, p_2) soluciones del sistema SISf

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : \quad & \frac{q_2(p_2)^2 - q_1(p_1)^2[1 + q_2(p_2)^2(q_1 - q_2)]}{p_2[(q_1p_1)^2 - 1]} = k_1, \\ \forall t \in \mathbb{R} : \quad & \frac{p_1[(q_2p_2)^2 - 1]}{p_2[(q_1p_1)^2 - 1]} = k_2. \end{aligned}$$

Despejando $q_1(t)$ y $p_1(t)$,² obtenemos

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : \quad & q_1 = \frac{(q_2p_2)^3 + k_1(q_2p_2)^2 - (q_2p_2) - k_1}{p_2[(q_2p_2)^2 + 2k_1(q_2p_2) + k_1^2 - k_2^2]}, \\ \forall t \in \mathbb{R} : \quad & p_1 = \frac{p_2[(q_2p_2)^2 + 2k_1(q_2p_2) + k_1^2 - k_2^2]}{k_2[(q_2p_2)^2 - 1]}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una regla de superposición —más sencilla que la propuesta en [20]— es

$$\Phi(q, p, k_1, k_2) := \left(\frac{(qp)^3 + k_1(qp)^2 - (qp) - k_1}{p[(qp)^2 + 2k_1(qp) + k_1^2 - k_2^2]}, \frac{p[(qp)^2 + 2k_1(qp) + k_1^2 - k_2^2]}{k_2[(qp)^2 - 1]} \right).$$

²El resultado es más simple que despejando q_2 y p_2 .

De esta manera, si (q_1, p_1) es una solución particular del SISf, eligiendo una nueva condición inicial $q(0), p(0)$ y calculando las constantes

$$k_1 = \frac{q_1(0)p_1(0)^2 - q(0)p(0)^2[1 + q_1(0)p_1(0)^2(q(0) - q_1(0))]}{p_1(0)[(q(0)p(0))^2 - 1]}$$

$$k_2 = \frac{p(0)[(q_1(0)p_1(0)) - 1]}{p_1(0)[(q(0)p(0))^2 - 1]}$$

la solución con la nueva condición inicial viene dada por

$$(q(t), p(t)) = \Phi(q_1(t), p_1(t), k_1, k_2).$$

En la siguiente figura se compara la solución obtenida usando la regla de superposición (B.2) y la obtenida integrando nuevamente. El resultado es prácticamente el mismo.

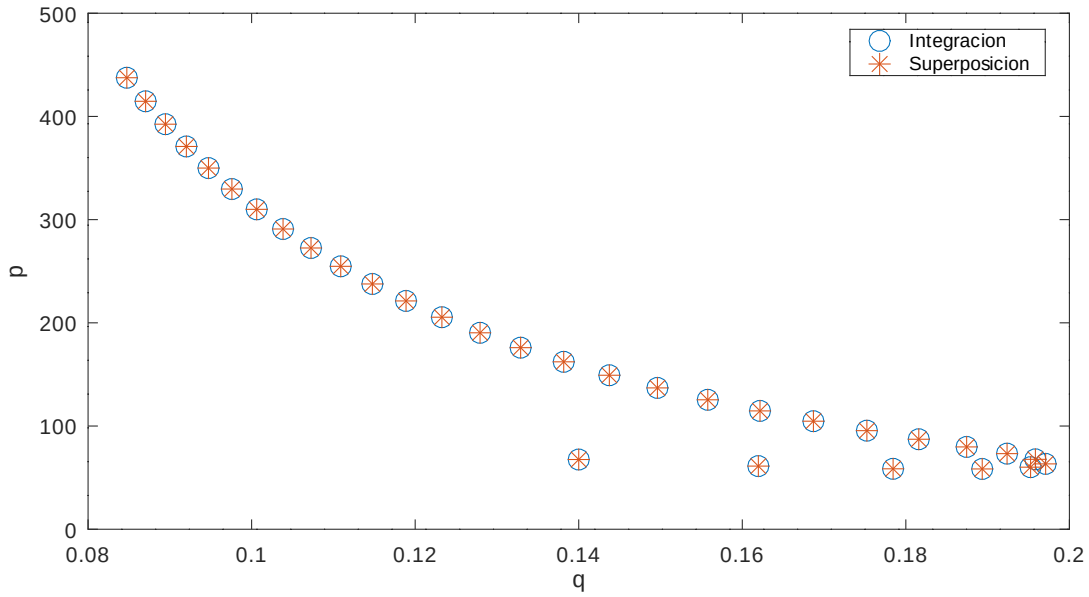


Figura 5.1: Trayectorias obtenidas con un RK4 explícito y mediante regla de superposición en un intervalo $T = [0, 10]$ con paso $h = \frac{10}{25} = 0,3125$. Se ha usado $\rho_0(t) = 0,7 e^{-0,8t}$, con condición inicial $(0,14; 67,55)$. La solución particular usada por la regla de superposición parte de la condición inicial $(0,05; 75,61)$, integrada con el RK4 clásico con el mismo paso.

Para ver la ventaja que da disponer de esta regla de superposición, se exponen, a título ilustrativo, el error obtenido con superposición e integración (frente a una integración con paso temporal mucho más fino) y el tiempo de computación requerido en cada caso.

Integración y Superposición		
Método	Error global	Tiempo
Integración	20.4863	17.039 ms
Superposición	20.4882	0.1369 ms

Por supuesto, estos valores dependerán de la máquina utilizada, pero podemos concluir que la regla de superposición dará una aproximación a la solución real del mismo orden que la solución particular usada en dicha regla, y con un tiempo de computación casi despreciable.

Antes de concluir la sección, también es interesante mencionar que el sistema considerado es además un *sistema de Lie-Hamilton* [14] dado por un hamiltoniano dependiente del tiempo $H \sim \{H_t\}$

$$H_t = qp(\rho_0 - q) + \frac{1}{p}.$$

Esto quiere decir que en la variedad M se puede definir un bivector de Poisson Λ tal que

- $\forall t \in \mathbb{R} : X_t = \Lambda^\sharp(\mathbf{d}H_t)$
- Los campos X_0 y X_1 que son base del álgebra de VG de $X = \rho_0 X_0 + X_1$ son hamiltonianos respecto a Λ . Esto es, existen hamiltonianos $H_0, H_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$X_0 = \Lambda^\sharp(\mathbf{d}H_0) \quad \text{y} \quad X_1 = \Lambda^\sharp(\mathbf{d}H_1),$$

y además $H_t = \rho_0(t)H_0 + H_1$.

- El álgebra de Lie minimal de $\{H_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ (definido análogamente a la Definición 4.4 y representado como $\mathcal{H}_\Lambda$) es un subálgebra de Lie de dimensión finita de $C^\infty(M)$.

Al ser M de dimensión par, suponiendo que Λ es no degenerado, existirá una ω simpléctica asociada a Λ , y una manera de encontrarla es mediante la Proposición 2.4: $\mathcal{L}_{X_0}\omega = 0$ y $\mathcal{L}_{X_1}\omega = 0$. Imponiendo estas dos restricciones, vemos que una posible ω es la canónica

$$\omega = \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}p \quad \sim \quad \Lambda = \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q}.$$

A partir de aquí, requiriendo

$$\Lambda^\sharp(\mathbf{d}H_0) = \frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H_0}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} = X_0 \quad \text{y} \quad \Lambda^\sharp(\mathbf{d}H_1) = \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H_1}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} = X_1,$$

obtenemos que $H_0 = qp$ y $H_1 = -q^2p + \frac{1}{p}$ cumplen que $H_t = \rho(t)H_0 + H_1$.

La estructura de los sistemas de Lie-Hamilton permite obtener constantes del movimiento sin necesidad de integrar mediante el método de las características, sino de manera algebraica eligiendo una *representación* de $\mathcal{H}_\Lambda$ y aplicando el llamado *método de la coálgebra*. Ver [14, 16, 17] para más detalles, y [20] para su aplicación al sistema SISf.

5.3. Integración simpléctica del SISf como sistema hamiltoniano

A pesar de que el sistema original (5.2)

$$\begin{cases} \dot{q} = \rho_0(t)q - q^2 - \frac{1}{p^2} = \frac{\partial H}{\partial p}(t) \\ \dot{p} = -\rho_0(t)p + 2qp = -\frac{\partial H}{\partial q}(t) \end{cases}$$

no es hamiltoniano por la dependencia temporal de H ($H \sim \{H_t\}$). Considerando su autonomización, obtenemos un sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = \rho_0(t)q - q^2 - \frac{1}{p^2} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\rho_0(t)p + 2qp = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

al que podemos aplicar los algoritmos de integración desarrollados en el Capítulo 3, pero que no es un sistema hamiltoniano simpléctico por ser un sistema con un número impar de variables.

Sin embargo, introduciendo un momento conjugado u de la variable temporal t y considerando

$$H'(q, p, t, u) := H_t(q, p) + u,$$

el sistema definido en $M \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{q} = \rho_0(t)q - q^2 - \frac{1}{p^2} \\ \dot{t} = 1 \\ \dot{p} = -\rho_0(t)p + 2qp \\ \dot{u} = -\frac{\partial H'}{\partial t} \end{cases} \quad (5.5)$$

tiene la misma dinámica que el original en las variables originales q, p y sí es hamiltoniano

$$\dot{q} = \frac{\partial H'}{\partial p}, \quad \dot{t} = \frac{\partial H'}{\partial u}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H'}{\partial q}, \quad \dot{u} = -\frac{\partial H'}{\partial t},$$

donde la estructura simpléctica viene dada por

$$\omega = \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}p + \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}u \quad \text{ó} \quad \Lambda = \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial t}.$$

Por lo tanto, podemos aplicar los algoritmos simplécticos a (5.5) y obtener mejores soluciones numéricas en intervalos largos de integración. En la Figura 5.2 se comparan los resultados de integrar el sistema autonomizado (5.4) y el sistema simpléctico (5.5).

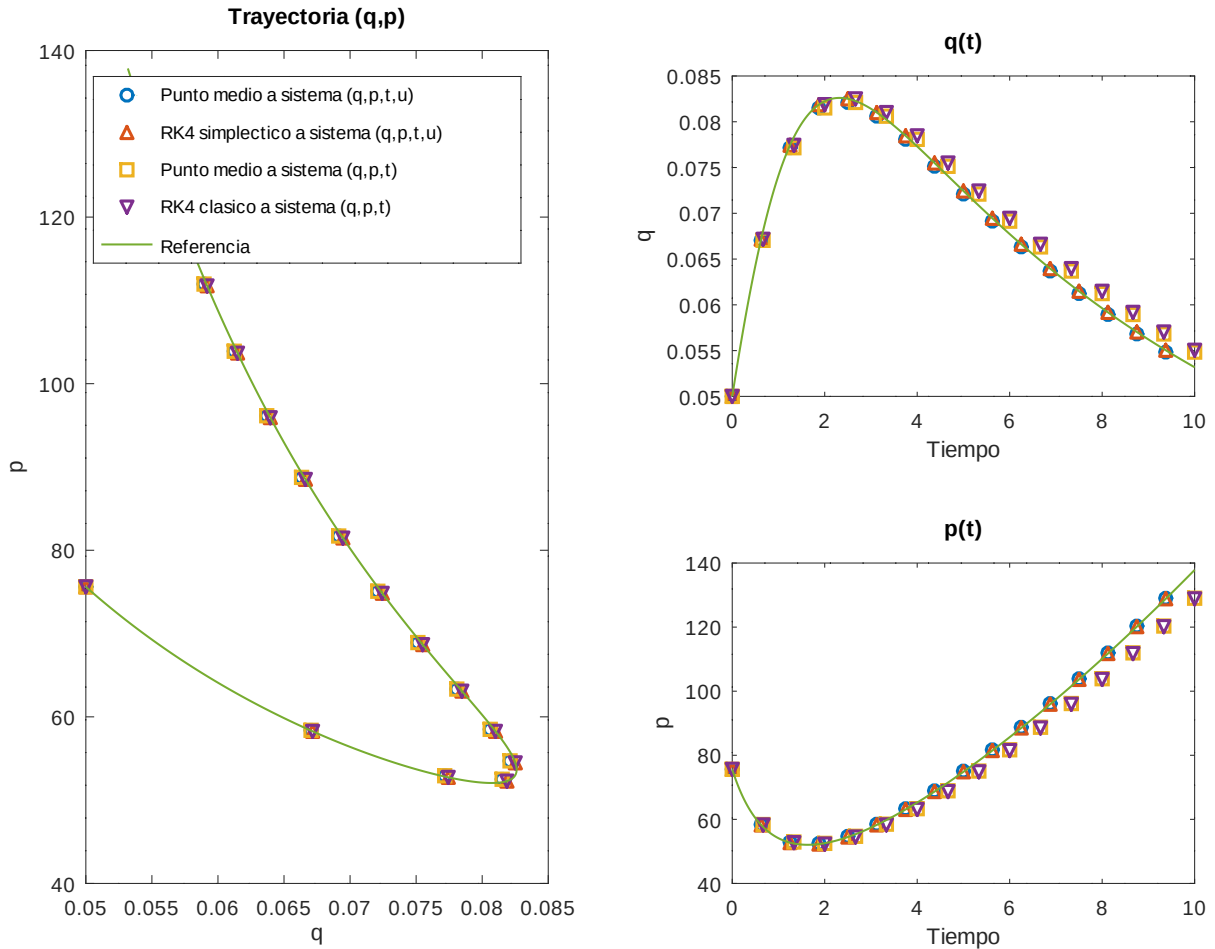


Figura 5.2: Trayectorias obtenidas con $\rho_0(t) = 0,7 e^{-0,9t}$ a partir de la condición inicial $(q_0, p_0) = (0,05, 75,61)$ en el intervalo $[0, 10]$ con paso $h = \frac{10}{2^4} = 0,625$. La referencia se obtiene con un RK4 clásico aplicado al sistema autonomizado (5.4) con paso $h = \frac{10}{2^{15}}$.

Se comprueba que las soluciones (q, p) de los integradores simplécticos para el sistema de 4 variables (q, p, t, u) se mantienen más cerca de la solución real que los (q, p) del sistema autonomizado (q, p, t) . De hecho, las soluciones de los algoritmos simplécticos son satisfactorias incluso con pasos temporales moderadamente grandes como el utilizado.

En la Figura 5.3 se comprueba la conservación aproximada del hamiltoniano del sistema (5.5), a diferencia del sistema original no autónomo. En la figura ampliada se observa también cómo el RK4 simpléctico preserva mejor H' que el método del punto medio.

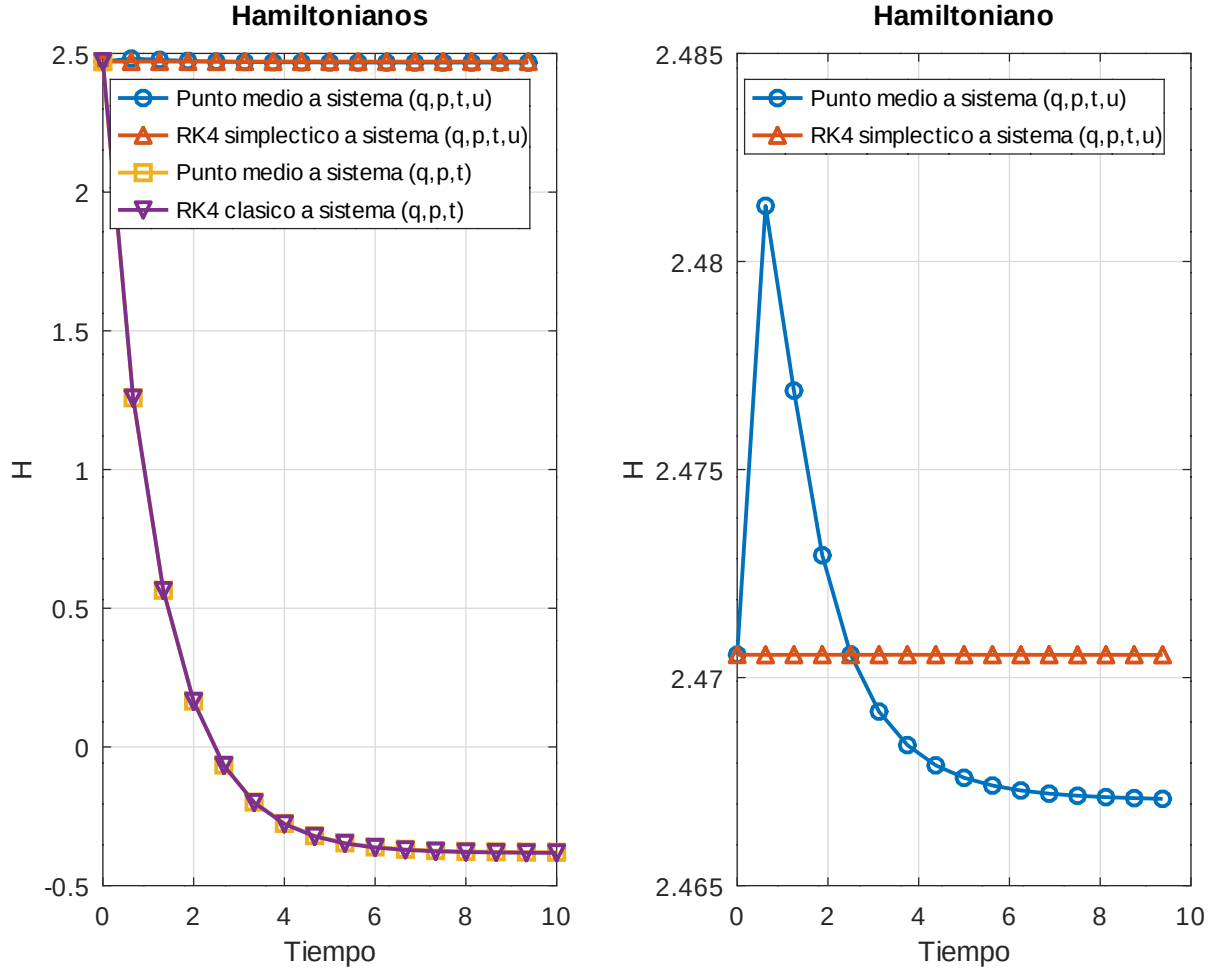


Figura 5.3: Hamiltonianos H y H' bajo las mismas condiciones descritas en la Figura 5.2 (izda.). H' del sistema simpléctico a escala ampliada (dcha.)

Conclusiones

En este trabajo se ha conseguido fundamentalmente tres cosas

1. Usar la teoría general de los sistemas de Lie para obtener una regla de superposición para el sistema SISf más simple que la obtenida en [20].
2. Implementar en Octave distintos integradores simplécticos de uso general para cualquier sistema hamiltoniano.
3. Recuperar la estructura simpléctica perdida al generalizar el SISf permitiendo que ρ_0 dependa del tiempo. Introduciendo un momento conjugado a la variable temporal, es posible obtener un sistema hamiltoniano simpléctico de 4 variables (q, p, t, u) frente a las 2 variables (q, p) del sistema no autónomo original. A pesar de aumentar el número de variables, el sistema resultante es más apropiado para la aplicación de integradores geométricos.

Al aplicar estos algoritmos al sistema SISf, vemos que

- Se comprueba que la regla de superposición obtenida es correcta y que su coste computacional es despreciable frente a una nueva integración numérica.
- Los métodos simplécticos se mantienen más cerca de la trayectoria real con pasos de integración moderadamente grandes.
- El Runge-Kutta de cuarto orden simpléctico conserva mejor el hamiltoniano H' que el método del punto medio.

Planteando el sistema SISf como sistema hamiltoniano, podemos obtener soluciones fiables en intervalos largos de simulación usando integradores simplécticos. Al plantearlo como sistema de Lie, podemos obtener nuevas soluciones partiendo de otras condiciones iniciales sin necesidad de volver a integrar.

Si se quisieran hacer simulaciones probando distintas $\rho_0(t)$ y distintas condiciones iniciales, solamente sería necesario integrar una condición inicial para cada $\rho_0(t)$, pues una vez obtenida esta solución particular, podemos obtener sin apenas coste computacional más soluciones para distintas condiciones iniciales usando la solución particular integrada con la $\rho_0(t)$ correspondiente en la regla de superposición. De esta manera, se ahorra bastante tiempo de cálculo sin comprometer la precisión de los resultados obtenidos.

Apéndice A

Método de las características

El método de las características permite resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden en $\mathbb{R}^n$ estudiando la gráfica de la función a determinar como variedad en $\mathbb{R}^{n+1}$. Este método nos permite encontrar reglas de superposición para los sistemas de Lie más sencillos.

Dada la EDP lineal y homogénea

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} = 0, \quad (\text{A.1})$$

la gráfica de la solución f es el conjunto

$$S := \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\},$$

que dependerá de la condición de contorno, y que se puede escribir como la superficie de nivel $F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$, donde

$$F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := f(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}.$$

Sabemos por cálculo integral que $\nabla F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ es ortogonal a la superficie S en el punto $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Dicho gradiente¹ es

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n), -1 \right]^{\top},$$

y por la ecuación (A.1), el vector

$$X(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := [a_1(x_1, \dots, x_n), \dots, a_n(x_1, \dots, x_n), 0]^{\top}$$

es ortogonal a dicho gradiente, por lo que X es paralelo a S .

Por lo tanto, elegida una condición inicial $x_1(0), \dots, x_n(0), \varphi := x_{n+1}(0)$, la curva integral del campo

$$X := a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x^n} + 0 \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$$

se mantendrá en la superficie S correspondiente a esa condición inicial. Las curvas integrales de X se denominan *curvas características* del sistema (A.1).

De esta manera, resolviendo las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x}_1 = a_1, \dots, \dot{x}_n = a_n, \dot{x}_{n+1} = 0$$

¹En el sentido clásico del cálculo en espacios euclídeos (como vector en vez de covector). En el contexto de la geometría diferencial, esto se haría mediante $\nabla F := g^{\sharp}(\mathbf{d}f)$, siendo $g \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^{n+1})$ un *tensor métrico* [2].

obtenemos una curva característica $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t))$ contenida en S , donde $x_{n+1}(t) \equiv \varphi$ por ser $\dot{x}_{n+1} = 0$. Por la definición de S , se cumple que

$$\forall t: \quad \varphi = x_{n+1}(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

y la curva $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$ en $\mathbb{R}^n$ se puede expresar, eliminando el parámetro t , como intersección de lugares geométricos. Por ejemplo, si obtenemos

$$\phi_1(x_1, x_2) = C_1, \quad \phi_2(x_1, x_3) = C_2, \quad \dots, \quad \phi_{n-1}(x_1, x_n) = C_{n-1}, \quad (\text{A.2})$$

entonces

$$\varphi = \varphi(C_1, \dots, C_{n-1}),$$

de donde se concluye que f debe ser de la forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\phi_1(x_1, x_2), \dots, \phi_{n-1}(x_1, x_n)),$$

siendo φ cualquier función suave en $\mathbb{R}^{n-1}$.

En realidad, tampoco es necesario calcular explícitamente las trayectorias $t \mapsto x_i(t)$. Muchas veces se suele plantear la ecuación simbólica

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n},$$

de manera que los lugares geométricos (A.2) se obtienen de integrar las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2}, \quad \frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_3}{a_3}, \dots, \quad \frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_n}{a_n}.$$

Como ejemplo, consideremos la ecuación de transporte

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.3})$$

siendo a una constante. Renombrando las variables a $x_1 := t$, $x_2 := x$, debemos encontrar las curvas integrales de

$$X = 1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a \frac{\partial}{\partial x_2} + 0 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Esas curvas son

$$x_1(s) = s + c_1, \quad x_2(s) = as + c_2, \quad x_3(s) = \varphi.$$

Eliminando el parámetro s de las dos primeras ecuaciones, vemos que la curva $\{(x_1(s), x_2(s))\}_{s \in \mathbb{R}}$ es una recta

$$x_2 - ax_1 - (c_2 - c_1) = 0,$$

por lo que φ es una función en $\mathbb{R}^2$ que depende de las rectas $x_2 - ax_1 - c = 0$. Por lo tanto, podemos concluir que

$$\varphi = \varphi(x_2 - ax_1),$$

de manera que $f(x_1, x_2) = \varphi(x_2 - ax_1)$, siendo φ cualquier función diferenciable en $\mathbb{R}$. En efecto, si tomamos

$$f(t, x) := \varphi(x - at),$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + a \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -a\varphi'(x - at) + a\varphi'(x - at) = 0,$$

que es la EDP (A.3) original.

Al mismo resultado se llega, sin necesidad de obtener las trayectorias $x_1(t), x_2(t)$ con el sistema simbólico

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{a} \implies x_2 - ax_1 = \text{cte} \implies \varphi = \varphi(x_2 - ax_1).$$

Apéndice B

Código de algoritmos e integradores en Octave

Aquí se incluye el código utilizado con instrucciones de uso.

B.1. Autonomización de un campo vectorial

Si partimos de un sistema no autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ de n variables $x_1, \dots, x_n$ caracterizado por la función

`f = @(t,x) [...]`

el siguiente *script* devuelve el campo asociado al sistema autonomizado de $n + 1$ variables $x_0, x_1, \dots, x_n$ (sección 1.4)

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}).$$

tratando al tiempo t como una nueva variable x_0 . De esta manera, la solución $t \mapsto (t, \mathbf{x}(t))$ del sistema autonomizado da la solución $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ del sistema original.

```
function F = autonomizacion(f)
    F = @(x) [1, f(x(1), x(2:end))];
endfunction
```

Ejemplo (SISf).

```
r0 = @(t) 0.7*exp(-0.8*t);
f = @(t,x) [r0(t)*x(1) - x(1)^2 - 1/(x(2)^2), -r0(t)*x(2)+2*x(1)*x(2)];
F = autonomizacion(f);
```

B.2. Regla de superposición para el SISf

Fijada una función $\rho_0(t)$, esta función de Octave genera una solución para el SISf

$$X = \left(\rho_0(t)q - q^2 - \frac{1}{p^2} \right) \frac{\partial}{\partial q} + (-\rho_0(t) + 2qp) \frac{\partial}{\partial p}$$

a partir de otra solución particular previamente calculada usando la regla de superposición obtenida en la sección 5.2

$$\Phi(q, p, k_1, k_2) = \left(\frac{(qp)^3 + k_1(qp)^2 - (qp) - k_1}{p[(qp)^2 + 2k_1(qp) + k_1^2 - k_2^2]}, \frac{p[(qp)^2 + 2k_1(qp) + k_1^2 - k_2^2]}{k_2[(qp)^2 - 1]} \right)$$

y la condición inicial deseada.

```
function x = SuperposicionSISf(y, x0)
    q = x0(1);
    p = x0(2);
    Q = y(1,1);
    P = y(1,2);
    k1 = (Q*P^2 - q*p^2*(1 + Q*P^2*(q-Q)))/(P*((q*p)^2-1));
    k2 = (p*((Q*P)^2-1))/(P*((q*p)^2-1));
    Q = y(:,1);
    P = y(:,2);
    QP = Q.*P;
    q = (QP.^3 + k1*QP.^2 - QP - k1)/(P.*(QP.^2 + 2*k1*QP + k1^2 - k2^2));
    p = (P.*(QP.^2 + 2*k1*QP + k1^2 - k2^2))/(k2*(QP.^2 - 1));
    x = [q,p];
endfunction
```

Ejemplo.

% Definición del campo

```
r0 = @(t) 0.7*exp(-0.8*t);
f = @(t,x) [r0(t)*x(1) - x(1)^2 - 1/(x(2)^2), -r0(t)*x(2)+2*x(1)*x(2)];
F = autonomizacion(f);
```

% Intervalo de integración y paso h = T/N

```
T = [0, 10];
N = 2^10;
```

% Primera solución particular integrando

```
x01 = [0.05, 75.61];
[t1, x1] = RK4clasico(F, [T(1), x01], T, N);
q1 = x1(:,2);
p1 = x1(:,3);
```

% Segunda solución particular usando la regla de superposición

```
x02 = [0.14, 67.55];
[q2,p2] = SuperposicionSISf([q1,p1], x02);
```

B.3. Euler explícito

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una condición inicial $\mathbf{x}_0$, un intervalo de integración $[T_1, T_2]$ y un número N

$\mathbf{F} = @(x) [\dots]; T = [\cdot, \cdot]; \mathbf{x}_0 = [\dots]; N = \cdot,$

la siguiente función aplica el método de Euler explícito

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$$

con paso $h = \frac{T_2 - T_1}{N}$ para resolver el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Devuelve un *array* con los $t_k, \mathbf{x}_k$.

```
function [t, x] = EulerExplicito(F, x0, T, N)

    % Vector de tiempos y paso temporal
    t = linspace(T(1), T(2), N)';
    h = (T(2)-T(1))/N;

    % Trayectoria
    n = length(x0);
    x = zeros(N,n);

    % Condición inicial
    x(1,:) = x0;

    for k = 1:(N-1)
        x(k+1,:) = x(k,:) + h*F(x(k,:));
    endfor

endfunction
```

Ejemplo (Oscilador armónico).

```
F = @(x) [x(2), -x(1)];
[t,x] = EulerExplicito(F, [1,0], [0,4*pi], 2^8);
```

B.4. Euler implícito

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una condición inicial $\mathbf{x}_0$, un intervalo de integración $[T_1, T_2]$ y un número N

$\mathbf{F} = @(x) [\dots]; T = [\cdot, \cdot]; x0 = [\dots]; N = \cdot,$

la siguiente función aplica el método de Euler implícito

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1})$$

con paso $h = \frac{T_2 - T_1}{N}$ para resolver el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Devuelve un *array* con los $t_k, \mathbf{x}_k$.

```
function [t, x] = EulerImplicito(F, x0, T, N)

    % Vector de tiempos y paso temporal
    t = linspace(T(1), T(2), N)';
    h = (T(2)-T(1))/N;

    % Trayectoria
    n = length(x0);
    x = zeros(N,n);

    % Condición inicial
    x(1,:) = x0;

    for k = 1:(N-1)
        x(k+1,:) = fsolve( @(X)residuo(F,h,x(k,:),X), x(k,:) );
    endfor

endfunction

function res = residuo ( F, h, x , X )
    res = X - x - h*F(X);
endfunction
```

Ejemplo (Oscilador armónico).

```
F = @(x) [x(2), -x(1)];
[t,x] = EulerImplicito(F, [1,0], [0,4*pi], 2^8);
```

B.5. Punto medio

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una condición inicial $\mathbf{x}_0$, un intervalo de integración $[T_1, T_2]$ y un número N

$\mathbf{F} = @(x) [\dots]; T = [\cdot, \cdot]; \mathbf{x}_0 = [\dots]; N = \cdot,$

la siguiente función aplica el método del punto medio

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{F} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1} \right)$$

con paso $h = \frac{T_2 - T_1}{N}$ para resolver el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Devuelve un *array* con los $t_k, \mathbf{x}_k$.

```
function [t, x] = PuntoMedio(F, x0, T, N)

    % Vector de tiempos y paso temporal
    t = linspace(T(1), T(2), N)';
    h = (T(2)-T(1))/N;

    % Trayectoria
    n = length(x0);
    x = zeros(N,n);

    % Condición inicial
    x(1,:) = x0;

    for k = 1:(N-1)
        x(k+1,:) = fsolve( @(X)residuo(F,h,x(k,:),X), x(k,:) );
    endfor

endfunction

function res = residuo ( F, h, x , X )
    res = X - x - h*F((x+X)/2);
endfunction
```

Ejemplo (Oscilador armónico).

```
F = @(x) [x(2), -x(1)];
[t,x] = PuntoMedio(F,[1,0],[0,4*pi],2^8);
```

B.6. Trapecio

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una condición inicial $\mathbf{x}_0$, un intervalo de integración $[T_1, T_2]$ y un número N

$\mathbf{F} = @(\mathbf{x}) \ [\dots]; \mathbf{T} = [\cdot, \cdot]; \mathbf{x}_0 = [\dots]; N = \cdot,$

la siguiente función aplica el método del trapecio

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1})}{2}$$

con paso $h = \frac{T_2 - T_1}{N}$ para resolver el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Devuelve un *array* con los $t_k, \mathbf{x}_k$.

```
function [t, x] = Trapecio(F, x0, T, N)

    % Vector de tiempos y paso temporal
    t = linspace(T(1), T(2), N)';
    h = (T(2)-T(1))/N;

    % Trayectoria
    n = length(x0);
    x = zeros(N,n);

    % Condición inicial
    x(1,:) = x0;

    for k = 1:(N-1)
        x(k+1,:) = fsolve( @(X)residuo(F,h,x(k,:),X), x(k,:) );
    endfor

endfunction

function res = residuo ( F, h , x , X )
    res = X - x - (h/2)*(F(x) + F(X));
endfunction
```

Ejemplo (Oscilador armónico).

```
F = @(x) [x(2), -x(1)];
[t,x] = Trapecio(F,[1,0],[0,4*pi],2^8);
```

B.7. Runge-Kutta 4 clásico

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una condición inicial $\mathbf{x}_0$, un intervalo de integración $[T_1, T_2]$ y un número N

$\mathbf{F} = @(x) [\dots]; T = [\cdot, \cdot]; x_0 = [\dots]; N = \cdot,$

la siguiente función aplica el método Runge-Kutta 4 clásico

$$\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^4 b_i \mathbf{F}(\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_k))$$

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	1	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

con paso $h = \frac{T_2 - T_1}{N}$ para resolver el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Devuelve un *array* con los $t_k, \mathbf{x}_k$.

```
function [t,x] = RK4clasico(F, x0, T, N)

    % Vector de tiempos y paso temporal
    t = linspace(T(1), T(2), N)';
    h = (T(2)-T(1))/N;

    % Trayectoria
    n = length(x0);
    x = zeros(N,n);

    % Condición inicial
    x(1,:) = x0;

    for k = 1:(N-1)
        tk = t(k);
        xk = x(k,:);
        FK1 = F(xk);
        FK2 = F(xk + h*(1/2)*FK1);
        FK3 = F(xk + h*(1/2)*FK2);
        FK4 = F(xk + h*FK3);
        x(k+1,:) = xk + h*((1/6)*FK1 + (1/3)*FK2 + (1/3)*FK3 + (1/6)*FK4);
    endfor

endfunction
```

Ejemplo (Oscilador armónico).

```
F = @(x) [x(2), -x(1)];
[t,x] = RK4clasico(F, [1,0], [0,4*pi], 2^8);
```

B.8. Euler simpléctico I

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una condición inicial $\mathbf{x}_0$, un intervalo de integración $[T_1, T_2]$ y un número N

```
F = @(x) [...]; T = [...]; x0 = [...]; N = .,
```

la siguiente función aplica el método de Euler simpléctico I

$$(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k) + h \mathbf{F}(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{p}_k)$$

con paso $h = \frac{T_2 - T_1}{N}$ para resolver el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

El código presupone que $\mathbf{x} = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Si las coordenadas están ordenadas como $\mathbf{x} = (q^1, p_1, \dots, q^n, p_n)$, hay que introducir un argumento adicional con valor `true`.

Devuelve un *array* con los $t_k, \mathbf{x}_k$.

Ejemplo (Oscilador armónico).

```
F = @(x) [x(2), -x(1)];
[t,x] = EulerSimplectico1(F, [1,0], [0,4*pi], 2^8);
```

```

function [t, x] = EulerSimplectico1(F, x0, T, N, qpqp)

    % Vector de tiempos y paso temporal
    t = linspace(T(1), T(2), N)';
    h = (T(2)-T(1))/N;

    % Trayectoria
    n = length(x0);
    x = zeros(N,n);

    % Condición inicial
    if nargin == 5 && qpqp == true
        mask = NaN(1,n);
        for k = 1:(n/2);
            maskQ(2*k-1:2*k) = [true,false];
            maskP(2*k-1:2*k) = [false,true];
        endfor
        maskQ = logical(maskQ);
        maskP = logical(maskP);
        x(1,:) = [x0(maskQ), x0(maskP)];
    else
        x(1,:) = x0;
    endif

    for k = 1:(N-1)
        x(k+1,:) = fsolve( @(X)residuo(F,h,x(k,:),X), x(k,:) );
    endfor

    if nargin == 5 && qpqp == true
        x(:,maskQ) = x(:,1:(n/2));
        x(:,maskP) = x(:,(n/2+1):n);
    endif

endfunction

function res = residuo ( F, h, x , X )
    m = length(x)/2;
    res = X - x - h*F([X(1:m),x((m+1):2*m)]);
endfunction

```

B.9. Euler simpléctico II

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una condición inicial $\mathbf{x}_0$, un intervalo de integración $[T_1, T_2]$ y un número N

```
F = @(x) [...]; T = [...]; x0 = [...]; N = .,
```

la siguiente función aplica el método de Euler simpléctico II

$$(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}) = (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k) + h \mathbf{F}(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_{k+1})$$

con paso $h = \frac{T_2 - T_1}{N}$ para resolver el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

El código presupone que $\mathbf{x} = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Si las coordenadas están ordenadas como $\mathbf{x} = (q^1, p_1, \dots, q^n, p_n)$, hay que introducir un argumento adicional con valor `true`.

Devuelve un *array* con los $t_k, \mathbf{x}_k$.

Ejemplo (Oscilador armónico).

```
F = @(x) [x(2), -x(1)];
[t,x] = EulerSimplectico2(F,[1,0],[0,4*pi],2^8);
```

```

function [t, x] = EulerSimplectico2(F, x0, T, N, qpqp)

    % Vector de tiempos y paso temporal
    t = linspace(T(1), T(2), N)';
    h = (T(2)-T(1))/N;

    % Trayectoria
    n = length(x0);
    x = zeros(N,n);

    % Condición inicial
    if nargin == 5 && qpqp == true
        mask = NaN(1,n);
        for k = 1:(n/2);
            maskQ(2*k-1:2*k) = [true,false];
            maskP(2*k-1:2*k) = [false,true];
        endfor
        maskQ = logical(maskQ);
        maskP = logical(maskP);
        x(1,:) = [x0(maskQ), x0(maskP)];
    else
        x(1,:) = x0;
    endif

    for k = 1:(N-1)
        x(k+1,:) = fsolve( @(X)residuo(F,h,x(k,:),X), x(k,:) );
    endfor

    if nargin == 5 && qpqp == true
        x(:,maskQ) = x(:,1:(n/2));
        x(:,maskP) = x(:,(n/2+1):n);
    endif

endfunction

function res = residuo ( F, h, x , X )
    m = length(x)/2;
    res = X - x - h*F([x(1:m),X((m+1):2*m)]);
endfunction

```

B.10. Runge-Kutta 4 simpléctico

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una condición inicial $\mathbf{x}_0$, un intervalo de integración $[T_1, T_2]$ y un número N

$\mathbf{F} = @(\mathbf{x}) [\dots]; \mathbf{T} = [\cdot, \cdot]; \mathbf{x0} = [\dots]; \mathbf{N} = \cdot,$

la siguiente función aplica el método Runge-Kutta 4 simpléctico

$$\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} \mathbf{F}(\mathbf{K}_j(\mathbf{x}_k)) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^4 b_i \mathbf{F}(\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_k))$$

$\frac{1}{24}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{48}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{48}$	0
$\frac{21+\sqrt{5}}{240}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{25-13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{240}$
$\frac{21-\sqrt{5}}{240}$	$\frac{25+13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{240}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{21-\sqrt{5}}{48}$	$\frac{21+\sqrt{5}}{48}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

con paso $h = \frac{T_2-T_1}{N}$ para resolver el sistema autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Devuelve un *array* con los $t_k, \mathbf{x}_k$.

Aunque en teoría es posible resolver las $\mathbf{K}_i$ (4 ecuaciones) y de ellas obtener $\mathbf{x}_{k+1}$, en la práctica es mejor resolver el sistema de $4 + 1$ ecuaciones con incógnitas $\mathbf{F}(\mathbf{K}_i)$ y $\mathbf{x}_{k+1}$.

Ejemplo (Oscilador armónico).

```
F = @(x) [x(2), -x(1)];
[t,x] = RK4simplectico(F, [1,0], [0,4*pi], 2^8);
```

```

function [t, x] = RK4simplectico(F, x0, T, N)

    % Vector de tiempos y paso temporal
    t = linspace(T(1), T(2), N)';
    h = (T(2)-T(1))/N;

    % Trayectoria
    n = length(x0);
    x = zeros(N,n);

    % Condición inicial
    x(1,:) = x0;

    for k = 1:(N-1)
        FK = zeros(5,n);
        FK(end,:) = x(k,:);
        FK = FK(:);
        FK = fsolve( @(FK)residuo(F,h,x(k,:),FK), FK );
        FK = reconstruye(FK,n);
        x(k+1,:) = FK(end,:);
    endfor

endfunction

function res = residuo ( F, h, x , FK )
    n = length(x);
    FK = reconstruye(FK, n);
    b = [1/12, 5/12, 5/12, 1/12];
    A = [1/24, (-1-sqrt(5))/48, (-1+sqrt(5))/48, 0;
         (21+sqrt(5))/240, 5/24, (25-13*sqrt(5))/120, (-1+sqrt(5))/240;
         (21-sqrt(5))/240, (25+13*sqrt(5))/120, 5/24, (-1-sqrt(5))/240;
         1/12, (21-sqrt(5))/48, (21+sqrt(5))/48, 1/24];
    res = zeros(5,n);
    for j = 1:4
        res(j,:) = FK(j,:) - F(x + h*A(j,:)*FK(1:4,:));
    endfor
    res(5,:) = FK(5,:) - x - h*b*FK(1:4,:);
    res = res(:);
endfunction

% fsolve solamente funciona con vectores nx1 ó 1xn
function A = reconstruye(B,n)
    N = length(B)/n;
    A = zeros(N,n);
    for k = 1:N;
        A(k,:) = B((n*(k-1)) + 1 : (n*(k-1)) + n);
    endfor
endfunction

```


Apéndice C

Planificación y presupuesto

Planificación

Este trabajo lo propuso en octubre de 2021 Cristina Sardón Muñoz, profesora ayudante doctor del Departamento de Matemáticas en la ETSII como oferta de TFG/TFM en Indusnet. Tras contactar con ella, nos reunimos en su despacho del Departamento y planificamos su desarrollo junto con Fernando Jiménez Alburquerque, también ayudante doctor del mismo departamento, que sería el codirector del TFG.

A finales de octubre, mi compañero Pedro García Ferrera y yo comenzamos las clases de Mecánica Analítica impartidas por Fernando. Nos reunimos semanalmente hasta diciembre mientras, de manera paralela, iba estudiando Geometría Diferencial a partir del libro recomendado ([1]).

A la vuelta de vacaciones, ya en febrero, retomamos las clases. Esta vez sobre métodos numéricos y también de la mano del profesor Fernando a partir de los apuntes que preparó para un curso que impartió en un congreso en la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (Argentina).

En marzo comenzaron las clases de Cristina sobre sistemas de Lie y la formulación del modelo de contagio SISf como sistema de Lie a partir de [20].

Durante las clases, Cristina y Fernando mandaban ejercicios para practicar los conceptos vistos. De hecho, buena parte de los integradores utilizados se escribieron como deberes de las clases de integración numérica.

A mediados de abril, ya acabadas las clases teóricas, empecé a escribir el documento. Sin embargo, la mayoría de los capítulos fueron escritos en agosto, durante las vacaciones de verano.

Los primeros días de septiembre los dediqué a corregir el documento y a introducir cambios sugeridos por Cristina.

Presupuesto

Al ser este un trabajo teórico, no ha hecho falta ningún medio material adicional a los libros consultados y el ordenador. El software utilizado es gratuito a excepción de Maple, de Maplesoft, usado para cálculo simbólico gracias a una licencia obtenida en el portal de Software de la UPM. El resto del software ha sido

- GNU Octave para los integradores numéricos y otros algoritmos.
- TeXstudio para la composición del documento en $\text{\LaTeX}$ en mi ordenador personal.
- Overleaf para editar y corregir el documento de forma colaborativa.
- Zoom para videollamadas.

Bibliografía

Geometría Diferencial

- [1] LORING W. TU. *An Introduction to Manifolds*, 2nd edition. Universitext. Springer (2011).
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7400-6>
- [2] ROBERT H. WASSERMAN. *Tensors & Manifolds with Applications to Mechanics and Relativity*. Oxford University Press (1992).
- [3] MARIUS CRAINIC, RUI LOJA FERNANDES, IOAN MĂRCUȚ. *Lectures on Poisson Geometry*. Graduate Studies in Mathematics. Vol. **217**. American Mathematical Society (2021).
<https://doi.org/10.1090/gsm/217>

Mecánica Clásica

- [4] FLORIAN SCHECK. *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, 6th edition. Graduate Texts in Physics. Springer (2018).
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-55490-6>
- [5] RALPH ABRAHAM, JERROLD E. MARSDEN. *Foundations of Mechanics*, 2nd edition. The Benjamin/Cummings Publishing Company (1978).
- [6] JERROLD E. MARSDEN, TUDOR S. RATIU. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd edition. Texts in Applied Mathematics. Vol. **17**. Springer (1999).
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-21792-5>
- [7] VLADIMIR I. ARNOLD. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd edition. Graduate Texts in Mathematics. Vol. **60**. Springer (1989).
<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1>

Métodos Numéricos e Integración Geométrica

- [8] ERNST HAIRER, GERHARD WANNER, SYVERT P. NØRSETT. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. 2nd edition. Springer Series in Computational Mathematics, vol. **8**. Springer (1993).
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>
- [9] ERNST HAIRER, CHRISTIAN LUBICH, GERHARD WANNER. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. 2nd edition. Springer Series in Computational Mathematics. Vol. **31**. Springer (2006).
<https://doi.org/10.1007/3-540-30666-8>

- [10] FERNANDO JIMÉNEZ. *Una introducción a la integración geométrica*. Apuntes de un curso virtual impartido en el Congreso Monteiro 2021.
- [11] JESÚS M. SANZ SERNA. *Symplectic integrators for Hamiltonian problems: an overview*. Acta Numerica. Vol. **1**, pp. 243-286. Cambridge University Press (1992).
<https://doi.org/10.1017/S0962492900002282>
- [12] GENG SUN. *A simple way constructing symplectic Runge-Kutta methods*. Journal of Computational Mathematics. Vol. **18**. No.1, pp. 61-68 (2000).
<http://www.jstor.org/stable/43692831>
- [13] JOHN C. BUTCHER *A history of Runge-Kutta methods*. Applied Numerical Mathematics. Vol. **20**. Issue 3. pp. 247-260 (1996).
[https://doi.org/10.1016/0168-9274\(95\)00108-5](https://doi.org/10.1016/0168-9274(95)00108-5)

Sistemas de Lie

- [14] JAVIER DE LUCAS, CRISTINA SARDÓN. *A Guide to Lie Systems with Compatible Geometric Structures*. World Scientific (2020).
<https://doi.org/10.1142/q0208>
- [15] JOSÉ F. CARIÑENA, JAVIER DE LUCAS. *Lie systems: theory, generalisations and applications*. Dissertationes Mathematicae **479**, Rozprawy Matematyczne. Polish Academy of Sciences (2011).
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1103.4166>
- [16] JOSÉ F. CARIÑENA, JAVIER DE LUCAS, CRISTINA SARDÓN. *Lie-Hamilton systems: theory and applications*. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. Vol. **10**. No 9, 1350047 (2013).
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1211.6991>
- [17] ÁNGEL BALLESTEROS, JOSÉ F. CARIÑENA, FRANCISCO J. HERRANZ, JAVIER DE LUCAS, CRISTINA SARDÓN. *From constants of motion to superposition rules for Lie-Hamilton systems*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. Vol **46**. No 28, 285203 (2013).
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.6272>
- [18] LUIS BLANCO. *Discretización e integración numérica de sistemas de Lie: aplicaciones en teoría de control*. Trabajo Fin de Máster. ETSII-UPM (2021).

Modelo SISf

- [19] GILBERTO N. NAKAMURA, ALEXANDRE S. MARTINEZ. *Hamiltonian dynamics of the SIS epidemic model with stochastic fluctuations*. Scientific reports **9**. Article number 15841 (2019).
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.10786>
- [20] OĞUL ESEN, EDUARDO FERNÁNDEZ-SAIZ, CRISTINA SARDÓN, MARCIN ZAJĄC. *Geometry and solutions of an epidemic SIS model permitting fluctuations and quantization* (2020).
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.02484>