



Universidad Politécnica
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos**



Grado en Matemáticas e Informática

Trabajo Fin de Grado

**Axiomas de separación y el problema de
la metrizableidad**

Autor: Alejandro de Antonio Martín Albo
Tutor: Alfonso Zamora Saiz

Madrid, JUNIO - 2025

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas e Informática

Título: Axiomas de separación y el problema de la metrizabilidad

JUNIO - 2025

Autor: Alejandro de Antonio Martín Albo

Tutor: Alfonso Zamora Saiz

Matemática Aplicada a las tecnologías de la información y las comunicaciones

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Universidad Politécnica de Madrid

Índice general

1. Introducción	3
2. Definiciones y conceptos previos	5
2.1. Definiciones	5
2.2. Espacios producto	11
2.3. Ordinales	14
3. Axiomas de separación	17
3.1. Definición de los axiomas de separación	17
3.2. Espacios topológicos T_0	19
3.3. Espacios topológicos T_1	21
3.4. Espacios topológicos T_2	23
3.5. Espacios topológicos $T_{2\frac{1}{2}}$	27
3.6. Espacios topológicos T_3	30
3.7. Espacios topológicos $T_{3\frac{1}{2}}$	33
3.8. Espacios topológicos T_4	39
3.9. Espacios topológicos T_5	47
3.10 Espacios topológicos T_6	49
3.11 Espacios de Urysohn	53
3.12 Espacios semirregulares	58
3.13 Jerarquía de los axiomas de separación	60
4. El problema de la metrizabilidad	62
4.1. Espacio métrico	62
4.2. Teorema de metrización de Urysohn	66
4.3. Teorema de metrización de Nagata-Smirnov	67
5. Resultados y conclusiones	72
5.1. Resultados	72
5.2. Conclusiones personales	73
5.3. Trabajo futuro	74
5.4. Análisis de impacto	74
5.4.1. Impacto personal	74
5.4.2. Impacto cultural	75
Apéndice	76
A. Axiomas de separación sin T_0 y T_1	76
A.1. Normalidad, regularidad y espacios R_0 y R_1	76

A.2. El cociente de Kolmogorov	81
Bibliografía	83

Índice de Figuras

3.1. Ejemplo 3.3.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_0 y T_1 .	21
3.2. Ejemplo 3.4.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_1 y T_2 .	24
3.3. Abiertos del ejemplo 3.5.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_2 y $T_{2\frac{1}{2}}$.	27
3.4. Clausuras del ejemplo 3.5.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_2 y $T_{2\frac{1}{2}}$.	28
3.5. Ejemplo 3.6.1, contraejemplo a la equivalencia entre axiomas $T_{2\frac{1}{2}}$ y T_3 .	31
3.6. Abiertos de tipo 1, Ejemplo 3.7.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$.	34
3.7. Abiertos de tipo 2, Ejemplo 3.7.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$.	35
3.8. Abiertos de tipo 3, Ejemplo 3.7.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$.	35
3.9. Ejemplo 3.7.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$.	36
3.10 Figura lema de Urysohn.	40
3.11 Ejemplo 3.8.1, contraejemplo a la equivalencia entre axiomas $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_4 .	42
3.12 Ejemplo 3.11.1, contraejemplo a espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ que no es Urysohn.	54
3.13 Placa de Tychonoff, Ejemplo 3.11.3, contraejemplo de espacio T_3 que no es Urysohn.	56
3.14 Unión de dos placas, Ejemplo 3.11.3, contraejemplo de espacio T_3 que no es Urysohn.	56
3.15 Sacacorchos de Tychonoff, Ejemplo 3.11.3, contraejemplo de espacio T_3 que no es Urysohn.	57
3.16 Función que se hace constante, Ejemplo 3.11.3, contraejemplo de espacio T_3 que no es Urysohn.	57
3.17 Jerarquía de axiomas de separación.	60
3.18 Jerarquía de axiomas de separación con axiomas adicionales.	60
4.1. Jerarquía de axiomas de separación con metrizabilidad.	65
4.2. Conjuntos R_n del Teorema de Nagata-Smirnov.	69
4.3. Conjuntos E_n del Teorema de Nagata-Smirnov.	70

Resumen

El presente trabajo aborda los axiomas de separación en topología, presentando sus distintas definiciones y caracterizaciones. Se analizarán los axiomas, mostrando cómo cada uno establece distintos grados de separación entre puntos y conjuntos dentro de un espacio topológico. Estos axiomas son esenciales para comprender la estructura de dichos espacios y su capacidad de distinguir elementos.

Se presentarán ejemplos concretos de espacios topológicos que cumplen cada uno de los axiomas, así como contraejemplos que ilustran situaciones en las que algunos axiomas no se cumplen. Esto permitirá apreciar las diferencias entre los espacios y cómo los axiomas influyen en su comportamiento.

Además, se explorará la relación de los axiomas de separación con el problema de la metrizabilidad y otras propiedades importantes, como la compacidad. Se analizarán las implicaciones teóricas de estos axiomas y sus consecuencias en el estudio de los espacios topológicos.

Palabras clave: topología, espacios topológicos, axiomas de separación, metrizabilidad.

Abstract

This paper addresses the separation axioms in topology, presenting their various definitions and characterizations. The axioms will be analyzed, demonstrating how each establishes different degrees of separation between points and sets within a topological space. These axioms are essential for understanding the structure of such spaces and their ability to distinguish elements.

Concrete examples of topological spaces that satisfy each of the axioms will be provided, as well as counterexamples illustrating situations where some axioms are not satisfied. This will help to highlight the differences between spaces and how the axioms influence their behavior.

Additionally, the relationship between the separation axioms and the problem of metrizability will be explored, along with other important properties such as compactness. The theoretical implications of these axioms and their consequences for the study of topological spaces will also be analyzed.

Keywords: topology, topological spaces, separation axioms, metrizability.

Capítulo 1

Introducción

Desde los inicios de la topología, se ha intentado diferenciar los espacios topológicos según distintas propiedades. Para ello, se desarrollaron múltiples definiciones que facilitan la comprensión del comportamiento de un espacio topológico. Entre ellas, juegan un papel fundamental los **axiomas de separación**, ya que están estrechamente relacionados con propiedades relevantes como la **compacidad** y la **metrizabilidad**, lo que hace que su estudio sea de especial interés. Sin embargo, la formalización de estos axiomas ha sido un proceso complejo y a menudo confuso, pues existían –y aún existen– muchos significados compitiendo por los mismos términos, y muchos términos compitiendo por un mismo concepto.

Antes de llegar a la definición moderna de **espacio topológico** que utilizamos hoy, hubo varios enfoques preliminares que incorporaban algún axioma de separación como parte integral de la definición. Un ejemplo notable es la propuesta de Felix Hausdorff en 1914, equivalente a la definición actual de topología pero **incluyendo** explícitamente el axioma de separación de Hausdorff (axioma **T2**). Por otro lado, el **axioma T1**, conocido como espacio de Fréchet, se identificó previamente en el contexto de espacios métricos y fue estudiado por matemáticos como Maurice Fréchet y Frigyes Riesz. Años más tarde, en 1935, Andrey Kolmogorov introdujo formalmente el **axioma T0**, sentando las bases de una clasificación jerárquica de los espacios según su grado de separación.

Con el desarrollo de la topología general en las décadas siguientes, emergieron axiomas de separación más fuertes, como **T3** (espacios regulares) y **T4** (espacios normales). El uso de la letra **T** para esta nomenclatura proviene del término alemán *Trennung axiom* [1], que significa “axioma de separación”. Cabe señalar que, a partir de T3 en adelante, la nomenclatura de estos axiomas no llegó a ser completamente estandarizada en la literatura, lo cual contribuye a la confusión terminológica mencionada anteriormente. No obstante, esta jerarquía de condiciones ($T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset T_4 \subset \dots$) permitió delimitar cada vez mejor las propiedades requeridas para distinguir puntos y conjuntos de manera adecuada dentro de un espacio topológico.

En paralelo a esta evolución histórica, los **axiomas de separación** fueron cobrando especial relevancia en el estudio de la **metrizabilidad**. Surgió la pregunta central: *¿qué espacios topológicos pueden dotarse de la estructura de un espacio métrico?* Este interrogante, conocido como el **problema de la metrizabilidad**, motivó el análisis de cuáles condiciones (en particular, cuáles axiomas de separación, junto con otras

hipótesis) son necesarias y suficientes para que una topología provenga de una métrica. Dado que todos los **espacios métricos** satisfacen automáticamente todos los axiomas de separación existentes, examinar espacios que cumplen solo algunos de estos axiomas nos proporciona una perspectiva más amplia para abordar dicha pregunta y entender gradualmente qué requerimientos garantizan que un espacio sea metrizable.

En este trabajo nos enfocaremos en el estudio detallado de los **axiomas de separación**, examinando sus distintas definiciones y cómo se interrelacionan en diversos contextos topológicos. En primer lugar, se analizará cada uno de los axiomas de separación más conocidos (como T_0 , T_1 , T_2 o axioma de Hausdorff, T_3 , T_4 , entre otros), proporcionando ejemplos concretos de espacios que los satisfacen, así como contraejemplos que ilustran las sutilezas de su incumplimiento.

Además, se abordará el impacto que estos axiomas tienen sobre propiedades topológicas globales de los espacios, en particular sobre la compacidad, la conexidad y, especialmente, la metrizable. Se hará énfasis en el **teorema de Urysohn**, que caracteriza la metrizable en términos de la existencia de ciertas funciones continuas distintivas, y se presentará finalmente el **teorema de Nagata-Smirnov**, que ofrece un criterio más preciso para determinar cuándo un espacio puede ser dotado de una métrica compatible con su topología.

Por último, conviene describir brevemente la estructura del documento. El **Capítulo 2** introduce las definiciones y conceptos previos necesarios, incluyendo nociones generales de topología, construcciones de **espacios producto** y conceptos de **espacios ordinales**, que utilizaremos a lo largo del trabajo. El **Capítulo 3** se dedica por completo a los axiomas de separación: se presentan sus definiciones formales (desde T_0 hasta T_6 , junto con axiomas intermedios), acompañadas de resultados que exploran las implicaciones lógicas entre ellos y ejemplos representativos de espacios que cumplen o violan cada axioma. A continuación, el **Capítulo 4** aborda directamente el problema de la metrizable, discutiendo los criterios clásicos para que un espacio sea metrizable; en particular, se detalla el **teorema de Urysohn** de metrización y el **teorema de Nagata-Smirnov**, entre otros resultados relevantes. Finalmente, el **Capítulo 5** expone los resultados obtenidos y las conclusiones de este estudio, resaltando las aportaciones finales y señalando posibles líneas futuras de investigación en la intersección entre axiomas de separación y metrizable.

Capítulo 2

Definiciones y conceptos previos

Antes de abordar los axiomas de separación, vamos a dar unas definiciones previas que iremos usando y referenciando a lo largo de este trabajo. Esta sección se dividirá en tres partes: una primera parte de definiciones y resultados generales, una segunda parte de espacios producto, ya que trataremos con un producto arbitrario de espacios topológicos, y una última parte de espacios ordinales, los cuales nos permiten construir contraejemplos muy interesantes. Muchas de estas definiciones, proposiciones y lemas han sido sacados del libro *Topología* de Héctor Barge Yáñez y Alfonso Zamora Saiz [2].

2.1. Definiciones

Empecemos entonces con la definición de topología.

Definición 2.1 Sea X un conjunto, decimos que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una topología si cumple las siguientes propiedades.

1. \emptyset y X pertenecen a τ .
2. La unión arbitraria de elementos de τ está en τ .
3. La intersección finita de elementos de τ está en τ .

Por lo que un espacio topológico es un conjunto X con una topología τ , lo podemos escribir como la pareja (X, τ) . En este trabajo, cuando hablemos de un espacio topológico X nos referiremos a este par.

Los elementos de τ se llaman **abiertos** y sus complementarios se llaman **cerrados**, veamos otro concepto que usaremos mucho, el **entorno**.

Definición 2.2 Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que $N \subset X$ es un entorno de x si existe un abierto U tal que $x \in U \subset N$. En caso de que N sea abierto diremos que es un entorno abierto de x . Denotamos \mathcal{N}_x como el conjunto de entornos de x . Además, llamaremos **entorno cerrado** a la adherencia de un entorno de x .

Alternativamente, debido a que la unión arbitraria de abiertos es abierta y los cerrados son los complementarios de los abiertos, podemos definir topología como una colección

donde la intersección arbitraria de cerrados es cerrada y la unión finita de cerrados es cerrada.

Aprovechamos también para definir unos abiertos que nos serán de utilidad más adelante.

Definición 2.3 Sea U un abierto de un espacio topológico X , decimos que U es un abierto regular si y solo si $U = \overset{\circ}{\bar{U}}$, es decir, si U es igual al interior de su adherencia.

Dadas dos topologías, podemos compararlas viendo si una contiene a otra; formalicemos esto.

Definición 2.4 Sea X un conjunto y dos topologías τ_1, τ_2 en X tal que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, decimos que τ_2 es una expansión de τ_1 .

Dado un espacio topológico X podemos coger un subconjunto de él y fijarnos en este subespacio topológico, definamos específicamente a qué nos referimos con subespacio topológico.

Definición 2.5 Dado un espacio topológico X y un subconjunto $H \subseteq X$, el subespacio topológico de H en X será H junto con la siguiente topología.

$$\tau_H = \{H \cap U : U \in \tau\}$$

Es decir, la topología del subconjunto H es intersecar los abiertos de X con H , llamaremos a estos **abiertos relativos**.

De la definición se desprende que $C \subseteq H$ es un cerrado en H si y solo si $C = H \cap D$ para algún cerrado D de X .

Definición 2.6 Dado un espacio topológico X decimos que un subconjunto $H \subseteq X$ es discreto si su topología relativa τ_H es la discreta.

Una vez ya hemos visto los subespacios topológicos, debemos preguntarnos de qué maneras podemos definir una topología; una de ellas es con una base.

Definición 2.7 Sea X un conjunto, una base \mathcal{B} de una topología τ en X es una colección de elementos de X tales que.

1. Si $x \in X$ entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
2. Si x está en la intersección de dos elementos de la base B_1 y B_2 entonces existe un tercer elemento de la base B_3 tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si \mathcal{B} satisface estas condiciones, definimos la topología τ generada por \mathcal{B} de la siguiente manera: Un subconjunto U de X será abierto si, para cada punto $x \in U$ existe un elemento de la base B tal que $x \in B \subseteq U$.

Los elementos de la topología generada por una base se pueden escribir como uniones arbitrarias de elementos de la base, por lo que, ¿qué pasaría si cogemos una intersección finita de estos elementos y hacemos uniones arbitrarias de ellos? Esto nos lleva a la definición de subbase.

Definición 2.8 Una subbase \mathcal{S} para una topología en un conjunto X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X . La topología generada por la subbase \mathcal{S} es la colección τ de la unión de todas las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} .

Definiciones y conceptos previos

Las bases y subbases en topología son de gran importancia y vamos a seguir viendo resultados de ellas, pero antes necesitamos dar una definición fundamental sobre aplicaciones entre espacios topológicos.

Definición 2.9 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos X e Y , diremos que f es continua si dado un abierto U' de Y entonces $f^{-1}(U')$ es un abierto de X .

Siguiendo estudiando las bases, vamos a ver un resultado sobre ellas, pero antes, unos conceptos previos.

Definición 2.10 Dada una familia de funciones continuas $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ con $f_i : X \rightarrow Y_i$, diremos que separa puntos de los cerrados si para todo $x \in X$ y un cerrado $C \subseteq X$ tal que $x \notin C$, entonces existe un índice $i \in I$ tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i(C)}$.

Siguiendo con el concepto de separación, cuando hablemos de que dos conjuntos están separados nos referiremos a esto.

Definición 2.11 Decimos que dos subconjuntos A, B están separados si $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$.

Se puede comprobar fácilmente que la identidad entre $I : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ con $\tau_1 \subseteq \tau_2$ es una biyección cerrada; esto nos permitirá ver que, bajo una expansión, se conservan ciertos axiomas de separación.

Proposición 2.1.1 Sea X un espacio topológico, $\langle Y_i \rangle_{i \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos, $\langle f_i : X \rightarrow Y_i \rangle_{i \in I}$ una familia de funciones continuas que separa puntos de cerrados. Entonces, $\mathcal{B} = \{f_i^{-1}(V) : i \in I, V \in \tau_i\}$ es una base de X .

Demostración 2.1.1 Para demostrar esto vamos a ver que para cada $x \in X$ y un $U \in \tau$ tal que $x \in U$ entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$, por ende \mathcal{B} sería una base.

Sean $x \in U$ un punto y un abierto tales que $x \in U$, por definición $X \setminus U$ es un cerrado y también $x \notin X \setminus U$, por lo que al ser $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ una familia que separa puntos de cerrados, existe un índice $i \in I$ tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i(X \setminus U)}$, es decir que $f_i(x) \in Y_i \setminus \overline{f_i(X \setminus U)}$, aplicando la preimagen entonces $x \in f_i^{-1}(Y_i \setminus \overline{f_i(X \setminus U)})$ que pertenece a \mathcal{B} por ser preimagen de un abierto. Veamos que está contenido en U .

Sea $y \in f_i^{-1}(Y_i \setminus \overline{f_i(X \setminus U)})$, entonces $f_i(y) \in Y_i \setminus \overline{f_i(X \setminus U)}$ por lo que $f_i(y) \notin \overline{f_i(X \setminus U)}$ luego $f_i(y) \notin f_i(X \setminus U)$, es decir que $y \notin X \setminus U$ y por ende $y \in U$, como conclusión $f_i^{-1}(Y_i \setminus \overline{f_i(X \setminus U)}) \subseteq U$. Por lo que efectivamente \mathcal{B} es una base de X . ■

Otro elemento clave de este trabajo es el concepto del homeomorfismo, pues topológicamente, si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces son topológicamente iguales. Empecemos definiendo qué es un homeomorfismo.

Definición 2.12 Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y tiene inversa continua.

Si f es biyectiva, que la inversa sea continua es equivalente a que f sea abierta (que la imagen de un abierto es un abierto) o que sea cerrada (que la imagen de un cerrado es cerrado).

De esta definición se desprende inmediatamente que si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también lo es. Veamos un resultado de los homeomorfismos.

Proposición 2.1.2 Sean X e Y dos espacios topológicos con $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, siendo $H \subseteq X$ un subconjunto. Tenemos que.

$$f(\overline{H}) = \overline{f(H)}$$

Demostración 2.1.2 Como f es continua se cumple que $f(\overline{H}) \subseteq \overline{f(H)}$, veamos ahora que $f(\overline{H}) \supseteq \overline{f(H)}$. Sea $x \in \overline{f(H)} \subseteq Y$, esto implica que $f^{-1}(x) \in f^{-1}(\overline{f(H)}) \subseteq X$, como f^{-1} es continua esto significa que.

$$f^{-1}(x) \in f^{-1}(\overline{f(H)}) \subseteq \overline{f^{-1}(f(H))} = \overline{H}$$

Tomando f por ende tenemos que $x \in f(\overline{H})$. Por ende $f(\overline{H}) = \overline{f(H)}$. ■

Siguiendo con los resultados de homeomorfismos, recordemos qué es un embebimiento.

Definición 2.13 Sean X, Y dos espacios topológicos con $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre ellos, decimos que f es un embebimiento de X a Y si X es homeomorfo a $f(X)$ con la topología de subespacio.

Pasamos ahora a definir unos tipos de conjuntos que no tienen que ser ni abiertos ni cerrados, pero que cobrarán suma importancia a lo largo del trabajo.

Definición 2.14 Un conjunto F_σ es un conjunto que puede representarse como la unión de un conjunto numerable de cerrados ¹.

Definición 2.15 Un conjunto G_δ es un conjunto que puede representarse como la intersección de un conjunto numerable de abiertos ².

Estos conjuntos desempeñan un papel fundamental en axiomas de separación más complejos. De manera inmediata tenemos que todo cerrado será un conjunto F_σ , aunque no todo conjunto F_σ será cerrado, por ende, los conjuntos G_δ tampoco tienen por qué ser abiertos.

Vamos a dar una proposición que relaciona estas dos definiciones.

Proposición 2.1.3 Sea X un espacio topológico y H un conjunto F_σ en X , entonces su complementario $X \setminus H$ es un conjunto G_δ de X .

Demostración 2.1.3 Como H es un conjunto F_σ , entonces es unión de cerrados, por ende.

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Usando la ley de Morgan:

$$X \setminus H = X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus C_n)$$

Por ende $X \setminus H$ es intersección de abiertos, un conjunto G_δ . ■

¹El término F_σ proviene de la letra F , que hace referencia a *fermé*, la palabra francesa para **cerrado**, y la letra σ , la **s** griega, que significa *somme*, es decir, suma en francés. Esto refleja que un conjunto F_σ es la **unión** de un número numerable de conjuntos cerrados.

²De manera similar, el término G_δ utiliza la letra G , que proviene de **Gebiet**, la palabra alemana para **abiertos**, y la letra δ , la **d** griega, que significa *Durchschnitt*, que en alemán se traduce como intersección. Así, un conjunto G_δ es la **intersección** de un número numerable de conjuntos abiertos.

Definiciones y conceptos previos

Además, la unión de dos conjuntos F_σ es un conjunto F_σ , pues la unión de dos conjuntos numerables es numerable.

Ahora vamos a dar un resultado importante para ver cuándo un conjunto es numerable, esto nos ayudará a caracterizar los conjuntos G_δ y F_σ . Para esto vamos a recordar qué era un espacio separable y la noción de subespacio denso.

Definición 2.16 Dado un espacio topológico X , decimos que un subconjunto H de X es denso si y solo si $\overline{H} = X$. Equivalentemente, dado un espacio topológico X , decimos que un subconjunto H de X es denso si la intersección de H con todo abierto no vacío es no nula.

Definición 2.17 Un espacio topológico X es separable si y solo si existe un subconjunto numerable D que sea denso en X .

Definición 2.18 Decimos que un espacio topológico X satisface la condición de cadena numerable si y solo si toda familia de abiertos disjuntos dos a dos es numerable.

Veamos qué espacios satisfacen esta condición.

Proposición 2.1.4 Sea X un espacio topológico separable, entonces X satisface la condición de cadena numerable.

Demostración 2.1.4 Para demostrar esto vamos a probar que todo conjunto de abiertos disjuntos de X dos a dos es numerable.

Como X es separable tenemos que existe un subconjunto numerable que es denso, sea este $D = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, consideramos una familia de abiertos no vacíos $\{U_j\}_{j \in J}$ tales que sean disjuntos dos a dos.

Como D era denso tenemos que para todo U_j existe un y_{n_j} tal que $y_{n_j} \in U_j$, esto nos permite definir la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : J &\rightarrow \mathbb{N} \\ j &\rightarrow f(j) = n_j \end{aligned}$$

veamos que es inyectiva y sobreyectiva:

- **Inyectiva:** supongamos que existen $i, j \in J$ tales que $f(i) = f(j)$, esto implica que $n_i = n_j$ y por ende $y_{n_i} \in U_i \cap U_j$, pero esto no puede ser ya que los abiertos son disjuntos, por ende es inyectiva.
- **Sobreyectiva:** es sobreyectiva por la definición de D , para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un y_n el cual estará contenido en un U_j , por lo que $f(j) = n$.

Al haber encontrado una aplicación biyectiva de J a los naturales tenemos que $\{U_j\}_{j \in J}$ es un conjunto numerable y por ende cumple la condición de cadena numerable. ■

Veamos ahora unos conjuntos también muy útiles, los que son preimagen del 0 en una aplicación que nos lleva al $[0, 1]$.

Definición 2.19 Un subconjunto H de un espacio topológico X es un 0-conjunto si existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $H = f^{-1}(0)$.

Definición 2.20 Un subconjunto H de un espacio topológico X es un cocero conjunto si es el complemento de un 0-conjunto, es decir, si existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $H = f^{-1}((0, 1])$.

Con esto veamos una de las funciones que más usaremos durante este trabajo.

Definición 2.21 Una **función de Urysohn** para dos subconjuntos disjuntos A y B de X es una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$.

Sea P una propiedad de espacios topológicos, definamos qué significa ser hereditaria y qué significa tener una propiedad P hereditariamente (P-hereditario).

Definición 2.22 Decimos que una propiedad P en topología es **hereditaria** si ocurre que cuando un espacio topológico X satisface la propiedad P , todo subespacio topológico Y de X satisface también P .

Decimos que un espacio topológico X es P -hereditario si todo subespacio suyo tiene la propiedad P , incluido el propio X .

Nótese que el hecho de que un espacio X sea P -hereditario no implica que P sea una propiedad hereditaria. Por ejemplo, como se demostrará, ser T_4 o normal no es propiedad hereditaria pero, sin embargo, un espacio que sea T_4 en el cual se cumple que todo subespacio es cerrado es T_4 -hereditario, como por ejemplo un espacio discreto (esto se demostrará en la Proposición 3.8.6).

Tras ver estos conjuntos y la función de Urysohn, veamos qué es un punto límite.

Definición 2.23 Dado un espacio topológico X y un punto $x \in X$. Decimos que un punto $y \in X, y \neq x$ es un punto límite (o de acumulación) de x si y solo si todo entorno abierto de y contiene a x .

Por último, recordemos qué es ser compacto; para esto, definimos recubrimiento y subrecubrimiento.

Definición 2.24 Sea X un espacio topológico, diremos que una colección $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un recubrimiento si $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, si U_λ es abierto para todo $\lambda \in \Lambda$ diremos que \mathcal{U} es un recubrimiento abierto de X . Diremos que la colección $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda'}$ es un subrecubrimiento de \mathcal{U} si \mathcal{U}' es a su vez un recubrimiento de X y $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$

Definición 2.25 Sea X un espacio topológico. Diremos que X es compacto si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Veamos cómo se relaciona esto con los subespacios.

Proposición 2.1.5 Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Demostración 2.1.5 Sea X un espacio topológico compacto y H un subespacio cerrado, sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de H . Debemos demostrar que tiene un subrecubrimiento finito.

Tenemos que H es cerrado en X por lo que $X \setminus H$ es abierto, lo podemos añadir al recubrimiento y obtenemos un nuevo recubrimiento $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cup X \setminus H$ que es un recubrimiento abierto de X . Como X es compacto, tenemos que admite un subrecubrimiento finito $\mathcal{V} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}, X \setminus H\}$ y por tanto $\mathcal{U}' = \{U_{\lambda_n}\}_{n=1, \dots, n}$ es un subrecubrimiento finito de \mathcal{U} , por lo que H es compacto. ■

Siguiendo con los subrecubrimientos, podemos pedirles una condición más débil; esto da paso a los espacios de Lindelöf.

Definición 2.26 Un espacio topológico X es un espacio de Lindelöf si y solo si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento numerable.

Definiciones y conceptos previos

Estos se relacionarán con lo que llamaremos **el segundo axioma de la numerabilidad**, definamos entonces qué es un espacio segundo-numerable.

Definición 2.27 *Un espacio topológico X se dice que es segundo-numerable o que satisface el segundo axioma de la numerabilidad si y solo si el espacio topológico tiene una base numerable.*

Veamos entonces que un espacio segundo-numerable es un espacio de Lindelöf.

Proposición 2.1.6 *Sea X un espacio segundo-numerable, entonces X es también un espacio de Lindelöf.*

Demostración 2.1.6 *Sea X un espacio segundo-numerable, por definición tiene una base numerable \mathcal{B} . Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de X , por lo que cada elemento de \mathcal{U} es una unión numerable de subconjuntos de \mathcal{B} , por ende X también es unión numerable de subconjuntos de \mathcal{B} , al ser cualquier recubrimiento un recubrimiento numerable se tiene que el espacio es Lindelöf. ■*

2.2. Espacios producto

En este TFG trabajaremos con espacios producto arbitrarios, es decir, el producto cartesiano de una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ con I un indexado arbitrario. Por esto, es preciso explicar en más detalle la topología de estos espacios.

Una manera de definir una topología en el producto es coger la base de todos los conjuntos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_n \times \dots$ con $U_i \in \tau_i \forall i \in I$. Este conjunto será una base y define una topología en el producto, llamaremos a esta la **topología de cajas**. Otra manera de proceder es coger la subbase (ver Definición 2.8) formada por todos los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$. Estas dos topologías coinciden en el caso finito, pero difieren en el caso infinito; pero antes de ver estas diferencias debemos dar unos conceptos previos.

Definición 2.28 *Sea I un conjunto de índices, dado un conjunto X definimos una I -tupla de elementos de X como una función $x : I \rightarrow X$ tal que si $\alpha \in I$ decimos que $x(\alpha)$ es la coordenada α de x . En vez de usar $x(\alpha)$ simplemente usaremos la notación x_α y nos referiremos a x como $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.*

Definición 2.29 *Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indexada de conjuntos, sea $X = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$, el producto cartesiano de esta familia denotado como $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ es el conjunto de todas las I -tuplas $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ de elementos de X tales que $x_\alpha \in A_\alpha$. De manera general notaremos el producto simplemente por $\prod A_\alpha$ y un elemento de él como (x_α)*

Una vez ya sabemos cómo es el producto y sus elementos, podemos pasar a estudiar qué topología podemos definir en él.

Definición 2.30 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos; tomaremos como base de $\prod X_\alpha$ la colección de todos los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ con $U_\alpha \in \tau_\alpha \forall \alpha \in I$. Llamaremos a esta base la topología de cajas.*

Para la otra topología vamos a definir qué es proyectar a un índice.

Definición 2.31 Definimos la proyección de X sobre un X_β como la función:

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\beta \quad ; \quad \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in I}) = x_\beta$$

Con esto podemos definir una subbase.

Definición 2.32 Definimos la subbase $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ donde $S_\alpha = \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \in \tau_\alpha\}$. Llamaremos a la topología generada por la subbase S (ver Definición 2.8) la topología producto.

Los abiertos de la topología de cajas son de la forma $\prod U_\alpha$ con U_α abierto de X_α , pero la topología producto está formada por los abiertos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es un abierto de X_α y $X_\alpha = U_\alpha$ excepto para una cantidad finita de valores de α , por lo que la topología producto es menos fina que la topología de cajas. Cuando hablemos de la topología de un espacio producto asumiremos que estamos hablando de la topología producto, a menos que se especifique lo contrario.

Ahora podemos dar un resultado importante de la topología producto.

Proposición 2.2.1 Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod X_\alpha$ el espacio producto de todos ellos, y sea este no vacío. Entonces, para cada $i \in I$ existe un subespacio $Y_i \subseteq X$ que es homeomorfo a X_i , más específicamente, para cualquier $z \in X$, sea $Y_i = \{x \in X : \forall j \in I \setminus \{i\} : x_j = z_j\}$ un subespacio topológico con su topología relativa v_i . Entonces, Y_i es homeomorfo a X_i y el homeomorfismo es la restricción a Y_i de la proyección:

$$\pi_i : X \rightarrow X_i \quad ; \quad (x_j)_{j \in I} \rightarrow \pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$$

Demostración 2.2.1 Veamos que $p_i = \pi_i|_{Y_i}$ efectivamente es un homeomorfismo:

1. p_i es inyectiva: Sean $x, y \in Y_i$ entonces se tiene que $\forall j \in I \setminus \{i\} : x_j = z_j = y_j$, entonces si $p_i(x) = p_i(y)$ se tiene que $x_i = y_i$ por lo que $x = y$, por lo que las imágenes son iguales si y solo si los puntos son los mismos, por ende es inyectiva.
2. p_i es sobreyectiva: Sea $x \in X_i$, definimos un $y \in Y_i$ tal que $\forall j \in I \setminus \{i\}$ ponemos $y_j = z_j$ e $y_i = x$. Se tiene que $p_i(y) = y_i = x$, por ende p_i es sobreyectiva.
3. p_i es continua: Veamos que la preimagen de un abierto de τ_i es un abierto de v_i , sea $V \in \tau_i$, definimos $U = \prod_{i \in I} U_i$ donde: $U_j = \begin{cases} X_j & j \neq i \\ V & j = i \end{cases}$. Se tiene que U es un abierto en (X, τ) , y veamos que $p_i^{-1}(V) = U \cap Y_i$

$$\begin{aligned} x \in p_i^{-1}(V) &\iff p_i(x) \in V \\ &\iff x \in U && \text{Definición de } U \\ &\iff x \in U \cap Y_i && \text{ya que } x \in Y_i \end{aligned}$$

Como $U \cap Y_i$ es un abierto relativo de v_i entonces $p_i^{-1}(V)$ es abierto y por ende la aplicación es continua.

4. p_i es abierta: Vamos a demostrar que π_i es abierta, por lo que p_i , que es la restricción a Y_i también lo será. Sea $U \in \tau$ con τ la topología producto (ver Definición 2.32), por definición tenemos que: $U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k=1}^{n_j} \pi_{i_{k,j}}^{-1}(U_{k,j})$. Vamos a ver cómo son los abiertos $\pi_i^{-1}(U_{k,j})$. Como estamos usando la topología producto serán de la forma $U_1 \times \dots \times U_n \times \dots$ con todos los $U_i = X_i$ excepto una cantidad finita, vamos

Definiciones y conceptos previos

a definir unos abiertos que hagan precisamente esto, es decir, $\forall i' \in I, V_{i',k,j} =$
 $\begin{cases} U_{k,j} & : i' = i_{k,j} \\ X_{i'} & : i' \neq i_{k,j} \end{cases}$. Por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \pi_i(U) &= \bigcup_{j \in J} \pi_i \left(\bigcap_{k=1}^{n_j} \pi_{i_{k,j}}^{-1}(U_{k,j}) \right) \text{ (la imagen se distribuye bajo la unión)} \\ &= \bigcup_{j \in J} \pi_i \left(\bigcap_{k=1}^{n_j} \prod_{i' \in I} V_{i',k,j} \right) \text{ (sustituimos la inversa de la proyección)} \\ &= \bigcup_{j \in J} \pi_i \left(\prod_{i' \in I} \bigcap_{k=1}^{n_j} V_{i',k,j} \right) \text{ (sale fuera el producto cartesiano)} \\ &= \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k=1}^{n_j} V_{i,k,j} \text{ (por la definición de proyección)} \end{aligned}$$

Y como $\bigcup_{j \in J} \bigcap_{k=1}^{n_j} V_{i,k,j}$ es la unión de intersecciones finita de abiertos, es abierto, por lo que π_i es abierto. ■

También vamos a dar un resultado de productos, el cual nos será útil.

Proposición 2.2.2 Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos y sea $X = \prod X_\alpha$ el espacio producto con la topología producto, supongamos que tenemos una familia de subconjuntos $\{C_i\}_{i \in I}$ donde cada C_i es un cerrado de X_i ; entonces $C = \prod C_i$ es un cerrado en el espacio producto.

Demostración 2.2.2 Tenemos que:

$$\prod_{i \in I} C_i = \{x \in X : \forall i \in I, x_i \in C_i\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in X : x_i \in C_i\}$$

Y como la intersección arbitraria de cerrados es cerrada por la Proposición 2.1 bastaría con probar que $\{x \in X : x_i \in C_i\}$ es un cerrado de X . Fijando un $j \in I$, veamos cómo es:

$$X \setminus \{x \in X : x_j \in C_j\} = \{x \in X : x_j \in (X_j \setminus C_j)\} = \pi_j^{-1}(S_j \setminus C_j)$$

Al ser C_j cerrado, entonces $X_j \setminus C_j$ es abierto y por la definición de la topología producto (ver Definición 2.32) $\pi_j^{-1}(X_j \setminus C_j)$ es un abierto de la topología. Por lo que el producto de cerrados es cerrado. ■

Demos un resultado de embebimientos que nos ayudará en el futuro.

Definición 2.33 Decimos que una familia $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ separa puntos si, dados dos puntos $x \neq y$, existe un índice $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Proposición 2.2.3 Sea X un espacio topológico, $\langle Y_i \rangle_{i \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos, $\langle f_i : X \rightarrow Y_i \rangle_{i \in I}$ una familia de funciones continuas, $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ el espacio producto y $f : X \rightarrow Y$ la aplicación inducida por $\langle f_i \rangle_{i \in I}$, es decir $f(x) = \langle f_i(x) \rangle_{i \in I}$, entonces f es un embebimiento si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes.

1. La topología generada por $S = \{f_i^{-1}(U) : i \in I, U \in \tau_i\}$ es la misma que la topología inicial.

2. La familia $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ separa puntos.

Demostración 2.2.3 Supongamos que f es un embebimiento, veamos que se cumplen las dos condiciones.

1. Sea $f(X)$ la imagen de f y sea $\tau_{f(X)}$ la topología del subespacio $f(X)$, por definición f restringido a la imagen es un homeomorfismo entre X y $f(X)$, la topología del subespacio será restringir las proyecciones a este, por lo que la topología del subespacio es $\langle \pi_i^{-1}|_{f(X)} : X \rightarrow Y_i \rangle_{i \in I}$.

Al ser esta topología homeomorfa a la inicial tenemos que la topología inicial es entonces $\langle \pi_i^{-1}|_{f(X)} \circ f|_{f(X)} : X \rightarrow Y_i \rangle_{i \in I}$, simplificando esto tenemos que $\pi_i^{-1}|_{f(X)} \circ f|_{f(X)} = f_i$, por lo que las $f^{-1}(U)$ forman una base de la topología inicial.

2. Al ser f un embebimiento entonces es inyectiva, por lo que dado dos puntos distintos $f(x) \neq f(y)$ por lo que habrá algún índice $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$, por ende separa puntos.

Veamos el contrario, supongamos que se cumple 1. y 2., demostremos que f es un embebimiento.

Primeramente veamos rápidamente que f es inyectiva, esto se cumple pues separa puntos es decir que dado dos puntos distintos $f(x) \neq f(y)$, por lo que f es inyectiva, restringiendo a la imagen es sobreyectiva por lo que $f|_{f(X)}$ es biyectiva. Y tenemos que será continua pues cada f_i era continua, veamos ahora que f es abierta.

Tenemos que $S = \{f_i^{-1}(V) : i \in I, V \in \tau_i\}$ forma la topología inicial, veamos que las imágenes de esto son efectivamente abiertos.

$$f(f_i^{-1}(V)) = f((\pi_i^{-1} \circ f)^{-1}(V)) = f(f^{-1}(\pi_i^{-1}(V))) = \pi_i^{-1} \cap f(X)$$

Tenemos que son los abiertos del espacio de llegada, por ende $f|_{f(X)}$ es una aplicación abierta y entonces es un embebimiento. ■

Por último, cabe mencionar que el producto de espacios compactos es compacto; la demostración para una cantidad finita se puede encontrar en [2, Teorema VI.28]. Para un producto arbitrario de espacios compactos, este es el enunciado del Teorema de Tychonoff, el cual es equivalente al axioma de elección, [3].

Proposición 2.2.4 (Tychonoff) [4, Capítulo 5] El producto de espacios compactos es compacto en la topología producto.

2.3. Ordinales

Para dar algunos contraejemplos se utiliza la topología del orden, en la cual se usan ordinales, por lo que debemos entender qué son y dar dos ordinales de especial importancia. De manera intuitiva, un ordinal es un representante del tipo de orden de un conjunto bien ordenado.³ Debemos recalcar que varios conjuntos con el mismo cardinal pueden estar bien ordenados de maneras no isomorfas. Vamos a dar la definición de Von Neumann de ordinal, pero antes veamos unas definiciones previas.

³Todo conjunto puede ser bien ordenado, es decir, admite una relación de orden total en la que cada subconjunto no vacío tiene un mínimo. Esto se conoce como el teorema de Zermelo y es equivalente al axioma de elección. Por tanto, todo conjunto puede asociarse a un ordinal.

Definiciones y conceptos previos

Definición 2.34 Sea S un conjunto. Decimos que S es transitivo si se satisface que, si $x \in S$ entonces $x \subseteq S$.

Recordemos que una relación en un conjunto S es simplemente un subconjunto de $S \times S$.

Definición 2.35 Sea S un conjunto transitivo. Definimos la relación de pertenencia en S , denotada por (S, ϵ_S) , como $\epsilon_S = \{(x, y) \in S \times S : x \in y\}$.

Definición 2.36 Dado un conjunto S y una relación de orden estricta \prec sobre S , decimos que \prec estrictamente bien ordena a S si y solo si todo subconjunto no vacío de S tiene un elemento mínimo.

Definición 2.37 Un conjunto α es un ordinal si y solo si:

- α es transitivo.
- La relación ϵ_α estrictamente bien ordena a α .

Vamos a dar unos ejemplos de qué conjuntos serían ordinales bajo esta relación y cómo se entienden sus representantes:

- El conjunto $\{\} = \emptyset$ se representa por 0.
- El conjunto $\{0\} = \{\emptyset\}$ se representa por 1.
- El conjunto $\{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ se representa por 2.
- El conjunto $\{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ se representa por 3.

Con la noción de ordinal como un conjunto nos hace más fácil entender cómo son los ordinales infinitos, pero antes vamos a definir una relación de orden entre ellos.

Definición 2.38 Dado dos ordinales α y β decimos que $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\alpha \subseteq \beta$, salvo biyección.

Ahora vamos a clasificar los ordinales según cómo es su conjunto.

Definición 2.39 Sea α un ordinal, diremos que α es transfinito si α es un conjunto infinito. De entre los ordinales transfinitos, diremos que α es numerable si α es un conjunto numerable y que es no numerable si α es un conjunto no numerable.

Pero también podemos clasificar de otra forma los ordinales.

Definición 2.40 Sea α un ordinal, diremos que:

- Es un ordinal sucesor si se puede escribir como $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, siendo β otro ordinal
- Es un ordinal límite si no es ni el ordinal cero ni es un ordinal sucesor

Con esta introducción a ordinales podemos definir dos ordinales de gran importancia para este trabajo.

Definición 2.41 Decimos que ω es el primer ordinal transfinito si es el ordinal más pequeño (en el sentido de la relación 2.38) que es transfinito. Decimos que ω_1 es el primer ordinal no numerable si es el ordinal más pequeño (en el sentido de la relación 2.38) que es no numerable. Obsérvese que ω y ω_1 son ordinales límite,

Definamos ahora la topología que se le da a estos conjuntos, la topología del orden.

Definición 2.42 Sea (S, \preceq) un conjunto totalmente ordenado y sea $a \in S$. La topología del orden está generada por la base de rayos abiertos X , los elementos de X son de la forma:

$$\{x \in S : a \prec x, a \neq x\} \quad , \quad \{x \in S : x \prec a, x \neq a\}$$

Veamos qué es un intervalo abierto o cerrado cuando hablamos de ordinales. Dado un ordinal Ω llamamos intervalo abierto a $[0, \Omega)$, el cual es el conjunto de todos los ordinales estrictamente menores a Ω y es un abierto de la topología del orden. De la misma manera llamamos intervalo cerrado a $[0, \Omega]$, el cual es el conjunto de todos los ordinales menores o iguales a Ω y es un cerrado de la topología del orden.

Definición 2.43 Sea Γ un ordinal límite. El espacio ordinal cerrado en Γ es el conjunto $[0, \Gamma]$ de todos los ordinales menores o iguales a Γ con la topología del orden. El espacio ordinal es un cerrado de la topología del orden.

Por último, veamos un resultado de compacidad de estos espacios.

Teorema 2.3.1 Para todo ordinal límite Γ el espacio $[0, \Gamma]$ es compacto

Demostración 2.3.1 Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de $[0, \Gamma]$, definimos el conjunto:

$$S = \{a \in [0, \Gamma] : [a, \Gamma] \text{ está cubierta por un número finito de abiertos de } \mathcal{U}\}$$

Tenemos que el punto $[\Gamma, \Gamma] = \{\Gamma\}$ estará cubierto por un número de abiertos de \mathcal{U} por lo que $\Gamma \in S$ y por ende $S \neq \emptyset$. Como $[0, \Gamma]$ está bien ordenado, S tiene un elemento mínimo, sea este elemento m .

Si $m = 0$ hemos terminado ya que entonces $[0, \Gamma]$ estará cubierto por un número finito de abiertos, supongamos que $m \neq 0$, es decir tenemos un intervalo $[m, \Gamma]$ tal que:

$$[m, \Gamma] = U_1 \cup \dots \cup U_n$$

Si m es un ordinal sucesor (Definición 2.40) lo podemos escribir como $m = a \cup \{a\}$ con $a \in [0, \Gamma]$, por lo que cogiendo un abierto tal que $a \in U \in \mathcal{U}$ tenemos que:

$$[a, \Gamma] = \{a\} \cup [m, \Gamma] = U \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$$

por lo que $a \in S$, lo que contradice que m sea el mínimo, por este camino llegaríamos a que $m = 0$ y por ende el espacio es compacto.

Sea entonces m un ordinal límite, tenemos que $\exists U \in \mathcal{U}$ tal que $m \in U$ y este contendrá un intervalo de la forma (a, b) con $a < m < b$. Cojamos un $r \in (a, m)$ y definimos el ordinal sucesor $\beta = r \cup \{r\}$, tenemos que:

$$[\beta, \Gamma] = \{\beta\} \cup [m, \Gamma] = U \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$$

por lo que $\beta \in S$ y entonces m no sea el mínimo, contradicción. Por ende tenemos que $[0, \Gamma] \in S$ y por ende el espacio es compacto. ■

Capítulo 3

Axiomas de separación

En topología es crucial estudiar los abiertos alrededor de un punto, es decir, sus entornos. En particular, es útil analizar cómo se relacionan estos abiertos con los de otros puntos, ya que esto nos permite entender hasta qué punto se pueden “separar” al aplicar condiciones cada vez más estrictas que se relacionen entre sí. Esto nos ayuda a precisar hasta qué punto podemos distinguir entre puntos: por ejemplo, puede ocurrir que, dados dos puntos, exista un abierto que contenga a uno pero no al otro, aunque no necesariamente puedan separarse mediante abiertos disjuntos. Así, no podríamos diferenciar los puntos mediante abiertos disjuntos, pero sí a través de abiertos en general. Este estudio es clave, ya que, como se demostrará, un espacio métrico cumple con todos los axiomas de separación, lo cual lo relaciona fuertemente con la metrizable del espacio y aporta propiedades topológicas significativas.

3.1. Definición de los axiomas de separación

La noción de separación en topología busca capturar hasta qué punto es posible distinguir puntos o conjuntos mediante abiertos. Para ello se han introducido diversos axiomas, conocidos como axiomas de separación, que establecen condiciones cada vez más estrictas sobre la estructura del espacio topológico. Estos axiomas no solo permiten clasificar los espacios en función de su grado de separación, sino que también tienen implicaciones profundas en otras propiedades topológicas como la continuidad de funciones, la existencia de funciones características o el comportamiento de los cerrados. A lo largo de este capítulo trabajaremos con nueve de estos axiomas, que van desde el más débil (T_0) hasta el más fuerte (T_6), y que organizan de forma jerárquica distintos niveles de distinción entre espacios topológicos. Presentamos a continuación sus definiciones precisas.

Definición 3.1 Sea X un espacio topológico, decimos que es:

1. T_0 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un abierto U tal que: $x \in U, y \notin U$ o $x \in U, y \notin U$.
2. T_1 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen dos abiertos $U, V \in \tau$ que contienen a x e y respectivamente pero no al otro punto.

3.1. Definición de los axiomas de separación

3. T_2 si para cada par de puntos distintos x, y existen dos abiertos U, V **disjuntos** que contienen a x e y respectivamente.
4. $T_{2\frac{1}{2}}$ si para cada par de puntos distintos x, y existen dos abiertos U, V que contienen a x e y respectivamente tal que $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
5. T_3 si el espacio es T_0 y dado un cerrado C y un punto $y \notin C$, existen dos abiertos U, V disjuntos tal que $C \subset U, y \in V$.
6. $T_{3\frac{1}{2}}$ si el espacio es T_0 y para todo par C un subconjunto cerrado y para todo punto y con $y \notin C$ existe una función de Urysohn (ver Definición 2.21) entre ellos.
7. T_4 si el espacio es T_1 y dados C, D cerrados disjuntos existen dos abiertos disjuntos U, V tal que $C \subset U$ y $D \subset V$.
8. T_5 si el espacio es T_1 y para cada dos conjuntos separados A y B (es decir, $A \cap \bar{B} = \emptyset = \bar{A} \cap B$, ver Definición 2.11) existen dos abiertos disjuntos U, V tal que $A \subset U, B \subset V$.
9. T_6 si el espacio es T_4 (luego es T_1) y se cumple que todo cerrado es G_δ (ver Definición 2.15).

Los espacios T_0 también se llaman espacios de **Kolmogorov**. De igual modo, los espacios T_1 se llaman de **Fréchet**, los espacios T_2 se llaman de **Hausdorff** y los $T_{2\frac{1}{2}}$ se llaman **completamente Hausdorff**.

Cuando queremos saber qué tan separados están dos puntos, buscamos entornos abiertos de los puntos que cumplan ciertas propiedades que los "separan". Sin embargo, también podemos ver esta separación usando una función continua que distinga entre ellos, lo que da lugar a la idea de función de Urysohn (Definición 2.21) y será un elemento fundamental para los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_4 .

De manera trivial se puede ver la cadena de implicaciones $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$, sin embargo para que $T_3 \Rightarrow T_2$ necesitamos asumir que el espacio también sea T_0 . En muchos textos se define **espacio regular** como un espacio que es T_3 y T_0 , sin embargo otros llaman T_3 a un espacio que es T_0 y cumple la condición de regularidad. De la misma manera se suele definir un **espacio normal** (completamente y perfectamente normal) como un espacio que es T_1 y T_4 (o T_5 o T_6), sin embargo otros llaman T_4 (T_5, T_6) a un espacio que es T_1 y cumple la condición de (completa en caso de T_5 o perfecta en T_6) normalidad. En este trabajo cuando hablemos de un espacio T_3 o $T_{3\frac{1}{2}}$ asumiremos que es T_0 y cuando hablemos de un espacio T_4, T_5 o T_6 asumiremos que es T_1 .

Algunas ideas de una clasificación más extensa sin considerar el asumir axiomas previos en los axiomas superiores se abordarán en el Apéndice A. Esto está relacionado con el concepto de que dos puntos sean topológicamente distinguibles. La idea intuitiva es ser capaces de, mediante sus abiertos, poderlos diferenciar; esto es, que podamos encontrar al menos un abierto que contenga a uno y no al otro. Pedir que todos los puntos sean topológicamente distinguibles es el axioma T_0 . Los espacios topológicos comúnmente usados en matemáticas son T_0 y, de no serlo, se puede definir una relación de equivalencia que identifica los puntos indistinguibles entre sí. Esta relación es el llamado cociente de Kolmogorov; esto lo veremos en la sección A.2 del Apéndice.

Sin embargo, pedir que todos los puntos sean topológicamente distinguibles no es lo

Axiomas de separación

mismo que pedir que todo punto esté separado del resto; este es el axioma T_1 . Pedir que mediante abiertos podamos separar los puntos, uno en un abierto y otro en el otro. Este axioma es equivalente a pedir que un espacio sea T_0 (que todo punto sea topológicamente distinguible) y R_0 (que todo par de puntos topológicamente distinguibles estén separados en el sentido de que cada uno tenga un abierto que no contenga al otro). Estas particularidades se tratarán en la sección A.1 del Apéndice.

Como observación, es interesante que no nos sirva únicamente asumir que un espacio es T_0 en los axiomas superiores. Asumir este axioma es razonable ya que únicamente pedimos poder distinguir los puntos topológicamente. Sin embargo, a partir del axioma T_4 necesitamos también de T_1 , esto se debe por la propia definición de T_4 ya que para poder separar puntos usando cerrados necesitamos que los puntos sean cerrados y como se demostrará, esta es la caracterización del axioma T_1 .

Por ende, tiene sentido pedir el axioma T_1 cuando hablamos de espacios T_4 ; sin embargo, existen espacios T_0 que son T_4 pero que no son T_3 . Esto es debido a la falta de T_1 y un ejemplo es la topología de Sierpinski (Ejemplo A.1.3 en el Apéndice). Veremos ejemplos como este al final del presente capítulo cuando tengamos una mejor noción del comportamiento de los espacios topológicos bajo todos los axiomas.

Ahora vamos a explorar cada axioma de separación, daremos caracterizaciones, un ejemplo de un espacio topológico que cumple cada axioma pero incumple el siguiente, varios resultados que ilustrarán mejor el grado de separabilidad de cada axioma y su relación con otras propiedades del espacio topológico como la heredabilidad y la compacidad.

3.2. Espacios topológicos T_0

Los espacios T_0 son espacios topológicos en los cuales para cada par de puntos, uno de ellos tiene un abierto que el otro no tiene (ver Definición 3.1.1), con esto podemos diferenciar los puntos del espacio según los abiertos que tienen, aunque aún no los podemos separar (poner cada uno en abiertos diferentes). Veamos qué propiedades se cumplen con el axioma más débil de la lista.

Primero empezaremos con una caracterización de T_0 .

Caracterización 3.2.1 *Decimos que un espacio es T_0 si y solo si ningún par de puntos es límite uno del otro (ver Definición 2.23).*

Demostración 3.2.1 *Sea X un espacio topológico T_0 , es decir que para todo par $x, y \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U, y \notin U$ o $x \notin U, y \in U$. Supongamos que $x \in U, y \notin U$, x no puede ser punto límite de y ya que existe un abierto U que contiene a x pero no a y , lo cual contradice a la definición de punto límite. Supongamos $y \in U, x \notin U$, entonces y no es punto límite de x por la misma razón que en el apartado superior. Por ende ser T_0 implica que para cada par de puntos, no son puntos límite uno del otro.*

Veamos que si ningún par de puntos es límite del otro entonces el espacio es T_0 . Supongamos que no lo es, es decir que no existe un U tal que $x \in U, y \notin U$ ni $y \in U, x \notin U$, por ende si todo abierto de x contiene a y entonces y es punto límite de x y viceversa, pero esto contradice que un par de puntos no puede ser punto límite uno del otro, por ende es T_0 . ■

Aunque T_0 es el axioma más débil, hay espacios topológicos que no lo cumplen, veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.2.1 (Espacio que no es T_0) . Sea X un conjunto de al menos dos puntos, dotado de la topología indiscreta $\tau_I = \{\emptyset, X\}$. Esta no es T_0 ya que dado un $x \in X$, su único abierto que lo contiene es X ; por ende, cualesquiera dos puntos solo tienen un abierto que los contiene y se tiene que $x \in X, y \in X$; por ende, no es T_0 .

Veamos también alguna propiedad topológica de los espacios T_0 .

Proposición 3.2.1 Ser T_0 es propiedad hereditaria.

Demostración 3.2.2 Sea X un espacio topológico T_0 y sea H un subespacio topológico de X , veamos que H es T_0 .

Como X es T_0 tenemos que $\forall x, y \in X, x \neq y$ se cumple que $\exists U \in \tau : x \in U, y \notin U$ o $\exists U \in \tau : y \in U, x \notin U$. Entonces sean $x, y \in H$ tales que $x \neq y$, como $x, y \in H \subseteq X$ tenemos que se cumple lo siguiente:

$$\exists U \in \tau : x \in U, y \notin U \quad \text{o} \quad \exists U \in \tau : y \in U, x \notin U$$

Entonces cogiendo el abierto relativo $U_H = U \cap H$ tenemos que se cumplirá:

$$\exists U_H \in \tau_H : x \in U_H, y \notin U_H \quad \text{o} \quad \exists U_H \in \tau_H : y \in U_H, x \notin U_H$$

Por lo que H es T_0 . ■

Proposición 3.2.2 Ser T_0 es propiedad multiplicativa.

Demostración 3.2.3 Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos T_0 y sean $x = (x_\alpha)$ e $y = (y_\alpha)$ puntos distintos del espacio producto $(\prod X_\alpha, \tau)$. Como $x \neq y$ habrá un índice $x_\beta \neq y_\beta$ con X_β un espacio topológico T_0 , por lo que se dará que:

$$\exists U_\beta \in \tau_\beta : x_\beta \in U_\beta, y_\beta \notin U_\beta \quad \text{o} \quad \exists U_\beta \in \tau_\beta : y_\beta \in U_\beta, x_\beta \notin U_\beta$$

Entonces cogiendo el abierto $U = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ este cumplirá que:

$$U \in \tau : x \in U, y \notin U \quad \text{o} \quad U \in \tau : y \in U, x \notin U$$

Por ende el espacio producto es T_0 .

Demostremos ahora el contrario también, sea $X = \prod X_\alpha$ un espacio T_0 , veamos que cada X_α también es T_0 . Por la Proposición 2.2.1 cada X_α es homeomorfo a un espacio topológico de X . Como el axioma T_0 es hereditario (véase Proposición 3.2.1) y se preserva bajo homeomorfismo (véase Corolario 3.1), tenemos entonces que cada X_α es T_0 . Por ende es propiedad multiplicativa. ■

Proposición 3.2.3 Ser T_0 se mantiene bajo una biyección cerrada.

Demostración 3.2.4 Sean X, Y espacios topológicos y $\phi : X \rightarrow Y$ una biyección cerrada con X un espacio topológico T_0 .

Sean x' e y' dos puntos distintos de Y , al ser ϕ una biyección tenemos que $x = \phi^{-1}(x')$ e $y = \phi^{-1}(y')$ son dos puntos distintos de X . Al ser X un espacio T_0 tenemos que entonces existe un abierto U tal que:

$$x \in U, y \notin U \quad \text{o} \quad x \notin U, y \in U$$

Axiomas de separación

Supongamos, sin pérdida de generalidad que se cumple la primera condición, entonces al ser ϕ una biyección cerrada, tenemos que también es abierta por complementariedad de los abiertos y cerrados, por lo que $U' = \phi(U)$ es un abierto tal que $x' \in U', y' \notin U'$, por lo que se cumple la condición de T_0 para cualquier dos puntos de Y , Y es T_0 . ■

Como los homeomorfismos son biyecciones cerradas con inversa cerrada, la Proposición 3.2.3 implica el siguiente corolario.

Corolario 3.1 Ser T_0 es propiedad topológica.

3.3. Espacios topológicos T_1

Ahora pasamos a los espacios T_1 (Definición 3.1.2). Con este axioma ya podemos separar los puntos del espacio topológico, pues para todo par de puntos existen dos abiertos que contienen a uno pero no contienen al otro. Este axioma es más fuerte que el anterior y será elemental para axiomas posteriores.

Primero veamos que el axioma T_1 implica el axioma anterior.

Proposición 3.3.1 Todo espacio topológico T_1 es un espacio topológico T_0 .

Demostración 3.3.1 Sea X un espacio T_1 , esto implica que $\forall x, y \in X, \exists U, V : x \in U, y \notin U, y \in V, x \notin V$. Por ende se cumple que existe un abierto U tal que $x \in U, y \notin U$ o que existe un abierto V tal que $y \in V, x \notin V$, ergo se satisface la condición para ser T_0 . ■

A continuación veamos que la Proposición 3.3.1 no es una equivalencia, mostrando un ejemplo de un espacio topológico que es T_0 pero no T_1 .

Ejemplo 3.3.1 (Espacio topológico T_0 pero no T_1) Sea $S = (\{0, 1\}, \tau_S)$ el espacio de Sierpinski con la topología dada por $\tau_S = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Representamos la topología de Sierpinski para tener una mejor idea en la Figura 3.1:

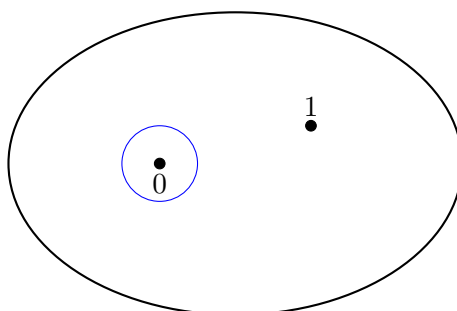


Figura 3.1: Representación gráfica de la topología de Sierpinski, Ejemplo 3.3.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_0 y T_1 .

Veamos efectivamente que es T_0 . Debemos encontrar abiertos para los puntos 0 y 1 tal que contenga a uno pero no al otro, esto se cumple pues con el abierto $U = \{0\}$ tenemos que $0 \in U$ y $1 \notin U$.

Ahora veamos que no es T_1 , esto se debe a que los dos únicos abiertos de la topología (aparte del vacío) son $U = \{0\}, V = \{0, 1\}$, por lo que no existen dos abiertos del modo $x \in U, x \notin V$ e $y \in V, y \notin U$ ya que ambos pertenecerían a uno de los abiertos.

Podemos dar una caracterización simple de los espacios T_1 .

Caracterización 3.3.1 Un espacio es T_1 si y solo si los unipuntuales son cerrados.

Demostración 3.3.2 Supongamos que X es un espacio topológico T_1 . Sea $x \in X$; queremos ver que el conjunto $\{x\}$ es cerrado, es decir, que su complementario $X \setminus \{x\}$ es abierto.

Dado que X es T_1 , para todo $y \in X \setminus \{x\}$ existe un abierto V_y tal que $y \in V_y$ y $x \notin V_y$. Por tanto, $V_y \subseteq X \setminus \{x\}$. Como esto ocurre para todo $y \in X \setminus \{x\}$, se sigue que:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_y,$$

es decir, $X \setminus \{x\}$ es una unión de abiertos y , por tanto, abierto. Luego, $\{x\}$ es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que todos los conjuntos unitarios $\{x\}$ son cerrados. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces $\{y\}$ es cerrado, por lo que su complementario $X \setminus \{y\}$ es un abierto que contiene a x y no a y . Análogamente, $X \setminus \{x\}$ es un abierto que contiene a y y no a x . Esto prueba que X es un espacio T_1 . ■

Ser T_1 se relaciona estrechamente con los embebimientos; para ver esto, vamos a dar el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1 (Teorema del embebimiento) Sea X un espacio topológico T_1 , $\langle Y_i \rangle_{i \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos, $\langle f_i : X \rightarrow Y_i \rangle_{i \in I}$ una familia de funciones continuas que separa puntos de cerrados (Definición 2.10), $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ el espacio producto y $f : X \rightarrow Y$ la aplicación inducida por la familia de funciones continuas, es decir, que $f(x) = \langle f_i(x) \rangle_{i \in I}$. Entonces f es un embebimiento.

Demostración 3.3.3 Como vimos en la Proposición 2.1.1 tenemos que $\mathcal{B} = \{ f_i^{-1}(V) : i \in I, V \in \tau_i \}$ es base de X y, al ser los puntos cerrados (Caracterización 3.3.1) tenemos que entonces la familia de funciones separa puntos, por lo que, por la Proposición 2.2.3 f es un embebimiento. ■

Finalmente, veamos alguna propiedad adicional de estos espacios.

Proposición 3.3.2 Ser T_1 es propiedad hereditaria (ver Definición 2.22).

Demostración 3.3.4 Sea X un espacio topológico T_1 y $H \subset X$ un subespacio topológico, sean $x, y \in H$ dos puntos distintos, como $H \subset X$. Entonces existen dos abiertos U, V tales que $x \in U, x \notin V, y \in U, y \notin V$. Entonces definimos dos abiertos de Y como $U' = U \cap H$ y $V' = V \cap H$, y se tiene que satisfacen $x \in U', x \notin V', y \in V', y \notin U'$. Por ende, ser T_1 es propiedad hereditaria. ■

Proposición 3.3.3 Ser T_1 es propiedad multiplicativa.

Demostración 3.3.5 Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios T_1 , veamos que $X = \prod X_\alpha$ es un espacio T_1 , para ello cogemos $x, y \in X : x \neq y$, esto implica que habrá un índice tal que $x_\beta \neq y_\beta$ con X_β un espacio T_1 por lo que:

$$\exists U_\beta, V_\beta \in \tau_\beta : x_\beta \in U_\beta, y_\beta \notin U_\beta, y_\beta \in V_\beta, x_\beta \notin V_\beta$$

Axiomas de separación

Entonces cogiendo los abiertos $U = \pi^{-1}(U_\beta)$ y $V = \pi^{-1}(V_\beta)$ tenemos que se cumple:

$$x \in U, y \notin U, y \in V, x \notin V$$

Por lo que X es T_1 .

Demostremos ahora el contrario también, sea $X = \coprod X_\alpha$ un espacio T_1 , veamos que cada X_α también es T_1 . Por la Proposición 2.2.1 cada X_α es homeomorfo a un subespacio topológico de X . Como el axioma T_1 es hereditario (véase Proposición 3.3.2) y se preserva bajo homeomorfismo (véase Corolario 3.2), tenemos entonces que cada X_α es T_1 . Por ende es propiedad multiplicativa. ■

Proposición 3.3.4 Ser T_1 se mantiene bajo biyección cerrada.

Demostración 3.3.6 Sean X e Y espacios topológicos y $\phi : X \rightarrow Y$ una biyección cerrada con X un espacio topológico T_1 , veamos que Y también es T_1 .

Por la Caracterización 3.3.1 tenemos que todos los puntos son cerrados, sea $x \in X$, como ϕ es una aplicación cerrada tenemos que $\phi(\{x\})$ es un cerrado y como la imagen de un punto de X es un punto de Y todos los puntos de Y son cerrados y por la Caracterización 3.3.1 Y es T_1 . ■

Como antes, la Proposición 3.3.4 implica que T_1 se conserva bajo homeomorfismo y, por ende, es propiedad topológica, por lo que tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2 Ser T_1 es propiedad topológica.

3.4. Espacios topológicos T_2

Desde T_1 todos los axiomas separan los puntos del espacio topológico, pero cada vez se irán pidiendo “mejores” condiciones a los abiertos que los separan, obteniendo cada vez un mayor grado de separabilidad. Por lo que, primeramente, veamos que el axioma T_2 (Definición 3.1.3) implica al anterior.

Proposición 3.4.1 Todo espacio topológico T_2 es un espacio topológico T_1 .

Demostración 3.4.1 Sea X un espacio T_2 . Esto implica que $\forall x, y \in X \exists U, V : x \in U, y \in V, X \cap Y = \emptyset$. Por ende, tenemos dos abiertos tal que $x \in U, y \in V$ y $x \notin V, y \notin U$, pues la intersección es vacía; ergo, se satisface la condición para ser T_1 . ■

Ahora veamos que la Proposición 3.4.1 no es una equivalencia, damos un ejemplo de un espacio topológico que es T_1 pero no T_2 .

Ejemplo 3.4.1 (Espacio que es T_1 pero no es T_2) Un conjunto infinito X dotado de la topología cofinita (X, τ_{CF}) con $\tau_{CF} = \{X \setminus A : A \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.

La topología cofinita es más difícil de representar, por lo que daremos algunos ejemplos de abiertos tomando $X = \mathbb{R}$ en la Figura 3.2.

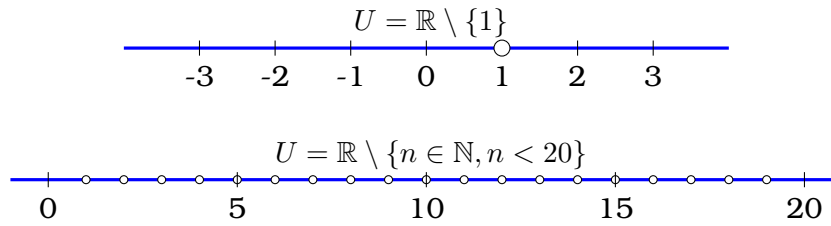


Figura 3.2: Abiertos de la topología cofinita, Ejemplo 3.4.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_1 y T_2 .

Veamos que es T_1 , sean $x, y \in X$ tenemos que dos abiertos de x e y son respectivamente $U = X \setminus \{y\}$ y $V = X \setminus \{x\}$ y estos cumplen que $x \in U, y \notin U$ e $y \in V, x \notin V$, por lo que la topología cofinita es T_1 . Veamos que no es T_2 , esto se debe ya que cualquier dos abiertos son de la forma $X \setminus A, X \setminus B$ con A y B finitos por lo que $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$ ya que X es infinito.

Podemos dar una caracterización de T_2 usando los entornos de sus puntos.

Caracterización 3.4.1 Un espacio es T_2 si y solo si todo punto es la intersección de todos sus entornos cerrados.

Demostración 3.4.2 Veamos que ser T_2 implica esta caracterización. Definimos el conjunto de todos los entornos cerrados de x :

$$\mathcal{D}_x = \{D : X \setminus D \in \tau \text{ y } \exists U \in \tau, x \in U \subseteq D\}.$$

Debemos demostrar que $\{x\} = C := \bigcap_{D \in \mathcal{D}_x} D$. Claramente $x \in C$ ya que $x \in D$ para todo $D \in \mathcal{D}_x$. Para ver que está solo x , demostraremos que $y \notin C$ para todo $y \neq x$.

Como X es T_2 , dado cualquier $y \neq x$ existe $U, V \in \tau$ tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, como V es abierto, se tiene que x está en el cerrado $X \setminus V$ y además $y \notin X \setminus V$. Al ser este un entorno cerrado de x se tiene que $X \setminus V \in \mathcal{D}_x$ y, al no contener a y , no estará en C .

Veamos ahora que la caracterización implica que el espacio es T_2 : Supongamos que $\{x\} = C = \bigcap_{D \in \mathcal{D}_x} D$ y sea $y \in X, y \neq x$. Como $y \notin \{x\}$, existe al menos un cerrado $D \in \mathcal{D}_x$ tal que $y \notin D$. Por tanto, $y \in V := X \setminus D$, el cual es abierto por ser D cerrado. Además, como $D \in \mathcal{D}_x$, existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq D$. Entonces, $U \cap V = \emptyset$ ya que $U \subseteq D$ y $V = X \setminus D$, y $D \cap (X \setminus D) = \emptyset$.

Por tanto, hemos encontrado abiertos disjuntos U y V con $x \in U$ y $y \in V$, lo que prueba que X es T_2 . ■

El axioma T_2 será un axioma muy usado durante el resto del proyecto, por lo que conviene dar varios resultados que cumplen los espacios topológicos T_2 :

Proposición 3.4.2 Si X es un espacio T_2 , entonces una sucesión converge a lo sumo a un único punto.

Demostración 3.4.3 Por reducción al absurdo, sea (x_n) una sucesión que converge a dos puntos distintos x, y . Como X es T_2 existen U, V abiertos disjuntos conteniendo a x y a y respectivamente. Como (x_n) converge a x y a y entonces existen $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in U \forall n \geq n_0$ y $x_n \in V \forall n \geq n_1$, por lo que si escogemos $n = \max\{n_0, n_1\}$ tenemos

Axiomas de separación

que $x_n \in U \cap V$, pero esta es vacía, contradicción. Por lo que (x_n) debe converger a lo sumo a un único punto. ■

Proposición 3.4.3 Todo subespacio compacto de un espacio T_2 es cerrado.

Demostración 3.4.4 Sea X un espacio topológico T_2 y sea H un subespacio compacto de X , veamos que H es cerrado.

Debemos comprobar que $X \setminus H$ es abierto, para esto vamos a encontrar para cada $x \in X \setminus H$ un abierto U_x que no interseque a H . Para esto, fijando un $x \in X \setminus H$, vamos cogiendo $y \in H$, al ser X un espacio T_2 tenemos que existen U_y, V_y tales que $x \in U_y, y \in V_y$ con $U_y \cap V_y = \emptyset$, por lo que se cumple que:

$$H \subset \bigcup_{y \in H} V_y$$

Al ser H un subespacio topológico compacto, tenemos que entonces de este recubrimiento existe un subrecubrimiento finito tal que:

$$H \subset \bigcup_{y_i} V_{y_i}$$

Por lo que, cogiendo los U_{y_i} e intersecando a todos, construimos un $U_x = \bigcap U_{y_i}$ el cual es un abierto al ser intersección de abiertos y no interseca con H , pues cada uno de ellos era disjunto con un abierto que contenía un punto de H , por lo que toda su intersección no contiene ningún punto de H . Por ende, haciendo la unión de todos los U_x para $x \in X \setminus H$ tenemos que $X \setminus H$ es abierto, por lo que H es cerrado. ■

Proposición 3.4.4 Conjuntos compactos disjuntos tienen entornos disjuntos en un espacio T_2 .

Demostración 3.4.5 Sean C_1 y C_2 conjuntos compactos en el espacio topológico X .

Primero supongamos que $C_1 = \{x\}$. Como son disjuntos, se tiene que $x \notin C_2$. Como X es T_2 , entonces $\forall y \in C_2$ existen abiertos U_y de x y V_y de y tales que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Por lo tanto, $C_2 \subseteq \bigcup_{y \in C_2} V_y$. Como C_2 es compacto, existen $y_1, \dots, y_n \in C_2$ tales que: $C_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Definimos $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ y $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. Se tiene que U y V son abiertos, que $x \in U$ y que $C_2 \subseteq V$. Además, cumplen que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, hemos encontrado dos abiertos tales que $C_1 \subseteq U$ y $C_2 \subseteq V$, con $U \cap V = \emptyset$. Sin embargo, solo hemos probado esto para el caso $C_1 = \{x\}$. Veamos ahora el caso general.

Sea C_1 un conjunto compacto. Para cada $x \in C_1$, existen abiertos U_x y V_x tales que $U_x \cap V_x = \emptyset$, con $x \in U_x$ y $C_2 \subseteq V_x$. En particular, $C_1 \subseteq \bigcup_{x \in C_1} U_x$. Como C_1 es compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in C_1$ tales que $C_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Definimos: $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. De manera similar al caso anterior, se tiene que $U \cap V = \emptyset$, que U y V son abiertos, y como $C_2 \subseteq V_{x_i}$ para todo i , se concluye que $C_2 \subseteq V$. Por lo tanto, hemos encontrado dos abiertos disjuntos U y V tales que $C_1 \subseteq U$ y $C_2 \subseteq V$. ■

Vamos a dar un resultado importante de los espacios ordinales.

Proposición 3.4.5 Sea Γ un ordinal límite (ver Definición 2.40), entonces el espacio ordinal cerrado $[0, \Gamma]$ (ver Definición 2.43) es T_2 .

Demostración 3.4.6 Sean $\alpha, \beta \in [0, \Gamma]$ con $\alpha \neq \beta$, como son distintos habrá uno que es menor que otro, sea este α , es decir que $\alpha < \beta$, sea $\alpha + 1$ el sucesor de α , podemos tomar los abiertos:

$$U = [0, \alpha + 1) \quad y \quad V = (\alpha, \Gamma]$$

Tenemos que $\alpha \in [0, \alpha + 1)$ y $\beta \in (\alpha, \Gamma]$, además su intersección es disjunta ya que U solamente contiene los ordinales menores o iguales a α y V contiene los ordinales estrictamente mayores a α , es decir que $U \cap V = \emptyset$ y por ende es T_2 . ■

Terminemos esta sección dando también resultados sobre heredabilidad, multiplicatividad y funciones.

Proposición 3.4.6 Ser T_2 es una propiedad hereditaria.

Demostración 3.4.7 Sea X un espacio topológico T_2 y sea H un subespacio topológico de X , sean $x, y \in H$ tales que $x \neq y$, como $x, y \in H \subseteq X \Rightarrow x, y \in X$ por lo que al ser X un espacio T_2 tenemos que $\exists U, V \in \tau : x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$, por lo que haciendo los abiertos relativos $U_H = U \cap H$ y $V_H = V \cap H$ tenemos que existen dos abiertos de τ_H tales que $x \in U_H, y \in V_H$ y se cumple que $U_H \cap V_H = \emptyset$, por lo que H es T_2 . ■

Proposición 3.4.7 Ser T_2 es propiedad multiplicativa.

Demostración 3.4.8 Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos T_2 , veamos que $X = \coprod X_\alpha$ es un espacio topológico T_2 .

Sean $x, y \in X$ puntos distintos, es decir que se diferencian en al menos una coordenada $x_\beta \neq y_\beta$, al ser X_β un espacio topológico T_2 tenemos que:

$$\exists U_\beta, V_\beta \in \tau_\beta : x_\beta \in U_\beta, y_\beta \in V_\beta, U_\beta \cap V_\beta = \emptyset$$

Por lo que cogiendo los abiertos $U = \pi^{-1}(U_\beta)$ y $V = \pi^{-1}(V_\beta)$ tenemos dos abiertos que cumplen $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$. Por ende X es T_2 .

Demostremos ahora el contrario también, sea $X = \coprod X_\alpha$ un espacio T_2 , veamos que cada X_α también es T_2 . Por la Proposición 2.2.1 cada X_α es homeomorfo a un subespacio topológico de X . Como el axioma T_2 es hereditario (véase Proposición 3.4.6) y se preserva bajo homeomorfismo (véase Corolario 3.3), tenemos entonces que cada X_α es T_2 . Por ende, es propiedad multiplicativa. ■

Proposición 3.4.8 Ser T_2 se mantiene bajo biyección cerrada.

Demostración 3.4.9 Sean X e Y espacios topológicos y $\phi : X \rightarrow Y$ una biyección cerrada, con X un espacio topológico T_2 veamos que Y es T_2 .

Sean x' e y' dos puntos distintos de Y , veamos que podemos encontrar dos abiertos que contengan a cada uno respectivamente y que no se intersequen. Para esto, como ϕ es una biyección, tenemos los puntos $x = \phi^{-1}(x')$ e $y = \phi^{-1}(y')$, los cuales serán distintos, por lo que al ser X un espacio T_2 , tenemos que existen dos abiertos U, V tales que $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$. Como ϕ es biyección cerrada tenemos que entonces es abierta por complementariedad de los abiertos y cerrados y por ende tenemos los abiertos $U' = \phi(U)$ y $V' = \phi(V)$. Estos abiertos cumplen que $x' \in U'$ y que $y' \in V'$, veamos cómo es su intersección, debido a que ϕ es una biyección tenemos que $U' \cap V' = \phi(U) \cap \phi(V) = \phi(U \cap V) = \phi(\emptyset) = \emptyset$, por ende tenemos dos abiertos disjuntos que contienen a x' e y' respectivamente. Entonces Y es T_2 . ■

La Proposición 3.4.8 implica que T_2 se mantiene bajo homeomorfismo; por ende, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3 Ser T_2 es propiedad topológica.

3.5. Espacios topológicos $T_{2\frac{1}{2}}$

En T_2 hemos pedido que para todo par de puntos existan abiertos disjuntos que los separen, ahora $T_{2\frac{1}{2}}$ (Definición 3.1.4) pide que la adherencia de los abiertos sea disjuntos, y como para todo conjunto $A \subseteq \overline{A}$ este axioma es más fuerte que ser T_2 , primero veamos que implica al anterior.

Proposición 3.5.1 *Todo espacio topológico $T_{2\frac{1}{2}}$ es un espacio topológico T_2 .*

Demostración 3.5.1 *Sea X un espacio topológico $T_{2\frac{1}{2}}$ esto implica que $\forall x, y \in X \exists U, V : \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Como $U \subset \overline{U}$ y $V \subset \overline{V}$ se cumple que $U \cap V = \emptyset$, ergo se satisface la condición para ser T_2 . ■*

Ahora veamos que no es una equivalencia, damos un ejemplo de un espacio que es T_2 pero no $T_{2\frac{1}{2}}$.

Ejemplo 3.5.1 (Espacio que es T_2 pero no $T_{2\frac{1}{2}}$) *Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y \geq 0\}$ y una pendiente $\theta \in \mathbb{I}$ irracional fija. Definimos una topología en X con base de entornos para cada punto (x, y) dada por:*

$$N_\epsilon((x, y)) = \{(x, y)\} \cup B_\epsilon(x + \frac{y}{\theta}) \cup B_\epsilon(x - \frac{y}{\theta}), \quad \text{con } B_\epsilon(\xi) = \{r \in \mathbb{Q} : |r - \xi| < \epsilon\}$$

Estos conjuntos consisten en el punto (x, y) y dos intervalos racionales centrados en las proyecciones sobre rectas de pendiente $\pm\theta$, de ahí el nombre topología de la pendiente irracional. Representamos un abierto de esta topología en la Figura 3.3.

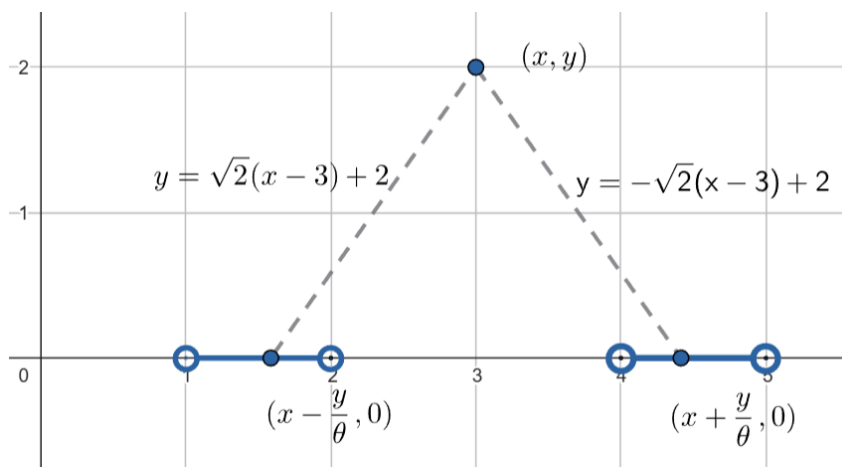


Figura 3.3: Abierto (en azul) en la topología de la pendiente irracional del Ejemplo 3.5.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_2 y $T_{2\frac{1}{2}}$.

Es T_2 : Dado $(x, y) \in X$, las proyecciones $x \pm \frac{y}{\theta}$ son irracionales distintas de las de cualquier otro $(x', y') \in X$, al ser θ irracional. Por lo que $x \pm \frac{y}{\theta}$ e $x' \pm \frac{y'}{\theta}$ no coinciden y existen abiertos disjuntos que las separan. Para asegurar esto, calculemos el ϵ de $x - \frac{y}{\theta}$, tomando, por ejemplo, que $x' - \frac{y'}{\theta} > x - \frac{y}{\theta}$ un ϵ podría ser $\frac{1}{2} \left(x' - x - \left(\frac{y'}{\theta} - \frac{y}{\theta} \right) \right)$, con este ϵ tenemos un $B_\epsilon(x - \frac{y}{\theta})$ y un $B_\epsilon(x' - \frac{y'}{\theta})$ que no intersecan.

No es $T_{2\frac{1}{2}}$: La clausura de $N_\epsilon((x, y))$ contiene todos los puntos cuyas proyecciones intersecan los intervalos $B_\epsilon(x \pm \frac{y}{\theta})$. Esto genera franjas que hacen que las clausuras de

abiertos distintos siempre se intersecan, lo que impide la separación requerida por $T_{2\frac{1}{2}}$. Representamos esto en la Figura 3.4.

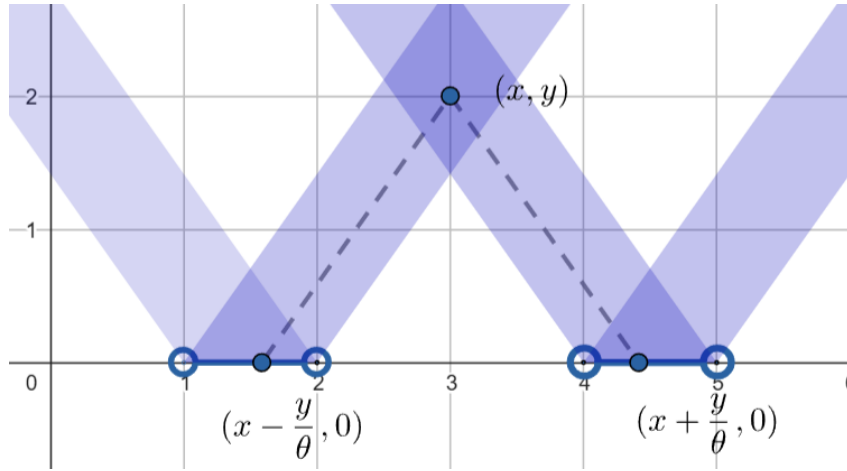


Figura 3.4: Clausura de un abierto del Ejemplo 3.5.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_2 y $T_{2\frac{1}{2}}$.

A continuación damos una caracterización de este axioma.

Caracterización 3.5.1 *Un espacio topológico X es $T_{2\frac{1}{2}}$ si y solo si para todo par de puntos distintos x, y existen entornos cerrados (Definición 2.2) disjuntos que los separan, esto es:*

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists N_x, N_y \subseteq X : \exists U, V \in \tau : x \in U \subseteq N_x, y \in V \subseteq N_y : \overline{N_x} \cap \overline{N_y} = \emptyset$$

Demostración 3.5.2 *Demostremos la equivalencia entre las dos caracterizaciones del axioma $T_{2\frac{1}{2}}$.*

Supongamos que X es un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$, es decir, para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U, V tales que $x \in U, y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Definiendo $N_x = \overline{U}$ y $N_y = \overline{V}$, se tiene que $x \in U \subseteq N_x, y \in V \subseteq N_y$, y además $\overline{N_x} \cap \overline{N_y} = \emptyset$, ya que N_x y N_y son cerrados. Por tanto, existen entornos cerrados que separan los puntos.

Supongamos ahora que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U, V y cerrados N_x, N_y tales que $x \in U \subseteq N_x, y \in V \subseteq N_y$ y $\overline{N_x} \cap \overline{N_y} = \emptyset$. Como $\overline{U} \subseteq N_x$ y $\overline{V} \subseteq N_y$, se deduce que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Así, X satisface la condición de que todo par de puntos distintos puede ser separado por abiertos cuyas adherencias son disjuntas, es decir, X es $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

Veamos unos resultados sobre multiplicatividad, heredabilidad y funciones.

Proposición 3.5.2 *Ser $T_{2\frac{1}{2}}$ es propiedad hereditaria.*

Demostración 3.5.3 *Sea X un espacio topológico $T_{2\frac{1}{2}}$ y sea $H \subseteq X$ un subespacio topológico. Sean $x, y \in H$ con $x \neq y$, como $H \subseteq X$ y X es $T_{2\frac{1}{2}}$, existen abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U, y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Consideramos los abiertos relativos $U_H = U \cap H$ y*

Axiomas de separación

$V_H = V \cap H$, en la topología subespacio se cumple que $\overline{K \cap H^H} \subseteq \overline{K^X} \cap H$, por lo que:

$$\overline{U_H^H} \cap \overline{V_H^H} \subseteq (H \cap \overline{U^X}) \cap (H \cap \overline{V^X}) = H \cap (\overline{U^X} \cap \overline{V^X}) = \emptyset.$$

Existen abiertos en H cuyas adherencias en H son disjuntas, y así H es $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

Proposición 3.5.3 Ser $T_{2\frac{1}{2}}$ es propiedad multiplicativa.

Demostración 3.5.4 Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios $T_{2\frac{1}{2}}$, veamos que $X = \prod X_\alpha$ es un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$.

Cogemos dos puntos diferentes x e y , al ser diferentes por lo menos una de las coordenadas será diferente $x_\beta \neq y_\beta$, por lo que cogiendo el espacio X_β , siendo este $T_{2\frac{1}{2}}$ tenemos que:

$$\exists U_\beta, V_\beta \in \tau_\beta : x_\beta \in U_\beta, y_\beta \in V_\beta : \overline{U_\beta} \cap \overline{V_\beta} = \emptyset$$

Con estos abiertos de X_β construimos $U = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ y $V = \pi_\beta^{-1}(V_\beta)$, los cuales son abiertos de X y se tiene que $U \subset \pi_\beta^{-1}(\overline{U})$ y que $V \subset \pi_\beta^{-1}(\overline{V})$, y estos cumplen que $\pi_\beta^{-1}(\overline{U}) \cap \pi_\beta^{-1}(\overline{V}) = \pi_\beta^{-1}(U_\beta \cap V_\beta) = \pi_\beta^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Con esto en mente, tenemos que $x \in U$ e $y \in V$ pues $x_\beta \in U_\beta$ e $y_\beta \in V_\beta$, veamos entonces si sus adherencias son disjuntas. Esto se puede demostrar pues $\overline{\pi_\beta^{-1}(U)} \subseteq \pi_\beta^{-1}(\overline{U})$ ya que al ser π_β una aplicación continua (demostrado en Proposición 2.2.1) entonces $\pi_\beta^{-1}(\overline{U_\beta})$ es un cerrado, y al ser $\overline{\pi_\beta^{-1}(U_\beta)}$ el cerrado más pequeño que contiene a U , deberá estar contenido en cualquier otro cerrado que contenga a U .

Entonces al estar \overline{U} y \overline{V} contenidos en $\pi_\beta^{-1}(\overline{U_\beta})$ y $\pi_\beta^{-1}(\overline{V_\beta})$ y ser la intersección de estos vacía, se tiene que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, por lo que hemos encontrado dos abiertos con adherencias disjuntas para cualquier dos puntos distintos de X , por ende X es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Demostremos ahora el contrario también, sea $X = \prod X_\alpha$ un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$, veamos que cada X_α también es $T_{2\frac{1}{2}}$. Por la Proposición 2.2.1 cada X_α es homeomorfo a un subespacio topológico de X . Como el axioma $T_{2\frac{1}{2}}$ es hereditario (véase Proposición 3.5.2) y se preserva bajo homeomorfismo (véase Corolario 3.4), tenemos entonces que cada X_α es $T_{2\frac{1}{2}}$. Por ende es propiedad multiplicativa. ■

Proposición 3.5.4 Ser $T_{2\frac{1}{2}}$ se conserva bajo una biyección cerrada.

Demostración 3.5.5 Sea $\phi : X \rightarrow Y$ una biyección cerrada y X un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$, esto es que cualquier par de puntos se pueden separar por abiertos con clausuras disjuntas.

Supongamos que Y no es $T_{2\frac{1}{2}}$, es decir que existen dos puntos x' e y' tal que todo abierto de ellos tienen adherencias no disjuntas. Veamos qué les pasa entonces a los puntos $x = \phi^{-1}(x')$ e $y = \phi^{-1}(y')$, tenemos que todos sus abiertos U, V se corresponden a abiertos $U' = \phi(U)$ y $V' = \phi(V)$ pues ϕ es abierta, es decir que cualquier U, V se puede escribir como $U = \phi^{-1}(U')$ y $V = \phi^{-1}(V')$. Veamos cómo son las adherencias.

Como ϕ^{-1} es continua ya que ϕ es cerrada, tenemos que $\phi^{-1}(\overline{U'}) \subseteq \overline{\phi^{-1}(U')}$, De la misma manera con V tenemos que $\phi^{-1}(\overline{V'}) \subseteq \overline{\phi^{-1}(V')}$, por lo que si $\phi^{-1}(\overline{U'}) \cap \phi^{-1}(\overline{V'}) \neq \emptyset$ tenemos que cualquier $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$.

Y efectivamente, $\phi^{-1}(\overline{U'}) \cap \phi^{-1}(\overline{V'}) = \phi^{-1}(\overline{U'} \cap \overline{V'}) \neq \emptyset$, pues $\overline{U'} \cap \overline{V'} \neq \emptyset$. Por tanto, hemos encontrado dos puntos $x, y \in X$ tales que, para cualquier par de abiertos que los

contengan, las adherencias de estos abiertos se intersecan. Esto contradice el hecho de que X es $T_{2\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, Y debe ser $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

De la misma manera que hasta ahora, esta última proposición implica que ser $T_{2\frac{1}{2}}$ es propiedad topológica ya que se mantiene bajo homeomorfismo.

Corolario 3.4 Ser $T_{2\frac{1}{2}}$ es propiedad topológica.

3.6. Espacios topológicos T_3

Con el axioma T_3 empezamos a separar conjuntos, siendo T_3 el caso más simple como es separar un punto de un cerrado. Esta condición de por sí no es más fuerte que $T_{2\frac{1}{2}}$ ya que, como veremos en un futuro, existen espacios que cumplen esta condición pero no son $T_{2\frac{1}{2}}$, por lo que, para poder continuar con la secuencia de implicaciones, debemos asumir en la definición de T_3 (Definición 3.1.5) el axioma T_0 . Veamos que asumiendo T_0 tenemos que este axioma es más fuerte que el anterior.

Proposición 3.6.1 Todo espacio topológico T_3 es también un espacio topológico $T_{2\frac{1}{2}}$.

Demostración 3.6.1 Para abordar esta demostración veremos antes dos resultados que nos ayudarán a abordarla:

- $T_3 \Rightarrow T_2$

Demostración 3.6.2 Sean $x, y \in X$, como estamos asumiendo que todo espacio es T_0 entonces $\exists V \in \tau : x \in V, y \notin V$ o $\exists V \in \tau : y \in V, x \notin V$, es decir que hay un abierto que contiene a uno pero no al otro. Sin pérdida de generalidad supongamos $\exists V \in \tau : y \in V, x \notin V$, por ende x pertenece al complementario, es decir $x \in X \setminus V = V^c$, como V era abierto entonces V^c es cerrado.

Tomando el cerrado V^c y el punto $y \notin V^c$, como X es T_3 se tiene que existen dos abiertos disjuntos U, V tal que $V^c \subset U, y \in V$. Como $x \in V^c$ entonces $x \in U$ e $y \in V$ y se tiene que $U \cap V = \emptyset$ por lo que es T_2 . ■

- Si X es T_3 entonces todo abierto contiene un entorno cerrado para cada uno de sus puntos.

Demostración 3.6.3 Sea $W \in \tau$ y $x \in W$. Como W es abierto y W^c es cerrado, existen abiertos disjuntos U, V tal que $W^c \subset U$ y $x \in V$ con $U \cap V = \emptyset$.

Se tiene que $x \in V$, como $U \cap V = \emptyset$ se cumple que $x \in V \subseteq U^c$. Ahora debemos ver que U^c (un cerrado) está contenido en W , tenemos que $W^c \subset U$, esto implica que $U^c \subset W$, es decir, que $x \in U^c \subseteq W$, al ser x y W arbitrarios queda probado. ■

Sean $x, y \in X$, como hemos demostrado, al ser T_3 también es T_2 por lo que existen dos abiertos disjuntos U, V que los contienen respectivamente, al ser T_3 estos abiertos contendrán a un entorno cerrado alrededor de x y alrededor de y contenidos en los abiertos, es decir, se tiene que $x \in C \subset U$ e $y \in D \subset V$ con $C \cap D = \emptyset$. Por lo que x e y están separados por cerrados disjuntos y por ende el espacio es $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

Veamos que la Proposición 3.6.1 no es una igualdad, damos un ejemplo de un espacio que es $T_{2\frac{1}{2}}$ pero no es T_3 .

Axiomas de separación

Ejemplo 3.6.1 (Espacio que es $T_{2\frac{1}{2}}$ que no es T_3) Definamos la topología del medio disco, sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, es decir, el semiplano positivo con la topología usual. Siendo L la recta real $y = 0$, definimos la topología τ^* en $X = P \cup L$ como la unión entre la topología usual en P y los abiertos de la forma $\{x\} \cup (P \cap U)$ con U un abierto de la topología usual y $x \in L$. Es decir, que además de las bolas de la topología usual en P , también tenemos las semibolas con su centro para todos los puntos $x \in L$, representamos esto en la Figura 3.5.

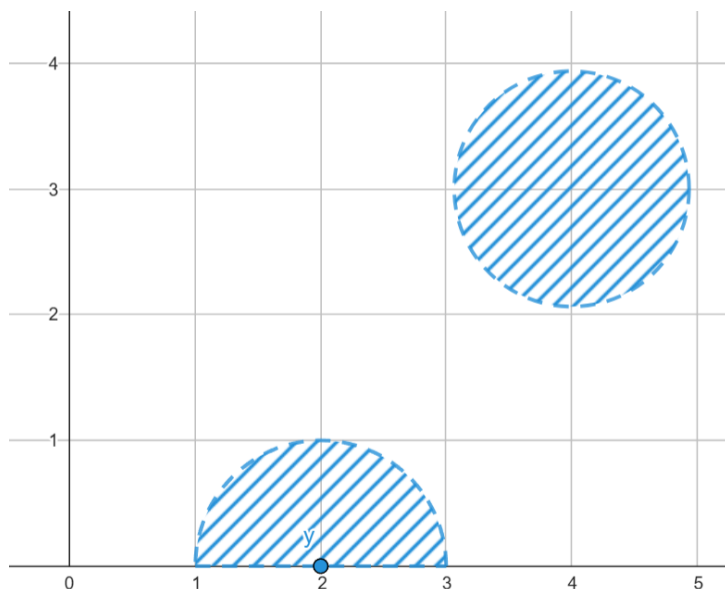


Figura 3.5: Abiertos de la topología del medio disco del Ejemplo 3.6.1, contraejemplo a la equivalencia entre axiomas $T_{2\frac{1}{2}}$ y T_3 .

Esta topología es una expansión de $(P, \tau_{u|P})$, por lo que como hemos probado que la identidad $(P, \tau_{u|P}) \rightarrow (X, \tau^*)$ es una biyección cerrada en una expansión (Definición 2.4) y $T_{2\frac{1}{2}}$ se mantiene bajo biyecciones cerradas (Proposición 3.5.5), tenemos que la topología del disco cerrado es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Veamos que no es T_3 , sea $y \in L$ y un abierto suyo $U_y := \{y\} \cup (P \cap U)$. Consideramos el cerrado $C_y := (P \cup L) \setminus U_y$ que contiene a $L \setminus \{y\}$, por lo que cualquier abierto que contenga a C_y deberá contener a $L \setminus \{y\}$. Los únicos abiertos de los puntos de $L \setminus \{y\}$ son de la forma $\{z\} \cup (P \cap U)$. Eligiendo un z suficientemente cerca de y se tiene que la semibola que lo contiene intersectará con cualquier abierto de y . Por tanto no existen abiertos que contengan a este cerrado C_y y que sean disjuntos con un abierto de Y , es decir, que el espacio no es T_3 .

Demos una caracterización de T_3 .

Caracterización 3.6.1 Sea X un espacio topológico, veamos que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es T_3
2. Dado un cerrado C y un punto x fuera de este cerrado, existe un abierto U de x tal que $\bar{U} \cap C = \emptyset$.

3. Dado un abierto U y un punto $x \in U$ existe un abierto V tal que $x \in V$ y $\bar{V} \subseteq U$.

Demostración 3.6.4 Demostremos las equivalencias:

1. \Rightarrow 2. Sea X un espacio T_3 y sean C un cerrado y un punto $x \in X \setminus C$.

Por la definición de T_3 tenemos que existen dos abiertos U, V tales que $x \in U, C \subseteq V : U \cap V = \emptyset$, como U y V son disjuntos tenemos que $U \subseteq X \setminus V$, el cual será un cerrado ya que V es un abierto, por ende $\bar{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V$. Como $C \subseteq V$ tenemos que $X \setminus V \subseteq X \setminus C$ por ende $\bar{U} \subseteq X \setminus C$ y como consecuencia tenemos que $\bar{U} \cap C = \emptyset$.

2. \Rightarrow 3. Sea X un espacio que satisface que dado un cerrado C y un punto x fuera de este cerrado, existe un abierto U de x tal que $\bar{U} \cap C = \emptyset$.

Sea U un abierto e $x \in U$, consideramos el cerrado $C = X \setminus U$, sabemos que $X \setminus C = U \in \tau$ y que $x \in U$, por ende por la condición que satisface el espacio tenemos que $\exists V \in \tau : x \in V, \bar{V} \cap C = \emptyset$, por ende $\bar{V} \cap X \setminus U = \emptyset$ y esto implica que $\bar{V} \subseteq U$, como U y x era arbitrarias hemos demostrado que: $\forall U \in \tau, x \in U : \exists V \in \tau : x \in V, \bar{V} \subseteq U$.

3. \Rightarrow 1. Sea X un espacio que satisface que dado un abierto U y un punto $x \in U$ existe un abierto V tal que $x \in V$ y $\bar{V} \subseteq U$.

Sea $x \in X$ y un cerrado $C = X \setminus U$ con $x \notin C$, como $x \notin C$ tenemos que $x \in U$, usando la condición que cumple el espacio tenemos que $\exists V \in \tau : x \in V, \bar{V} \subseteq U$.

Por ende $x \in V$, un abierto y $\bar{V} \subseteq U$, consideramos el abierto $W = X \setminus \bar{V}$, tenemos que este contendrá a C ya que $C = X \setminus U$ y $\bar{V} \subseteq U$ por lo que $C \subseteq X \setminus \bar{V} = W$, además está claro que $V \cap W = \emptyset$, por lo que hemos encontrado dos abiertos tales que $x \in V, C \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$, por lo que el espacio es T_3 . ■

Además, esta caracterización nos permite demostrar este lema.

Lema 3.1 Sea X un espacio topológico T_3 , sea \mathcal{B} una base de X y W un abierto de X , entonces el siguiente conjunto: $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} : \bar{B} \subseteq W\}$ es un recubrimiento de W .

Demostración 3.6.5 Por el punto 3 de la Caracterización 3.6.1 tenemos que dado un $x \in W$ existe un $U \in \tau$ tal que $x \in U, \bar{U} \subseteq W$, por la definición de base tenemos que $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, por ende $\bar{B} \subseteq \bar{U}$ y como consecuencia $\bar{B} \subseteq W$ es decir que $B \in \mathcal{C}$. Como x era arbitrario podemos hacer esto con todos los x de W tenemos que \mathcal{C} es un recubrimiento de W . ■

Terminemos esta sección dando varios resultados sobre funciones, multiplicidad y heredabilidad.

Proposición 3.6.2 Ser T_3 es propiedad hereditaria.

Demostración 3.6.6 Sea X un espacio topológico T_3 y H un subespacio topológico, veamos que H es T_3 .

Sea $C' \subseteq H$ un cerrado de H y un punto $x \in H$ tal que $x \notin C'$, usando la Proposición 2.5 tenemos que $C' = H \cap C$ con C un cerrado de X , como $x \notin C'$ pero $x \in X$ entonces $x \notin C$, por lo que al ser X un espacio T_3 existen dos abiertos U, V tales que: $C \subseteq U, x \in V, U \cap V = \emptyset$. Cogiendo los abiertos relativos $U' = H \cap U$ y $V' = H \cap V$ tenemos que estos cumplen que $C' \subseteq U', x \in V' : U' \cap V' = \emptyset$. Por lo que ser T_3 es propiedad hereditaria. ■

Proposición 3.6.3 Ser T_3 es propiedad multiplicativa.

Axiomas de separación

Demostración 3.6.7 Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos T_3 , y consideremos el espacio producto $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Queremos probar que X también es T_3 .

Sea U un abierto de X y $x \in U$. Por la definición de la topología producto, existe un abierto básico $U' = \prod_{\alpha \in I} U'_\alpha$ tal que $x \in U' \subseteq U$, $U'_\alpha \in \tau_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, y el conjunto $J = \{\alpha \in I : U'_\alpha \neq X_\alpha\}$ es finito.

Como cada X_α es T_3 , para cada $\alpha \in J$ existe un abierto $V_\alpha \in \tau_\alpha$ tal que $x_\alpha \in V_\alpha$ y $\overline{V_\alpha} \subseteq U'_\alpha$. Para $\alpha \notin J$, definimos simplemente $V_\alpha = X_\alpha$.

Definimos entonces $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$, que es un abierto básico del producto. Claramente $x \in V$, y se cumple que:

$$V \subseteq \prod_{\alpha \in I} \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in I} U'_\alpha = U',$$

y por tanto $V \subseteq U$. Por la caracterización del axioma T_3 (véase Caracterización 3.6.1, apartado 3), concluimos que X es T_3 .

Recíprocamente, supongamos que $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es T_3 . Por la Proposición 2.2.1, cada espacio X_α es homeomorfo a un subespacio topológico de X . Como el axioma T_3 es hereditario (véase Proposición 3.6.2) y se preserva bajo homeomorfismos (véase Proposición 3.6.4), concluimos que cada X_α es T_3 . ■

Proposición 3.6.4 Ser T_3 se mantiene bajo homeomorfismo. En consecuencia, ser T_3 es propiedad topológica.

Demostración 3.6.8 Sea X un espacio T_3 , Y un espacio topológico y $\phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre ellos, veamos que Y también es T_3 .

Sea $C' \subseteq Y$ un cerrado en Y y un punto $y \in Y$ tal que $y \notin C'$, al ser ϕ continua tenemos que $\phi^{-1}(C')$ es un cerrado y no contiene a $\phi^{-1}(y)$, como X es T_3 tenemos que existen abiertos $U, V \in \tau$ tales que:

$$\phi^{-1}(C') \subseteq U, \phi^{-1}(y) \in V, U \cap V = \emptyset$$

Como ϕ es un homeomorfismo lleva abiertos en abiertos por lo que $\phi(U), \phi(V) \in \tau'$ y cumplirán que:

$$C' \subseteq \phi(U), y \in \phi(V), \phi(U) \cap \phi(V) = \emptyset$$

Por lo que hemos encontrado dos abiertos disjuntos que contienen a un cerrado y a un punto respectivamente, por ende Y es T_3 . ■

3.7. Espacios topológicos $T_{3\frac{1}{2}}$

Los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ (Definición 3.1.6) son los primeros que introducen la noción de separar mediante una función. En este caso se pide poder separar un punto y un cerrado mediante una función de Urysohn (ver Definición 2.21). Como en el caso anterior también asumiremos T_0 : aunque no se necesita de este axioma para demostrar que $T_{3\frac{1}{2}}$ implica T_3 , lo asumiremos de todas formas; si no, no tendremos la cadena de implicaciones. Veamos primero que $T_{3\frac{1}{2}}$ implica T_3 .

Proposición 3.7.1 Todo espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$ es un espacio topológico T_3 .

Demostración 3.7.1 Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y sea $C \subseteq X$ un cerrado y $x \notin C$, por lo que existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\forall c \in C f(c) = 0$ y $f(x) = 1$.

Sea $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$, al ser f continua estos son abiertos, por definición el cerrado $C \subseteq f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $\{x\} \subseteq f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$, veamos que la intersección es vacía. Supongamos que no lo es, sea $z \in U \cap V$ entonces, como $z \in U \Rightarrow f(z) \in [0, \frac{1}{2})$ y como $z \in V \Rightarrow f(z) \in (\frac{1}{2}, 1]$, contradicción, por lo que $U \cap V = \emptyset$. Así que existen dos abiertos disjuntos que contienen a un cerrado y a un punto, respectivamente. ■

Ahora veamos que la Proposición 3.7.1 no es una equivalencia, para ello damos un ejemplo de un espacio que es T_3 pero no $T_{3\frac{1}{2}}$. Los ejemplos de espacios T_3 que no son $T_{3\frac{1}{2}}$ suelen ser bastante complicados, así que intentaremos dar uno sencillo.

Ejemplo 3.7.1 (Espacio que es T_3 pero no $T_{3\frac{1}{2}}$) Este ejemplo está tomado de la referencia [5, A regular space which is not completely regular]. Consideremos el conjunto X como el semiplano superior $y \geq 0$ con un punto adicional a , es decir $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \cup \{a\}$. Vamos a definir la topología dando los abiertos de cada punto:

1. Puntos (x, y) con $y > 0$ tienen la topología discreta. Representados en la Figura 3.6.

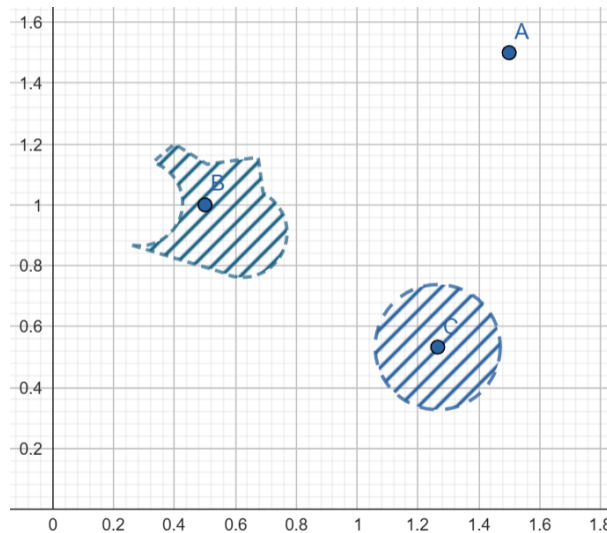


Figura 3.6: Abiertos de varios puntos (x, y) con $y > 0$ del Ejemplo 3.7.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$.

2. Puntos $(x, 0)$, sus abiertos contienen a $(x, 0)$ y a todos menos una cantidad finita de puntos de la unión de dos segmentos, $I_x := \{(x, y) : 0 \leq y < 2\}$ y $I'_x := \{(x+y, y) : 0 \leq y < 2\}$. Representados en la Figura 3.7.

Axiomas de separación

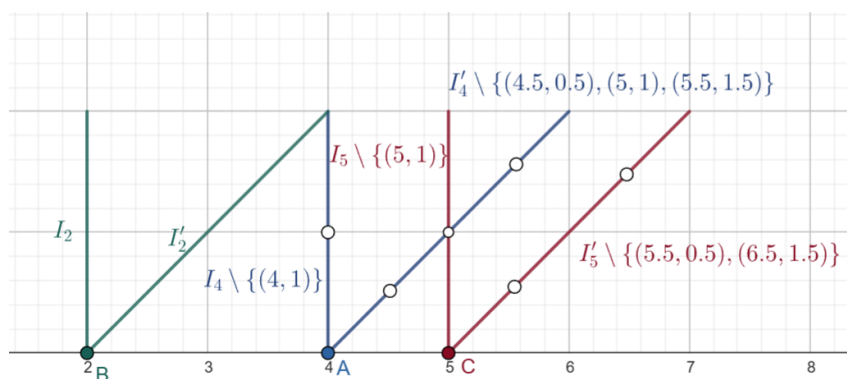


Figura 3.7: Abierto de puntos $(x, 0)$ del Ejemplo 3.7.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$.

3. Los abiertos de a son de la forma $U_n(a) := \{a\} \cup \{(x, y) : x > n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Representados en la Figura 3.8.

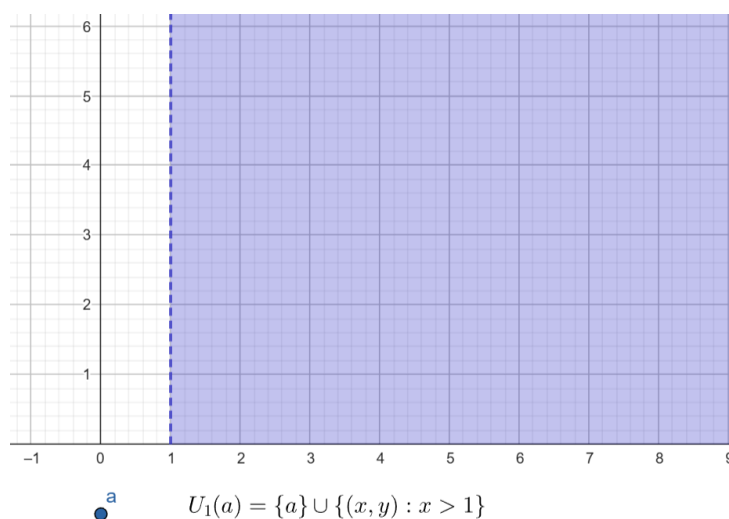


Figura 3.8: Abierto de a del Ejemplo 3.7.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$.

Para ver qué es T_3 vamos a probar que se cumple la tercera condición de la Caracterización 3.6.1, es decir, que todo abierto U contiene para todo punto suyo a la adherencia de otro abierto. Vamos a comprobar esto para cada tipo de abierto:

1. Si $(x, y) \in U$ con $y > 0$ entonces el propio $\{(x, y)\}$ es un abierto y su adherencia es él mismo; por ende: $(x, y) \in \{(x, y)\}$ y $\{(x, y)\} \subseteq U$, cumpliéndose esto para todo punto de U , por ende en este caso se cumple la condición.
2. Si $(x, 0) \in U$ entonces U es de la forma $U = (I_x \cup I'_x) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, en este caso vamos a ver que U también es cerrado, ya que si es cerrado entonces se cumple que $(x, 0) \in U$ y $(x, 0) \in \bar{U} \subseteq U$. Para ello, veamos cómo es su complemento, es decir $X \setminus ((I_x \cup I'_x) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) = (X \setminus (I_x \cup I'_x)) \cup \{x_1, \dots, x_n\} =: W$, veamos cómo

es cada uno de los puntos de este conjunto y determinemos si es abierto.

- a) Si $x \in W$ es de tipo 1. entonces tiene la topología discreta y él mismo es abierto, por lo que no interseca con $I_x \cup I'_x \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.
- b) Si $(x_2, y_2) \in W$ es de tipo 2., al no estar en $I_x \cup I'_x$ tenemos que podemos encontrar un abierto del tipo $(I_{x_2} \cup I_{x_2}) \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ que no interseque con $I_x \cup I'_x \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.
- c) Si el punto es a podemos elegir un $U_n(a)$ tal que no interseque con $(I_x \cup I'_x) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ simplemente eligiendo un $n > x + 2$.

Para entender esto mejor representémoslo gráficamente en la Figura 3.9.

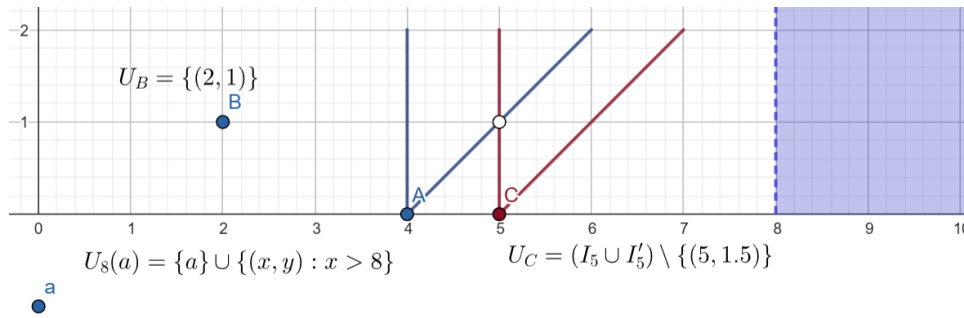


Figura 3.9: Abiertos según los tipos de punto que no cortan con $U = (I_4 \cup I'_4)$, Ejemplo 3.7.1, contraejemplo a la equivalencia entre los axiomas T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$.

Por ende puede ser escrito como unión de abiertos, es decir que $I_x \cup I'_x \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ es cerrado y por ende cumple la condición 3 de la Caracterización 3.6.1.

- 3. Si el punto es a dado cualquier $U_n(a) = \{a\} \cup \{(x, y) : x > n\}$ podemos encontrar un $U_{n+2}(a) \subseteq U_n(a)$ y cumple que $U_{n+2}(a) \subseteq U_n$, por lo que cumple la condición 3.

Como se cumple la condición para todos los abiertos, tenemos que el espacio es T_3 .

Ahora debemos ver que no es $T_{3\frac{1}{2}}$, para esto vamos a ver que para el punto a y el conjunto cerrado $A = \{(x, 0) : x \leq 1\}$ cualquier función continua tal que $f^{-1}(0) = A$ hace que $f^{-1}(a) = 0$ y por ende no se cumpliría la condición de ser $T_{3\frac{1}{2}}$, ya que no podríamos separar el cerrado A del punto a mediante una función de Urysohn.

Primero veamos que A es cerrado, consideramos el conjunto $X \setminus A = \{(x, y) : y > 0\} \cup \{(x, 0) : x > 1\} \cup \{a\}$, tenemos que $\{(x, y) : y > 0\}$ es unión de abiertos ya que cada uno de sus puntos es abierto, $\{(x, 0) : x > 1\}$ está contenido en el abierto $\bigcup_{x>1} (I_x \cup I'_x)$ y ninguno de estos interseca con A (por ende se queda en el complementario). Por último, el punto a se puede incluir en un abierto $U_1(a) = \{a\} \cup \{(x, y) : x > 1\}$ y este no interseca con A , por ende el complementario de A es un abierto y A es un cerrado.

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(A) = \{0\}$, vamos a ver que $a = f(0)$, es decir que $a \in f^{-1}(a)$. Como f es continua y $\{0\}$ un cerrado de la topología usual, $f^{-1}(0)$ es cerrado de X por lo que si a no perteneciese a $f^{-1}(0)$ habrá un natural n tal que $U_n(a)$ no corte con $f^{-1}(0)$. Entonces si probamos que para todo n los conjuntos: $K_n := f^{-1}(0) \cap \{(x, 0) : n - 1 \leq x \leq n\}$ son no vacíos, tendríamos que ese $U_n(a)$ no existe y por ende $a \in f^{-1}(0)$.

Axiomas de separación

Vamos a demostrar por inducción que los conjuntos K_n son infinitos. Por una parte, K_1 es infinito trivialmente. Ahora supongamos que K_n contiene un subconjunto infinito numerable al que llamaremos C . Para cada $(c, 0) \in C$ el conjunto $B := I'_c - f^{-1}(0)$ es un conjunto F_σ (Definición 2.14) que no contiene a $(c, 0)$. Al ser B un conjunto F_σ es unión numerable de cerrados. Como $(c, 0) \notin B$ todos los puntos son discretos, y por ende debe ser una unión numerable de ellos, es decir que B es numerable. Por ende ahora definimos la proyección de este conjunto B pero para cada $c \in C$, es decir la proyección P de $\bigcup_{(c,0) \in C} \{I'_c - f^{-1}(0)\}$. Este conjunto P también es numerable pues $I'_c - f^{-1}(0)$ es numerable y C es numerable.

Definimos $F := \{(x, 0) : n \leq x \leq n + 1\} - P$. Este conjunto es un conjunto infinito no numerable menos uno numerable, por ende infinito. Para cada $(x, 0) \in F$ el segmento I_x interseca a cada conjunto $I'_c \cap f^{-1}(0)$ en $(c, 0) \in C$ por lo que, como $f^{-1}(0)$ es cerrado, tenemos que $(x, 0) \in f^{-1}(0)$, por lo que $F \subseteq f^{-1}(0)$ y por ende K_{n+1} es infinito.

Al ser los K_n infinitos, son no vacíos, por lo que $a \in f^{-1}(0)$ y en consecuencia no cumple la condición para ser $T_{3\frac{1}{2}}$.

Damos una caracterización de los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$, la cual se puede encontrar en la referencia [6, Teorema 3.12].

Caracterización 3.7.1 Un espacio topológico X es $T_{3\frac{1}{2}}$ si y solo si los cocero conjuntos de X (ver Definición 2.20) forman una base de X .

Demostración 3.7.2 Supongamos que X es $T_{3\frac{1}{2}}$, vamos a comprobar que para todo punto x de un abierto W de X existe un cocero conjunto U tal que $x \in U \subseteq W$, por lo que los U forman una base de X . Sea W un abierto de X y un $x \in W$, entonces cogiendo el cerrado $C = X \setminus W$ tenemos que existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_C = 1$. Veamos que $U = \{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\}$ es un cocero conjunto, para esto vamos a encontrar una función continua $g : X \rightarrow [0, 1]$, dependiente de f , que se haga cero cuando $f(x) \geq \frac{1}{2}$, por lo que el complementario $f(x) < \frac{1}{2}$ será su cocero conjunto. Esta g será:

$$g(x) = (f(x) - \frac{1}{2}) - |f(x) - \frac{1}{2}|$$

Al ser traslación, resta y valor absoluto de funciones continuas, es continua y se puede comprobar que si $f(x) \geq \frac{1}{2}$ siempre da 0, es decir, que $g^{-1}((0, 1]) = \{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\}$, por lo que U es un cocero conjunto y estos forman una base de X .

Veamos ahora el contrario. Supongamos que X tiene una base de cocero conjuntos. Sea C un cerrado y x un punto que no pertenezca a C . Entonces, x pertenece al abierto $W := X \setminus C$ y al ser los cocero conjuntos una base de X existe un conjunto U con $x \in U \subseteq W$, tal que $U = g^{-1}((0, 1])$ con $g : X \rightarrow [0, 1]$ una aplicación continua. Si $y \notin W$, entonces $g(y) = 0$, por lo que $g|_C = 0$ y sea $\alpha := g(x) \neq 0$, por lo que definimos la función continua:

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto f(x) := \frac{\alpha - g(x)}{\alpha}$$

Se tiene que $f(x) = 0$ y que si $x \in C$, entonces $g(x) = 0$, por lo que $f(x) = 1$ con lo que hemos encontrado una función de Urysohn entre x y C y X es $T_{3\frac{1}{2}}$. ■

Y por último, damos unos resultados sobre heredabilidad, multiplicatividad y funciones.

Proposición 3.7.2 Ser $T_{3\frac{1}{2}}$ es propiedad hereditaria.

Demostración 3.7.3 Sea X un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$ y sea H un subespacio topológico, veamos que H es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Sea $C' \subseteq H$ un cerrado de H y $x \in H$ un punto tal que $x \notin C'$. Por la Proposición 2.5 tenemos que $C' = H \cap C$ con C un cerrado de X , como X es $T_{3\frac{1}{2}}$, tenemos que existe una función de Urysohn f entre C y $\{x\}$, por lo que restringiendo f a H tenemos que $f|_{C'} = 0$ y $f|_{\{x\}} = 1$, hemos encontrado una función de Urysohn entre C' y $\{x\}$, H es $T_{3\frac{1}{2}}$. ■

Proposición 3.7.3 Ser $T_{3\frac{1}{2}}$ es propiedad multiplicativa.

Demostración 3.7.4 Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos $T_{3\frac{1}{2}}$ y sea $X = \prod X_\alpha$ el espacio producto con la topología producto (ver Definición 2.32), veamos que X es un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$, esto lo vamos a hacer construyendo una función de Urysohn.

Sea $C \subseteq X$ un cerrado de X y un punto $x \in X$ tal que $x \notin C$, como C es cerrado entonces $U = X \setminus C$ es un abierto, al estar en la topología producto U será de la forma $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_n)$, siendo π_i la proyección de X sobre X_i y U_i un abierto de X_i . Como cada X_i es un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$ entonces existe una función de Urysohn f_k tal que $f_k(x_{\alpha_k}) = 1$ y $f_k(X_{\alpha_k} \setminus U_k) = 0$. Por tanto definimos $g_k = f_k \circ \pi_{\alpha_k}$, una función que será continua y mapea puntos de X al intervalo $[0, 1]$. Definimos ahora la siguiente función:

$$g : X \rightarrow [0, 1]$$

$$g(y) = \min\{g_k(y_{\alpha_k}) : k = 1, \dots, n\}$$

Esta función será continua ya que es el mínimo de funciones continuas. Por una parte:

$$g(x) = \min\{g_k(x_{\alpha_k}) : k = 1, \dots, n\} = \min\{f_k(\pi_{\alpha_k}(x)) : k = 1, \dots, n\}$$

$$= \min\{f_k(x_{\alpha_k}) : k = 1, \dots, n\} = \min\{1 : k = 1, \dots, n\} = 1$$

Calculemos ahora la imagen $g(y)$ con $y \in C$. Como $x \in U$ e $y \in C$, y estos son conjuntos disjuntos, tenemos que entonces habrá un U_j tal que $y \notin \pi_{\alpha_j}^{-1}(U_j)$ por lo que en el espacio X_j se tiene que $f_j(\pi_j(y)) = f(y_{\alpha_j}) = 0$, pues $y_{\alpha_j} \in X_j \setminus U_j$. Por tanto, $g(y) = \min\{g_k(y) : k = 1, \dots, n\} = 0$, ya que hemos encontrado un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $g_j(y) = 0$. En consecuencia, hemos encontrado una función de Urysohn entre todo punto y cerrado, entonces X es $T_{3\frac{1}{2}}$.

El contrario se debe ya que por la Proposición 2.2.1 tenemos que todo X_α es homeomorfo a un subespacio topológico H_α , como se demuestra en la Proposición 3.7.2, el subespacio H_α será $T_{3\frac{1}{2}}$ y como ser $T_{3\frac{1}{2}}$ se mantiene bajo homeomorfismo (ver Proposición 3.7.4) entonces X_α es $T_{3\frac{1}{2}}$. ■

Proposición 3.7.4 Ser $T_{3\frac{1}{2}}$ se preserva bajo homeomorfismo. En consecuencia, ser $T_{3\frac{1}{2}}$ es propiedad topológica.

Demostración 3.7.5 Sea X un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$ e Y otro espacio topológico con $\phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre ellos, veamos que Y es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Axiomas de separación

Sea $C' \subseteq Y$ un cerrado e $y \in Y$ un punto tal que $y \notin C'$, tomamos $C = \phi^{-1}(C')$ y $z = \phi^{-1}(y)$, al ser ϕ homeomorfismo C es cerrado. Por lo que al ser X un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$ tenemos que existe una función de Urysohn f entre C y z . Tomamos la función $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(x) = f(\phi^{-1}(x))$, y veamos que es una función de Urysohn. Por una parte, g es continua ya que es composición de funciones continuas. Por otra parte, cumple que $\forall x \in C', g(x) = 0$ ya que $\phi^{-1}(x) \in C$ y de la misma manera debido a que $\phi^{-1}(y) = z$ cumple que $g(y) = 1$. Por tanto, existe una función de Urysohn para cualquier C' e $\{y\}$, entonces Y es un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$. ■

3.8. Espacios topológicos T_4

Con el axioma T_4 (Definición 3.1.7) podemos separar cerrados de otros cerrados. Es inmediato ver que para que T_4 implique T_3 necesitaremos asumir que los unipuntuales son cerrados, (ver Caracterización 3.3.1 de T_1) por lo que asumiremos este axioma en esta sección y en todas las siguientes. En esta sección se verá un resultado crucial de los axiomas de separación, el lema de Urysohn, que además de caracterizar T_4 servirá para probar multitud de resultados en lo sucesivo.

Hasta ahora siempre hemos empezado cada sección probando que el axioma implica el anterior; sin embargo, primero vamos a dar la caracterización de T_4 , el lema de Urysohn, a través del cual saldrá la implicación de manera trivial.

Caracterización 3.8.1 (Lema de Urysohn) *Un espacio es T_4 si y solo si para todo par de cerrados disjuntos C, D existe una función de Urysohn (Definición 2.21) entre ellos.*

Demostración 3.8.1 *Veamos que si X es T_4 , entonces, dados dos cerrados disjuntos C y D , existe una función de Urysohn entre ellos. Primero construiremos una aplicación f tal que $f|_C = 0$ y $f|_D = 1$, y después veremos que está bien definida y es continua.*

Paso 1. *Sea P el conjunto de los racionales en $[0, 1]$. Como los racionales son numerables ordenamos los elementos de P comenzando por 1 y 0. Definiremos para cada $p \in P$ un abierto U_p tal que si $p < q$ se tiene que $\overline{U_p} \subset U_q$. Comenzamos definiendo $U_1 := X - D$ y, como X es T_4 , existe un abierto U_0 tal que $C \subset U_0$ y $\overline{U_0} \subset U_1$.*

Sea P_n el conjunto de los primeros n racionales y supongamos que hemos escogido un abierto U_p para cada p tal que si $p < q$ entonces $\overline{U_p} \subset U_q$. Sea r el siguiente racional, consideramos $P_{n+1} = P \cup \{r\}$. Es un subconjunto finito de $[0, 1]$ y ordenado por $<$, luego r (que no es ni 0 ni 1, un predecesor p y un sucesor q en $[0, 1]$, cuyos abiertos U_p y U_q ya están definidos y satisfacen $\overline{U_p} \subset U_q$. Como X es T_4 podemos encontrar un abiertos que separen los cerrados $\overline{U_p}$ y $X \setminus U_q$, es decir, existe un abierto U_r tal que $\overline{U_p} \subset U_r$ y $\overline{U_r} \subset U_q$. De este modo, (ver Figura 3.10) estamos construyendo abiertos que a medida que se acercan 1 van acercándose a D .

Paso 2. *Una vez hemos definido U_p para todos los racionales en el intervalo $[0, 1]$, extendemos esta definición a los racionales en \mathbb{R} tal que $U_p = \emptyset$ si $p < 0$ y $U_p = X$ si $p > 1$. Se sigue cumpliendo que si $p < q$ entonces $\overline{U_p} \subset U_q$.*

Paso 3. *Dado un punto $x \in X$ definimos $\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} | x \in U_p\}$. Este conjunto no contiene ningún número menor que 0 pues x no está contenido en ningún U_p*

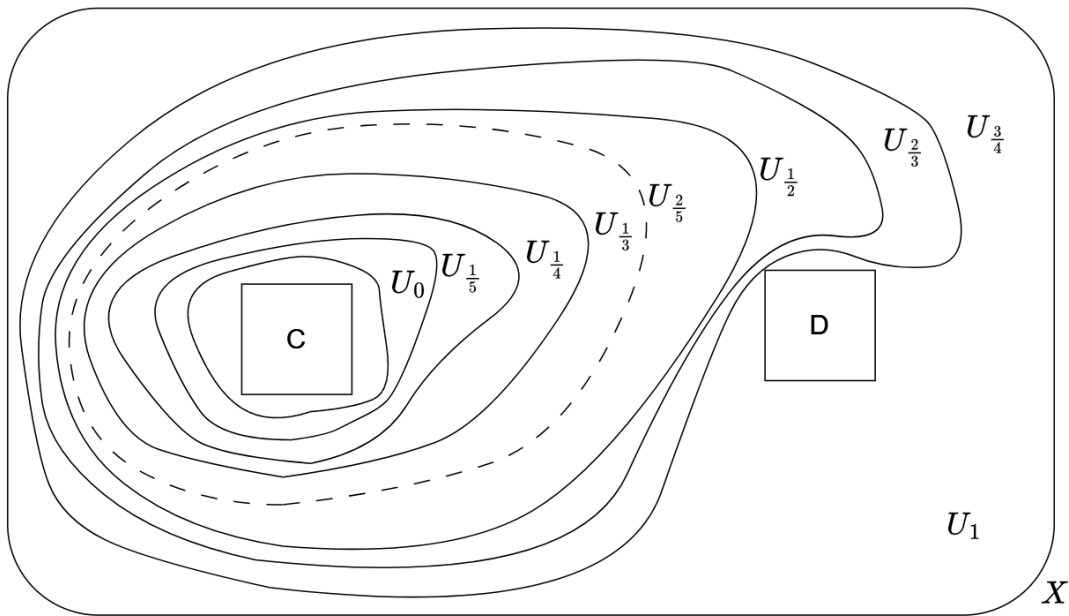


Figura 3.10: Figura del lema de Urysohn (Caracterización 3.8.1): Representación de cómo los abiertos se van acercando a D .

con $p < 0$ y contiene todo número mayor que 1 pues x está contenido en todo U_p con $p > 1$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ está acotado inferiormente y la mayor de estas cotas es la definimos como $f(x) := \inf \mathbb{Q}(x) = \inf \{p \in \mathbb{Q} | x \in U_p\} \in [0, 1]$.

Paso 4. Veamos que f es una función de Urysohn. Si $x \in C$ entonces $x \in U_p$ para todo $p \geq 0$, por lo que $\mathbb{Q}(x)$ es el conjunto de todos los racionales positivos, por ende $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0$. De manera similar, si $x \in D$ $x \notin U_p$ con $p \leq 1$ entonces $\mathbb{Q}(x)$ consiste de todo los racionales mayores que 1, por ende $f(x) = 1$.

Para ver que f es continua probemos primero:

a) $x \in \overline{U_r} \Rightarrow f(x) \leq r$

b) $x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r$

Para probar a) veamos que si $x \in \overline{U_r}$ entonces $x \in U_s$ para todo $s > r$. Por ende $\mathbb{Q}(x)$ contiene todos los racionales mayores que r . Entonces, por definición $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r$.

Para probar b) veamos que si $x \notin U_r$ entonces x no está en ningún U_s con $s < r$. Por ende $\mathbb{Q}(x)$ no contiene ningún racional menor a r luego $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq r$.

Ahora veamos que es continua. Sea $x_0 \in X$ y sea (c, d) un entorno de $f(x_0)$. Debemos encontrar un abierto U de x_0 tal que $f(U) \subset (c, d)$. Elegimos dos números racionales p y q tal que $c < p < f(x_0) < q < d$. Definimos el abierto $U = U_q - \overline{U_p}$. Veamos que $x_0 \in U$. Tenemos que $f(x_0) < q$ y por el resultado b) tenemos que $x_0 \in U_q$. Y como $f(x_0) > p$ por el resultado a) tenemos que $x_0 \notin \overline{U_p}$. Veamos que $f(U) \subset (c, d)$. Sea $x \in U$, por ende $x \in U_q \subset \overline{U_q}$, esto implica que $f(x) \leq q$ por a) y, como $x \notin \overline{U_p}$, se tiene que $x \notin U_p$ y, por b), se tiene que $f(x) \geq p$. Por tanto, $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$.

El recíproco es mucho más sencillo. Veamos que si existe una función de Urysohn f

Axiomas de separación

separando dos cerrados disjuntos C y D , entonces X es T_4 . Sean los abiertos $[0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ de $[0, 1]$. Como f es continua, las preimágenes $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son abiertos tales que $C \subset U, D \subset V$. Veamos que estos abiertos son disjuntos:

$$U \cap V = f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \cap f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) = f^{-1}([0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$$

Por tanto, (X, τ) es T_4 . ■

Veamos un resultado usando el Lema de Urysohn 3.8.1.

Lema 3.2 Sea X un espacio T_4 , sea C un cerrado G_δ en X . Entonces existe una función $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0 \forall x \in C$ y $f(x) > 0 \forall x \notin C$.

Demostración 3.8.2 Como C es intersección numerable de abiertos entonces $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Dado un U_n , cogiendo los cerrados disjuntos $X \setminus U_n$ y C tenemos, por el lema de Urysohn (Caracterización 3.8.1), que existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0 \forall x \in C, f(x) = 1 \forall x \in X \setminus U_n$. Definiendo $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f_n(x)}{2^n}$ tenemos que esta serie converge uniformemente por comparación a la geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y es continua, además de que cumple que en C toma el valor 0 y fuera de C es positiva. ■

Con la caracterización que nos ofrece el lema de Urysohn podemos probar que T_4 implica $T_{3\frac{1}{2}}$.

Proposición 3.8.1 Todo espacio topológico T_4 es un espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$.

Demostración 3.8.3 Como hemos demostrado en el Lema de Urysohn (ver Caracterización 3.8.1) un espacio es T_4 si y solo si para cualesquiera dos cerrados disjuntos existe una función de Urysohn. Por tanto, como la Definición 3.1.7 del axioma T_4 incluye asumir que X es T_1 , junto con la Caracterización 3.3.1 que nos da que los unipuntuales son cerrados, se tiene que existe una función de Urysohn entre cualquier punto y cerrados disjuntos. ■

Para ver que la Proposición 3.8.1 no es una igualdad, vamos a dar un ejemplo de un espacio que es $T_{3\frac{1}{2}}$ pero no T_4 .

Ejemplo 3.8.1 (Espacio que es $T_{3\frac{1}{2}}$ pero no T_4) Un ejemplo es la topología del disco tangente de Niemytzki [7, Example 8]. Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ el semiplano positivo y L el eje real, generamos la topología τ^* en $X = P \cup L$ añadiendo a la topología usual los abiertos de la forma $\{x\} \cup U$ con $x \in L$ y U una bola abierta de P tangente a L en el punto x . La representamos gráficamente en la Figura 3.8.1. Veamos que X es $T_{3\frac{1}{2}}$. Sea C un cerrado y un punto $b \notin C$. Si $b \in P$ entonces existe un abierto de la topología usual $U \subseteq X \setminus C$ que lo contiene, entonces el conjunto $X \setminus U$ es cerrado. Si $b \notin L$, al ser la topología usual $T_{3\frac{1}{2}}$, existe una función de Urysohn entre C y b (se verá más adelante en la Proposición 4.1.1). Si $b \in L$ entonces existe una bola U_δ de radio δ , tangente a L en b , que no interseca con C . Definimos la función $f : X \rightarrow [0, 1]$ como $f(x) = 1, \forall x \notin U_\delta \cup \{b\}, f(b) = 1$ y $f(x, y) = \frac{(x-b)^2 + y^2}{2\delta y}, \forall x \in U_\delta$. La función f es continua ya que $f^{-1}([0, \alpha)) = \{b\} \cup U_\alpha$, donde U_α es la bola abierta tangente a L en y de radio α , es un abierto de τ^* y $f^{-1}((\alpha, 1]) = X \setminus \overline{U_\alpha}$, que es un abierto ya que $\overline{U_\alpha}$ es un cerrado. Por tanto, hemos encontrado una función de Urysohn para cualquier punto b y cerrado C , por lo que es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Veamos que X no es T_4 . Esto se debe a que cualquier subconjunto de X contenido en L es cerrado. En particular, los racionales y los irracionales de L son cerrados disjuntos.

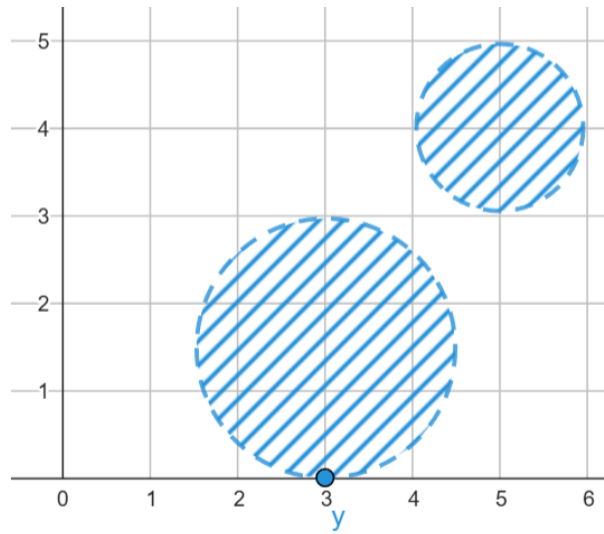


Figura 3.11: Abiertos de la topología del disco tangente de Niemytzki del Ejemplo 3.8.1, contraejemplo a la equivalencia entre axiomas $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_4 .

tos, pero cualquier abierto que contenga a uno intersectará con cualquier abierto que contenga al otro, por lo que se puede separar por abiertos disjuntos.

Vamos a dar unos resultados sobre 0-conjuntos, conjuntos G_δ y compacidad en espacios T_4 que nos servirán más adelante.

Proposición 3.8.2 Los 0-conjuntos (Definición 2.19) en espacios T_4 son exactamente los cerrados G_δ (Definición 2.15).

Demostración 3.8.4 Sea X un espacio T_4 . Primero veamos que un 0-conjunto es un cerrado G_δ . Sea A un 0-conjunto, esto es $A = f^{-1}(0)$, con f una función continua de X en $[0, 1]$. Como $\{0\}$ es un cerrado en la topología usual entonces A es cerrado. En el subespacio $[0, 1]$ tomamos los abiertos $U_n = [0, \frac{1}{n})$ por lo que tenemos $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(U_n)$ descrito como una intersección numerable de abiertos, luego A es G_δ .

Ahora veamos que un cerrado G_δ es un 0-conjunto. Sea X un espacio T_4 y $C \subseteq X$ un cerrado G_δ . Entonces existe una sucesión de abiertos U_n tal que $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Para cada n , los conjuntos C y $X \setminus U_n$ son cerrados disjuntos de X y por el Lema de Urysohn (Caracterización 3.8.1) existe una función continua $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $C \subseteq f_n^{-1}(0)$ y $X \setminus U_n \subseteq f_n^{-1}(1)$. Ahora definimos la función:

$$f(x) = \sum_n 2^{-n} f_n(x)$$

Vamos a comprobar que esta función es continua, para ello usaremos el criterio del mayorante de Weierstrass, el cual dice lo siguiente:

Teorema 3.8.1 Si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $M_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n \forall x \in X$ y la serie $\sum M_n$ converge, entonces la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en X .

Tenemos que con $x \in X$ el máximo que alcanza $f_n(x)$ es 1, por lo que $|2^{-n} f_n(x)| \leq 2^{-n}$ y la serie $\sum 2^{-n}$ es la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, la cual converge a 2, por lo que la serie de funciones converge uniformemente a $f(x)$ y al ser cada $f_n(x)$ continua, se tiene que $f(x)$ es una función continua. Además se tiene que $C \subseteq f^{-1}(0)$. Pero si $x \in X \setminus C$ entonces

Axiomas de separación

existe un n tal que $n \notin U_n$, por ende $f_n(x) = 1$ luego $f(x) > 0$ y, como consecuencia, $C = f^{-1}(0)$. ■

Proposición 3.8.3 Todo espacio T_1 en el que todos los cerrados son 0-conjuntos (Definición 2.19) es T_4 .

Demostración 3.8.5 Sean C y D cerrados disjuntos de un espacio X que es T_1 en el que todos los cerrados son 0-conjuntos. Al ser 0-conjuntos, existen dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow [0, 1]$ tales que $C = f^{-1}(0)$ y $D = g^{-1}(0)$. Definimos $h : X \rightarrow [0, 1]$, $h(x) = \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$. Como $f(x) > 0$ o $g(x) > 0$ para todo $x \in X$ el denominador nunca se anula y h es continua. Si $x \in C$, entonces $f(x) = 0$ y $h(x) = \frac{0}{0+g(x)} = 0$. Si $x \in D$, entonces $g(x) = 0$ y $h(x) = \frac{f(x)}{f(x)+0} = 1$. Por tanto h es una función de Urysohn entre C y D y, por la Caracterización 3.8.1, X es T_4 . ■

Proposición 3.8.4 Un espacio T_2 que es compacto es T_4 .

Demostración 3.8.6 Sean C, D cerrados disjuntos de X un espacio T_2 y compacto. Por el Teorema 2.1.5 que C, D también son compactos disjuntos y usando el Teorema 3.4.4 tenemos que existen U, V tales que $C \subseteq U, D \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$, por lo que cumple la condición de ser T_4 . ■

De manera similar, tenemos un resultado en el que, pidiendo una condición un poquito más fuerte que T_2 y una condición un poco más débil que compacto, tenemos que el espacio también es T_4 .

Proposición 3.8.5 Sea X un espacio de Lindelöf que es T_3 , entonces X es T_4 .

Demostración 3.8.7 Sean $C, D \subseteq X$ dos cerrados disjuntos de X . Por la segunda Caracterización 3.6.1 tenemos que: $\forall x \in C, \exists U_x \in \tau : x \in U_x, \overline{U_x} \cap D = \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = \{U_x \in \tau : x \in C, \overline{U_x} \cap D = \emptyset\}$ es un recubrimiento abierto de C . Por definición de espacio de Lindelöf tenemos que existe un subrecubrimiento numerable de C , este será $\langle U_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$. De manera similar podemos obtener un subrecubrimiento numerable $\langle V_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de D .

Veamos si con estos recubrimientos podemos construir unos abiertos que contengan a C y a D respectivamente y que no se intersequen.

Tenemos que $C \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ y, por cómo hemos escogido los V_n tenemos que $C \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}) = \emptyset$, luego:

$$C \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} \right), \quad D \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} \right)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los abiertos $U'_n := U_n \setminus \left(\bigcup_{p \leq n} \overline{V_p} \right)$ y, de manera análoga, $V'_n = V_n \setminus \left(\bigcup_{p \leq n} \overline{U_p} \right)$, y construimos los abiertos $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n$, $V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V'_n$.

Vamos a demostrar que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $U'_m \cap V'_n = \emptyset$, lo que implica que $U \cap V = \emptyset$. Asumamos, sin pérdida de generalidad que $m < n$, por lo que $U'_m = U_m \setminus \left(\bigcup_{p \leq m} \overline{V_p} \right)$ es un subconjunto de U_m y de $\overline{U_m}$. Como $m < n$ entonces $\overline{U_m} \in \{\overline{U_p} : p \leq n\}$ por lo que $\overline{U_m} \subseteq \bigcup_{p \leq n} \overline{U_p}$. Usando esto tenemos que $V'_n \subseteq V_n \setminus \overline{U_m}$. Entonces $U'_m \cap V'_n \subseteq \overline{U_m} \cap (V_n \setminus \overline{U_m}) = \emptyset$, por tanto $U \cap V = \emptyset$.

Veamos ahora que C y D están contenidos en U y V respectivamente, probándolo para

C , siendo completamente análogo para D . Se tiene que.

$$C \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(U_n \setminus \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \overline{V_p} \right) \right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \setminus \left(\bigcup_{p \leq n} \overline{V_p} \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n = U.$$

Por tanto, hemos construidos dos abiertos U, V tal que $C \subseteq U, D \subseteq V$ y que $U \cap V = \emptyset$, entonces el espacio X es T_4 . ■

Un resultado muy importante de los espacios T_4 es el Teorema de extensión de Tietze, ya que este nos permite extender de manera continua una función en los reales. Veamos este teorema.

Teorema 3.8.2 (Teorema de extensión de Tietze) Sea X un espacio T_4 y sea C un cerrado de X , entonces:

1. Cualquier función continua de C a un intervalo $[a, b]$ puede ser extendida a una función continua de todo X a $[a, b]$.
2. Cualquier función continua de C a \mathbb{R} puede ser extendida a una función continua de todo X a \mathbb{R} .

Demostración 3.8.8 La idea de esta demostración es construir una sucesión de funciones s_n definidas en todo X que converja uniformemente y que, cuando se restrinja a C , aproxime a f mejor y mejor a medida que n crezca. La función límite será continua y en C coincidirá con f . Supondremos en la prueba que el intervalo $[a, b]$ es $[-1, 1]$.

Paso 1. Veamos que existe una función continua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \leq \frac{1}{3}$ para todo $x \in X$ y que $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}$ para todo $a \in C$. Primero dividimos el intervalo $[-1, 1]$ en tres intervalos de longitud $\frac{2}{3}$, $I_1 = [-1, -\frac{1}{3}]$, $I_2 = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, $I_3 = [\frac{1}{3}, 1]$. Sean A y B subconjuntos de C tales que $A = f^{-1}(I_1)$ y $B = f^{-1}(I_3)$. Como f es continua entonces A y B son cerrados disjuntos en X , como el espacio es T_4 tenemos por el lema de Urysohn (Caracterización 3.8.1) que existe una función continua $g : X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ tal que $g(x) = -\frac{1}{3}$ para todo $x \in A$ y $g(x) = \frac{1}{3}$ para todo $x \in B$, y $|g(x)| \leq \frac{1}{3}$ para todo $x \in X$.

Comprobemos ahora que $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}$ para todo $a \in C$. Si $a \in A$ entonces $f(a)$ y $g(a)$ están en I_1 , por lo que $g(a) = -\frac{1}{3}$ y f como mínimo valdrá -1 (para maximizar el $|g(a) - f(a)|$), por ende $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}$. Si $a \in I_3$ entonces $g(a) = \frac{1}{3}$ y $f(a)$ como máximo valdrá 1 (para maximizar el $|g(a) - f(a)|$) por ende $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}$. Si $a \notin A \cup B$ entonces $a \in I_2$, como máximo g valdrá $\frac{1}{3}$ y como mínimo f valdrá $-\frac{1}{3}$, por ende $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}$.

Paso 2. Consideramos la función $f - g_1 : C \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Podemos generalizar la construcción del Paso 1. para obtener otra función g_2 definida en todo X tal que $|g_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ para todo $x \in X$ y $|f(a) - g_1(a)| \leq (\frac{2}{3})^2$ para todo $a \in C$. Aplicamos otra vez el Paso 1. a la función $f - g_1 - g_2$ y así sucesivamente, inducción, tal que llegado el paso $n+1$ tendremos las funciones g_1, \dots, g_{n+1} definidas en todo X tales que $|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^n$ para todo $x \in X$ y $|f(a) - g_1(a) - \dots - g_{n+1}(a)| \leq \frac{2}{3} (\frac{2}{3})^{n+1}$ para todo $a \in C$.

Ahora definimos $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, que converge ya que está mayorada por la serie geométrica $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{n-1}$ de razón menor que 1. Además será continua ya

Axiomas de separación

que cada g_n es continua y se cumple la prueba del mayorante de Weierstrass (cada una está acotada y la suma de las cotas converge).

Ahora vemos que $f(a) = g(a) \forall a \in C$. Esto se cumple ya que g es el límite de las sumas parciales y estas cumplen que.

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \text{para todo } a \in C.$$

por tanto tenemos que $s_n(a)$ converge a $f(a)$ para todo $a \in C$. Además, la imagen de esta función es el intervalo $[-1, 1]$, ya que $\frac{1}{3} \sum \left(\frac{2}{3} \right)^n$ converge a 1.

Paso 3. Vamos a demostrar ahora la parte 2. Sea f una función continua $f : C \rightarrow (-1, 1) \subset [-1, 1]$, donde sustituimos \mathbb{R} por un intervalo homeomorfo. Por los pasos anteriores, podemos extender f a una función continua $g : X \rightarrow [-1, 1]$ y vamos a encontrar una función h que meta todo X en el abierto $(-1, 1)$.

Definimos el conjunto $D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\})$. Como g es continua tenemos que D es un cerrado de X y como $g(C) = f(C) \subseteq (-1, 1)$ tenemos que D y C son cerrados disjuntos, por lo que aplicando el lema de Urysohn (Caracterización 3.8.1) existe una función continua $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi(D) = \{0\}$ y $\phi(C) = \{1\}$. Definimos la función $h(x) = \phi(x)g(x)$, que es continua ya que es el producto de dos funciones continuas. Tenemos que h es una extensión de f ya que para todo $a \in C$ se tiene que $h(a) = \phi(a)g(a) = 1 \cdot g(a) = f(a)$ y tenemos que la imagen de h es el intervalo $(-1, 1)$, ya que si $x \in D$ entonces $h(x) = 0 \cdot g(x) = 0$ y si $x \notin D$ entonces $|g(x)| < 1$.

■

También vamos a dar un resultado que nos ayudará a determinar cuándo un espacio es T_4 ; este es el Lema de Jones (ver [8, 6.5 Teorema]).

Lema 3.3 (Lema de Jones) Sea X un espacio topológico T_4 y separable (ver Definición 2.17). Entonces, para cualquier subconjunto Y cerrado y discreto, tenemos que $2^{|Y|} \leq 2^{\aleph_0}$ siendo \aleph_0 el cardinal de los naturales.

Demostración 3.8.9 Sea Y un subespacio discreto y cerrado de X con cardinalidad κ , y sea D un subespacio denso numerable de X . Como Y es discreto, para todo $y \in Y$ existe un abierto $U \in \tau$ tal que $U \cap Y = \{y\}$, es decir, los conjuntos unipuntuales son abiertos en la topología relativa sobre Y . Por tanto, dado cualquier subconjunto $A \subseteq Y$, su complementario relativo $Y \setminus A$ es una unión de abiertos unipuntuales, y por tanto es abierto en Y . Esto implica que A es cerrado en la topología relativa sobre Y .

Aplicando la Definición 2.5, se sigue que existe un cerrado C de X tal que $A = Y \cap C$. Como Y es cerrado en X , la intersección $A = Y \cap C$ es también un cerrado de X . Por ende, cogiendo cualquier subconjunto $A \subseteq Y$ y el cerrado $Y \setminus A$, serán cerrados disjuntos de X , por lo que al ser X un espacio T_4 , tenemos que existen $U_A, V_A \in \tau$ tales que $A \subseteq U_A, Y \setminus A \subseteq V_A$. Con U_A podemos definir $C_A = U_A \cap D$, el cual será distinto del vacío, pues D era denso. Podemos entonces definir la aplicación:

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{P}(Y) &\rightarrow \mathcal{P}(D) \\ A &\rightarrow \psi(A) = C_A = U_A \cap D \end{aligned}$$

Veamos que es inyectiva, esto demostrará que entonces $2^\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, supongamos que no lo es, entonces existen $A, B \subseteq Y$ con $A \neq B$ tales que $\psi(A) = \psi(B)$, es decir, que

$D \cap U_A = D \cap U_B$, pero como D es denso, tenemos que $\overline{U_A} = \overline{U_A \cap D} = \overline{C_a}$ por lo que $\overline{U_A} = \overline{U_B}$, pero esto no puede pasar ya que si A y B son distintos entonces, $A \setminus B \neq \emptyset$ o $B \setminus A \neq \emptyset$, asumiendo sin pérdida de generalidad el primer caso, entonces $\overline{U_A} \cap V_B \neq \emptyset$, pues $A \setminus B \subseteq \overline{U_A} \cap V_B$ y entonces $\overline{U_A} \neq \overline{U_B}$ ya que $\overline{U_B} \cap V_B = \emptyset$, por ende la aplicación sí es inyectiva. ■

Ser T_4 no es una propiedad hereditaria. Como se verá en el Ejemplo 3.9.1 hay espacios que son T_4 que, sin embargo, tienen un subespacio que no es T_4 . Sin embargo, si el subespacio es cerrado, sí hereda la propiedad de ser T_4 .

Proposición 3.8.6 Sea X un espacio topológico T_4 y $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado, entonces el subespacio topológico F es T_4 .

Demostración 3.8.10 Veamos que F es T_4 .

Sean $C, D \subseteq F$ dos cerrados relativos disjuntos, veamos que C también es un cerrado de X , la lógica es la misma para D . Al ser C un cerrado relativo tenemos que $A = F \setminus C$ es un abierto relativo, por lo que es de la forma $A = F \cap U$. Es decir que podemos definir $C = F \setminus (F \cap U)$, por ende, $C = F \setminus (F \setminus C) = F \setminus (F \cap U) = F \setminus U = F \cap (X \setminus U)$.

Al ser F cerrado y U un abierto entonces C es un cerrado de X , como C y D son cerrados de X tenemos que existirán dos abiertos disjuntos U, V tal que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$, por lo que tomando los abiertos relativos $U' = F \cap U$, $V' = F \cap V$, estos separan los cerrados relativos C y D , por lo que F es T_4 . ■

Ser T_4 no es multiplicativa, pero es cierta una de las dos implicaciones.

Proposición 3.8.7 Si el producto $X = \prod X_\alpha$ es T_4 , entonces cada X_α es T_4 .

Demostración 3.8.11 Usaremos una ligera modificación de la Proposición 2.2.1, ya que en este caso no tenemos la propiedad hereditaria. Veamos que los Y_i a los que son homeomorfos los X_i son cerrados, luego entonces son T_4 por la Proposición 3.8.6.

Dado $z \in X$ definimos el subespacio topológico Y_i al que es homeomorfo X_i de la siguiente manera:

$$Y_i = \{x \in X : \forall j \in I \setminus \{i\} : x_j = z_j\}$$

Entonces Y_i se puede escribir como $\{z_{\alpha_1}\} \times \dots \times \{z_{\alpha_{i-1}}\} \times X_i \times \{z_{\alpha_{i+1}}\} \dots$, al ser los unipuntuales cerrados ya que estamos asumiendo T_1 (ver Caracterización 3.3.1). Dado que X_i es un cerrado (ya que es el total de su propio espacio) y el producto arbitrario de cerrados es un cerrado (ver Proposición 2.2.2) entonces Y_i es un cerrado. Entonces, al ser Y_i un cerrado es T_4 (ver Proposición 3.8.6) y, al ser X_i homeomorfo a él, conservándose T_4 por homeomorfismo (Proposición 3.8.8) entonces X_i es T_4 . ■

Sin embargo, hay espacios topológicos que son T_4 , cuyo producto no lo es; por ejemplo, los reales con la topología de Sorgenfrey son un espacio T_4 y T_1 , pero el plano de Sorgenfrey (producto de dos rectas de Sorgenfrey) no es T_4 . Exploraremos este ejemplo en la Proposición 3.10.3.

Proposición 3.8.8 Ser T_4 se conserva bajo homeomorfismo. En consecuencia, ser T_4 es propiedad topológica.

Demostración 3.8.12 Sea X un espacio topológico T_4 e Y otro espacio topológico con $\phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, veamos que Y es T_4 . Sean $C', D' \subseteq Y$ dos cerrados disjuntos, definimos $C = \phi^{-1}(C')$ y $D = \phi^{-1}(D')$, debido a que la aplicación es continua entonces $C, D \subseteq X$ son cerrados disjuntos, por lo que existen dos abiertos U, V tal que

Axiomas de separación

$C \subseteq U, D \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como ϕ es abierta entonces $U' = \phi(U)$ y $V' = \phi(V)$ son dos abiertos de Y tales que $C' \subseteq U', D' \subseteq V'$ y $U' \cap V' = \emptyset$, por lo que hemos encontrado dos abiertos para cualquier par de cerrados disjuntos que los separan. Por ende Y es T_4 . ■

3.9. Espacios topológicos T_5

El axioma T_5 (Definición 3.1.8) requiere poder separar dos abiertos que ya son separados (Definición 2.11) mediante abiertos disjuntos. Además, como veremos en la caracterización, un espacio es T_5 si y solo si todos sus subespacios T_4 . Esta propiedad la habíamos perdido en T_4 , pues ser T_4 no es propiedad hereditaria. Por esta razón, también se conoce T_5 como *hereditariamente normal*. Veamos que este axioma implica al anterior.

Proposición 3.9.1 *Todo espacio topológico T_5 es un espacio topológico T_4 .*

Demostración 3.9.1 *Sea X un espacio T_5 , esto significa que para todo par de subconjuntos separados A, B existen abiertos disjuntos U, V que los contienen:*

$$\forall A, B \subseteq X, \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset : \exists U, V \in \tau : A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$$

Sean C, D dos cerrados disjuntos de la topología, por lo que cumplen que $\bar{C} \cap D = C \cap \bar{D} = C \cap D = \emptyset$, por ende están separados y, como X es T_5 , existen abiertos disjuntos que los contienen, es decir $\exists U, V \in \tau : C \subseteq U, D \subseteq V, U \cap V = \emptyset$. Entonces el espacio es T_4 . ■

Antes de ver que la Proposición 3.9.1 no es una equivalencia, veamos la caracterización de T_5 , pues el ejemplo de un espacio que es T_4 pero no T_5 se basa en ella.

Caracterización 3.9.1 *Sea X un espacio topológico, X es T_5 si y solo si todo subespacio es T_4 .*

Demostración 3.9.2 *Como hemos probado, T_1 es hereditaria (ver Proposición 3.3.2), basta probar que en un espacio podemos separar conjuntos separados por abiertos disjuntos si y solo si para cualquier subespacio podemos separar cerrados por abiertos disjuntos.*

Sea X un espacio T_5 y sea H un subespacio de X . Sean $C, D \subset H$ cerrados disjuntos, luego son dos conjuntos separados (Definición 2.11). Al ser X un espacio T_5 existen dos abiertos U, V tal que $C \subseteq U, D \subseteq V$ con $U \cap V = \emptyset$, por lo que los abiertos $U' = H \cap U, V' = H \cap V$ son abiertos relativos de H que cumplen $C \subseteq U', D \subseteq V'$ y que $U' \cap V' = \emptyset$, por lo que H es T_4 y tenemos que cualquier subespacio de X es T_4 .

Veamos que esto es razón suficiente. Supongamos que todo subespacio de X es T_4 y sean dos subconjuntos $A, B \subset X$ separados (Definición 2.11). Como todo subespacio es T_4 entonces el subespacio $H = X \setminus (\bar{A} \cap \bar{B})$ es T_4 y se tiene que $A \subset X \setminus (\bar{A} \cap \bar{B})$ y $B \subset X \setminus (\bar{A} \cap \bar{B})$. Por lo que al ser H un subespacio T_4 cogiendo los cerrados relativos a H $C = \bar{A}^H$ y $D = \bar{B}^H$ tenemos que existirán dos abiertos relativos U', V' tal que $A \subset C \subset U'$ y $B \subset D \subset V'$ con $U' \cap V' = \emptyset$.

Como $\bar{A} \cap \bar{B}$ es cerrado entonces $X \setminus \bar{A} \cap \bar{B}$ es abierto, por lo que los abiertos relativos que habíamos cogido son en verdad abiertos del espacio topológico pues son intersección de dos abiertos. Hemos encontrado dos abiertos disjuntos que separan A y B , como eran arbitrarios tenemos que X es T_5 . ■

Ahora con esta caracterización podemos dar un ejemplo de un espacio que es T_4 pero no T_5 .

Ejemplo 3.9.1 (Espacio que es T_4 pero no T_5 .) La tabla de Tychonoff es el espacio topológico producto de los espacios ordinales $[0, \omega_1] \times [0, \omega]$, siendo ω_1 el primer ordinal no numerable y ω el primer ordinal transfinito (ver Definiciones 2.41), es decir:

$$X = ([0, \omega_1] \times [0, \omega], \tau_{\omega_1} \times \tau_{\omega})$$

Veamos que es T_4 . Como hemos demostrado en la Proposición 2.3.1 los espacios ordinales son compactos y un producto de compactos es compacto (Proposición 2.2.4). Además, los espacios ordinales son T_2 , como hemos demostrado en la Proposición 3.4.5 y como el producto de espacios T_2 es T_2 (ver Proposición 3.4.7) tenemos que X es un espacio T_2 y compacto, por lo que por el Teorema 3.8.4 la tabla de Tychonoff es T_4 .

Para ver que no es T_5 vamos a utilizar la Caracterización 3.9.1) encontrando un subespacio que no es T_4 . Consideramos el subespacio dado por el subconjunto $Y = X \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$, definimos los subconjuntos de Y , $K = [0, \omega_1) \times \{\omega\}$ y $L = \{\omega_1\} \times [0, \omega)$. Tenemos que estos son cerrados relativos en Y pues se obtienen intersecando los cerrados $[0, \omega_1] \times \{\omega\}$ y $\{\omega_1\} \times [0, \omega]$ con Y respectivamente.

Supongamos que sí existen abiertos (relativos en Y) disjuntos U, V tales que $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$. Para cada $n \in \omega$ tenemos que existe un $\alpha_n < \omega_1$ tal que: $[\alpha_n, \omega_1] \times \{n\} \subseteq V$. Sea $\beta = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\} = \bigcup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Como los ordinales están totalmente ordenados por la inclusión y β es un ordinal ya que es la unión contable de conjuntos con cada $\alpha_n < \omega_1$, β será un ordinal numerable ya que $\beta < \omega_1$. Por la definición de β tenemos que $(\beta, n) \in V$ para todo $n \in \omega$. Pero la sucesión de puntos $((\beta, n))_{n \in \omega}$ converge a $(\beta, \omega) \in K$. Por tanto, existe un $n \in \omega$ tal que $(\beta, n) \in U$, por lo que no son disjuntos, contradicción.

Por último, veamos unos resultados sobre heredabilidad, multiplicatividad y funciones.

Proposición 3.9.2 Ser T_5 es propiedad hereditaria.

Demostración 3.9.3 Sea X un espacio topológico T_5 y sea $H \subseteq X$ un subespacio. Veamos que H también es T_5 .

Sean $A, B \subseteq H$ dos subconjuntos separados en H , es decir, $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ (donde las adherencias se toman en la topología subespacio). Como $H \subseteq X$, se tiene que A y B también son subconjuntos separados en X , ya que la adherencia en H está contenida en la adherencia en X . Como X es T_5 , existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Tomando los abiertos relativos $U' = U \cap H$ y $V' = V \cap H$, se tiene que $A \subseteq U'$, $B \subseteq V'$ y $U' \cap V' = \emptyset$. Por tanto, hemos encontrado abiertos en H que separan A y B , lo que prueba que H es T_5 . ■

Ser T_5 no es propiedad multiplicativa: la recta de Sorgenfrey es T_5 pero el plano de Sorgenfrey no lo es, como veremos más adelante en la Proposición 3.10.3. Sin embargo, sí que tenemos la otra implicación.

Proposición 3.9.3 Si $X = \prod X_\alpha$ es T_5 entonces cada X_α es T_5 .

Demostración 3.9.4 Como hemos hecho para el axioma $T_{3\frac{1}{2}}$, esta demostración se basa en usar que ser T_5 es propiedad hereditaria (ver Proposición 3.9.2), por lo que todos los subespacios son T_5 y cada espacio factor es homeomorfo a un subespacio por

Axiomas de separación

la Proposición 2.2.1, por lo que, al mantenerse T_5 bajo un homeomorfismo, los espacios factores son T_5 . ■

Proposición 3.9.4 Ser T_5 se conserva bajo homeomorfismo. En consecuencia, ser T_5 es propiedad topológica.

Demostración 3.9.5 Sea X un espacio topológico T_5 e Y otro espacio topológico con $\phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre ellos, veamos que Y es T_5 .

Sean $A', B' \subseteq Y$ dos subconjuntos separados (ver Definición 2.11), cogemos los subconjuntos $A = \phi^{-1}(A'), B = \phi^{-1}(B') \subseteq X$, veamos que están separados. Sabemos que ϕ^{-1} es un homeomorfismo (ver Proposición 2.12) y $\phi^{-1}(\overline{A}) = \overline{\phi^{-1}(A)}$ (ver 2.1.2). Luego se tiene:

$$\overline{A} \cap B = \overline{\phi^{-1}(A')} \cap \phi^{-1}(B') = \phi^{-1}(\overline{A'}) \cap \phi^{-1}(B') = \phi^{-1}(\overline{A'} \cap B') = \phi^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

De la misma manera se puede comprobar que $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Al ser X un espacio T_5 tenemos que existen dos abiertos U, V tales que $A \subseteq U, B \subseteq V : U \cap V = \emptyset$. Consideramos $U' = \phi(U)$ y $V' = \phi(V)$, los cuales son abiertos de Y pues ϕ es abierta y cumplirán que $A' \subseteq U', B' \subseteq V', U' \cap V' = \emptyset$. Por tanto, hemos encontrado dos abiertos que separan a A' y a B' , por ende Y es T_5 . ■

3.10. Espacios topológicos T_6

Por último, llegamos a los espacios T_6 . En estos, además de pedir T_4 , también pedimos que todos los cerrados sean conjuntos G_δ (ver Definición 2.15), estos cerrados jugarán un papel crucial pues están muy relacionados con los 0-conjuntos (ver Definición 2.19) y por ende con las funciones continuas. Normalmente empezaríamos viendo que este axioma implica al anterior, pero primero vamos a dar la caracterización de T_6 .

Caracterización 3.10.1 Un espacio es T_6 si y solo si es T_1 y todo cerrado es un 0-conjunto (ver Definición 2.19).

Demostración 3.10.1 En un espacio T_6 , todo cerrado es G_δ (ver Definición 2.15). Como este espacio también es T_4 , por la Proposición 3.8.2 todos los cerrados son 0-conjuntos.

Por otra parte, sea X un espacio T_1 donde los cerrados son 0-conjuntos y sea C un cerrado de X . Por la Proposición 3.8.3 X es T_4 . Además, por la Proposición 3.8.2, el cerrado C , que es un 0-conjunto, es un conjunto G_δ , luego X es T_6 . ■

Con esta caracterización vamos a probar que T_6 implica a T_5 .

Proposición 3.10.1 Todo espacio topológico T_6 es un espacio topológico T_5 .

Demostración 3.10.2 Sea X un espacio T_6 . Por la Proposición 3.10.1 que veremos más adelante, ser T_6 es hereditaria, luego todo subespacio de un T_6 es también T_6 luego también T_4 . Por la Caracterización 3.9.1, entonces X es T_5 . ■

Veamos que la Proposición 3.10.1 no es una igualdad, para ello damos un ejemplo de un espacio que es T_5 pero no T_6 .

Ejemplo 3.10.1 (Espacio que es T_5 pero no T_6) Este ejemplo está tomado de [7, Example 28]. Un espacio de Fort se define por medio de X un conjunto infinito y $p \in X$ un

punto particular de X , y una topología:

$$\tau_p = \{U \subseteq X : p \in X \setminus U\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\}$$

Los abiertos de la topología son cualquier subconjunto que no contenga a p o que contenga a todos los puntos de X menos una cantidad finita.

Primero veamos que es T_1 , esto se cumple ya que el espacio de Fort es una expansión de la topología cofinita (Ejemplo 3.4.1) y se puede demostrar de manera similar a la Proposición 3.5.5 que T_1 se mantiene bajo biyecciones cerradas. Al ser la identidad entre la cofinita y esta topología una biyección cerrada debido a que el espacio de Fort es una expansión de ella, se tiene que el espacio de Fort es T_1 .

Veamos que es T_5 , sean $A, B \subset X$ dos conjuntos separados (Definición 2.11), entonces p a lo sumo está en uno de ellos. Veamos caso por caso:

1. $p \notin A, p \notin B$, entonces A, B son abiertos ya que $p \in X \setminus A$ y $p \in X \setminus B$, por lo que ellos mismos son los abiertos que los separan.
2. $p \in A, p \notin B$, tenemos por el mismo razonamiento que B es abierto, demostremos que también es cerrado ya que así tendríamos otro abierto $U = X \setminus B$ tal que $A \subset U$ y $U \cap B = \emptyset$. Comprobemos que B es cerrado, es decir que $X \setminus B$ es abierto, esto se cumple ya que $B \subset X$ y $p \notin B$ entonces $p \in X \setminus B$. Por lo que tenemos dos abiertos, B y $X \setminus B$ tal que $B \subseteq B$ y $A \subset X \setminus B$ y cumplen que $B \cap (X \setminus B) = \emptyset$.

En definitiva, hemos comprobado que cualesquiera dos subconjuntos separados tienen abiertos disjuntos que los separan; por ende, el espacio de Fort es T_5 .

Veamos que si X es infinito no numerable entonces no es T_6 . Tenemos que como el espacio de Fort es T_1 entonces $\{p\}$ es cerrado por la Caracterización 3.3.1. Dado que en un espacio T_6 todo cerrado debe ser un G_δ (Definición 3.1.9), veamos si $\{p\}$ se puede escribir como intersección numerable de abiertos. Sea una intersección numerable de abiertos de X que contenga a p , todos estos deben ser de la topología cofinita, por ende cada uno de ellos es no numerable ya que S es no numerable. Una intersección numerable de conjuntos no numerables será un conjunto no numerable menos una cantidad numerable de puntos, luego no numerable. Entonces esta intersección no puede ser $\{p\}$, por lo que $\{p\}$ no es un conjunto G_δ y el espacio de Fort no es T_6 .

Como veremos en el Capítulo 4, cualquier espacio metrizable es T_6 y veremos ejemplos de ello.

Por último, como hemos estado haciendo en las secciones anteriores, veamos unos resultados de heredabilidad, multiplicidad y funciones.

Proposición 3.10.2 Ser T_6 es propiedad hereditaria.

Demostración 3.10.3 Para esto usaremos la Caracterización 3.10.1. Sea X T_6 , sea $H \subseteq X$ un subconjunto, tenemos que H será T_1 ya que ser T_1 es propiedad hereditaria (ver Proposición 3.3.2). Sea $F \subseteq H$ un cerrado, entonces existe un cerrado $F_0 \subseteq X$ tal que $F = F_0 \cap H$. Como F_0 es cerrado, entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $F_0 = f^{-1}(0)$, pero entonces la función $g : f|_H : H \rightarrow [0, 1]$ también es continua y se tiene que $g^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cap H = F_0 \cap H = F$, por ende H es T_6 . ■

Ser T_6 no es propiedad multiplicativa, pero se da una de las implicaciones.

Proposición 3.10.3 Si $X = \prod X_\alpha$ es T_6 entonces cada X_α es T_6 .

Axiomas de separación

Demostración 3.10.4 Como hemos estado haciendo hasta ahora, usando la Proposición 2.2.1 tenemos que los espacios factores serán homeomorfos a un subespacio topológico, al ser estos T_6 ya que T_6 es propiedad hereditaria (ver Proposición 3.10.2) y mantenerse bajo homeomorfismo (ver Proposición 3.10.4) entonces los espacios factores son T_6 .

Veamos que el producto cartesiano de dos espacios T_6 no es T_6 , para esto utilizaremos la topología de Sorgenfrey:

Ejemplo 3.10.2 (Recta de Sorgenfrey) Comprobemos que la recta de Sorgenfrey es T_1 , T_4 y que todos sus cerrados son G_δ .

1. La recta de Sorgenfrey (\mathbb{R}, τ_S) es T_1 . Sean $x, y \in \mathbb{R}$ dos puntos distintos con $x < y$ de \mathbb{R} al ser dos puntos distintos existe un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$, por lo que podemos cogiendo los abiertos $U_1 = [x, z)$ e $U_2 = [z, y)$ tenemos dos abiertos tales que: $x \in U_1, y \in U_2 : U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por ende la recta de Sorgenfrey es T_2 y por la Proposición 3.4.1 tenemos que entonces es también T_1 .
2. La recta de Sorgenfrey (\mathbb{R}, τ_S) es T_4 . Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos cerrados disjuntos de \mathbb{R} , al ser cerrados disjuntos podemos coger para cada punto de ellos abiertos tales que:

$$\forall a \in A, a \in U_a = [a, a + \varepsilon) : U_a \cap B = \emptyset$$

Este abierto existe para todos los a ya que si no existiese entonces todo entorno de a interseca con B , por ende sería parte de su adherencia y como B es cerrado entonces a pertenecería a B , cosa que no puede pasar pues A y B eran disjuntos. Por lo que tomando los abiertos:

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, a + \frac{\varepsilon_a}{2}) \quad , \quad V = \bigcup_{b \in B} [b, b + \frac{\varepsilon_b}{2})$$

Tenemos que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, veamos que $U \cap V = \emptyset$, esto se debe a que $U_a \cap U_b = \emptyset \forall a \in A \forall b \in B$, veamos que se cumple esto. Sean $a \in A, b \in B$ con $a < b$ sin pérdida de generalidad, entonces como $[a, a + \frac{\varepsilon_a}{2}) \cap B = \emptyset$ se tiene que $a + \frac{\varepsilon_a}{2} < b$ y por ende $U_a \cap U_b = \emptyset$.

3. Los cerrados de la recta de Sorgenfrey son G_δ (ver Definición 2.15). Por definición un conjunto es cerrado cuando es de la forma $\mathbb{R} \setminus U$ con U un abierto y como hemos visto en la Proposición 2.1.3, si U es un conjunto F_σ entonces $\mathbb{R} \setminus U$ es un cerrado G_δ , por lo que vamos a demostrar que todos los abiertos de Sorgenfrey son F_σ .

Sea W un abierto de Sorgenfrey, sea $O \subseteq W$ el interior de W respecto a la métrica usual, para ver que W es un conjunto F_σ vamos a ver que es la unión de dos conjuntos F_σ , concretamente de O y de $W \setminus O$, la unión de conjuntos F_σ es F_σ (ver Proposición 2.1.3), veamos como cada uno de estos es F_σ .

- O es un abierto de la topología usual, al ser esta T_6 tenemos que O es F_σ y como la topología usual está contenida en la de Sorgenfrey tenemos que O es un F_σ en la topología de Sorgenfrey.
- $W \setminus O$, para este lo que vamos a hacer es probar que es la unión numerable de unipuntuales, por ende al ser Sorgenfrey T_1 tenemos que entonces es unión numerable de cerrados, por ende un F_σ .

Sea $x \in W \setminus O$, podemos elegir un $h_x \in W$ tal que $[x, h_x) \subseteq W$, veamos que este abierto no interseca con otro $[y, h_y)$ para cualquier otro $y \in W \setminus O$ con $y \neq x$.

Supongamos que $[x, h_x) \cap [y, h_y) \neq \emptyset$ entonces o $x < y < h_x$ o $y < x < h_y$, en el primer caso entonces $y \in (x, h_x) \subseteq O$ por lo que $y \notin W \setminus O$, contradicción, el otro caso $x \in (y, h_y) \subseteq O$, por lo que $x \in O$, contradicción. Por ende $U = \{[x, h_x)\}_{x \in W \setminus O}$ es un conjunto de abiertos disjuntos.

Como la recta de Sorgenfrey es separable ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y los racionales son numerables) tenemos que entonces cumple la condición de cadena numerable (ver 2.1.4) por lo que U es un conjunto numerable y por ende $W \setminus O$ es numerable, por lo que $W \setminus U$ es la unión numerable de cerrados, por lo que es un F_σ .

Por tanto W es un conjunto F_σ , por lo que todos los cerrados de la recta de Sorgenfrey son G_δ .

Al ser un espacio T_1, T_4 y todos los cerrados son G_δ tenemos que entonces es un espacio T_6 . Sin embargo, vamos a comprobar que el producto de dos rectas de Sorgenfrey, el plano de Sorgenfrey no es T_4 , luego no es T_6 .

Ejemplo 3.10.3 (Plano de Sorgenfrey) Supongamos que el plano de Sorgenfrey es T_4 . Como este es separable (ya que $\overline{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^2$ y es numerable) entonces se cumple el lema de Jones (ver Lema 3.3). Cogiendo $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ tenemos que este es un conjunto discreto, veamos que también es cerrado:

Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, veamos que para todo punto podemos encontrar un abierto que no interseca con D , por ende $\mathbb{R}^2 \setminus D$ será unión de abiertos, por ende abierto. Vamos a definir los abiertos de esta forma:

$$U = \begin{cases} [x+1) \times [y+1) & \text{si } x > -y \\ [x+\varepsilon) \times [y+\varepsilon) & \text{si } x < -y \end{cases}$$

Con $\varepsilon < d((x, y), (\frac{x+y}{2}, -\frac{x+y}{2}))$ siendo d la distancia usual. Estos abiertos no intersecarán con la diagonal, por lo que D es cerrado.

Al ser discreto y cerrado entonces se debe cumplir que $2^{|D|} \leq 2^{\aleph_0}$, sin embargo $|D|$ es el cardinal de los reales, por lo que no se cumple el lema de Jones, es decir que el plano de Sorgenfrey no es T_4 .

Este ejemplo también prueba que el producto de espacios T_5 o T_4 no tiene por qué ser T_5 o T_4 respectivamente. ■

Proposición 3.10.4 Ser T_6 se conserva bajo homeomorfismo. En consecuencia, ser T_6 es propiedad topológica.

Demostración 3.10.5 Sea X un espacio topológico T_6 y sea Y otro espacio topológico con $\phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre ellos, veamos que Y es T_6 .

Sea $C \subseteq Y$ un cerrado, como ϕ^{-1} es un homeomorfismo (ver Proposición 2.12) entonces es cerrada por lo que $\phi^{-1}(C) \subseteq X$ es un cerrado, como X es T_6 entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(\phi^{-1}(C)) = 0$, por lo que hemos encontrado una función continua $g = g \circ \phi^{-1}$ tal que $g(C) = 0$ siendo C un cerrado de Y . Por lo que Y es un espacio topológico T_6 . ■

Llegados a este punto ya tenemos la cadena principal de implicaciones entre los axiomas de separación. Sin embargo, podemos definir axiomas de separación adicionales como los espacios de Urysohn y los espacios semirregulares, aunque estos complican la cadena de implicaciones y no son tan relevantes como los vistos anteriormente.

Axiomas de separación

Aún así, vale la pena explorarlos, pues arrojan la idea de que podemos pedir condiciones intermedias entre los axiomas de separación.

3.11. Espacios de Urysohn

Estos espacios son también llamados funcionalmente Hausdorff; empecemos dando la definición de estos. En este axioma no asumimos ni T_0 ni T_1 .

Definición 3.2 Decimos que un espacio topológico X es un espacio de Urysohn si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existe una función de Urysohn entre ellos.

Veamos cómo encaja en la cadena de implicaciones, primero veamos qué axioma de separación implica.

Proposición 3.11.1 Si X es un espacio de Urysohn, entonces es $T_{2\frac{1}{2}}$ (Definición 3.1.4).

Demostración 3.11.1 Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos, vamos a utilizar la Caracterización 3.5.1 para demostrar que es $T_{2\frac{1}{2}}$, es decir, vamos a encontrar dos entornos cerrados disjuntos que separan a los puntos. Debido a que el espacio topológico es un espacio de Urysohn, tenemos que existe una función de Urysohn entre estos dos puntos, es decir, existe una aplicación continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tales que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Por ende, como la aplicación es continua, cogemos los abiertos $U = f^{-1}([0, \frac{1}{4}))$ e $V = f^{-1}((\frac{3}{4}, 1])$, y los cerrados $C = f^{-1}([0, \frac{1}{4}])$ y $D = f^{-1}([\frac{3}{4}, 1])$. Tenemos que efectivamente $x \in U \subset C, y \in V \subset D$, y como la intersección de estos cerrados es efectivamente vacía, tenemos que se cumple la caracterización y por ende el espacio es $T_{2\frac{1}{2}}$. ■

Para ver que la implicación no es doble, demos un ejemplo de un espacio que es $T_{2\frac{1}{2}}$ pero no Urysohn.

Ejemplo 3.11.1 (Espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ que no es Urysohn) Este espacio es llamado Roy's Lattice [7, Examples 127] o en español, el Reticulo de Roy. Sea $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección numerable de subconjuntos densos (ver Definición 2.16) en los racionales \mathbb{Q} . Sea el conjunto:

$$X = \{(r, i) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}^+ \mid r \in C_i\} \cup \{\omega\}$$

donde ω es un "punto ideal". Definamos una topología en X donde los entornos abiertos para cada punto son

$$\begin{cases} (r, 2n) \Rightarrow U_\epsilon(r, 2n) = \{(t, 2n) \mid |t - r| < \epsilon\} \\ (r, 2n - 1) \Rightarrow V_\epsilon(r, 2n - 1) = \{(t, m) \mid |t - r| < \epsilon, m = 2n - 2, 2n - 1, 2n\} \\ \omega \Rightarrow W_n(\omega) = \{(s, i) \in X \mid i \geq 2n\} \end{cases}$$

Es decir, si el punto tiene segunda coordenada par, entonces sus abiertos son simplemente intervalos que lo contienen; si es impar, entonces son intervalos en su línea y en la de arriba y abajo; si es el punto ideal, entonces son todas las rectas $\geq 2n$. Representamos gráficamente en la Figura 3.12.

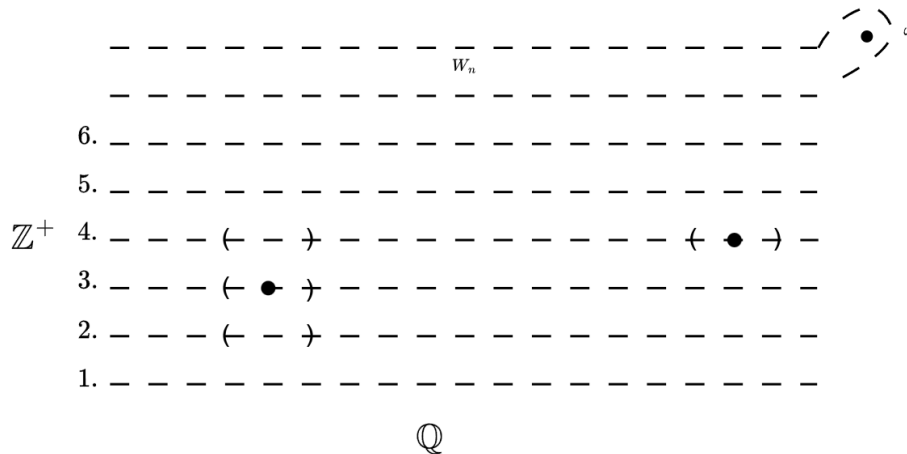


Figura 3.12: Representación del retículo de Roy, Ejemplo 3.11.1, contraejemplo a espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ que no es Urysohn.

Para demostrar que no es Urysohn, vamos a utilizar el siguiente teorema cuya demostración se puede encontrar en [9, pág 1281].

Teorema 3.11.1 Sea X un espacio topológico conexo y numerable, entonces su imagen $f(X)$ con f continua es conexa y numerable.

El retículo de Roy es numerable ya que los C_i son numerables al ser densos y tenemos una cantidad numerable de ellos, por ende el espacio es numerable. Veamos ahora que es conexo, para esto veamos que no existe una separación de este espacio.

Por reducción al absurdo supongamos que existe una, es decir que existen $U, V \in \tau$ tal que $U \cup V = X, U \cap V = \emptyset$, es decir que cada uno de ellos es abierto y cerrado. Uno de ellos deberá contener a ω , supongamos que este es U . Debido a que $\omega \in U$ entonces contendrá a un abierto de él, es decir un $W_n(\omega)$, contiene todas las líneas a partir de un $2n$ (hacia arriba). Sin embargo en la línea $2n - 1$ todos los abiertos de los puntos son de la forma $V_\epsilon(r, 2n - 1)$. Estos intersecan con la línea $2n$, por lo que al ser U cerrado debe contener la línea $2n - 1$. Pero al ser abierto contiene los abiertos de los puntos de la línea $2n - 1$, que recordemos también se extendían hacia la línea $2n - 2$, por lo que debe contener esta también. Por ende siguiendo este procedimiento llegaríamos a que $U = X$, ergo el espacio no tiene una separación no trivial.

Supongamos entonces que el espacio es Urysohn, por lo que existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que para un $x, y \in X$ con $a \neq b$ se cumple que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Sin embargo, usando el Teorema 3.11.1 tenemos que entonces la imagen de f debe ser numerable y conexa, lo cual no es posible a menos que sea un punto, pero entonces no se cumpliría que $f(x) = 0, f(y) = 1$; por ende, no puede existir tal función y el espacio no es Urysohn.

Sin embargo, el espacio es $T_{2\frac{1}{2}}$. Dados dos puntos distintos, podemos encontrar intervalos suficientemente pequeños que separen sus adherencias. Con el punto ideal y otro punto diferente, hay que tener en cuenta que al hacer el $\overline{W_n(\omega)}$ se agregan las siguientes dos líneas; sin embargo, simplemente con coger un n lo suficientemente grande, tenemos un W_n que no interseca con ningún abierto del otro punto.

Axiomas de separación

Veamos ahora en qué lugar de la cadena de implicaciones se sitúa este nuevo axioma.

Proposición 3.11.2 *Todo espacio topológico $T_{3\frac{1}{2}}$ es un espacio de Urysohn.*

Demostración 3.11.2 *Sea X un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. Por la Proposición 3.6.1 X es T_3 luego T_1 , y por la Caracterización 3.3.1, los unipuntuales $\{x\}$ e $\{y\}$ son cerrados. Entonces, por la Definición 3.1.6, tenemos que existe una función de Urysohn entre el cerrado $\{x\}$ y el punto $y \notin \{x\}$, luego X es un espacio de Urysohn. ■*

Antes de demostrar que esta implicación no es doble, vamos a dar un resultado sobre espacios de Urysohn.

Proposición 3.11.3 *Ser espacio de Urysohn se mantiene bajo una biyección cerrada.*

Demostración 3.11.3 *Sea $\phi : X \rightarrow Y$ una biyección cerrada entre dos espacios topológicos y X un espacio de Urysohn. Sean $x', y' \in Y$ con $x' \neq y'$, tomando $x = \phi^{-1}(x'), y = \phi^{-1}(y')$, tenemos que x, y son dos puntos distintos de X ya que ϕ era biyectiva. Por ende, existe una función de Urysohn f entre ellas tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Por tanto, hemos encontrado una función g descrita así:*

$$g : Y \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow g(x) = f(\phi^{-1}(x))$$

que es continua y cumple que $g(x') = 0$ y $g(y') = 1$. Luego, hemos encontrado una función de Urysohn entre cualesquiera dos puntos de Y , es decir, Y es un espacio de Urysohn. ■

Para demostrar que la implicación no es doble, demos un ejemplo de un espacio que es espacio de Urysohn pero no $T_{3\frac{1}{2}}$, ni tampoco T_3 .

Ejemplo 3.11.2 (Espacio que es Urysohn pero no $T_{3\frac{1}{2}}$ ni T_3) *El espacio del Ejemplo 3.6.1 no es T_3 , luego no es $T_{3\frac{1}{2}}$. Veamos ahora que es un espacio de Urysohn.*

Usando la Proposición 3.11.3, al ser la topología usual se trata de un espacio de Urysohn (ya que cumple T_6 y por ende es $T_{3\frac{1}{2}}$) y la topología del medio disco es una expansión de esta, por ende es Urysohn al ser la expansión una biyección cerrada.

Una vez hemos visto que hay espacios Urysohn que no son T_3 , veamos ahora que hay espacios T_3 que no son de Urysohn, con lo cual los axiomas T_3 y Urysohn no son comparables.

Ejemplo 3.11.3 (Espacio T_3 pero no Urysohn) *El sacacorchos de Tychonoff se basa en juntar varias placas construidas con ordinales, por lo que primeramente veamos cómo se construyen estas placas. Dado un ordinal α definimos el siguiente conjunto linealmente ordenado $A_\alpha = (-0, -1, -2, \dots, \alpha, \dots, 2, 1, 0)$ con la topología del orden, es decir que $-0 < -1 < -2 < \dots < \alpha < 2 < 1 < 0$. Tomando el primer ordinal transfinito ω y el primer ordinal transfinito no numerable (ver Definiciones 2.41) ω_1 podemos construir el siguiente espacio producto $P = A_{\omega_1} \times A_\omega$, lo representamos en la Figura 3.13.*

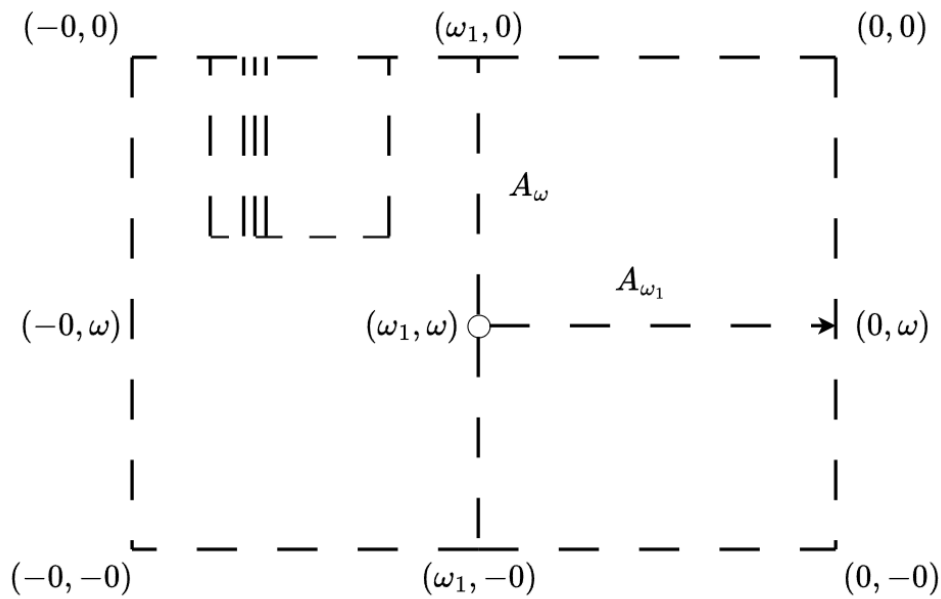


Figura 3.13: Placa de Tychonoff, Ejemplo 3.11.3, contraejemplo de espacio T_3 que no es Urysohn.

A esta placa le quitaremos el punto (ω_1, ω) obteniendo $P^* = P \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$. Tomando una cantidad numerable de P^* formaremos el sacacorchos de Tychonoff, para ello ponemos una placa de Tychonoff encima de otra y las numeramos con un entero i de manera que la placa inmediatamente superior tendrá el entero $i+1$ y la inmediatamente inferior el entero $i-1$, para juntarlas lo que haremos será unir el cuarto cuadrante con el primer cuadrante de la placa inferior y el primer cuadrante con el cuarto de la superior; de esta manera obtenemos esta construcción. Representamos esto en la Figura 3.14.

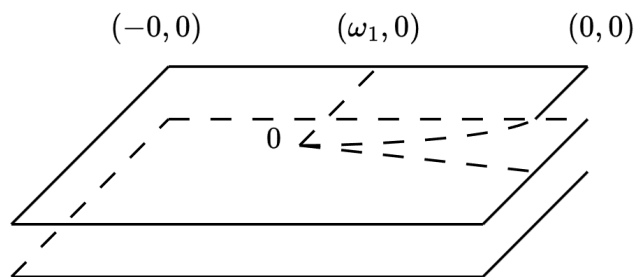


Figura 3.14: Unión de dos placas, Ejemplo 3.11.3, contraejemplo de espacio T_3 que no es Urysohn.

Llamaremos a esta unión infinita de placas de Tychonoff como S , a S le vamos a añadir dos puntos ideales a^+ y a^- , cuyos abiertos serán para a^+ todas las placas por encima de un nivel i (como en el retículo de Roy, Ejemplo 3.11.1) y para a^- todas las placas por debajo de un nivel i . Obtenemos entonces el siguiente espacio al cual llamaremos X . En la Figura 3.15 vemos la representación gráfica del sacacorchos.

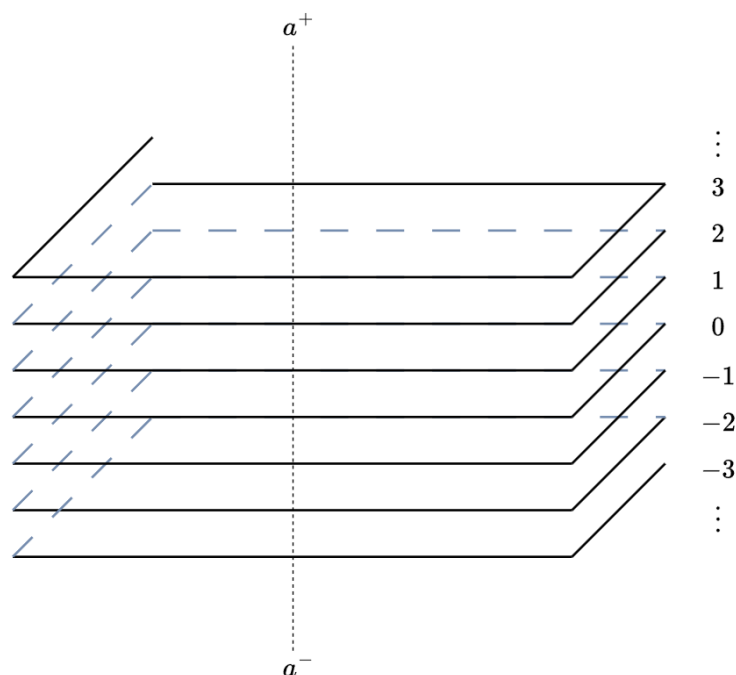


Figura 3.15: Sacacorchos de Tychonoff, Ejemplo 3.11.3, contraejemplo de espacio T_3 que no es Urysohn.

Para demostrar que es T_3 , debemos considerar el caso de los dos puntos a^+ y a^- , pues cada placa es T_3 y esta propiedad se mantiene en la unión de las placas. Tomando el punto a^+ y un cerrado C que no lo contiene, entonces $X \setminus C$ es un abierto que contiene a todas las placas a partir de un nivel k , por lo que tomando los abiertos $U = \{x \in X | L(x) < k + 1\}$ y $V = \{x \in X | L(x) > k + 1\}$ (con $L(x)$ siendo el nivel al que pertenece x) tenemos dos abiertos que contienen a C y a a^+ respectivamente. Haciendo un argumento similar para a^- , tenemos que entonces el espacio es T_3 .

Para demostrar que el espacio no es Urysohn, nos basamos en el hecho de que, cogiendo el eje de las abscisas en cada placa, toda aplicación continua de estas a $[0, 1]$ es eventualmente continua; lo vemos de manera gráfica en la Figura 3.16.



Figura 3.16: Representación de cómo una función se hace constante fuera de un intervalo, Ejemplo 3.11.3.

En la zona roja, la función toma un valor constante y en la negra no; tomando puntos en cada sección roja de cada placa de manera ascendente, tenemos que el límite de la sucesión es a^+ y tomándolos de manera descendente, entonces el límite es a^- . Por lo que, al ser f constante en toda la sucesión y una función continua, tenemos entonces que $f(a^+) = f(a^-)$; por ende, no puede ser un espacio de Urysohn.

Por último, debemos mencionar que, aunque no lo vamos a demostrar, ser espacio de Urysohn también es propiedad topológica.

3.12. Espacios semirregulares

Veamos la definición de estos espacios.

Definición 3.3 Sea X un espacio topológico T_2 (Definición 3.1.3). Se dice que X es semirregular si los abiertos regulares (Definición 2.3) forman una base de X .

Veamos cómo encaja este nuevo axioma en la cadena de implicaciones. Por la Definición 3.3 un espacio semirregular es automáticamente T_2 . Para ver que la implicación no es doble, veamos un ejemplo de un espacio que es T_2 que no es semirregular.

Ejemplo 3.12.1 (Espacio T_2 que no es semirregular) Como vimos en el Ejemplo 3.3, la topología de la pendiente irracional es T_2 , veamos que no es semirregular.

Tenemos que los abiertos regulares en esta topología contendrán la región en forma de diamante entre los rayos, pues los puntos en esta región tienen un abierto contenido en la adherencia. Sin embargo, como contienen a toda esta región, nunca podremos formar, mediante intersecciones o uniones de ellos, un abierto de la forma $\{(x, y)\} \cup B_\epsilon(x + \frac{y}{\theta}) \cup B_\epsilon(x - \frac{y}{\epsilon})$, pues nunca podremos tener solamente el punto (x, y) en esa región. Por ende, los abiertos regulares no forman una base de la topología y el espacio no es semirregular.

Veamos ahora que el axioma T_3 implica ser semirregular.

Proposición 3.12.1 Sea X un espacio topológico T_3 , entonces X es semirregular.

Demostración 3.12.1 Sea X un espacio T_3 , luego como es T_0 por la Proposición 3.6.1 es T_2 . Nos queda demostrar que los abiertos regulares $\mathcal{B} = \{B \in \tau : \overset{\circ}{B} = B\}$ forman una base de la topología.

Por una parte, $X \in \mathcal{B}$, ya que como X es un abierto tenemos que $\overset{\circ}{X} = X$ y al ser también cerrado entonces $\overline{X} = X$, por ende $\overset{\circ}{\overline{X}} = X$, por lo que $X \in \mathcal{B}$.

Por otra parte, sean $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$. Debido a que la intersección de dos abiertos es abierta se tiene que $U \cap V \in \tau$ y como X es T_3 se tiene por la Caracterización 3.6.1 que contiene un abierto Z tal que $x \in Z$ y $\overline{Z} \subseteq U \cap V$. Tomando el abierto $W = \overset{\circ}{\overline{Z}} \subseteq U \cap V$, veamos que es efectivamente un abierto regular. Haciendo la adherencia $\overline{W} = \overline{\overset{\circ}{\overline{Z}}} = \overline{Z}$ se tiene $\overset{\circ}{\overline{W}} = \overset{\circ}{\overline{Z}} = W$. ■

Para ver que la implicación no es doble, veamos un ejemplo de un espacio semirregular que no es T_3 .

Ejemplo 3.12.2 (Espacio que es Semirregular pero no T_3) Un ejemplo de esta situación viene dado por la topología del doble origen. Sea $X = \mathbb{R}^2 \cup \{0^*\}$, definamos los abiertos de cada punto:

$$\begin{cases} (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \Rightarrow U_r(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r, r \in \mathbb{R}\} \\ (0, 0) \Rightarrow V_n(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, y > 0\} \cup \{0\} \\ 0^* \Rightarrow V_n(0^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, y < 0\} \cup \{0^*\} \end{cases}$$

Para ver que es semirregular veamos que estos abiertos son efectivamente abiertos

Axiomas de separación

regulares:

$$\overline{U_r(a, b)}^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r, r \in \mathbb{R}\}^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r, r \in \mathbb{R}\} \\ = U_r(a, b)$$

$$\overline{V_n(0, 0)}^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}, y \leq 0\}^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, y > 0\} \cup \{0\} = V_n(0, 0)$$

$$\overline{V_n(0^*)}^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}, y \leq 0\}^\circ \cup \{0^*\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, y < 0\} \cup \{0^*\} \\ = V_n(0^*)$$

Por ende los abiertos regulares forman una base. Veamos ahora que es T_2 . Claramente se cumple para cualquier par de puntos que no sean $(0, 0)$ y 0^* pues simplemente estamos tomando bolas y semibolas de la topología usual, entre $(0, 0)$ y 0^* también se cumple pues cualquier $V_n(0, 0)$ y $V_n(0^*)$ no se intersecarán. Por ende el espacio es T_2 y semirregular.

Para comprobar que no es T_3 vamos a ver que no es $T_{2\frac{1}{2}}$. Esto se debe a que para $(0, 0)$ y 0^* cualquier $\overline{V_n(0, 0)} \cap \overline{V_n(0^*)} \neq \emptyset$, por ende no es $T_{2\frac{1}{2}}$ luego no es T_3 .

Hemos visto entonces que T_3 implica semirregular, que semirregular implica T_2 , que hay espacios semirregulares que no son T_3 y que hay espacios T_2 que no son semirregulares. Veamos ahora que el axioma ser semirregular no es comparable con $T_{2\frac{1}{2}}$. Acabamos de ver un ejemplo de un espacio semirregular que no es $T_{2\frac{1}{2}}$, y veamos ahora uno de un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ que no es semirregular.

Ejemplo 3.12.3 (Espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ que no es semirregular) Este ejemplo es la extensión de la topología usual con la topología de los complementos numerables.

Consideramos la recta real \mathbb{R} con la topología τ , siendo la topología más pequeña generada por $\tau_1 \cup \tau_2$, siendo τ_1 la topología usual y τ_2 la topología de los complementos numerables. Tenemos que este espacio es $T_{2\frac{1}{2}}$ debido a que es expansión de la topología usual, pues la identidad en una expansión es una biyección cerrada (Definición 2.4) y $T_{2\frac{1}{2}}$ se mantiene bajo biyecciones cerradas (Proposición 3.5.5).

Sin embargo, no es semirregular, ya que el conjunto de los irracionales es abierto \mathbb{I} pues su complemento, los racionales, son numerables, pero no se puede escribir como unión de abiertos regulares.

Nos quedaría ver su relación con los espacios de Urysohn. Sin embargo, esto ya lo hemos visto pues todo espacio T_3 es semirregular y hemos visto un espacio T_3 que no es Urysohn, por ende hay espacios semirregulares que no son Urysohn, el Ejemplo 3.11.3. Por otra parte, un ejemplo de un espacio de Urysohn pero no semirregular es el de los complementos numerables, el Ejemplo 3.12.3, pues ser Urysohn se mantiene bajo biyecciones cerradas (Proposición 3.11.3) y al ser esta topología extensión de la usual la identidad es una biyección cerrada y por ende el espacio es Urysohn pero no semirregular. En conclusión, ser Urysohn y ser semirregular no son comparables.

3.13. Jerarquía de los axiomas de separación

Los resultados de las secciones anteriores producen una jerarquía en los axiomas de separación como una cadena de implicaciones y no de equivalencias, habiendo dado un contraejemplo para cada una de las situaciones. Los axiomas T_0 , T_1 , T_2 , $T_{2\frac{1}{2}}$, T_3 , $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4 , T_5 y T_6 producen un orden lineal en la cadena de implicaciones (ver Figura 3.17). Añadiendo los axiomas adicionales Urysohn y semirregular, obtenemos una extensión a un orden parcial (ver Figura 3.18). Este es el resultado central de este trabajo, pues simboliza que cada vez estamos haciendo distinciones más fuertes, construyendo un sistema coherente para medir la separación de los distintos espacios topológicos.

Teorema 3.13.1 *Dado un espacio topológico X , se tiene la siguiente cadena de implicaciones de sus axiomas de separación.*

$$T_6 \implies T_5 \implies T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3 \implies T_{2\frac{1}{2}} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$$

Figura 3.17: Jerarquía de axiomas de separación.

Añadiendo los axiomas Urysohn y semirregular, obtenemos las siguientes relaciones en sus axiomas de separación. Ninguna de estas implicaciones es una equivalencia.

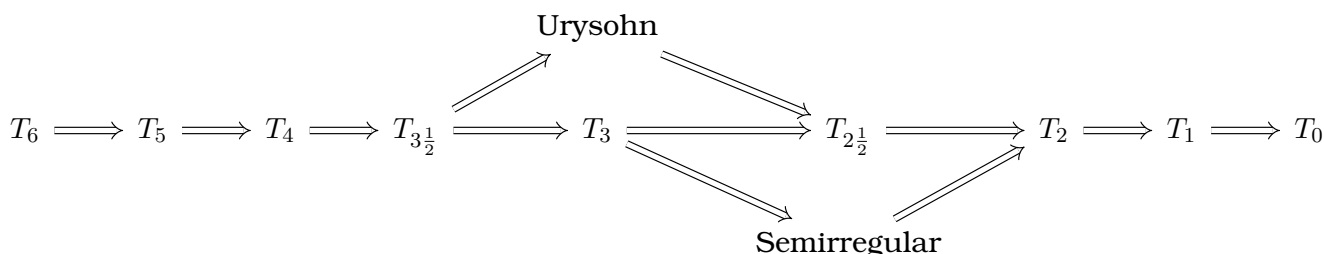


Figura 3.18: Jerarquía de axiomas de separación con axiomas adicionales.

Demostración 3.13.1 *Como consecuencia de la Proposición 3.10.1, todo espacio T_6 es también T_5 . Sin embargo, existen espacios T_5 que no son T_6 (véase el Ejemplo 3.10.1). A su vez, por la Proposición 3.9.1, todo espacio T_5 es T_4 , aunque no todo T_4 es T_5 (véase el Ejemplo 3.9.1).*

Asimismo, la Proposición 3.8.1 garantiza que todo espacio T_4 es $T_{3\frac{1}{2}}$, pero existen espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ que no son T_4 (Ejemplo 3.8.1). Por otra parte, todo espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ es T_3 según la Proposición 3.7.1, aunque también hay espacios T_3 que no son $T_{3\frac{1}{2}}$ (Ejemplo 3.7.1).

Además, ser $T_{3\frac{1}{2}}$ implica ser un espacio de Urysohn, pero hay espacios de Urysohn que no son $T_{3\frac{1}{2}}$ (Ejemplo 3.11.1), así como espacios que son de Urysohn pero no T_3 (Ejemplo 3.6.1) y espacios T_3 que no son de Urysohn (Ejemplo 3.11.3).

Axiomas de separación

Tanto los espacios T_3 como los de Urysohn implican la propiedad $T_{2\frac{1}{2}}$ (Proposiciones 3.6.1 y 3.11.1, respectivamente), pero únicamente los espacios T_3 implican ser semirregulares (Proposición 3.12.1). En consecuencia, existen espacios semirregulares que no son de Urysohn.

Por otro lado, hay ejemplos de espacios semirregulares que no son $T_{2\frac{1}{2}}$ (Ejemplo 3.12.2) y también espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ que no son semirregulares (Ejemplo 3.12.3). Sin embargo, ser $T_{2\frac{1}{2}}$ o ser semirregular implica ser T_2 (Proposición 3.5.1 y Definición 3.3, respectivamente).

Aun así, existen espacios T_2 que no son $T_{2\frac{1}{2}}$ (Ejemplo 3.5.1) ni semirregulares (Ejemplo 3.12.1). Además, por la Proposición 3.4.1, todo espacio T_2 es T_1 , aunque hay espacios T_1 que no son T_2 (Ejemplo 3.4.1).

Finalmente, ser T_1 implica ser T_0 (Proposición 3.3.1), pero también existen espacios T_0 que no son T_1 (Ejemplo 3.3.1) e incluso espacios que no cumplen ni la propiedad T_0 (Ejemplo 3.2.1). ■

Capítulo 4

El problema de la metrizabilidad

En el capítulo anterior vimos los axiomas de separación y dimos algunas pinceladas de cómo se relacionan estos con la condición de que un espacio sea metrizable. En este capítulo vamos a ahondar en esta cuestión, veremos primeramente qué es un espacio métrico y demostraremos que cumple todos los axiomas de separación. Tras esto, intentaremos dar condiciones que tiene que cumplir un espacio para llegar a ser métrico; este desarrollo nos llevará al teorema de metrización de Urysohn y al teorema de metrización de Nagata-Smirnov, los cuales se relacionan con los axiomas de separación.

4.1. Espacio métrico

Para definir un espacio métrico, debemos definir qué es una métrica.

Definición 4.1 Dado un conjunto X , una métrica es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que para todo $x, y, z \in X$ cumple las siguientes condiciones:

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0$$

$$(M_2) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$(M_3) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M_4) \quad \text{Si } x \neq y \text{ entonces } d(x, y) > 0$$

Llamamos a $d(x, y)$ la distancia entre x e y . Si d solo satisface (M_1) , (M_2) y (M_4) , decimos que es una cuasimétrica; si solamente satisface (M_1) , (M_2) y (M_3) , decimos que es una pseudométrica.

Definición 4.2 Un espacio métrico (X, d) es un conjunto X dotado de una métrica d .

Una métrica en un conjunto X nos permite definir una topología en X tomando como base las bolas abiertas $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. Podemos encontrar varias métricas que nos den una misma topología; de hecho, hay un número infinito de métricas que dan el mismo espacio métrico.

Definición 4.3 Un espacio topológico X es metrizable si es homeomorfo al espacio topológico inducido por un espacio métrico (X, d) .

El problema de la metrizabilidad

Veamos ahora qué axiomas de separación cumple un espacio métrico.

Proposición 4.1.1 *Un espacio métrico es T_6 , luego cumple todos los axiomas de separación del capítulo 3 (ver Figuras 3.17, 3.18).*

Demostración 4.1.1 *Para ver que un espacio métrico es T_6 (Definición 3.1.9) probaremos que es T_1 , que es T_4 y que todo cerrado es un G_δ (Definición 2.15).*

1. Un espacio métrico es T_1 .

Para esto vamos a probar algo incluso más fuerte, veamos que un espacio métrico es T_2 . Sean $x, y \in X, x \neq y$ y la topología inducida por la métrica generada por la base de bolas $B = \{B(x, r), x \in X, r > 0\}$, como $x \neq y$ tenemos que $d(x, y) > 0$, por ende cogemos el radio $r = \frac{d(x, y)}{2}$ con esto construimos las bolas $B(x, r)$ y $B(y, r)$, veamos que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Supongamos que no es así, que existe un z tal que $z \in B(x, r)$ y $z \in B(y, r)$ entonces $d(x, z) < r$ y $d(y, z) < r$ por ende $d(x, z) + d(z, y) < 2r = d(x, y)$, lo cual contradice la desigualdad triangular. Por ende no puede existir este z y entonces las bolas son disjuntas. El espacio es T_2 y como hemos probado en la Proposición 3.4.1, el espacio es T_1 .

2. Un espacio métrico es T_4 .

Sean C, D cerrados disjuntos de X , vamos a construir dos abiertos U, V tal que $C \subset U, D \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Tenemos que $\forall x \in C \exists \epsilon_x > 0$ tal que $B(x, \epsilon_x) \cap D = \emptyset$, ya que si no $x \in \overline{D} = D$ lo cual no es posible, de la misma manera para todo $y \in D \exists \epsilon_y > 0$ tal que $B(y, \epsilon_y) \cap C = \emptyset$. Por ende construimos los abiertos:

$$U = \bigcup_{x \in C} B(x, \frac{\epsilon_x}{2}), V = \bigcup_{y \in D} B(y, \frac{\epsilon_y}{2})$$

Tenemos que $C \subset U$ y $D \subset V$, veamos que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos que no es así, que existe un $z \in U \cap V$ es decir que z estará en una de las bolas para unos $x \in C, y \in D$, es decir, $z \in B(x, \frac{\epsilon_x}{2})$ y $z \in B(y, \frac{\epsilon_y}{2})$. Entonces $d(x, z) < \frac{\epsilon_x}{2}$ y $d(y, z) < \frac{\epsilon_y}{2}$, por ende:

$$d(x, z) + d(y, z) < \frac{\epsilon_x}{2} + \frac{\epsilon_y}{2}$$

Cogiendo $\epsilon_x \leq \epsilon_y$, sin pérdida de generalidad tenemos que:

$$d(x, z) + d(y, z) < \epsilon_y,$$

lo cual contradice la desigualdad triangular. Por tanto no existe este z y $U \cap V = \emptyset$, por lo que hemos encontrado dos abiertos disjuntos para cualquier par de cerrados, es decir que el espacio es T_4 .

3. Todo cerrado en un espacio métrico es G_δ .

Sea F un cerrado, para un $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_{\frac{1}{n}} = \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{1}{n})$, tenemos que $F_{\frac{1}{n}}$ es un abierto que contiene a F . De hecho $F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$, ya que $F \subseteq F_{\frac{1}{n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que es una igualdad. Sea $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$, vamos a ver que este punto es un punto de acumulación de F y como F es cerrado entonces $y \in F$.

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe un $\frac{1}{n} < \epsilon$, como $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$ entonces existe un $x \in F$ tal que $y \in B(x, \frac{1}{n})$ y por ende $d(x, y) < \frac{1}{n} < \epsilon$. Por ende y es punto límite de F y como F es cerrado se tiene que $\overline{F} = F$. Por ende $y \in F$, por lo que: $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$, la cual es una intersección contable de abiertos, por ende F es G_δ .

Al ser T_4 y todo cerrado ser G_δ se tiene que cualquier espacio métrico es T_6 y por ende cumplen todos los axiomas de separación. ■

Vamos a dar un espacio topológico métrico que, por tanto, es T_6 y cumple todos los axiomas de separación.

Ejemplo 4.1.1 (Espacio métrico que es T_6) Sea \mathbb{R} el conjunto de números reales y la base de la topología usual $B_u = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Veamos que es metrizable.

La topología usual es generada por la métrica $d(x, y) = |x - y|$ en los números reales, para esto veamos como es la topología inducida. Esta es generada por la base de bolas $\mathcal{B} = \{B(x, r) | x \in \mathbb{R}, r > 0\}$ con $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\}$. Sin embargo $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y de manera trivial toda $B(x, r) \in B_u$, por ende $\tau_d \subseteq \tau_u$. Ahora todo (a, b) se puede ver como $B(\frac{b+a}{2}, \frac{b-a}{2})$, por ende todo intervalo es una bola y por ende $\tau_d = \tau_u$, es decir que la topología usual es generada por la métrica $d(x, y) = |x - y|$. Al ser metrizable, por la Proposición 4.1.1 es T_6 .

Para ver que ser T_6 y ser metrizable no son equivalentes, vamos a dar un ejemplo de un espacio que es T_6 pero no es metrizable; pero antes, vamos a dar un resultado de espacios métricos.

Proposición 4.1.2 Sean X e Y dos espacios métricos cuyas métricas son d y d' respectivamente, y sus respectivas topologías inducidas son τ, τ' . Entonces el espacio topológico producto $(X \times Y, \tau \times \tau')$ es metrizable.

Demostración 4.1.2 Veamos que la topología producto es igual a la topología producida por la siguiente métrica:

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \times (x', y') \rightarrow d((x, y), (x', y')) = \sup(d(x, x'), d'(y, y'))$$

Se puede comprobar fácilmente que es una métrica, veamos ahora que la topología que genera esta métrica, $\tau_{X \times Y}$, es la misma que $\tau_1 \times \tau_2$. Para esto veamos que las siguientes bases $\mathcal{B} = \{B((x, y), \varepsilon)\}$ y $\mathcal{B}' = \{B_1(x, \varepsilon) \times B_2(y, \varepsilon)\}$ son iguales.

Sea $(x, y) \in X \times Y$ y $B \in \mathcal{B}$ tal que $(x, y) \in B$, veamos que existe un $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$. Como $(x, y) \in B$ tenemos que habrá un punto $(x', y') \in B$ tal que $d((x, y), (x', y')) < \varepsilon$ es decir que $\sup(d(x, x'), d'(y, y')) < \varepsilon$, sin pérdida de generalidad supongamos que el supremo es d , es decir que $d(x, x') < \varepsilon$, con esto nos definiremos $\epsilon = \varepsilon - d(x, x')$ y construimos el abierto $B' = B_1(x, \epsilon) \times B_2(y, \epsilon)$. Está claro que $(x, y) \in B_1(x, \epsilon) \times B_2(y, \epsilon)$, veamos que $B_1(x, \epsilon) \times B_2(y, \epsilon) \subseteq B$.

Sea $(c, d) \in B_1(x, \epsilon) \times B_2(y, \epsilon)$ es decir que $d(c, x) < \epsilon$ y $d'(d, y) < \epsilon$ por lo que $\sup(d(c, x), d'(d, y)) = \epsilon - d_1(x, x')$. Como $d((x', y'), (c, d)) < d((x', y'), (x, y)) + d((x, y), (c, d))$ entonces $d((x', y'), (c, d)) < d_1(x, x') + \epsilon - d_1(x, x') = \epsilon$ por ende $(c, d) \in B$. Con esto tenemos que $\tau \subseteq \tau_1 \times \tau_2$.

Veamos ahora el contrario, sea $(x, y) \in X \times Y$ y $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $(x, y) \in B'$, veamos que existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $(x, y) \in B \subseteq B'$. Como $(x, y) \in B'$ tenemos que entonces $(x, y) \in B_1(x', \epsilon_1) \times B_2(y', \epsilon_2)$ por lo que $d(x, x') < \epsilon_1$ y $d'(y, y') < \epsilon_2$, supongamos sin pérdida de generalidad que $d(x, x') < d'(y, y')$ entonces tomamos el abierto $B = \{(c, d) \in X \times Y | d((c, d), (x, y)) < \epsilon_1 - d(x, x')\}$, está claro que $(x, y) \in B$, veamos que $B \subseteq B'$.

Sea $(c, d) \in B$ entonces $\sup(d(c, x), d'(d, y)) < \epsilon_1 - d(x, x')$, supongamos que el supremo es $d(c, x)$, por ende $d(c, x) < \epsilon_1 - d(x, x')$. Sabiendo que $d(x', c) < d(a, x) + d(x, c) < d(x', x) +$

El problema de la metrizabilidad

$\epsilon_1 - d(x', x) = \epsilon_1$ por ende $d(x', c) < \epsilon_1$, tenemos entonces que $B \subseteq B_1(x, \epsilon_1) \times B_2(y, \epsilon_2)$. Con esto último tenemos que $\tau_1 \times \tau_2 \subseteq \tau$, por ende $\tau = \tau_1 \times \tau_2$. ■

Veamos ahora que no es una equivalencia ser métrico y ser T_6 .

Ejemplo 4.1.2 (Espacio T_6 que no es métrico) Como acabamos de ver en la Proposición 4.1.2 el producto de espacios métricos es métrico; por ende, si todo espacio T_6 fuese métrico, entonces su producto sería métrico. Sin embargo, como vimos en el Ejemplo 3.10.3 la topología de Sorgenfrey es T_6 , pero su producto no es T_4 y por ende no puede ser métrico, es decir, que la topología de Sorgenfrey no puede ser un espacio métrico. Por lo que hay espacios T_6 que no son métricos.

Estos resultados permiten agrandar el diagrama de axiomas de separación, incluyendo la propiedad de la metrizabilidad.

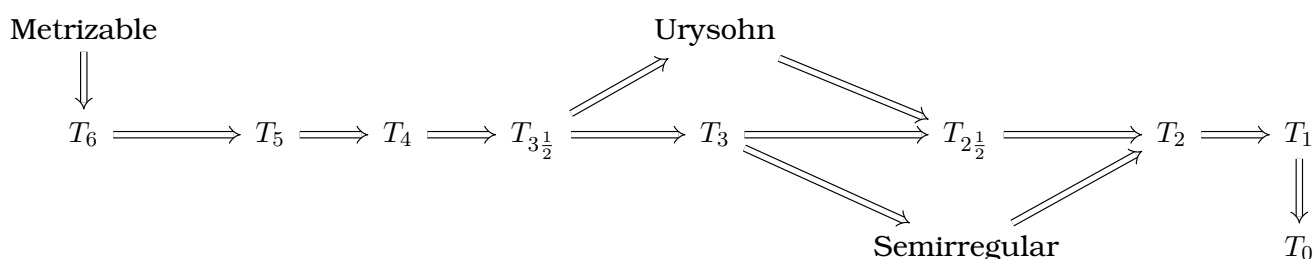


Figura 4.1: Jerarquía de axiomas de separación con metrizabilidad.

Antes de los teoremas que relacionan los axiomas de separación con el problema de metrizabilidad, debemos dar unos resultados.

Proposición 4.1.3 La metrizabilidad es propiedad hereditaria.

Demostración 4.1.3 Dado un espacio métrico X y H un subespacio de él, entonces tenemos que la función $d_{H \times H} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica, pues $H \subseteq X$ es un subconjunto de X en las que se tienen que cumplir las propiedades de una métrica. Por ende, H es un espacio métrico. ■

Proposición 4.1.4 La metrizabilidad es propiedad topológica.

Demostración 4.1.4 Sea X un espacio topológico metrizable e Y otro espacio topológico con $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre ellos, entonces Y es un espacio métrico.

Para demostrar que Y es un espacio métrico, debemos encontrar una métrica en él. Para esto, definimos la siguiente aplicación:

$$d' : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d'(x, y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$$

donde d es la métrica en X que induce la topología τ . Se puede comprobar fácilmente que d' es una métrica en Y :

- **No negatividad y separación:** Como d es una métrica, $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$. Dado que f es biyectiva, se tiene que $d'(x, y) = 0 \iff d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = 0 \iff f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \iff x = y$.

4.2. Teorema de metrización de Urysohn

- **Simetría:** Para cualesquiera $x, y \in Y$, se cumple que $d'(x, y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(f^{-1}(y), f^{-1}(x)) = d'(y, x)$.
- **Desigualdad triangular:** Para cualesquiera $x, y, z \in Y$, se cumple que $d'(x, z) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(z)) \leq d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) + d(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) = d'(x, y) + d'(y, z)$.

Por lo tanto, d' es una métrica en Y .

Finalmente, probemos que la topología inducida por d' coincide con τ' . Dado que f es un homeomorfismo, se tiene que $U \subset Y$ es abierto en τ' si y solo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Como la topología de X está inducida por d , los abiertos de X son exactamente las uniones de bolas abiertas en d . Por construcción, la preimagen bajo f^{-1} de una bola abierta en d' es una bola abierta en d . Por lo tanto, la topología inducida por d' en Y coincide con τ' , lo que demuestra que Y es un espacio metrizable. ■

Además, se puede comprobar que el producto numerable de espacios métricos es métrico. La demostración se puede encontrar en [10, pág 277, Teorema 1.3].

Proposición 4.1.5 *El producto numerable de espacios métricos es métrico.*

4.2. Teorema de metrización de Urysohn

Este es el primer gran resultado de este capítulo; este teorema nos permitirá dar unas condiciones en un espacio topológico, las cuales garantizan que será un espacio métrico; sin embargo, no todo espacio métrico las cumplirá. Esto último lo resolveremos en la siguiente sección con el teorema de metrización de Nagata-Smirnov.

Teorema 4.2.1 (de Metrización de Urysohn) *Todo espacio T_3 con base numerable es metrizable.*

Demostración 4.2.1 *Para realizar esta demostración lo que vamos a hacer es demostrar que todo espacio T_3 es homeomorfo a un subespacio de un espacio métrico, al ser este subespacio un espacio métrico por la Proposición 4.1.3 y conservarse la metrizableidad bajo homeomorfismo por la Proposición 4.1.4 entonces tendremos que todo espacio T_3 con base numerable es métrico.*

Construyamos entonces esta aplicación, para ello nos vamos a valer del resultado de la Proposición 3.8.5, pues al ser todo con base numerable un espacio de Lindolof (Proposición 2.1.6) y ser el espacio T_3 tenemos que entonces es T_4 . En los espacios T_4 podemos usar el lema de Urysohn, (Lema 3.8.1), por lo que siendo $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la base numerable, cogeremos los pares de abiertos básicos B_n, B_m tales que $\overline{B_n} \subset B_m$ por lo que cogiendo los cerrados $\overline{B_n}$ y $X \setminus B_m$ tenemos que existe una función continua $g_{nm} : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g_{nm}(\overline{B_n}) = 1$ y $g_{nm}(X \setminus B_m) = 0$.

Apliquemos esto a todos los puntos de X , sea $x_0 \in X$ y un abierto B_n tal que $x_0 \in B_n$, como el espacio es T_3 , por la Caracterización 3.6.1 tenemos que existirá otro abierto B_m tal que $x_0 \in \overline{B_n} \subset B_m$, estos n, m nos identifican la g_{nm} anteriormente explicada, la cual vale 1 en x_0 y vale 0 fuera de $f(\overline{B_n})$, reindexando estas aplicaciones obtenemos la familia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Esto nos permite definir la siguiente aplicación:

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$$
$$x_0 \rightarrow F(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0), \dots)$$

El problema de la metrizabilidad

Tenemos que F es continua pues cada f_n es continua, además es inyectiva pues dados $x \neq y$ habrá un f_n tal que $f_n(x) > 0$ y $f_n(y) = 0$, por lo que $F(x) \neq F(y)$. Fijándonos solo en la imagen tendremos entonces que es sobreyectiva y por ende es biyectiva. Falta entonces comprobar que f es abierta.

Sea $U \in \tau$, veamos que $F(U)$ es un abierto de la imagen, la cual vamos a llamar Z , para cada z_0 deberemos encontrar un abierto W tal que $z_0 \in W \subseteq F(U)$. Sea x_0 un punto de U tal que $F(x_0) = z_0$, eligiendo un índice N tal que $f_N(x_0) > 0$ y $f_N(X \setminus U) = 0$. Tomando el rayo $(0, +\infty)$ definimos el abierto $V = \pi_N^{-1}((0, \infty))$. Definimos $W = Z \cap V$, el cual es un abierto relativo, veamos que z_0 pertenece a W .

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$$

Veamos ahora que $W \subset F(U)$, si $z \in W$ entonces $z = F(x)$ para algún $x \in X$ y $\pi_N(z) \in (0, \infty)$ ya que $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x) > 0$ y f_N se hace 0 fuera de U , por lo que $x \in U$ y por ende $z \in F(U)$. ■

4.3. Teorema de metrización de Nagata-Smirnov

Como hemos visto con el teorema de metrización de Urysohn, pedir condiciones a la base junto con T_3 está estrechamente relacionado con la metrizabilidad. Siguiendo esta línea de pensamiento, los matemáticos Junichi Nagata y Yuri Mikhailovich Smirnov dieron de manera independiente en los años 1950 y 1951 un teorema que daba una condición necesaria y suficiente para el problema de la metrizabilidad; este es el **teorema de Nagata-Smirnov**.

Antes de enunciarlo y hacer su demostración, debemos introducir unos conceptos previos y algunos resultados que se usan en el teorema.

Definición 4.4 Sea X un espacio topológico y \mathcal{F} un conjunto de subconjuntos de X . Decimos que \mathcal{F} es localmente finito si y solo si cada elemento de X tiene un entorno que interseca a un número finito de conjuntos de \mathcal{F} .

Podemos usar esta definición para definir una base.

Definición 4.5 Sea X un espacio topológico, una base numerable localmente finita es una base que se puede escribir como unión numerable de conjuntos de abiertos localmente finitos. Esta base también es llamada σ -localmente finita.

Con esto debemos dar un resultado muy parecido a la Proposición 3.8.5.

Proposición 4.3.1 Sea X un espacio T_3 con una base \mathcal{B} numerable localmente finita, entonces X es T_6 .

Demostración 4.3.1 Como X es un espacio T_3 entonces es un espacio T_1 , por lo que debemos comprobar que es T_4 y que todos los cerrados son G_δ .

Para comprobar que el espacio es T_4 debemos demostrar antes el siguiente lema.

Lema 4.1 Sea X un espacio topológico T_3 con \mathcal{B} una base numerable localmente finita, entonces dados un cerrado F y un subconjunto $H \subseteq X$ disjunto de F entonces existe un recubrimiento abierto numerable $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ de H tal que: $\forall n \in \mathbb{N} : \overline{W_n} \cap F = \emptyset$.

4.3. Teorema de metrización de Nagata-Smirnov

Demostración 4.3.2 (del Lema 4.1) Sea $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{B} : \overline{U} \cap F = \emptyset\}$. Como el espacio es T_3 , por la Caracterización 3.6.1 dado un $x \in X \setminus F$ tenemos que $\exists U \in \mathcal{B} : x \in U, \overline{U} \cap F = \emptyset$. Por ende $\forall x \in H, \exists U_x \in \mathcal{B} : x \in U_x, \overline{U_x} \cap F = \emptyset$. Es decir que $\forall x \in H, \exists U_x \in \mathcal{U}$ por ende \mathcal{U} es un recubrimiento abierto. Por definición tenemos que: $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ con \mathcal{B}_n localmente finito, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{U}_n = \mathcal{U} \cap \mathcal{B}_n$. Como un subconjunto de un conjunto localmente finito es localmente finito tenemos que \mathcal{U}_n es localmente finito. Definimos entonces $W_n = \bigcup_{W \in \mathcal{U}_n} W$. Al ser unión de abiertos entonces W_n es abierto, veamos cómo es su clausura $\overline{W_n} = \bigcup_{W \in \mathcal{U}_n} \overline{W}$. Comprobemos que no interseca con F :

$$\overline{W_n} \cap F = \bigcup_{W \in \mathcal{U}_n} \overline{W} \cap F = \bigcup_{W \in \mathcal{U}_n} \emptyset = \emptyset$$

Y veamos que, efectivamente, $x \in W_n$. Esto se debe a que $x \in U_x$ y existe un \mathcal{B}_n tal que $U_x \in \mathcal{B}_n$, por ende $U_x \in \mathcal{U}_n$ y entonces $U_x \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U = W_n$, por lo que $x \in W_n$. ■

Usando este lema, dados dos cerrados C, D disjuntos, tenemos que cada uno de ellos tendrá un recubrimiento numerable \mathcal{U} y \mathcal{V} respectivamente tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{U_n} \cap B = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}, \overline{V_n} \cap A = \emptyset$$

Por ende, tomando los siguientes abiertos:

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \setminus \left(\bigcup_{p \leq n} \overline{V_p} \right) \quad V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \setminus \left(\bigcup_{p \leq n} \overline{U_p} \right)$$

tenemos dos abiertos disjuntos que separan C y D respectivamente, por ende el espacio es T_4 .

Nos queda comprobar que todos los cerrados son G_δ , sea $F \subseteq X$ un cerrado de X , veamos entonces que $U = X \setminus F$ es un abierto F_σ , para esto utilizaremos el siguiente lema.

Lema 4.2 Sea X un espacio topológico T_3 con \mathcal{B} una base numerable localmente finita, entonces si U es un abierto, entonces es un abierto F_σ .

Demostración 4.3.3 (del Lema 4.2) Para demostrar este lema nos debemos apoyar en el Lema 3.1. Tenemos que $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} : \overline{B} \subseteq U\}$ es un recubrimiento de U . Sin embargo, como la base era numerable localmente finita, tenemos que: $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Con cada \mathcal{B}_n un conjunto localmente finito, definimos $\mathcal{C}_n = \mathcal{C} \cap \mathcal{B}_n$, el cual es también localmente finito. Así pues, con cada \mathcal{C}_n definimos los siguientes cerrados. $C_n = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_n} \overline{C}$. Con esto tenemos que cada $C_n \subseteq U$, por lo que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq U$. Veamos ahora que U está contenido en esta unión, sea $x \in U$, tenemos que habrá un abierto \mathcal{B}_n tal que $x \in \mathcal{B}_n$, por ende $x \in C_n \in \mathcal{C}_n = \mathcal{B}_n \cap \mathcal{C}$, es decir que $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, por lo que $U \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ y, por ende, $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, es decir que U es un abierto F_σ . ■

Al ser U un abierto F_σ , tenemos que cualquier cerrado es un cerrado G_δ , como el espacio además es T_4 y T_1 , tenemos que entonces es T_6 y se completa la demostración de la Proposición 4.3.1. ■

Ya casi podemos enunciar el teorema de Nagata-Smirnov, antes debemos ver otra definición y un resultado.

Definición 4.6 Sea \mathcal{A} una colección de subconjuntos del espacio topológico X . Una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X es un refinamiento de \mathcal{A} si para cada elemento B de \mathcal{B} hay un elemento A de \mathcal{A} que contiene a B . Ya casi podemos enunciar el teorema de Nagata-Smirnov, antes debemos ver otra definición y un resultado.

El problema de la metrizabilidad

Veamos cómo se relaciona esto con los espacios metrizables.

Lema 4.3 Sea X un espacio metrizable. Si \mathcal{A} es un recubrimiento abierto de X , entonces existe un recubrimiento \mathcal{E} de X que es un refinamiento de \mathcal{A} y que es numerablemente localmente finito.

Demostración 4.3.4 Para esta demostración usaremos el teorema del buen orden¹ que dice que todo conjunto X puede ser bien ordenado, es decir existe un orden total estricto tal que todo subconjunto no vacío de X tiene un elemento mínimo. Usando este teorema, dado el conjunto \mathcal{A} podemos obtener un orden total estricto $<$ en \mathcal{A} . Denotaremos los elementos de \mathcal{A} como U, V, W, \dots

Dado una métrica en X , tomamos un $n \in \mathbb{N}$, con un elemento U de \mathcal{A} definamos $S_n(U)$ como el subconjunto que se obtiene disminuyendo U por la distancia $\frac{1}{n}$.

$$S_n(U) = \{x \in X \mid B(x, \frac{1}{n}) \subset U\}$$

Usamos el orden total que habíamos encontrado $<$ para quitarle a este conjunto todos los elementos de \mathcal{A} , menores a U , $R_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V < U} V$. Para visualizar esto mejor, tomando un \mathcal{A} con tres subconjuntos U, V, W y el orden $U < V < W$ formamos el siguiente diagrama de la Figura 4.2.

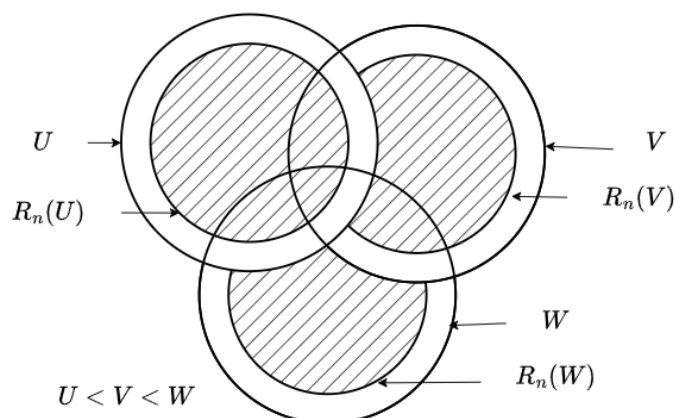


Figura 4.2: Conjuntos R_n del Teorema de Nagata-Smirnov.

Se observa que dados dos puntos en R_n diferentes su distancia es mayor a $\frac{1}{n}$, probemos formalmente esto. Sean V y W dos elementos distintos de \mathcal{A} , sin pérdida de generalidad supongamos que $V < W$, con $x \in R_n(V)$ entonces $x \in S_n(V)$, por lo que la bola de radio $\frac{1}{n}$ está contenida en V . Por otra parte como $y \in R_n(W)$ y $V < W$ entonces $y \notin R_n(V)$ por definición, por lo que y no estará en la bola de radio $\frac{1}{n}$ de x , por ende $d(x, y) > \frac{1}{n}$.

Sin embargo no sabemos si estos R_n son abiertos así que vamos a expandirlos ligeramente para obtener los abiertos $E_n(U)$, definimos como:

$$E_n(U) = \bigcup_{x \in R_n(U)} B(x, \frac{1}{3n})$$

¹El Teorema del buen orden se conoce también por Teorema de Zermelo y es equivalente al axioma de elección.

4.3. Teorema de metrización de Nagata-Smirnov

De la misma manera, si x, y pertenecen a E_n distintos entonces $d(x, y) > \frac{1}{3n}$, igual que antes representemos esto de manera gráfica, Figura 4.3.

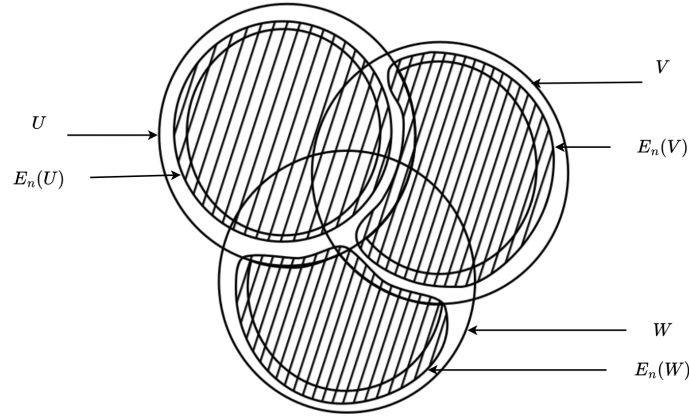


Figura 4.3: Conjuntos E_n del Teorema de Nagata-Smirnov.

Definamos entonces el siguiente conjunto $\mathcal{E}_n = \{E_n(U) | U \in \mathcal{A}\}$. Veamos que \mathcal{E}_n es un conjunto de abiertos localmente finitos que refina a \mathcal{A} . Este es un refinamiento pues $E_n(V) \subset V \forall V \in \mathcal{A}$ y es localmente finito pues dado un $x \in X$ la bola $B(x, \frac{1}{6n})$ solo intersecará a un elemento de \mathcal{E}_n .

Aunque \mathcal{E}_n no es un recubrimiento de X lo que si es un recubrimiento es el conjunto $\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$. Dado un punto $x \in X$, la colección \mathcal{A} es un recubrimiento de X , sea U el primer elemento de \mathcal{A} bajo el orden $<$, como U es abierto tenemos que existe un n tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$, por ende por definición $x \in S_n(U)$, al no haber V menores que U entonces $x \in R_n(U)$ y por ende $x \in E_n(U)$, el cual está en \mathcal{E}_n , por lo que a cada punto le hemos encontrado un $\mathcal{E}_n \in \mathcal{E}$, por lo que \mathcal{E} es un recubrimiento abierto numerable localmente finito. ■

Con esto estamos en posición de enunciar y demostrar el teorema de Nagata-Smirnov.

Teorema 4.3.1 (Nagata-Smirnov) Un espacio es metrizable si y solo si es T_3 y tiene una base numerable localmente finita.

Demostración 4.3.5 Primero vamos a demostrar que si un espacio es T_3 y tiene una base numerable localmente finita entonces es metrizable. Para esto veremos que este espacio T_3 puede ser embebido en un espacio métrico, utilizando el Teorema 3.3.1, por lo que debemos conseguir una familia de funciones para ello.

Como la base \mathcal{B} es numerable localmente finita entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, con \mathcal{B}_n un conjunto localmente finito, tenemos que dado un abierto $\mathcal{B} \in \mathcal{B}_n$ el cerrado $X \setminus \mathcal{B}$ será un cerrado G_δ al ser el espacio T_6 por la Proposición 4.3.1. Por esta misma Proposición también será T_4 , por lo que podemos usar el Lema 3.2 para obtener una función $g_{n,\mathcal{B}} : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g_{n,\mathcal{B}}(x) = 0$ si $x \in X \setminus \mathcal{B}$ y $g_{n,\mathcal{B}}(x) > 0$ si $x \in \mathcal{B}$, definiendo $f_{n,\mathcal{B}} = \frac{g_{n,\mathcal{B}}}{n}$:

$$f_{n,\mathcal{B}} : X \rightarrow [0, \frac{1}{n}], \quad x \rightarrow f_{n,\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} f_{n,\mathcal{B}}(x) = 0, & x \notin \mathcal{B} \\ f_{n,\mathcal{B}}(x) > 0, & x \in \mathcal{B} \end{cases}$$

Veamos que esta colección de funciones $\langle f_{n,\mathcal{B}} \rangle$ separa puntos de cerrados (Definición 2.10). Dado un $x \in X$ y un cerrado $F \subseteq X$, con $x \notin F$, tenemos que $x \in U = X \setminus F$, el

El problema de la metrizabilidad

cual es un abierto por lo que existirá un $\mathcal{B} \in \mathcal{B}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \mathcal{B} \subset U$, se cumple que $f_{n,\mathcal{B}}(x) = 0$ si $x \in F$ y $f_{n,\mathcal{B}}(x) > 0$ si $x \notin F$, por lo que $f(x)_{n,\mathcal{B}} \notin \overline{f_{n,\mathcal{B}}(F)}$, así que efectivamente separa puntos de cerrados. En esta familia el indexado viene dado por (n, \mathcal{B}) , por lo que llamemos $J = \mathbb{N} \times \mathcal{B}$ el cual está formado por los pares (n, \mathcal{B}) tal que $\mathcal{B} \in \mathcal{B}_n$ para algún n . Definimos:

$$f : X \rightarrow [0, 1]^J \\ x \rightarrow f(x) = (f_{n,\mathcal{B}}(x))_{(n,\mathcal{B}) \in J}$$

que es un embebimiento por el Teorema 3.3.1. Ahora vamos a dotar a esta topología de una métrica \mathfrak{p} y demostraremos que el embebimiento se mantiene, por lo que el espacio X es un espacio métrico.

Dotamos al conjunto $[0, 1]^J$ con la métrica uniforme $\mathfrak{p}((x_\alpha), (y_\alpha)) = \sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}$, esta métrica nos da una topología más fina, aunque se sigue conservando que f es abierta y biyectiva debemos demostrar que f sigue siendo continua. Para demostrar continuidad debemos comprobar que dado un $x_0 \in X$ y un $\varepsilon > 0$ existe un entorno W de x_0 tal que:

$$x \in W \rightarrow \mathfrak{p}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Fijando un n elegimos un abierto U_n de x_0 que interseque una cantidad finita de elementos de \mathcal{B}_n , es decir que hay una cantidad finita de funciones $f_{n,\mathcal{B}}$ tal que $f_{n,\mathcal{B}}(U_n) > 0$, como cada una de ellas es continua podemos elegir un entorno V_n de x_0 contenido en U_n en las que las $f_{n,\mathcal{B}}$ cambia como mucho por $\frac{\varepsilon}{2}$.

Eligiendo este entorno V_n para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, definimos $V = V_1 \cap \dots \cap V_N$, veamos que este entorno cumple la condición que necesitábamos. Sea $x \in W$, si $n < N$ entonces:

$$|f_{n,\mathcal{B}}(x) - f_{n,\mathcal{B}}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Y si $n > N$ entonces:

$$|f_{n,\mathcal{B}}(x) - f_{n,\mathcal{B}}(x_0)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $f_{n,\mathcal{B}}$ llevaba X a $[0, \frac{1}{n}]$, entonces $\mathfrak{p}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, por lo que es continua. Al estar X embebido en un subespacio de un espacio métrico entonces es métrico, veamos ahora el converso, que dado un espacio métrico se tiene que es T_3 y tiene una base numerable localmente finita.

Recíprocamente, dado X un espacio métrico tenemos que es T_3 por la Proposición 4.1.1, veamos que tiene una base numerable localmente finita.

Dada una métrica \mathfrak{m} sea \mathcal{A}_m el recubrimiento de bolas abiertas de radio $\frac{1}{m}$, por el Lema 4.3 hay un recubrimiento abierto \mathcal{B}_m de X el cual es un refinamiento de \mathcal{A}_m tal que \mathcal{B}_m es localmente finito. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_m$, tenemos que esto es una unión numerable de conjuntos localmente finitos, veamos que es base.

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, veamos que hay un elemento $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{B} \subseteq B(x, \varepsilon)$, eligiendo un $\frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, como \mathcal{B}_m es un recubrimiento de X entonces existe un $\mathcal{B} \in \mathcal{B}_m$ tal que $x \in \mathcal{B}$ como su diámetro es como mucho $\frac{2}{m}$ tenemos que $\frac{2}{m} < \varepsilon$ y por ende está contenida en $B(x, \varepsilon)$. Por lo que \mathcal{B} es base. ■

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

En esta sección analizaremos los resultados obtenidos durante todo el trabajo, mis conclusiones personales y qué trabajo futuro se podría realizar a partir de este.

5.1. Resultados

Este trabajo ha desarrollado un estudio detallado de los **axiomas de separación**, explorando sus definiciones, las relaciones existentes entre ellos y su conexión con la *metrizabilidad* de los espacios topológicos.

Tras haber presentado el contexto histórico de la topología y de los axiomas de separación en el Capítulo 1, en el Capítulo 2 se estableció una base topológica rigurosa que sustenta el resto del trabajo. Además de introducir las nociones fundamentales, se exploraron los espacios producto arbitrarios y los espacios construidos a partir de ordinales, herramientas esenciales para la construcción de ejemplos y contraejemplos.

El Capítulo 3 se dedicó íntegramente al estudio de los axiomas de separación, viendo la definición de los axiomas T_0 , T_1 , T_2 , $T_{2\frac{1}{2}}$, T_3 , $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4 , T_5 y T_6 . Para cada axioma, se han ofrecido definiciones precisas, teoremas de caracterización, implicaciones lógicas y contraejemplos significativos. Cabe destacar especialmente el **Lema de Urysohn**, el cual no solo permite caracterizar los espacios T_4 , sino que resulta fundamental para la construcción de funciones continuas que separan conjuntos cerrados disjuntos.

Estas funciones han sido clave para abordar, en el Capítulo 4, el **problema de la metrizabilidad**. En dicho capítulo, se ha demostrado que la existencia de ciertas familias de funciones continuas permite generar bases topológicas y establecer embebimientos en productos de espacios métricos. En particular, se han expuesto y demostrado dos resultados fundamentales:

- El **Teorema de Urysohn**, que garantiza que todo espacio T_3 y segundo-numerable es metrizable.
- El **Teorema de Nagata-Smirnov**, que afirma que un espacio es metrizable si, y solo si, es T_3 y tiene una base localmente finita.

Resultados y conclusiones

Ambos teoremas refuerzan la estrecha relación entre los axiomas de separación, la estructura de la base y la existencia de funciones continuas, proporcionando caracterizaciones precisas de cuándo un espacio topológico admite una métrica compatible.

En el Apéndice A se profundiza en dos aspectos que amplían y matizan el desarrollo principal del trabajo. En la sección A.1 se estudian los axiomas de separación sin asumir T_0 ni T_1 , lo que permite generalizar las definiciones y entender mejor clases como los espacios R_0 y R_1 , en los que la distinción entre puntos se puede establecer sin exigir condiciones tan estrictas.

Por su parte, en la sección A.2, se introduce el *cociente de Kolmogorov*, una herramienta que permite convertir cualquier espacio en un espacio T_0 identificando los puntos topológicamente indistinguibles. Esta construcción es particularmente útil en el estudio general de espacios no T_0 , permitiendo trabajar con modelos simplificados que conservan las propiedades topológicas esenciales.

5.2. Conclusiones personales

Este trabajo ha supuesto mi primera aproximación a una investigación matemática llevada a cabo de forma rigurosa y autónoma. Hasta ahora, gran parte de mi formación se había centrado en la resolución de problemas dentro del marco de las asignaturas del grado. Sin embargo, este proyecto me ha permitido experimentar de primera mano cómo se aborda un tema abierto en matemáticas, desde la formulación de las preguntas adecuadas hasta la búsqueda y organización del conocimiento necesario para darles respuesta. Ha sido, en este sentido, una experiencia profundamente enriquecedora que ha marcado un antes y un después en mi manera de entender el estudio matemático.

Uno de los aspectos más valiosos del trabajo ha sido la necesidad de consultar múltiples fuentes bibliográficas, comparar definiciones y resultados, y adaptarse a diferentes notaciones y estilos de presentación. Esta labor me ha llevado a desarrollar un pensamiento más crítico y flexible, imprescindible cuando se trabaja en contextos donde no todo está estandarizado y en los que conviven distintas escuelas o tradiciones matemáticas.

Durante el proceso, he tenido que estudiar y comprender conceptos que no forman parte habitual del currículo del grado, como los espacios segundo-numerables, los espacios de Lindelöf o las nociones de refinamiento topológico. Al mismo tiempo, he tenido que aplicar herramientas conocidas (como las funciones continuas, la compacidad o las propiedades de los espacios producto) de formas nuevas y más abstractas, lo que me ha ayudado a afianzar y profundizar mis conocimientos previos.

Además de los aspectos puramente matemáticos, este trabajo me ha enseñado a estructurar una investigación, a seleccionar y presentar los resultados relevantes con claridad, y a organizarme de forma eficiente a lo largo del tiempo. Todo ello ha contribuido no solo a mejorar mi competencia como estudiante de matemáticas, sino también a desarrollar habilidades transversales como la autonomía, la perseverancia y la capacidad de análisis.

En definitiva, este Trabajo de Fin de Grado ha sido una experiencia académica y personal de gran valor. Me ha permitido tener un primer contacto real con la inves-

estigación matemática y ha despertado en mí un interés aún mayor por profundizar en esta disciplina en el futuro. Sin duda, es un proyecto que ha dejado huella en mi formación y que ha transformado de forma muy positiva la manera en que afronto el estudio y la elaboración de trabajos matemáticos.

5.3. Trabajo futuro

A partir del trabajo realizado, han surgido diversas cuestiones y direcciones posibles que resultan especialmente atractivas para ser exploradas con mayor profundidad. Una de ellas es continuar profundizando en el estudio de la *metrizabilidad*, abordando no solo sus criterios clásicos, sino también otras caracterizaciones funcionales y constructivas que no han sido tratadas en este trabajo. Asimismo, sería de gran interés analizar con más detalle la relación entre los **axiomas de separación** y otras propiedades topológicas relevantes como la *compacidad*, cuya interacción puede proporcionar información adicional sobre la estructura de los espacios.

Por otro lado, aunque en este trabajo se han analizado los axiomas R_0 y R_1 (ver Apéndice A), es importante destacar que no son los únicos axiomas de separación más allá de la jerarquía $T_0 - T_6$. Existe literatura reciente que propone extensiones y generalizaciones de estos axiomas, introduciendo nuevas clases de espacios con propiedades de separación definidas mediante operadores alternativos.

En particular, el artículo " $\delta_s(\Lambda, s)$ - R_0 Spaces and $\delta_s(\Lambda, s)$ - R_1 Spaces" de Boonpok y Khampakdee (2023) introduce las nociones de espacios $\delta_s(\Lambda, s)$ - R_0 y $\delta_s(\Lambda, s)$ - R_1 , definidos en términos de conjuntos $\delta_s(\Lambda, s)$ -abiertos y operadores de cierre asociados. Este marco generaliza los axiomas clásicos mediante el uso de conjuntos semiabiertos y estructuras de cierre no tradicionales, lo cual permite definir nuevas nociones de puntos de acumulación y núcleos topológicos. Además, en dicho trabajo se ofrecen caracterizaciones equivalentes, así como resultados que extienden propiedades de simetría y separación al nuevo contexto.

Estas nuevas definiciones abren un campo de estudio muy rico, donde se pueden investigar aspectos como la relación con otras propiedades topológicas, la preservación bajo subespacios o productos, y su interacción con la metrizabilidad. Todo esto apunta a un panorama amplio y dinámico dentro del estudio de los axiomas de separación, que va más allá de los casos clásicos y se adentra en contextos más generales y abstractos.

Explorar estas nuevas vías no solo ampliaría el conocimiento en topología general, sino que también permitiría establecer conexiones con otras ramas de las matemáticas, como la teoría de la convergencia, la topología funcional o incluso contextos más aplicados como la topología generalizada o difusa.

5.4. Análisis de impacto

5.4.1. Impacto personal

Este Trabajo de Fin de Grado ha tenido un gran impacto a nivel personal, reforzando el interés por la topología y las matemáticas puras. A lo largo de su desarrollo, este

Resultados y conclusiones

interés ha crecido hasta influir en la decisión de continuar con un Máster en Matemáticas. Trabajar de forma autónoma, aprender ideas abstractas y escribir con rigor ha sido una experiencia valiosa que ha consolidado la vocación investigadora.

Aunque los conocimientos adquiridos son principalmente teóricos, han mejorado el razonamiento, la organización del pensamiento y la comunicación escrita, habilidades aplicables en muchos ámbitos. Esta formación también contribuye al **ODS 4: Educación de calidad**, al fomentar una educación superior basada en el pensamiento crítico.

5.4.2. Impacto cultural

La topología, desarrollada en gran parte en el siglo XX, ha transformado la comprensión matemática del espacio y la continuidad. Este trabajo, centrado en los axiomas de separación, se inserta en esa tradición intelectual, preservando y difundiendo un conocimiento que forma parte del patrimonio científico.

Las matemáticas puras también tienen valor cultural por su capacidad de expandir los límites del pensamiento. En este sentido, el trabajo contribuye a una cultura basada en el conocimiento y la curiosidad científica, alineándose con el **ODS 4** y, en un sentido más amplio, con el **ODS 9: Industria, innovación e infraestructura**.

Apéndice A

Axiomas de separación sin T_0 y T_1

En el desarrollo de los axiomas de separación es habitual suponer, de forma implícita, condiciones como T_0 o T_1 para simplificar la nomenclatura y la formulación de propiedades. Así, al referirnos a los axiomas T_3 , $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4 , T_5 y T_6 , hemos asumido siempre que los espacios eran al menos T_0 o T_1 . No obstante, estas identificaciones no son universales en la literatura, y al prescindir de los axiomas T_0 o T_1 , aparecen nuevos matices en la jerarquía de separación que es necesario analizar con mayor detalle.

En esta sección veremos los casos en los que se dejan de asumir T_0 y T_1 . Estudiaremos también los espacios R_0 y R_1 , que permiten refinar el análisis de separación sin asumir necesariamente T_1 , y que resultan fundamentales al considerar construcciones como el cociente de Kolmogorov. A través de ejemplos cuidadosamente escogidos, mostraremos que pueden existir espacios que satisfacen propiedades como T_3 o T_4 sin ser siquiera T_0 , y analizaremos cómo el cociente de Kolmogorov permite "corregir" esta falta, generando un espacio T_0 (o incluso T_1 si el espacio original es R_0) sin perder otras propiedades topológicas relevantes.

A.1. Normalidad, regularidad y espacios R_0 y R_1

Durante todo el Capítulo 3 hemos asumido el axioma T_0 para los espacios T_3 y $T_{3\frac{1}{2}}$; de la misma manera, hemos asumido T_1 cuando hablamos de espacios T_4 , T_5 y T_6 . Si no asumimos los axiomas T_0 y T_1 , necesitamos definir mejor la notación. En esta sección, vamos a seguir el siguiente convenio:

Definición A.1 Sea X un espacio topológico, decimos que es:

1. **Regular** si dado un cerrado C y un punto $y \notin C$, existen dos abiertos U, V disjuntos tal que $C \subset U$, $y \in V$.
2. **Completamente regular** si el espacio es T_0 y para todo par C un subconjunto cerrado y para todo punto y con $y \notin C$ existe una función de Urysohn (ver Definición 2.21) entre ellos.
3. **Normal** si dados C, D cerrados disjuntos existen dos abiertos disjuntos U, V tal que $C \subset U$ y $D \subset V$.

4. **Completamente normal** si para cada dos conjuntos separados A y B (es decir, $A \cap \bar{B} = \emptyset = \bar{A} \cap B$, ver Definición 2.11) existen dos abiertos disjuntos U, V tal que $A \subset U, B \subset V$.
5. **Perfectamente normal** si el espacio es normal y se cumple que todo cerrado es G_δ (ver Definición 2.15).

Cabe recalcar que en ninguna de estas definiciones estamos pidiendo que sean T_0 o T_1 .

Veamos algunos ejemplos de estos nuevos espacios que cumplen las condiciones de separación superiores, pero no cumplen las inferiores, como T_0 o T_1 .

Ejemplo A.1.1 (Espacio regular que no es T_0 .) La topología indiscreta en $X = \{0, 1\}$. En esta topología solo hay dos cerrados, el \emptyset y X , veamos si se cumple la condición de regularidad para cada uno de ellos y los puntos de la topología.

1. $C = X$, si $C = X$ no habrá un $a \notin X$, por ende no podemos evaluar la condición para este cerrado.
2. $C = \emptyset$ y $x = 0$, entonces cogiendo los abiertos $U = \emptyset$ y $V = X$ tenemos dos abiertos que los separan.
3. $C = \emptyset$ y $x = 1$, de la misma manera cogiendo $U = \emptyset$ y $V = X$ tenemos dos abiertos que los separan.

Por ende, se cumple la condición para cualquier par de un cerrado y un punto, por ende es regular, veamos que no es T_0 .

Cogiendo el único par de puntos distintos, $x = 0, y = 1$, tenemos que el único abierto de cada uno de ellos es el total, por ende no hay un abierto que contenga a uno y no al otro, por ende no es T_0 .

Este mismo espacio nos vale para ver la existencia de espacios normales que no son T_0 .

Ejemplo A.1.2 (Espacio normal que no es T_0 .) La topología indiscreta en $X = \{0, 1\}$. Como hemos comprobado anteriormente, esta topología no es T_0 , veamos que es normal.

La única pareja de cerrados disjuntos es $C = \emptyset$ y $D = X$, y ellos mismos son abiertos; por ende $\emptyset \subseteq \emptyset$ y $X \subseteq X$, ergo el espacio es normal.

Con estos ejemplos tenemos entonces que ni los espacios normales o regulares deben ser T_0 . Sin embargo, como hemos visto, al pedir regularidad junto con T_0 sí tenemos T_2 , ¿Pasará lo mismo si pedimos normalidad y T_0 ? La respuesta es no, hace falta pedir T_1 . Veamos un ejemplo de un espacio que es normal y T_0 pero no $T_{3\frac{1}{2}}$.

Ejemplo A.1.3 (Espacio normal y T_0 que no es $T_{3\frac{1}{2}}$.) El espacio de Sierpinski. Sea $X = \{0, 1\}$ y la topología $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$, como vimos en el Ejemplo 3.3.1, este espacio es T_0 y no es T_1 , veamos que es T_4 .

Comprobemos si podemos separar pares de dos cerrados disjuntos, los cerrados de esta topología son $\emptyset, \{1\}, X$. Haciendo parejas de cerrados disjuntos solamente obtenemos las siguientes:

- $C = \{1\}, D = \emptyset$, cogiendo los abiertos $U = X$ y $V = \emptyset$ tenemos dos abiertos tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

- $C = \emptyset, D = X$, ellos mismos son abiertos que los separan.

Al cumplirse la condición para todas las parejas de cerrados disjuntos, tenemos que el espacio es T_4 .

Veamos que no es $T_{3\frac{1}{2}}$, para esto vamos a ver que no es T_3 , esto ocurre debido a que tomando la pareja del punto $0 \in X$ y el cerrado $C = \{1\}$ falla la condición, pues el único abierto que contiene a $\{1\}$ es X , por lo que cualquier abierto que contenga a 0 intersectará con X , es decir, no hay dos abiertos que separen a 0 y a $\{1\}$. Por ende el espacio no es T_3 y no puede ser $T_{3\frac{1}{2}}$.

De manera adicional vamos a ver que este espacio es más que normal, es completamente normal. Esto se debe a que las únicas parejas de conjuntos separados (Definición 2.11) son:

- $A = \emptyset$ y $B = X$, al ser ellos mismos abiertos tenemos dos abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.
- $A = \emptyset$ y $B = \{0\}$, cogiendo los abiertos $U = \emptyset$ y $V = X$ tenemos dos abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.
- $A = \emptyset$ y $B = \{1\}$, cogiendo los abiertos $U = \emptyset$ y $V = X$ tenemos dos abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Por ende, podemos separar todos los conjuntos separados de la topología, es decir, el espacio es completamente normal.

Como acabamos de ver hay espacios que son normales o completamente normales que son T_0 y, sin embargo, no son T_3 (ni T_1). Debemos ver ahora qué pasa con los perfectamente normales, pues encontramos un comportamiento inesperado, pues ser perfectamente normal y T_0 es suficiente para ser T_1 y, por ende, cumplir todos los axiomas de separación; veamos por qué pasa esto, pero antes debemos dar unas definiciones.

Definición A.2 Decimos que dos puntos son topológicamente distinguibles si existe un abierto que contiene a uno y no al otro.

Definición A.3 Decimos que un espacio es R_0 si para todo par de puntos topológicamente distinguibles se cumple la condición T_1 , es decir, que cada uno tiene un abierto que contiene al uno y no al otro.

Demos también una caracterización de R_0 .

Caracterización A.1.1 Un espacio topológico es R_0 si y solo si para todo $x, y \in X$ tales que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ existen dos abiertos U, V tales que $x \in U \setminus V$ e $y \in V \setminus U$.

Demostración A.1.1 Veamos que si un espacio es R_0 entonces se cumple la condición descrita.

Sean $x, y \in X$ dos puntos tales que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, al ser $\overline{\{y\}}$ un cerrado tenemos que $W = X \setminus \overline{\{y\}}$ es un abierto y $x \in W, y \notin W$, por ende son dos puntos topológicamente distinguibles. Al ser dos puntos topológicamente distinguibles en un espacio R_0 entonces tenemos que existen $U, V \in \tau : x \in U, y \in V, x \notin V, y \notin U$, por ende $x \in U \setminus V$ e $y \in V \setminus U$.

Veamos el converso, sean $x, y \in X$ dos puntos topológicamente distinguibles, veamos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Esto se debe a que al ser topológicamente distinguibles, existe un abierto

U tal que $x \in U, y \notin U$. Por ende como hay un abierto de x que no corta a $\{y\}$ entonces $x \notin \overline{\{y\}}$, por lo que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Es decir que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ y entonces existen dos abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U \setminus V, y \in V \setminus U$, es decir que $x \in U, y \in V, x \notin V, y \notin U$, por ende el espacio es R_0 . ■

Es decir, ser R_0 es pedir que todos los puntos que cumplan ser la condición T_0 también cumplan la condición T_1 , pero no pedimos que todos los puntos sean T_0 . De manera natural, esto lleva a la siguiente proposición.

Proposición A.1.1 Si un espacio es R_0 y T_0 entonces es T_1 .

Demostración A.1.2 Ser R_0 pide que para todo par de puntos en los que se cumple T_0 también se cumpla T_1 , si en todo par de puntos se cumple T_0 entonces en todo par de puntos se cumplirá T_1 y por ende el espacio es T_1 . ■

Veamos qué relación tiene ser R_0 con los espacios perfectamente normales.

Proposición A.1.2 Si en un espacio todos los cerrados son perfectos (es decir, todo cerrado es G_δ , Definición 2.15) entonces el espacio es R_0 .

Demostración A.1.3 Sean dos puntos $x, y \in X$ topológicamente distinguibles, por ende hay un abierto que contiene a uno y no al otro, sin pérdida de generalidad supongamos que existe un $U \in \tau$ tal que $x \in U, y \notin U$. Como $X \setminus U$ es un cerrado y todos los cerrados son perfectos entonces tenemos que $X \setminus U = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$. Tenemos que $y \in X \setminus U$, por lo que existirá un V_i tal que $y \in V_i$, por lo que tenemos dos abiertos tales que $x \in U, y \in V_i, x \notin V_i, y \notin U$. Por lo que el espacio es R_0 . ■

Por ende, al ser en un espacio perfectamente normal todo cerrado perfecto por definición, tenemos entonces que todo espacio perfectamente normal es R_0 . Si además pedimos que sea T_0 , entonces será T_1 por la Proposición A.1.1 y, por ende, cumplirá todos los axiomas de separación. Sin embargo, por comodidad, directamente cuando hablamos de espacios perfectamente normales, pedimos directamente que sean T_1 . Esta condición no es más fuerte que si pidiésemos T_0 , pues al ser un espacio T_0 un espacio R_0 , con ambas condiciones solamente estamos diciendo que se cumpla la condición T_0 para todos los puntos. Pedir a un espacio R_0 que sea T_0 o T_1 son condiciones exactamente iguales.

Siguiendo investigando la relación de R_0 con los axiomas de separación, tenemos el siguiente resultado.

Proposición A.1.3 Sea X un espacio topológico R_0 . Si C es cerrado y $x \notin C$, entonces $C \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$.

Demostración A.1.4 Supongamos que existe un $y \in C \cap \overline{\{x\}}$, como C es cerrado entonces $\overline{\{y\}} \subseteq C$ y por ende $x \notin \overline{\{y\}}$, entonces $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Usando la Caracterización A.1.1 tenemos que existen dos abiertos U, V tal que $x \in U \setminus V, y \in V \setminus U$, es decir, que $y \notin \overline{\{x\}}$, contradicción, entonces dicho y no existe. ■

Esta proposición nos ayudará a demostrar el siguiente resultado.

Proposición A.1.4 Si un espacio normal es R_0 , entonces es completamente regular.

Demostración A.1.5 Sea C un cerrado y $x \notin C$ tendremos por la Proposición A.1.3 que $C \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$ y entonces al ser ambos cerrados disjuntos en un espacio normal, por el Lema de Urysohn (Caracterización 3.8.1) tenemos que existe una aplicación continua tal que $f(C) = 0$ y $f(\overline{\{x\}}) = 1$, por lo que $f(C) = 0$ y $f(x) = 1$, hemos encontrado

una función de Urysohn entre cualquier punto y un cerrado, es decir, que el espacio es completamente regular. ■

Debemos recalcar que los espacios normales y R_0 son completamente regulares y por ende regulares, pero no tienen por qué ser T_0 . Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo A.1.4 (Espacio que es normal y R_0 pero no T_0 .) Definimos en el conjunto $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ la topología $\tau_u \times \tau_I$, el producto de la topología usual por la indiscreta en $\{0, 1\}$. Veamos que es R_0 y normal.

Veamos que es normal. Sean $C, D \subseteq X$ dos cerrados disjuntos, estos entonces son de la forma $C = C_1 \times C_2$, los únicos cerrados del segundo espacio del producto son $\{0, 1\}$ y \emptyset , por ende $C = C_1 \times \emptyset = \emptyset$ o $C = C_1 \times \{0, 1\}$ y $D = D_1 \times \emptyset = \emptyset$ o $D = D_1 \times \{0, 1\}$, veamos que distintos pares de cerrados disjuntos tenemos.

- $C = C_1 \times \{0, 1\}$ y $D = \emptyset$, como C_1 era un cerrado de la topología usual, existe un abierto U tal que $C_1 \subseteq U$, al ser \emptyset y $\{0, 1\}$ abiertos de la indiscreta tenemos entonces que $C \subseteq U \times \{0, 1\}$, $D \subseteq \emptyset$, por lo que hay dos abiertos disjuntos que separan a C y a D .
- $C = \emptyset$ y $D = D_1 \times \{0, 1\}$, de la misma forma que antes podemos encontrar dos abiertos que los separan.
- $C = C_1 \times \{0, 1\}$ y $D = D_1 \times \{0, 1\}$, estos cerrados son solo disjuntos si $C_1 \cap D_1 = \emptyset$, por ende al ser C_1 y D_1 dos cerrados disjuntos de la topología usual tenemos que existen dos abiertos disjuntos tales que $C_1 \subseteq U$ y $D_1 \subseteq V$, al ser $\{0, 1\}$ un abierto de la indiscreta entonces tenemos que C y D están contenidos en los siguientes abiertos disjuntos, $C \subseteq U \times \{0, 1\}$, $D \subseteq V \times \{0, 1\}$, por lo que hemos encontrados dos abiertos que los separan.

Como para toda posible pareja de cerrados disjuntos hemos encontrado dos abiertos que los separan, tenemos que el espacio es normal.

Para ver que el espacio es R_0 tenemos que considerar que puntos no son topológicamente distinguibles, estos serán los que cualquier abierto de uno es un abierto del otro, en esta topología estos son los que comparten la primera coordenada, pues aunque la segunda sea distinta solo hay un abierto que les puede contener, el $\{0, 1\}$ y al ser la primera igual tendrán los mismos abiertos en la usual. Es decir que los puntos topológicamente distinguibles son aquellos que se diferencian en la primera coordenada.

Sean dos puntos topológicamente distinguibles, es decir $(x, y), (x', y')$ con $x \neq x'$, al ser x y x' puntos distintos en la topología usual y esta ser T_1 tenemos que existen dos abiertos U, V tales que $x \in U, x' \in V, x \notin V, x' \notin U$, por ende tenemos que $(x, y) \in U \times \{0, 1\}$ y $(x', y') \in V \times \{0, 1\}$ y como $x \notin V$ y $x' \notin U$ tendremos que $(x, y) \notin V \times \{0, 1\}$ y que $(x', y') \notin U \times \{0, 1\}$, por lo que el espacio es R_0 .

Claramente el espacio no es T_0 pues, dado, por ejemplo, $(0, 0)$ y $(0, 1)$, estos son dos puntos distintos que tienen los mismos abiertos, pues su primera coordenada es la misma; por ende, el espacio no es T_0 .

Mencionamos también que existen los espacios R_1 , aunque tienen menos importancia que los R_0 . Veamos su definición y un resultado.

Definición A.4 Un espacio es R_1 si para todo par de puntos topológicamente distinguibles x, y podemos encontrar dos abiertos disjuntos tales que $x \in U, y \in V$.

Proposición A.1.5 Si un espacio es T_1 y R_1 entonces es T_2 .

Demostración A.1.6 Si un espacio es T_1 entonces todos los puntos son topológicamente distinguibles y si para todo par de ellos podemos encontrar dos abiertos disjuntos que los contienen respectivamente, entonces el espacio es T_2 por definición. ■

A.2. El cociente de Kolmogorov

Que dos puntos sean topológicamente indistinguibles es una relación de equivalencia; se puede comprobar fácilmente que es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Por ende, dado un espacio topológico, podemos hacer su cociente con esta relación de equivalencia; este cociente se llama el cociente de Kolmogorov y, dado un espacio topológico X , denominaremos su cociente de Kolmogorov como $KQ(X)$. Definamos esto más formalmente.

Definición A.5 Dado un espacio topológico X y dos puntos $x, y \in X$ de él, definimos la siguiente relación de equivalencia: xRy , es decir, x está relacionado con y si los entornos de x coinciden exactamente con los de y . Esta relación de equivalencia induce la siguiente aplicación:

$$q_R : X \rightarrow X/R, \quad x \rightarrow q_R(x) = [x]$$

Llamamos su cociente de Kolmogorov espacio cociente por esta aplicación $KQ(X) = (X/R, \tau_R)$ con $\tau_R = \{U \subseteq X/R : q_R^{-1}(U) \in \tau\}$.

Si X es un espacio topológico T_0 , su cociente de Kolmogorov será homeomorfo a él, pues los puntos solo estarán relacionados consigo mismos y la topología se mantiene, por lo que su cociente de Kolmogorov no altera en nada al espacio, pero el cociente de Kolmogorov realmente identifica puntos cuando el espacio de partida no es T_0 , convirtiéndolo en un espacio T_0 .

Proposición A.2.1 Sea X un espacio topológico, entonces $KQ(X)$ es T_0 .

Demostración A.2.1 Sean $[x], [y] \in X/R$ dos puntos distintos de X/R , como $[x] \neq [y]$. Entonces son dos puntos topológicamente distinguibles de X , es decir, que existe un $U \in \tau$ tal que, sin pérdida de generalidad, $x \in U, y \notin U$. Tomando entonces el abierto $U_R = q_R(U)$, tenemos que $[x] \in U_R$ y que $[y] \notin U_R$. Por ende, $KQ(X)$ es T_0 . ■

Si un espacio es R_0 , entonces su cociente de Kolmogorov es T_1 , veamos este resultado.

Proposición A.2.2 Si X es un espacio topológico R_0 , entonces $KQ(X)$ es T_1 .

Demostración A.2.2 Veamos que se cumple la condición, sean $[x], [y] \in X/R$ dos puntos distintos de X/R , como $[x] \neq [y]$ entonces son dos puntos topológicamente distinguibles de X , por lo que al ser X un espacio R_0 existen dos abiertos U, V tales que $x \in U, y \in V, x \notin V, y \notin U$, tomando los abiertos $U_R = q_R(U), V_R = q_R(V)$ tenemos que $[x] \in U_R, [y] \in V_R$ y que $[x] \notin V_R, [y] \notin U_R$, por lo que se cumple la condición de ser T_1 para todos los puntos de X/R . ■

De esta manera, dado cualquier espacio topológico, podemos darle el axioma T_0 simplemente haciendo su cociente de Kolmogorov; muchas de las propiedades que tuviese se conservarán bajo la relación de equivalencia. Las que serán afectadas son las relacionadas con el axioma T_0 . Si además el espacio topológico es R_0 , su cociente


de Kolmogorov es T_1 , luego desaparece toda la ambigüedad en las definiciones de los axiomas de separación superiores.

Este cociente es el que hacemos intrínsecamente cuando hablamos de espacios L^2 , pues en este espacio vectorial con la norma usual dos funciones iguales menos en una cantidad numerable de puntos (conjunto de medida nula) son topológicamente indistinguibles y es lo que hace que falle la norma usual. En verdad lo que tenemos en este espacio vectorial es una seminorma, la cual es norma si y solo si la topología es T_0 .

Bibliografía

- [1] César Eduardo Lázaro Picón. *Axiomas de Separación*. Docente: Eli Monzón Briceño. Disponible en: <https://www.studocu.com/pe/document/universidad-cesar-vallejo/comunicacion-corporativa/axiomas-de-separacion-topologia/76997294> [Accedido: marzo de 2025]. 2018.
- [2] Héctor Barge Yáñez y Alfonso Zamora Saiz. *Topología*. Madrid, España: Sanz y Torres, S.L., 2021. ISBN: 978-84-18316-51-7. URL: <https://www.editorialsanzytorres.com/libros/topologia/9788418316517/>.
- [3] John L. Kelley. «The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice». English. En: *Fundamenta Mathematicae* 37.1 (1950).
- [4] James R. Munkres. *Topology*. 2nd. Harlow, Essex, England: Pearson Education Limited, 2014. ISBN: 978-1-292-02362-5.
- [5] Andrzej Mysior. «A regular space which is not completely regular». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 81.4 (1981), págs. 652-653. DOI: 10.1090/S0002-9939-1981-0601697-0.
- [6] Ronald C. Freiwald. *An Introduction to Set Theory and Topology*. Saint Louis, Missouri: Washington University in St. Louis, 2014. DOI: 10.7936/K7D798QH. URL: <https://openscholarship.wustl.edu/books/20/>.
- [7] Lynn Arthur Steen y J. Arthur Seebach. *Counterexamples in Topology*. 2nd. Dover Books on Mathematics. New York: Springer, 1978. ISBN: 978-0486687353.
- [8] Fidel Casarrubias Segura y Ángel Tamariz Mascarúa. *Elementos de Topología General*. Spanish. 1a edición. Instituto de Matemáticas, 2019, pág. 406. ISBN: 9786073017800.
- [9] Stavros Iliadis y Vassilis Tzannes. «Spaces on which every continuous map into a given space is constant». En: *Canadian Journal of Mathematics* 38.6 (1986), págs. 1281-1298. DOI: 10.4153/CJM-1986-064-4.
- [10] Robert A. Conover. *A First Course in Topology: An Introduction to Mathematical Thinking*. Reprint of 1975 edition. Mineola, New York: Dover Publications, 2014. ISBN: 978-0-486-49375-9.

Este documento esta firmado por



Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Fecha/Hora	Tue Jun 03 19:23:58 CEST 2025
Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Numero de Serie	561
Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)