



Universidad Politécnica
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos**



Grado en Matemáticas e Informática

Trabajo Fin de Grado

**Ceros de Polinomios Ortogonales de
Sobolev: Visualización y Análisis.**

Autor: Gabriel Aníbal Suárez Araoz

Tutor(a): María Del Carmen Escribano Iglesias y Raquel Natividad Gonzalo Palomar

Madrid, Junio 2025

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas e Informática

Título: Ceros de Polinomios Ortogonales de Sobolev: Visualización y Análisis.

Junio 2025

Autor: Gabriel Aníbal Suárez Araoz

Tutor: María Del Carmen Escribano Iglesias y Raquel Natividad Gonzalo Palomar

Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que, de una forma u otra, han contribuido a la realización de este Trabajo Fin de Grado.

A mi abuela Sonia Gamboa, que en paz descansa, por presentarme y hacerme aventurar en el mundo de las matemáticas.

A mis tutoras, Carmen Escribano y Raquel Gonzalo, por involucrarse completamente, apoyarme en todo momento y guiarme durante el desarrollo de este trabajo.

Sin su ayuda, este proyecto no habría sido posible.

Resumen

El estudio de los espacios de Sobolev con pesos es un tema de actualidad en el ámbito de la Teoría de Aproximación y polinomios ortogonales y con importantes aplicaciones numéricas. Este Trabajo Fin de Grado se enmarca en una investigación sobre la localización de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev con derivadas de primer orden. A diferencia del caso estándar, los ceros pueden salir de la envoltura convexa del soporte de la medida asociada. En el mismo se estudia el comportamiento del conjunto de ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev a partir de las matrices infinitas de momentos que definen productos escalares hilbertianos en los espacios de polinomios.

El objetivo principal del trabajo es la utilización de algoritmos para el análisis y la visualización del conjunto de ceros de los polinomios para obtener resultados que arrojen luz sobre el problema de localización de estos conjuntos y la relación de los soportes con la estructura del producto de Sobolev. Para ello se ha desarrollado un marco teórico unificado, extendiendo la teoría clásica, analizando y explorando la conexión de la acotación de los ceros con parámetros espectrales como la norma del operador de multiplicación y los valores singulares de ciertas matrices asociadas.

Durante el trabajo, el análisis teórico y la experimentación numérica han surgido algunas conjeturas y resultados que se enmarcan en una investigación en curso que constituyen una de las aportaciones principales.

Palabras clave: Polinomios ortogonales de Sobolev, localización de ceros, análisis espectral, visualización numérica, valores singulares.

Abstract

The study of weighted Sobolev spaces is a current topic in Approximation Theory and orthogonal polynomials with important numerical applications. This Final Degree Project is part of research on the location of zeros of Sobolev orthogonal polynomials with first-order derivatives. Unlike the standard case, zeros can escape the convex hull of the measure's support. This work studies the behavior of zero sets of Sobolev orthogonal polynomials based on infinite moment matrices that define Hilbertian inner products in polynomial spaces.

The main objective is to use algorithms for analyzing and visualizing polynomial zero sets to obtain results that shed light on the localization problem of these sets and the relationship between supports and the Sobolev product structure. A unified theoretical framework has been developed, extending classical theory and exploring the connection between zero boundedness and spectral parameters such as the multiplication operator norm and singular values of certain associated matrices.

Throughout this work, theoretical analysis and numerical experimentation have led to conjectures and results within ongoing research that constitute one of the main contributions.

Keywords: Sobolev orthogonal polynomials, zero location, spectral analysis, numerical visualization, singular values.

Tabla de contenidos

1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.2. Objetivos	2
2. Marco teórico	5
2.1. Polinomios Ortogonales	5
2.2. Matrices de momentos asociadas a productos internos	6
2.3. Operador multiplicación por z	8
2.4. Productos internos de Sobolev	11
2.5. Planteamiento del problema	15
2.6. Estado del arte	16
3. Casos Analizados y Conjeturas	21
3.1. Caso Real	23
3.2. Caso Circunferencia	32
3.3. Análisis y Conjeturas	41
4. Análisis de impacto	51
4.1. Impacto Personal	51
4.2. Impacto en Investigación	51
4.3. Beneficios Esperados y Limitaciones	51
4.4. Impacto en los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)	52
5. Conclusiones y trabajo futuro	53
5.1. Conclusiones	53
5.2. Reflexión personal	55
5.3. Trabajos Futuros	55
Bibliografía	59
Anexos	63
A. Primer anexo	63

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

Los **polinomios ortogonales** constituyen una herramienta transversal en Matemática, Física e Ingeniería: intervienen en fórmulas de cuadratura, métodos espectrales para ecuaciones en derivadas parciales, aproximación e interpolación, teoría de matrices aleatorias y procesamiento entre dos señales. En la situación clásica —ortogonalidad respecto a una medida de Borel positiva sin derivadas— la teoría quedó sólidamente establecida durante la primera mitad del siglo XX, con resultados emblemáticos como la relación de recurrencia de tres términos, la distribución real y entrelazada de los ceros y la conexión directa entre dichos ceros y las reglas de cuadratura de Gauss.

Sin embargo, la creciente demanda de modelos numéricos más flexibles motivó la **generalización de la ortogonalidad estándar**. Ya en los años sesenta Althammer, Brenner y Cohen introdujeron productos interiores que incorporan derivadas —los hoy denominados *productos de Sobolev*— con el fin de mejorar la aproximación simultánea de una función y sus derivadas [1, 2, 3]. Desde entonces se han visto fenómenos ausentes en el caso clásico:

- Los ceros pueden *abandonar el soporte real* e incluso recorrer dominios complejos; algunos polinomios exhiben ceros “errantes” que escapan de la envoltura convexa original, como muestran los ejemplos de Althammer y Meijer [4, 5].
- El operador de multiplicación por z deja de ser, en general, autoadjunto; su **norma** se convierte en el parámetro crítico que controla la explosión o acotación de los ceros. Estudios recientes formulan este fenómeno en términos de la norma de las secciones de Hessenberg y de sus **valores singulares**[6].

Profundizar en la localización de los ceros de los **polinomios ortogonales de Sobolev** resulta crucial porque:

- Permite diseñar *reglas de cuadratura Sobolev* estables, útiles en la resolución numérica de EDP con condiciones derivativas.

- Ayuda a analizar la **estabilidad de métodos de Galerkin** y de *aproximación espectral* cuando se añaden términos disipativos u operadores de orden superior.
- Conecta con problemas abiertos en **teoría espectral** de matrices infinitas y en **teoría del potencial** en el plano complejo.
- Refuerza la comprensión de fenómenos de *transición de fase* en matrices aleatorias con restricciones derivativas, con aplicaciones en física estadística y teoría cuántica de la información.

1.2. Objetivos

Para contribuir a esta línea de investigación, este Trabajo Fin de Grado se estructura en torno a los siguientes objetivos específicos que complementan y materializan los frentes de investigación descritos:

1. **Recopilación de información y estudio de la teoría de polinomios ortogonales de Sobolev.** Establecer un marco teórico sólido que unifique los conceptos fundamentales de la teoría, desde las definiciones básicas de productos internos de Sobolev hasta los resultados más recientes sobre acotación de ceros y comportamiento espectral de las matrices asociadas, contribuyendo al frente de *resultados analíticos*.
2. **Diseño de algoritmos para la visualización del conjunto de ceros a partir de matrices.** Desarrollar metodologías computacionales que permitan, a partir de las matrices de momentos y de las representaciones matriciales del operador multiplicación, generar automáticamente la localización y trayectorias de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev, fortaleciendo el área de *experimentación numérica y visualización*.
3. **Implementación computacional en MAPLE para la visualización del conjunto de ceros.** Crear un conjunto de algoritmos que automatice la construcción de matrices, el cálculo de valores singulares y radios espectrales, y la generación de visualizaciones interactivas que combinen soportes de medidas, cotas teóricas y distribución de ceros.
4. **Análisis y verificación de los resultados teóricos mediante experimentación numérica.** Contrastar los resultados computacionales con las predicciones teóricas existentes, validar las cotas de acotación en casos conocidos y explorar ejemplos donde las condiciones clásicas no se satisfacen, con el fin de identificar nuevos patrones y formular conjeturas para futuras investigaciones.

La investigación se ha desarrollado en dos frentes complementarios:

1. **Resultados analíticos.** López Lagomasino y Pijeira demostraron que, para soportes compactos, los ceros permanecen en un disco cuyo radio viene dado por la norma del operador multiplicación por z cuando este operador es acotado, enlazando el problema con la "Teoría Espectral de Operadores" [7]. Durán y Saff extendieron técnicas de localización de ceros a polinomios "no

estándar”, estableciendo cotas precisas mediante transformaciones matriciales [8]. Investigaciones más recientes, apoyadas en desigualdades de tipo Wirtinger y en el estudio de *valores singulares generalizados*, han descubierto ejemplos donde la acotación se verifica incluso sin dominancia secuencial de los pesos [9, 6].

2. **Experimentación numérica y visualización.** Usando herramientas simbólico-numéricas (Maple, Matlab, Python) el propósito es construir la matriz de Hessenberg asociada, calcular autovalores/valores singulares y **dibujar la nube de ceros**. Esta vía computacional ha revelado, por ejemplo, la convergencia del *segundo mayor valor singular* de las secciones de las matrices infinitas que representan el operador multiplicación por z hacia el radio de la envoltura convexa en casos donde el primero diverge, ofreciendo nueva evidencia para las conjeturas actuales.

Este Trabajo Fin de Grado desarrolla un **marco teórico-computacional unificado** que:

1. Formaliza la construcción de la matriz de momentos y de la matriz que representa el operador de multiplicación en productos Sobolev de primer orden.
2. Relaciona la acotación de los ceros con la norma y con los dos primeros valores singulares de las secciones de las matrices infinitas que representan el operador multiplicación por z , reforzando y extendiendo los criterios existentes.
3. Implementa un conjunto de algoritmos en MAPLE que automatiza el cálculo y la **visualización bidimensional** de ceros, soportes y espectro, posibilitando la contrastación de conjeturas y la obtención de evidencia empírica.
4. Presenta **familias de ejemplos** (medidas reales, circunferencias, mezclas discretas) que ilustran cómo la geometría del soporte influye en la dinámica de los ceros y en la convergencia de los valores singulares.

Con ello se persigue clarificar la interacción entre **geometría del soporte de las medidas, álgebra matricial y análisis funcional**, así como proponer nuevas conjeturas sobre los comportamientos asintóticos de los radios espectrales y los segundos valores singulares de las matrices infinitas Hessenberg.

Capítulo 2

Marco teórico

Antes de adentrarnos en el estudio de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev, es esencial establecer el marco teórico que usaremos a lo largo del trabajo. En este sentido, comenzaremos por definir conceptos necesarios a continuación.

2.1. Polinomios Ortogonales

Definición 1. Sea \mathbb{K} un cuerpo (normalmente \mathbb{R} o \mathbb{C}). El espacio de polinomios en una variable se define como

$$\mathbb{P}[z] = \left\{ p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k : a_k \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos $\mathbb{P}_n[z] = \{p \in \mathbb{P}[z] : \deg p \leq n\}$, de modo que $\mathbb{P}[z] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n[z]$. El conjunto $\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ forma una base de $\mathbb{P}_n[z]$, luego $\dim(\mathbb{P}_n[z]) = n + 1$.

Definición 2. Sea μ una medida de Borel positiva con soporte infinito $\text{supp}(\mu) = \{z \mid \mu(B_r(z)) > 0 \forall r > 0\}$. Definimos en $\mathbb{P}[z]$ un producto interno cualquiera por

$$\langle p, q \rangle = \int p(z) \overline{q(z)} d\mu(z), \quad p, q \in \mathbb{P}[z].$$

Esta forma sesqui-lineal satisface:

1. $\langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}$,
2. $\langle \alpha p + \beta r, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle + \beta \langle r, q \rangle$,
3. $\langle p, p \rangle > 0$ si $p \neq 0$.

Definición 3. Un **espacio prehilbertiano** o **espacio con producto interno** $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial X dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}), que satisface las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}):

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (simetría hermitiana)

Capítulo 2. Marco teórico

2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ (linealidad en la primera variable)

3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$ (definida positiva)

Un **espacio de Hilbert** es un espacio prehilbertiano que además es completo respecto a la norma inducida por el producto interno $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, es decir, toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio.

Definición 4. Sea $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ un sistema generador de un subespacio $W \subset V$ con producto interno. Construimos recursivamente

$$u_0 = v_0, \quad u_k = v_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j, \quad k = 1, \dots, n.$$

El conjunto ortonormal $e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$ satisface $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ y $\text{span}\{e_0, \dots, e_n\} = W$.

El proceso de Gram-Schmidt es fundamental para construir bases ortonormales, una herramienta esencial en el estudio de los polinomios ortogonales.

Dado un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathbb{P}[z]$, la sucesión de polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ se obtiene aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a la base monomial $\{1, z, z^2, \dots\}$:

$$\deg \varphi_n = n, \quad \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \delta_{nk}.$$

Cada P_n es único salvo su signo si se exige que su coeficiente principal sea positivo.

Definición 5. Sea $p \in \mathbb{P}[z] \setminus \{0\}$. El conjunto de ceros de p es

$$Z(p) = \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}.$$

Además, para la sucesión de polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ asociada al producto interno, definimos el conjunto de ceros Z

$$Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n = \{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}, P_n(z) = 0\}.$$

donde $Z_n = Z(P_n)$ es el conjunto de ceros del polinomio P_n .

La localización y propiedades de estos conjuntos de ceros son un tema central en la teoría de polinomios ortogonales. Para facilitar su estudio, a menudo se recurre a representaciones matriciales.

2.2. Matrices de momentos asociadas a productos internos

Definición 6. [10] Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ se denomina **hermitiana** si $A = A^*$, donde A^* denota la matriz conjugada transpuesta de A . En el caso real, una matriz simétrica satisface $A = A^t$.

Una matriz hermitiana A se dice:

2.2. Matrices de momentos asociadas a productos internos

1. **Definida positiva (HPD)** si para todo vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$, se cumple $xAx^* > 0$. Equivalentemente, si todos sus autovalores son estrictamente positivos.
2. **Semidefinida positiva (HPSD)** si para todo vector $x \in \mathbb{C}^n$, se cumple $xAx^* \geq 0$. Equivalentemente, si todos sus autovalores son no negativos.

Para una matriz hermitiana, el producto escalar $\langle x, y \rangle_A = xAy^*$ define un producto interno si y solo si A es definida positiva.

Definición 7. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en el espacio de los polinomios $\mathbb{P}[z]$ y considérese la base algebraica $\mathcal{B} = \{z^k\}_{k \geq 0}$. La matriz de momentos asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la matriz infinita

$$M = (c_{i,j})_{i,j \geq 0}, \quad c_{i,j} := \langle z^i, z^j \rangle, \quad i, j \in \mathbb{N}_0.$$

En particular, si existe una medida de Borel μ con soporte infinito tal que $\langle p, q \rangle = \int p(z) \overline{q(z)} d\mu(z)$, entonces

$$c_{i,j} = \int z^i \overline{z^j} d\mu(z).$$

Esta matriz de momentos encapsula la información del producto interno respecto a la base monomial.

Desde una perspectiva matricial, que facilita el análisis algebraico, podemos considerar que una matriz infinita HPD M induce en $\mathbb{P}[z]$ el siguiente producto:

$$\langle p(z), q(z) \rangle_M = vMw^*, \tag{2.1}$$

donde $v = (v_0, v_1, \dots, v_n, 0, \dots)$, $w = (w_0, w_1, \dots, w_m, 0, \dots) \in c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid x_n = 0, \forall n \geq n_0\}$ para polinomios $p(z) = \sum_{k=0}^n v_k z^k$ y $q(z) = \sum_{k=0}^m w_k z^k$. La matriz de momentos $M = (c_{ij})_{i,j=0}^\infty$ definida por: $c_{ij} = \langle z^i, z^j \rangle_M$, induce una norma Hilbertiana denotada por: $\|p(z)\|_M^2 = \langle p(z), p(z) \rangle_M, \forall p(z) \in P[z]$

Definición 8. Sea $A = (a_{ij})_{i,j \geq 0}$ una matriz infinita. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos su sección principal de orden n (también llamada truncación o submatriz principal) como

$$A_n = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n-1} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Estas secciones permiten “aproximar” A por operadores de rango finito y realizar cálculos numéricos.

Las secciones principales son cruciales para el análisis numérico y la aproximación de operadores definidos por matrices infinitas.

2.3. Operador multiplicación por z

Definición 9. El operador multiplicación por z , lo denotaremos como \mathcal{D} , y es la aplicación $\mathcal{D} : \mathbb{P}[z] \mapsto \mathbb{P}[z]$ tal que: $\mathcal{D}(p(z)) = zp(z)$. Esta aplicación es lineal ya que

$$\mathcal{D}(\alpha p(z) + \beta q(z)) = z(\alpha p(z) + \beta q(z)) = \alpha \mathcal{D}(p(z)) + \beta \mathcal{D}(q(z))$$

Denotaremos como \mathbf{D} la representación matricial del operador multiplicación por z en la base de los polinomios ortonormales.

Definición 10. El operador multiplicación \mathcal{D} se dice **acotado** en $(\mathbb{P}[z], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{D}(p)\| \leq C\|p\|, \quad \forall p \in \mathbb{P}[z].$$

La menor constante C que satisface esta desigualdad se denomina **norma del operador** y se denota por $\|\mathcal{D}\|$.

La acotación de este operador tiene importantes consecuencias para la localización de los ceros de los polinomios ortogonales. A continuación, se presenta cómo se representa este operador en la base de polinomios ortonormales.

Definición 11. Sea $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ una base ortonormal de $\mathbb{P}[z]$ respecto a un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $z\varphi_n(z)$ es un polinomio de grado $n + 1$ que se puede expresar en términos de la base ortonormal como:

$$z\varphi_n(z) = d_{0,0}\varphi_0(z) + d_{1,0}\varphi_1(z) + \cdots + d_{n,0}\varphi_n(z) + d_{n,n+1}\varphi_{n+1}(z)$$

Esta expresión recurrente define la matriz infinita $\mathbf{D} = (d_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ que representa al operador multiplicación \mathcal{D} respecto de la base de polinomios ortonormales. Denotamos por \mathbf{D}_n a la sección de orden n .

Proposición 1. Para todos los índices $i, j \geq 0$ se verifica

$$d_{i,j} = 0 \quad \text{si } i > j + 1.$$

En consecuencia \mathbf{D} es una matriz Hessenberg superior infinita:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} & \cdots \\ d_{1,0} & d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & \cdots \\ 0 & d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & \cdots \\ 0 & 0 & d_{3,2} & d_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

El patrón de ceros proviene del hecho de que $\deg(z\varphi_j) = j + 1$, de modo que al expandir $z\varphi_j$ en la base solo aparecen $\varphi_0, \dots, \varphi_{j+1}$.

La estructura de Hessenberg de la matriz \mathbf{D} es una propiedad clave que simplifica muchos análisis. Esta matriz posee varias propiedades importantes, especialmente en relación con los ceros de los polinomios ortonormales.

Propiedades de la matriz D

- Si el producto interior procede de una medida real en un intervalo (caso clásico), la relación de tres términos $z\varphi_j = a_{j+1}\varphi_{j+1} + b_j\varphi_j + a_j\varphi_{j-1}$ hace que D sea *tridiagonal y simétrica* (matriz de Jacobi), un caso particular dentro de las Hessenberg.
- Las secciones principales $\mathbf{D}_n = (d_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ son matrices $(n+1) \times (n+1)$ cuya transpuesta tiene como autovalores los ceros del polinomio φ_{n+1} . Esto conecta la teoría espectral de D con la localización de ceros.
- El determinante de $\mathbf{D}_n - z\mathbf{I}_n$ denotado por $|\mathbf{D}_n - z\mathbf{I}_n|$ donde \mathbf{I}_n es la matriz identidad de dimensiones $(n+1) \times (n+1)$ es un polinomio proporcional a $\varphi_{n+1}(z)$, es decir, tienen las mismas raíces.

La conexión entre los autovalores de las secciones de D y los ceros de los polinomios ortonormales es un resultado fundamental, cuya demostración se detalla a continuación.

Proposición 2. *Los ceros de los polinomios ortogonales $\varphi_{n+1}(z)$ son exactamente los autovalores de la matriz transpuesta \mathbf{D}_n^t , es decir,*

$$\sigma(\mathbf{D}_n^t) = Z(\varphi_{n+1}) = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_{n+1}(z) = 0\}.$$

Demostración. Sea z_0 una raíz de $\varphi_{n+1}(z)$, es decir, $\varphi_{n+1}(z_0) = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} z_0\varphi_0(z_0) &= d_{0,0}\varphi_0(z_0) + d_{1,0}\varphi_1(z_0) \\ z_0\varphi_1(z_0) &= d_{0,1}\varphi_0(z_0) + d_{1,1}\varphi_1(z_0) + d_{2,1}\varphi_2(z_0) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$z_0\varphi_n(z_0) = d_{0,n}\varphi_0(z_0) + d_{1,n}\varphi_1(z_0) + \dots + d_{n,n}\varphi_n(z_0) + d_{n+1,n}\varphi_{n+1}(z_0)$$

Puesto que $\varphi_{n+1}(z_0) = 0$, la última igualdad queda:

$$z_0\varphi_n(z_0) = d_{0,0}\varphi_0(z_0) + d_{1,0}\varphi_1(z_0) + \dots + d_{n,0}\varphi_n(z_0).$$

Esto se puede expresar matricialmente de la siguiente forma

$$z_0 \begin{pmatrix} \varphi_0(z_0) \\ \varphi_1(z_0) \\ \vdots \\ \varphi_n(z_0) \end{pmatrix} = \mathbf{D}_n^t \begin{pmatrix} \varphi_0(z_0) \\ \varphi_1(z_0) \\ \vdots \\ \varphi_n(z_0) \end{pmatrix}$$

lo cual significa que z_0 es autovalor de la matriz \mathbf{D}_n^t siendo el autovector $(\varphi_0(z_0), \varphi_1(z_0), \dots, \varphi_n(z_0))$ (que es no nulo ya que $\varphi_0(z)$ es constante).

Por lo tanto, todas las raíces de φ_n son autovalores de la matriz \mathbf{D}_n^t , y por tanto de \mathbf{D}_n . □

Capítulo 2. Marco teórico

Este resultado establece una correspondencia directa entre el problema algebraico de encontrar autovalores y el problema analítico de encontrar ceros de polinomios.

Como consecuencia, el determinante $|\mathbf{D}_n - z\mathbf{I}_n|$ es un polinomio ortogonal mónico.

El enfoque matricial no solo se limita a la representación del operador multiplicación, sino que también permite caracterizar los propios polinomios ortogonales.

Siguiendo con el enfoque matricial propuesto por C. Escribano y R. Gonzalo, sabemos que los polinomios mónicos ortogonales de Sobolev se pueden obtener a partir de la matriz del operador multiplicación \mathcal{D} y la matriz de momentos asociada al producto interno inducido por \mathbf{M} .

Definición 12. [11] El **radio espectral** de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, denotado por $\rho(A)$, se define como el máximo de los valores absolutos de sus autovalores:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\} \quad (2.2)$$

Definición 13. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz finita, la matriz $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ en el caso de matrices con entradas reales) es una matriz hermitiana de orden n y semidefinida positiva. Por lo tanto, tiene n autovalores mayores o iguales que cero contados con su multiplicidad

$$0 \leq \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$$

Los valores singulares de \mathbf{A} son:

$$\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$$

siendo:

$$0 \leq \sigma_n \leq \dots \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

Utilizando el criterio de Rayleigh y el Principio de min-max de Courant-Fischer [12] se tiene que estos valores singulares tienen relación con la norma de aplicaciones lineales y continuas cuando consideramos la norma euclídea en los espacios \mathbb{C}^n . De hecho,

1.

$$\sigma_1^2 = \max\{\langle \mathbf{A}^* \mathbf{A} x, x \rangle : \|x\| = 1\} = \max\{\|\mathbf{A} x\|^2 : \|x\| = 1\} = \|\mathbf{A}\|^2$$

2. Principio min-max: el segundo mayor valor singular de una matriz es el mínimo de las normas de las restricciones de la aplicación \mathbf{A} a los espacios de codimensión 1.

$$\sigma_2^2 = \min_{V:\text{cod}(V)=1} \max\{\|\mathbf{A} x\|^2, x \in V, \|x\| = 1\} = \min_{V:\text{cod}(V)=1} \|\mathbf{A}/V\|^2$$

siendo \mathbf{A}/V la restricción de la aplicación lineal \mathbf{A} al subespacio V .

2.4. Productos internos de Sobolev

Los valores singulares, especialmente el mayor, están directamente relacionados con la norma del operador, lo que es crucial para el análisis de la acotación. Para simplificar la discusión futura, introducimos la siguiente notación.

Definición 14. Sea \mathbf{D}_n la sección de la matriz infinita \mathbf{D} que representa al operador \mathcal{D} multiplicación por z en una base de polinomios ortogonales asociada a un producto internodefinido en el espacio de polinomios $\mathbb{P}[z]$. Definimos:

1. Los valores singulares de \mathbf{D}_n se denotan como $\sigma_{1,n} \geq \sigma_{2,n} \geq \dots, \sigma_{n,n}$
2. El radio espectral como $\rho(\mathbf{D}_n)$
3. El conjunto de ceros de φ_n como Z_n

Proposición 3. Sea \mathcal{D} el operador multiplicación por z en ℓ_2 y $\mathbf{D} = (d_{i,j})_{i,j \geq 0}$ su matriz infinita. Sea $\mathbf{D}_n = (d_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la sección de orden $n + 1$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{D}_n\| = \|\mathcal{D}\|.$$

Esta proposición establece una conexión importante entre las normas de las secciones finitas y la norma del operador infinito.

Utilizando este resultado se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{1,n}(\mathbf{D}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{D}_n\| = \|\mathcal{D}\|$$

que siempre existe pudiendo ser ∞ en el caso no acotado.

Con estos fundamentos de álgebra lineal y teoría de operadores establecidos, podemos ahora adentrarnos en la definición específica de los productos internos de Sobolev.

2.4. Productos internos de Sobolev

Una vez establecidos los conceptos básicos del álgebra lineal, debemos extender nuestro marco teórico al contexto de espacios funcionales, donde se desarrolla el estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev. Para ello, necesitamos introducir los productos de Sobolev, que nos permitirán formalizar los distintos productos internos respecto a los cuales definiremos la ortogonalidad. Estos productos internos pueden tomar diversas formas, ya sean continuos o discretos, reales o complejos, y son fundamentales para caracterizar las propiedades de los polinomios ortogonales asociados.

Definición 15. Sea $S_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ la circunferencia de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$. Denotaremos por $dm_{a;r}$ la **medida de Lebesgue** en $S_r(a)$. Para toda función continua $f : S_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ definimos

$$\int_{S_r(a)} f(z) dm_{a;r}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta,$$

de modo que $dm_{a;r}$ queda normalizada ($dm_{a;r}(S_r(a)) = 1$).

Capítulo 2. Marco teórico

Esta medida es fundamental para definir productos internos en el plano complejo, especialmente en el contexto de los polinomios ortogonales en la circunferencia unitaria o en otras circunferencias.

Los productos internos de Sobolev con los que se trabajará son de la forma:

1. Continuo Real con Soportes Compactos

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_a^b p(t)q(t)w_1(t) dt + \int_c^d p'(t)q'(t)w_2(t) dt \quad (2.3)$$

donde $w_1(t)$ y $w_2(t)$ son pesos continuos, no negativos y distintos de la función $f \equiv 0$.

2. Discreto Real con Átomo

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_a^b p(t)q(t)w_1(t) dt + p'(c)q'(c) \quad (2.4)$$

con $w_1(t)$ peso continuo, no negativo y distinto de la función $f \equiv 0$.

3. Continuo Complejo en Circunferencias

$$\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_{r_b}(b)} p(z) \overline{q(z)} dm_{b;r_b} + \int_{S_{r_a}(a)} p'(z) \overline{q'(z)} dm_{a;r_a}. \quad (2.5)$$

4. Discreto Complejo en Circunferencia con Átomo

$$\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_{r_b}(b)} p(z) \overline{q(z)} dm_{b;r_b} + p'(c) \overline{q'(c)}. \quad (2.6)$$

Mas generalmente,

Definición 16. [13] Sea $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ un conjunto de medidas de Borel, positivas y finitas, con soportes $\text{supp}(\mu_1), \text{supp}(\mu_2) \subset \mathbb{C}$ y μ_1 con soporte infinito, y sea $p, q \in \mathbb{P}[z]$. Definimos el producto de Sobolev asociado a μ como

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{C}} p(z) \overline{q(z)} d\mu_1(z) + \int_{\mathbb{C}} p'(z) \overline{q'(z)} d\mu_2(z).$$

Para los casos discretos, la medida de Dirac juega un papel crucial.

Definición 17. Sea $a \in \mathbb{C}$. La medida de Dirac en a , denotada δ_a , es la medida de Borel definida por

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A, \end{cases} \quad A \subset \mathbb{C} \text{ Borel.}$$

Para cualquier función medible $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se cumple

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) d\delta_a(z) = f(a).$$

En particular, si p es un polinomio,

$$|p(a)|^2 = \int_{\mathbb{C}} |p(z)|^2 d\delta_a(z).$$

Cuando se desea ponderar la masa, se emplea el “átomo ponderado” $\lambda \delta_a$ ($\lambda > 0$), para el cual $\int f d(\lambda \delta_a) = \lambda f(a)$.

Observación: En los casos discretos con átomo, la medida utilizada es la medida de Dirac, es decir, se considera un átomo en un punto específico del espacio complejo, lo que permite evaluar la función en ese punto y ponderar su contribución al producto interno.

Definición 18. En un espacio de Sobolev asociado a dos medidas se define el número R

$$R = \text{máx}\{|z| : z \in \text{supp}(\mu_1) \cup \text{supp}(\mu_2)\},$$

En particular, en los casos tratados:

1. Caso continuo real

$$R = \text{máx}\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$$

2. Caso continuo con átomo:

$$R = \text{máx}\{|a|, |b|, |c|\}$$

3. Caso continuo complejo

$$R = \text{máx}\{z \in S_{r_a}(a) \cup S_{r_b}(b)\} = \text{máx}\{|a| + r_a, |b| + r_b\}$$

4. Caso complejo con átomo

$$R = \text{máx}\{\text{máx}\{|z| : z \in S_{r_a}(a)\}, |c|\} = \text{máx}\{|a| + r_a, |c|\}$$

Hay que destacar que este número, en el caso de un productos internos asociados a una sólo medida, es decir, el caso standard de polinomios ortogonales asociados a una medida del tipo

$$\langle p, q \rangle = \int p(z) \overline{q(z)} d\mu$$

coincide con

$$R = \text{máx}\{|z| : z \in \text{supp}(\mu)\}$$

Es conocido que cuando la medida tiene soporte acotado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{1,n} = \|\mathcal{D}\| = R$$

Capítulo 2. Marco teórico

Este valor R proporciona una medida del tamaño de la región donde se definen las medidas del producto de Sobolev. Al igual que con los productos internos generales, los productos de Sobolev también admiten una representación matricial.

Definición 19. [13] Sea $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ un conjunto de medidas de Borel, positivas, con soporte compacto en \mathbb{C} . Denotemos por

$$\mathbf{M}_j := \mathbf{M}(\mu_j) = (c_{n,m}^{(j)})_{n,m \geq 0}, \quad c_{n,m}^{(j)} := \int_{\mathbb{C}} z^n \bar{z}^m d\mu_j(z), \quad j = 1, 2,$$

las respectivas matrices de momentos (cada una HSPD). La matriz de momentos Sobolev asociada al sistema μ es entonces

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_1 + \Lambda \mathbf{M}_2 \Lambda^*$$

donde $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j \geq 0}$ es la matriz infinita que representa el operador derivación definida por:

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

o equivalentemente:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Luego el producto matricial interno de Sobolev asociada a un conjunto de matrices HPSD $\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2\}$ con \mathbf{M}_1 siendo HPD en $\mathbb{P}[z]$ se define como:

$$\langle p(t), q(t) \rangle_{\mathbf{M}_S} = v \left(\mathbf{M}_1 + \Lambda \mathbf{M}_2 \Lambda^* \right) w^*.$$

La matriz Λ representa el operador de derivación en la base monomial. Cuando se utilizan medidas de Dirac, la matriz de momentos asociada tiene una estructura particular.

Definición 20. [13] Sea δ_a la medida de Dirac concentrada en $a \in \mathbb{C}$. Sus momentos son $c_{n,m} = \int_{\mathbb{C}} z^n \bar{z}^m d\delta_a(z) = a^n \bar{a}^m$, $n, m \geq 0$.

La matriz de momentos asociada, denotada $M(a) = M(\delta_a)$, es por tanto

$$M(a) = (a^n \bar{a}^m)_{n,m \geq 0} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{a} & \bar{a}^2 & \bar{a}^3 & \cdots \\ a & |a|^2 & a\bar{a}^2 & a\bar{a}^3 & \cdots \\ a^2 & a^2\bar{a} & |a|^4 & a^2\bar{a}^3 & \cdots \\ a^3 & a^3\bar{a} & a^3\bar{a}^2 & |a|^6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Nótese que dicha matriz de momentos no define un producto interno.

2.5. Planteamiento del problema

Aunque $M(a)$ por sí sola no define un producto interno (ya que no es definida positiva, solo semidefinida positiva), puede ser un componente en la construcción de productos internos de Sobolev más generales.

Escribano y Gonzalo generalizaron la definición de producto interno de Sobolev a producto interno de Sobolev matricial, considerando matrices que no necesariamente provienen de medidas de Borel.

Definición 21. [13] Sea $\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2\}$ un conjunto de matrices HPSD, siendo \mathbf{M}_1 HPD, el producto matricial de Sobolev inducido, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{M}_S}$, se define como:

$$\langle p(z), q(z) \rangle_{\mathbf{M}_S} = \langle p(z), q(z) \rangle_{\mathbf{M}_1} + \langle p'(z), q'(z) \rangle_{\mathbf{M}_2}, \quad \forall p(z), q(z) \in \mathbb{P}[z] \quad (2.7)$$

Observación Cuando \mathbf{M}_1 es la matriz de momentos de una medida μ_1 y \mathbf{M}_2 de μ_2 , los cuatro casos (1.3)-(1.6) se recuperan como casos particulares.

Con estas definiciones establecidas, podemos formular el problema central de este trabajo.

2.5. Planteamiento del problema

El problema central de investigación que motiva este trabajo es el siguiente: Sean μ_1 y μ_2 dos medidas de Borel positivas con soporte compacto, con μ_1 con soporte infinito, sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ el producto interno de Sobolev asociado y sea Z el conjunto de ceros de los polinomios ortonormales de Sobolev $\{\varphi_i\}_{i \geq 0}$. ¿Es Z acotado?

Esta cuestión fundamental no ha sido completamente resuelta en la literatura, especialmente en el caso complejo cuando los soportes son disjuntos o cuando no se cumple la hipótesis de dominación secuencial, conceptos que se verán después.

El estudio de la acotación de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev se traslada, mediante el uso de la representación matricial del operador multiplicación \mathcal{D} , al análisis del *radio espectral* de las secciones de la matriz infinita. Sabemos que si la sucesión $\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n \geq 0}$ esta acotada, entonces el *conjunto de ceros* Z estará acotado.

Objetivo: Determinar condiciones necesarias y suficientes para la acotación del *conjunto de ceros* en cada uno de los casos (1.3)-(1.6) de productos internos de Sobolev, estableciendo relaciones entre:

- la acotación de Z ,
- la acotación del operador multiplicación \mathcal{D} ,
- el comportamiento asintótico de $\rho(\mathbf{D}_n)$.
- el comportamiento asintótico $\sigma_{1,n}$ y $\sigma_{2,n}$.

Metodología: Para la parte computacional emplearemos MAPLE con el fin de:

1. generar las matrices \mathbf{D}_n para valores crecientes de n ,

Capítulo 2. Marco teórico

2. calcular los radios espectrales $\rho(\mathbf{D}_n)$ y analizar su comportamiento asintótico,
3. visualizar los polinomios ortogonales y localizar sus ceros en el plano complejo,
4. contrastar numéricamente las cotas teóricas obtenidas y explorar casos donde las condiciones clásicas de dominación secuencial no se satisfacen.

Antes de abordar este problema, es importante revisar el estado actual del conocimiento en esta área.

2.6. Estado del arte

En la literatura se ha abordado el problema de los ceros de polinomios ortogonales de Sobolev mayoritariamente desde la perspectiva de la localización general de los ceros.

Primero vamos a probar que la acotación del operador multiplicación \mathcal{D} en $\mathbb{P}[z]$ es condición suficiente para la acotación de los ceros de los polinomios ortogonales respecto a un producto inducido por una matriz HPD.

Proposición 4. [13] Sea \mathbf{M} una matriz HPD y $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ la secuencia de polinomios ortonormales asociados al producto interno inducido por \mathbf{M} . Si \mathcal{D} está acotado en $\mathbb{P}[z]$, el conjunto de ceros de los polinomios ortonormales asociados a \mathbf{M} está acotado. Además,

$$Z = \{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}, \varphi_n(z) = 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \|\mathcal{D}\|\}.$$

Demostración. Asumamos que para $z_0 \in Z$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_n(z_0) = 0$. Luego, $\varphi_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z)$, $0 \neq P_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}[z]$. Por lo tanto, $\varphi_n(z_0) = z_0 P_{n-1}(z_0) - z_0 P_{n-1}(z_0)$ y porque $\varphi_n(z)$ y $P_{n-1}(z)$ son ortogonales en M se sigue que

$$\|z P_{n-1}(z)\|^2 = \langle \varphi_n(z) + z_0 P_{n-1}(z), \varphi_n(z) + z_0 P_{n-1}(z) \rangle = \|\varphi_n(z)\|^2 + |z_0|^2 \|P_{n-1}(z)\|^2,$$

por lo que,

$$\begin{aligned} |z_0|^2 \|P_{n-1}(z)\|^2 &= \|z P_{n-1}(z)\|^2 - \|\varphi_n(z)\|^2 < \|z P_{n-1}(z)\|^2 = \\ &= \|z P_{n-1}(z)\|^2 = \|\mathcal{D}(P_{n-1})\|^2 \leq \|\mathcal{D}\|^2 \|P_{n-1}(z)\|^2. \end{aligned}$$

Como $\|P_{n-1}(z)\| \neq 0$, se concluye que

$$|z_0|^2 < \|\mathcal{D}\|,$$

como se requería. □

Este resultado fundamental y usado extensamente en la literatura establece que los ceros de polinomios ortogonales de Sobolev están contenidos en un disco centrado en cero cuyo radio es la norma del operador \mathcal{D} , si dicho operador está acotado. Veamos resultados que nos permiten acotar la norma del operador multiplicación \mathcal{D} .

Para acotar el operador multiplicación, G. López y H. Pijeira [14] introdujeron el concepto de medidas secuencialmente dominadas.

Definición 22. [14] Diremos que el producto de Sobolev con dos medidas es secuencialmente dominado si

$$\text{supp}(\mu_2) \subset \text{supp}(\mu_1), \quad j = 1, 2.$$

y

$$d\mu_2 = f_1 d\mu_1, \quad f_1 \in L_\infty(\mu_1).$$

Esta condición de dominación secuencial es clave para garantizar la acotación del operador multiplicación en ciertos casos.

En el caso continuo real, se tiene que como consecuencia de la Definición 23:

Corolario 1. El producto interno de Sobolev

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_a^b p(t)q(t)w_1(t) dt + \int_c^d p'(t)q'(t)w_2(t) dt$$

es secuencialmente dominado cuando se cumple que $[c, d] \subset [a, b]$ y $\exists c > 0, w_2(t) \leq c \cdot w_1(t)$ continuos.

Para trabajar con matrices de momentos introduciremos la definición para esta noción de secuencial dominación y un teorema análogo que nos dará la acotación. Estos conceptos fueron generalizados por Escribano y Gonzalo [13] para el caso matricial.

Definición 23. [13] Sea $\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2\}$ un conjunto de matrices HSPD. Diremos que $\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2\}$ es secuencialmente dominada si existe una constante positiva C tal que

$$\mathbf{M}_2 \leq C \cdot \mathbf{M}_1.$$

donde $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ significa que $v\mathbf{A}v^* \leq v\mathbf{B}v^*$ para todo $v \in c_{00}$.

Como consecuencia de [9] Proposición 5, se tiene que el producto Sobolev

$$\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_{r_b}(b)} p(z) \overline{q(z)} dm_{b;r_b} + \int_{S_{r_a}(a)} p'(z) \overline{q'(z)} dm_{a;r_a}.$$

es matricialmente secuencialmente dominado, es decir, $\{\mathbf{M}(m_{b;r_b}), \mathbf{M}(m_{a;r_a})\}$ forman un conjunto de matrices secuencialmente dominado cuando se cumple que $S_{r_a}(a) \subset \mathbb{D}_{r_b}(b)$, donde $\mathbb{D}_{r_b}(b) = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| < r_b\}$ denota el disco abierto de centro b y radio r_b .

Teorema 1. [13] Sea $\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2\}$ un conjunto de matrices HPD secuencialmente dominado. Asuma que para $j = 1, 2$ el operador multiplicación \mathcal{D}_j está acotado en $(\mathbb{P}[z], \langle \cdot, \cdot \rangle)_{\mathbf{M}_j}$. Considera el producto matricial de Sobolev siguiente:

$$\langle p(t), q(t) \rangle_{\mathbf{M}_S} = \langle p(t), q(t) \rangle_{\mathbf{M}_1} + \langle p'(t), q'(t) \rangle_{\mathbf{M}_2}.$$

Entonces, el operador multiplicación \mathcal{D} está acotado en $(\mathbb{P}[z], \langle \cdot, \cdot \rangle)_{\mathbf{M}_S}$.

Capítulo 2. Marco teórico

Este teorema es una herramienta poderosa para establecer la acotación del operador multiplicación en el contexto de productos de Sobolev matriciales. Un corolario directo se aplica a los productos de Sobolev definidos en circunferencias.

Corolario 2. Como consecuencia del Teorema 1, para el producto interno de Sobolev

$$\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_{r_b}(b)} p(z) \overline{q(z)} dm_{b;r_b} + \int_{S_{r_a}(a)} p'(z) \overline{q'(z)} dm_{a;r_a}.$$

el operador multiplicación \mathcal{D} está acotado en $(\mathbb{P}[z], \langle \cdot, \cdot \rangle)_S$ cuando se cumple que $S_{r_a}(a) \subset \mathbb{D}_{r_b}(b)$. Y por tanto el conjunto Z está acotado.

Sin embargo, como consecuencia de [9] Proposición 6, podemos asegurar que para el producto Sobolev

$$\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_{r_b}(b)} p(z) \overline{q(z)} dm_{b;r_b} + \int_{S_{r_a}(a)} p'(z) \overline{q'(z)} dm_{a;r_a}.$$

El operador multiplicación \mathcal{D} está acotado en $(\mathbb{P}[z], \langle \cdot, \cdot \rangle)_S$ cuando se cumple que $a \in \mathbb{D}_{r_b}(b)$ y $r_a > 0$, incluso cuando no estamos en un caso matricialmente secuencialmente dominado. Este resultado es particularmente interesante porque muestra que hay casos donde la acotación del operador puede obtenerse bajo condiciones geométricas más generales que la dominación secuencial.

Para extender estos resultados a productos de Sobolev que incorporan términos discretos, como la evaluación de la derivada en un punto específico, necesitamos introducir el concepto de punto de evaluación acotado.

Los puntos de evaluación acotados constituyen una herramienta fundamental para extender los resultados de acotación del operador multiplicación a productos internos de Sobolev con componentes discretas. Como veremos en los resultados siguientes, cuando un punto es de evaluación acotada respecto a la medida principal μ_1 , es posible garantizar la acotación del operador multiplicación en productos internos de Sobolev que incluyen términos discretos como $|p'(a)|^2$, lo que a su vez asegura la acotación del conjunto de ceros de los polinomios ortogonales asociados.

Definición 24. [9] Decimos que $a \in \mathbb{C}$ es un **punto de evaluación acotado** de una medida μ (abreviado **bpe** de μ) si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|p(a)|^2 \leq C \int |p(z)|^2 d\mu(z), \quad p(z) \in \mathbb{P}[z].$$

Definición 25. [9] Para un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, la **envoltura convexa polinómica** de K , denotada por $P_C(K)$, se define como

$$P_C(K) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |p(z)| \leq \max_{\xi \in K} |p(\xi)| \text{ para todo } p \in \mathbb{P}[z] \right\}.$$

La envoltura convexa polinómica juega un papel importante en la caracterización de los puntos de evaluación acotados.

En particular, por [15], [16]

1. Para el caso real, cuando K es union de intervalos, $P_C(K)$ coincide con K .
2. Para el caso en el que K es una circunferencia, cuando K es $S_r(a)$, $P_C(K)$ coincide con $\mathbb{D}_r(a)$.

Estos resultados conectan la geometría del soporte de la medida con las propiedades analíticas de los puntos de evaluación.

Lema 1. [9] Todo **punto de evaluación acotado** de una medida μ está contenido en la envoltura polinómica convexa del soporte de μ .

Además, todo **punto de evaluación acotado** de una medida μ es un punto de evaluación de la matriz de momentos asociada a μ .

La noción de punto de evaluación acotado se extiende naturalmente al contexto de matrices de momentos.

Definición 26. [9] Sea M una matriz hermítica positiva definida (HPD) y $a \in \mathbb{C}$. Decimos que a es un **punto de evaluación acotado** (bpe) de M si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|p(a)|^2 \leq C \|p(z)\|_M^2, \quad p(z) \in \mathbb{P}[z].$$

Existe una equivalencia útil entre ser un punto de evaluación acotado y la dominación secuencial.

Proposición 5. [9] Sea M una matriz HPD y $a \in \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes:

1. a es un **punto de evaluación acotado** de M ;
2. el conjunto $\{M, M(a)\}$ es secuencialmente dominado;

Esta equivalencia permite aplicar resultados de dominación secuencial al estudio de puntos de evaluación acotados. La siguiente proposición muestra cómo la propiedad de ser un punto de evaluación acotado se preserva bajo la adición de un término de derivada.

Proposición 6. [9] Sea M una matriz HPD tal que el operador de multiplicación D es acotado en $(\mathbb{P}[z], \|\cdot\|_M)$, y sea $a \in \mathbb{C}$ punto de evaluación acotado de M . Entonces D también es acotado en $\mathbb{P}[z]$ respecto a la norma

$$\|p(z)\|_{M_S}^2 = \|p(z)\|_M^2 + |p'(a)|^2.$$

Un corolario importante de este resultado se aplica a productos de Sobolev discretos en circunferencias.

Corolario 3. [9] Sea m_{b,r_b} una medida de Lebesgue soportada en una circunferencia $S_{r_b}(b)$. Supongamos que $a \in \mathbb{D}_{r_b}(b)$ y consideremos la norma de Sobolev discreta

$$\|p\|_S^2 = \int_{S_{r_b}(b)} |p(z)|^2 dm_{b,r_b} + |p'(a)|^2, \quad p \in \mathbb{P}[z].$$

Capítulo 2. Marco teórico

Entonces el operador multiplicación $\mathcal{D}: p(z) \mapsto zp(z)$ es acotado en $(\mathbb{P}[z], \|\cdot\|_S)$. En consecuencia, el conjunto de ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev asociados está acotado.

Estos resultados proporcionan condiciones suficientes para la acotación de los ceros en varios escenarios importantes.

Además de las técnicas basadas en matrices de momentos y acotación de operadores, existen otros enfoques en la literatura para estudiar la acotación del conjunto de ceros de polinomios ortogonales de Sobolev. Estos métodos alternativos no requieren necesariamente el uso de representaciones matriciales ni el análisis de la acotación del operador multiplicación.

Un enfoque geométrico importante se basa en el análisis directo de las propiedades de los soportes de las medidas involucradas. Por ejemplo, cuando los soportes de las medidas μ_1 y μ_2 son disjuntos, es posible obtener cotas explícitas para la localización de los ceros utilizando técnicas de análisis complejo y teoría de potencial.

Otro método relevante utiliza las propiedades asintóticas de los coeficientes de las relaciones de recurrencia de tres términos que satisfacen los polinomios ortogonales de Sobolev. Este enfoque, desarrollado por varios autores, permite estudiar el comportamiento de los ceros sin necesidad de construir explícitamente las matrices asociadas.

También se han desarrollado técnicas basadas en desigualdades integrales y métodos variacionales que proporcionan información sobre la distribución asintótica de los ceros. Estos métodos son particularmente útiles cuando se busca información cualitativa sobre el comportamiento de los ceros más que cotas cuantitativas precisas.

Un ejemplo concreto de estas técnicas alternativas se presenta en el siguiente resultado para soportes disjuntos:

Teorema 2. [7] *En un producto Sobolev del Caso Real Continuo, si $\text{co}(\text{supp}(\mu_1)) \cap \text{co}(\text{supp}(\mu_2)) = \emptyset$, entonces, los ceros de φ_n están contenidos en el disco centrado en el punto de $\text{co}(\text{supp}(\mu_2))$ más alejado de $\text{co}(\text{supp}(\mu_1))$ y radio el diámetro de $\text{co}(\text{supp}(\mu_1)) \cup \text{co}(\text{supp}(\mu_2))$. Donde $\text{co}(K)$ es la envoltura convexa de un conjunto K ,*

$$\text{co}(K) = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j : x_j \in K, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1, m \in \mathbb{N} \right\};$$

es decir, el menor conjunto convexo que contiene a K o, equivalentemente, la intersección de todos los subconjuntos convexos cerrados de C que contienen a K .

Capítulo 3

Casos Analizados y Conjeturas

En el Capítulo 2 se establecieron los cimientos teóricos que guiarán todo el trabajo: se revisaron las nociones básicas de polinomios ortogonales y sus matrices de momentos, se introdujo el operador de multiplicación \mathcal{D} y se formalizó la ortogonalidad de Sobolev junto con el problema central de la localización de ceros. Además, se contextualizó el estado del arte resaltando la utilidad de la aproximación matricial y de los estudios numéricos para desvelar la geometría de los ceros bajo diferentes productos internos.

El objetivo de este segundo capítulo es *aplicar* aquel armazón teórico a los 4 casos concretos y, a partir de la evidencia obtenida, *formular conjeturas* que orienten futuras demostraciones rigurosas. Con este fin, el capítulo se organiza en tres secciones principales:

- **3.1 Caso real** - Se analizan productos de Sobolev definidos sobre soportes en la recta real. La simplicidad geométrica permite contrastar los resultados con referencias clásicas y calibrar las herramientas algebraicas presentadas anteriormente.
- **3.2 Caso circunferencia** - El estudio se traslada al plano complejo considerando medidas soportadas en circunferencias. Esta configuración pone de relieve la influencia de transformaciones de semejanza y la interacción entre la topología del soporte y la distribución de ceros.
- **3.3 Análisis y conjeturas** - Reúne las observaciones extraídas de ambos escenarios para proponer conjeturas sobre:
 1. Cotas uniformes para los ceros en función del radio o de la posición relativa de los soportes.
 2. El comportamiento asintótico de valores singulares sucesivos de las secciones D_n y su relación con el radio espectral.
 3. La influencia de la dominación secuencial o matricial en la acotación de D .

A lo largo del capítulo se alternarán *demostraciones analíticas* y *experimentos numéricos*, reforzando la filosofía descrita en la introducción: combinar la teo-

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

ría de matrices de Hessenberg con simulaciones para obtener una visión más completa de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev.

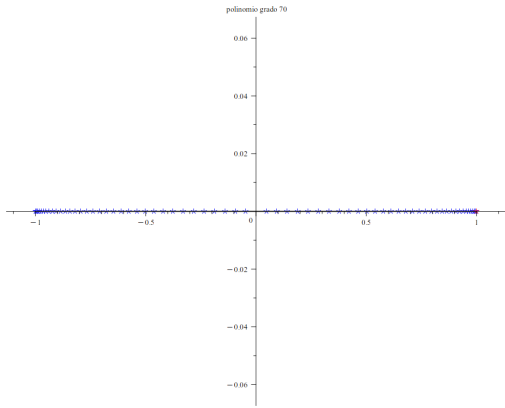
En estos experimentos, utilizaremos la metodología computacional expuesta en el Planteamiento del problema del Capítulo 2, que nos permite calcular y visualizar los ceros de polinomios ortogonales de Sobolev. Las gráficas presentadas para cada ejemplo muestran:

1. Una primera imagen que muestra los ceros del polinomio ortogonal φ_n para un grado fijo, donde el punto rojo destaca el cero de mayor módulo que determina el radio espectral de la matriz \mathbf{D}_n .
2. Una segunda imagen que representa el conjunto completo de todos los ceros de la familia $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$, donde los puntos rojos destacan, para cada polinomio φ_i , el cero de mayor módulo que determina el radio espectral correspondiente.
3. Una tercera imagen que visualiza la evolución de los valores singulares y el radio espectral en función del orden n de la matriz \mathbf{D}_n . En esta gráfica:
 - Los círculos (que varían cromáticamente del rojo al azul) representan el radio espectral $\rho(\mathbf{D}_n)$ para cada valor de n .
 - Los diamantes (que varían del verde al morado) corresponden al primer valor singular $\sigma_{1,n}$ de cada matriz \mathbf{D}_n .
 - Las cajas o cuadrados (también variando del verde al morado) representan el segundo valor singular $\sigma_{2,n}$.

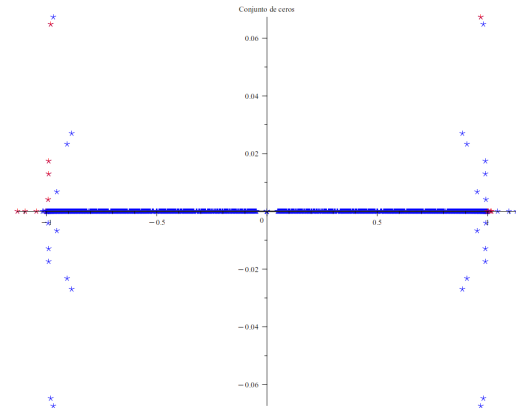
Estos gráficos se complementan con una tabla numérica que resume las principales magnitudes espectrales calculadas mediante nuestro algoritmo en Maple, incluyendo los valores singulares dominantes, el radio espectral y el máximo de los radios espectrales en la secuencia, lo que permite contrastar hipótesis sobre la acotación de ceros.

3.1. Caso Real

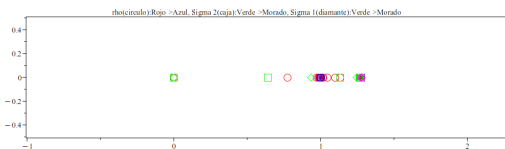
Ejemplo 1. $\langle p, q \rangle_S = \int_{-1}^1 p(t)q(t) t^2 dt + \int_{-1}^1 p'(t)q'(t) t^{10} dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



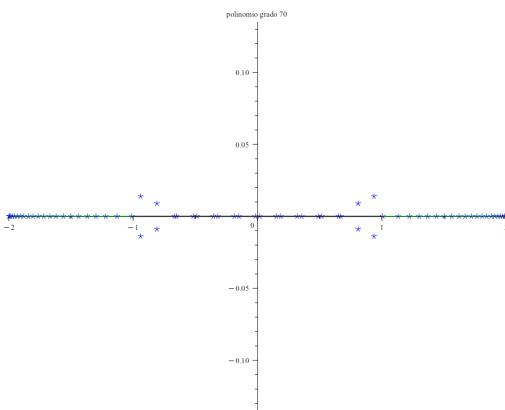
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



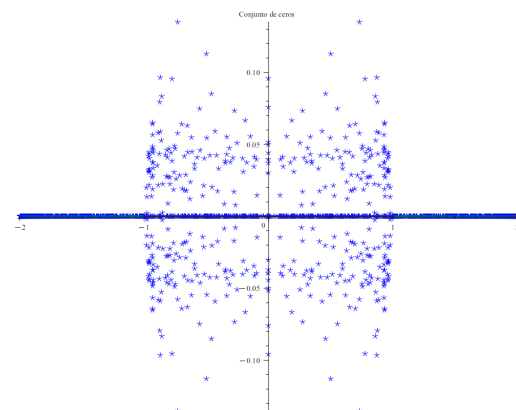
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 1,2760$
2. $\sigma_{2,70} = 1,2760$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 0,9999$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 1,1333$

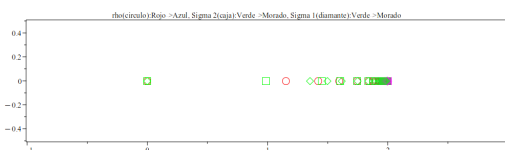
Ejemplo 2. $\langle p, q \rangle_S = \int_{-2}^2 p(t)q(t) dt + \int_{-1}^1 p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.

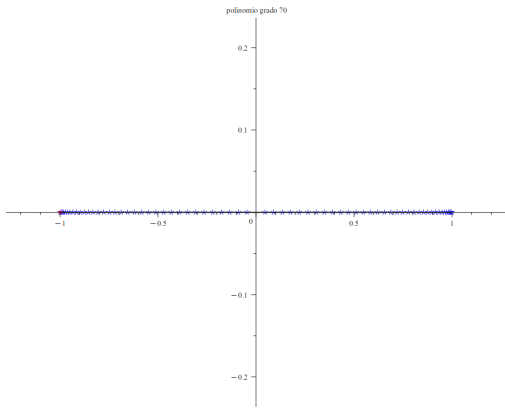


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

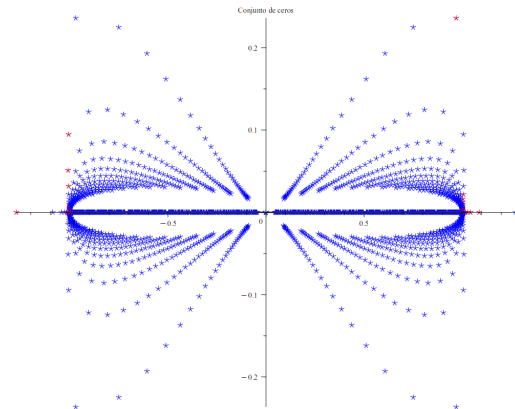
1. $\sigma_{1,70} = 1,999$
2. $\sigma_{2,70} = 1,999$
3. $R = 2$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 1,999$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 1,999$

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

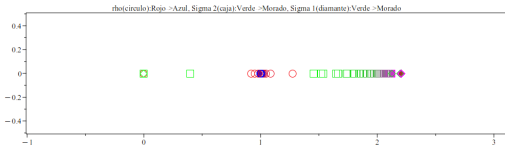
Ejemplo 3. $\langle p, q \rangle_S = \int_{-1}^1 p(t)q(t) t^{10} dt + \int_{-1}^1 p'(t)q'(t) t^2 dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



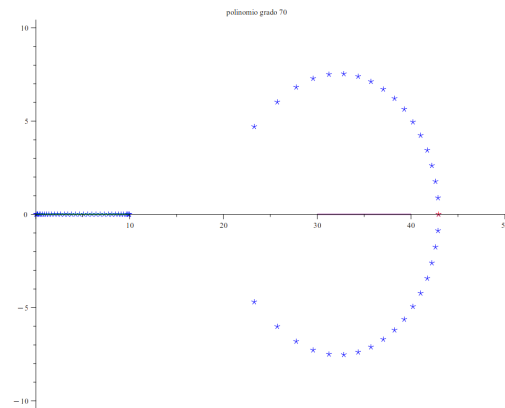
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



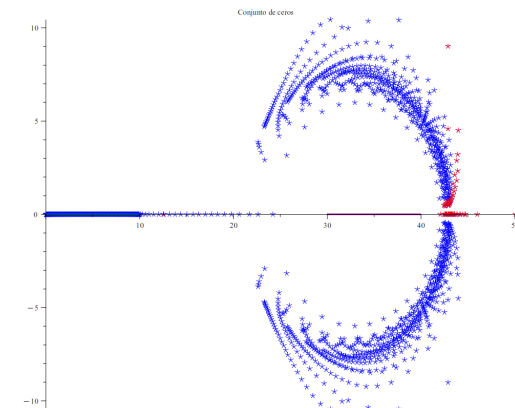
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 2,204$
2. $\sigma_{2,70} = 2,122$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 1,000$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 1,275$

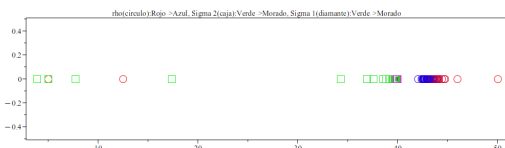
Ejemplo 4. $\langle p, q \rangle_S = \int_0^{10} p(t)q(t) dt + \int_{30}^{40} p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



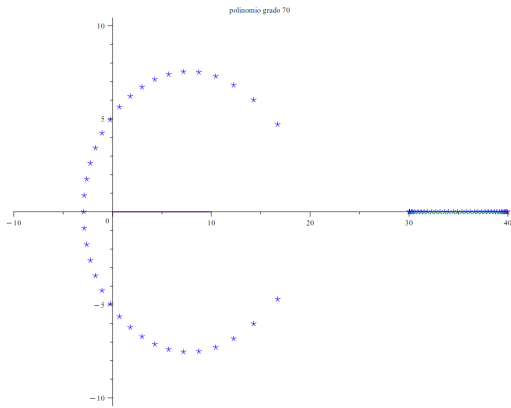
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



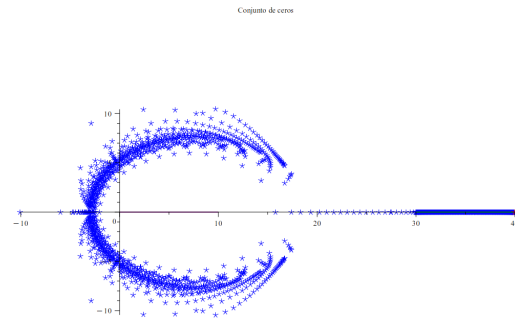
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 9,272 \times 10^{16}$
2. $\sigma_{2,70} = 39,998$
3. $R = 40$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 42,930$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 50,052$

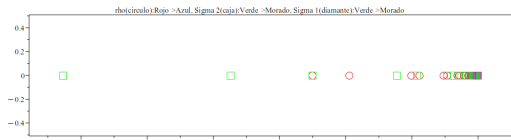
Ejemplo 5. $\langle p, q \rangle_S = \int_{30}^{40} p(t)q(t) dt + \int_0^{10} p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



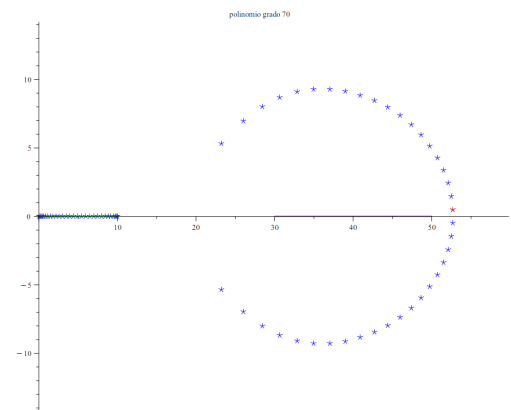
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



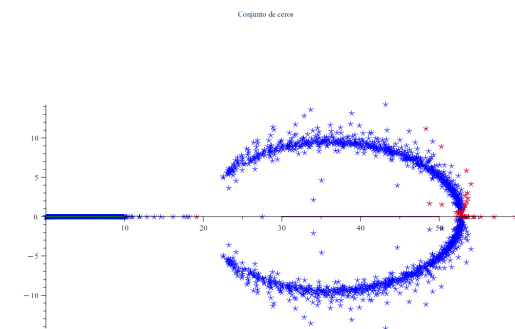
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 9,272 \times 10^{16}$
2. $\sigma_{2,70} = 39,991$
3. $R = 40$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 39,991$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 39,991$

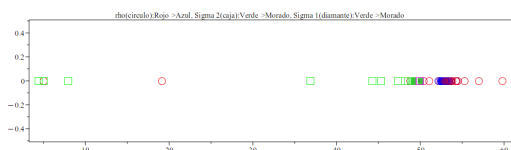
Ejemplo 6. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_0^{10} p(t)q(t) dt + \int_{30}^{50} p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.

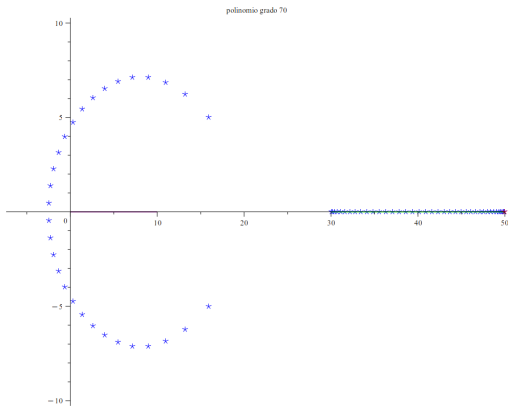


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

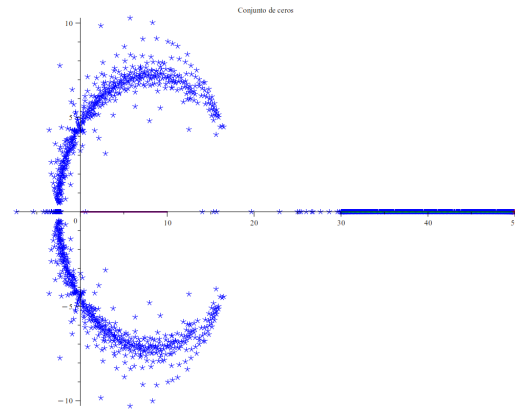
1. $\sigma_{1,70} = 5,990 \times 10^{13}$
2. $\sigma_{2,70} = 49,983$
3. $R = 50$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 52,656$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 59,814$

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

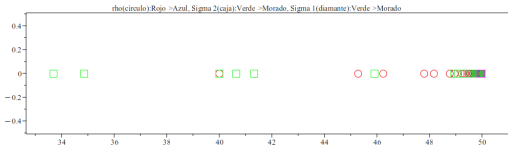
Ejemplo 7. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_{30}^{50} p(t)q(t) dt + \int_0^{10} p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



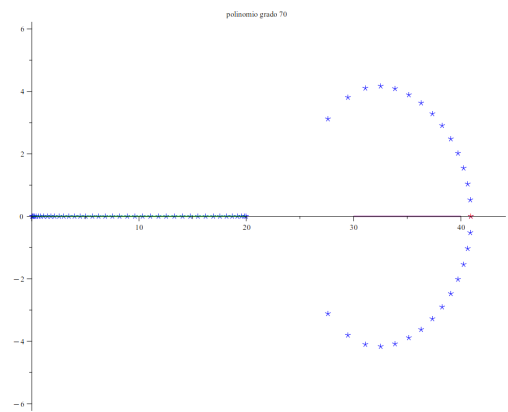
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



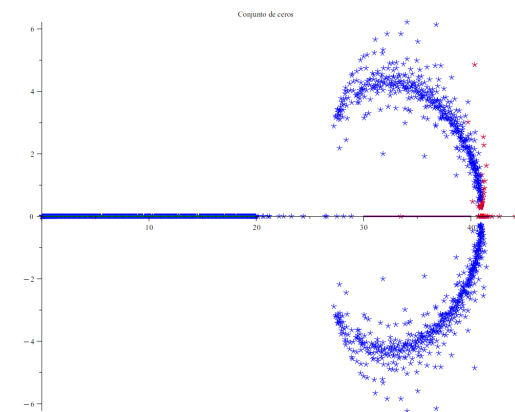
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 3,752 \times 10^{13}$
2. $\sigma_{2,70} = 49,987$
3. $R = 50$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 49,987$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 49,987$

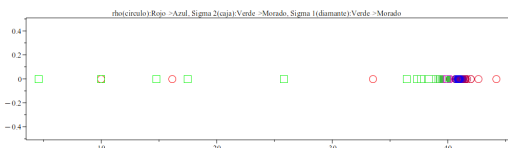
Ejemplo 8. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_0^{20} p(t)q(t) dt + \int_{30}^{40} p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



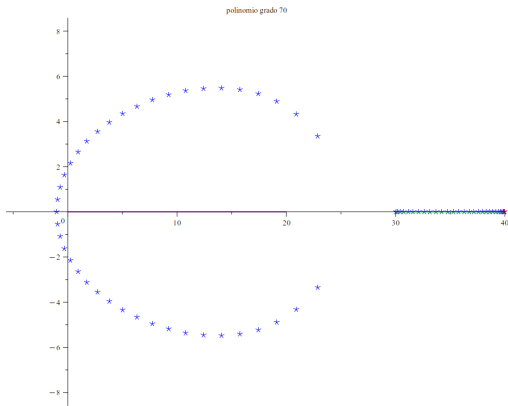
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



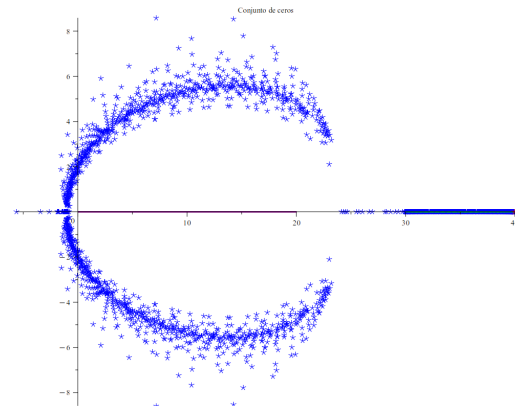
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 2,944 \times 10^9$
2. $\sigma_{2,70} = 39,985$
3. $R = 40$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 40,951$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 44,196$

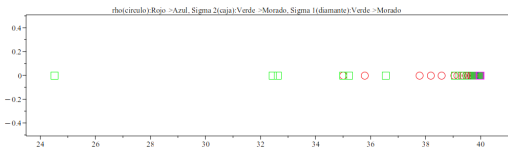
Ejemplo 9. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_{30}^{40} p(t)q(t) dt + \int_0^{20} p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



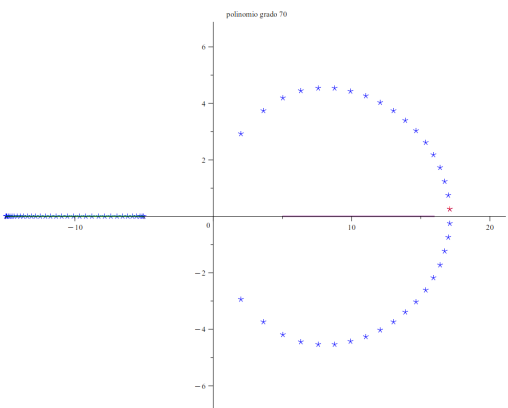
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



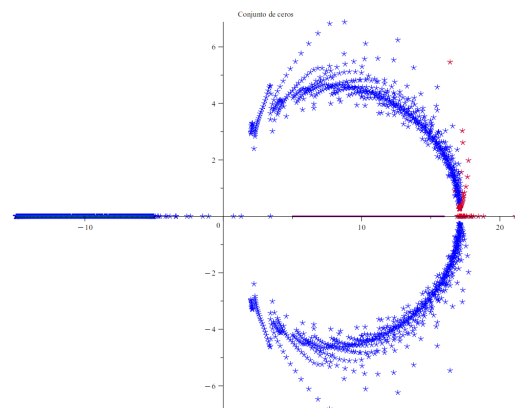
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 4,136 \times 10^8$
2. $\sigma_{2,70} = 39,989$
3. $R = 40$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 39,989$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 39,989$

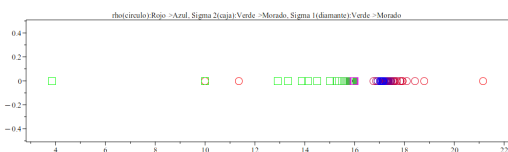
Ejemplo 10. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_{-15}^{-5} p(t)q(t) dt + \int_5^{16} p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.

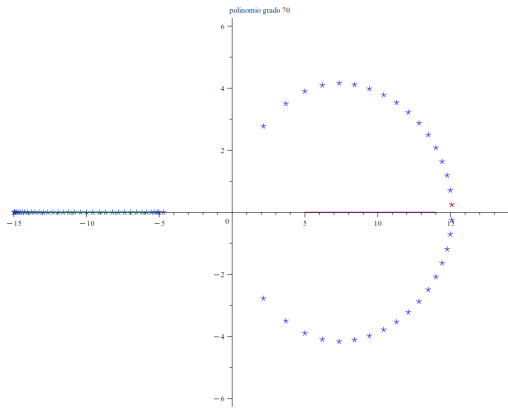


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

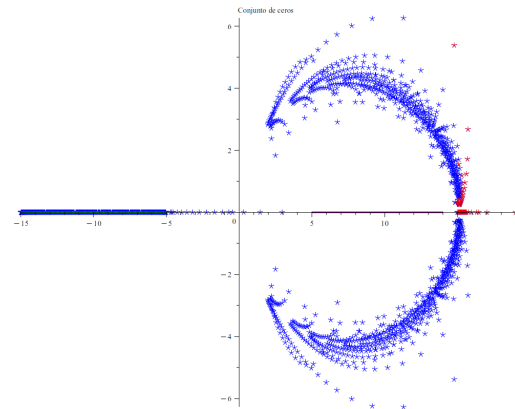
1. $\sigma_{1,70} = 3,711 \times 10^{10}$
2. $\sigma_{2,70} = 15,990$
3. $R = 16$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 17,107$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 21,152$

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

Ejemplo 11. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_{-15}^{-5} p(t)q(t) dt + \int_5^{14} p'(t)q'(t) dt$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



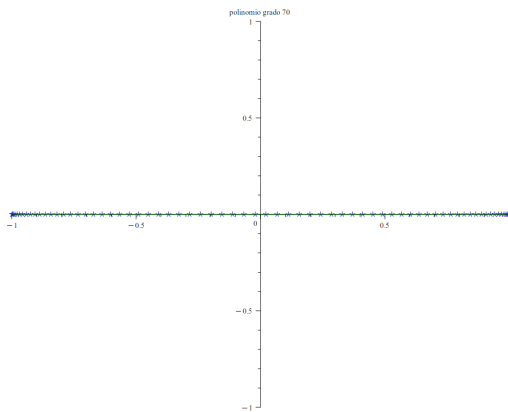
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



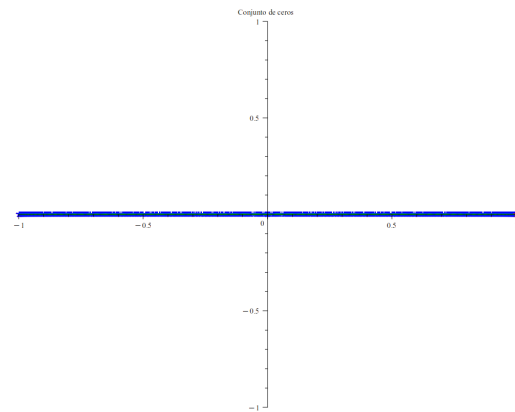
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 2,338 \times 10^{11}$
2. $\sigma_{2,70} = 14,992$
3. $R = 15$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 15,094$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 19,007$

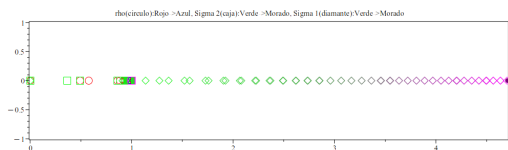
Ejemplo 12. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt + p'(0)q'(0)$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



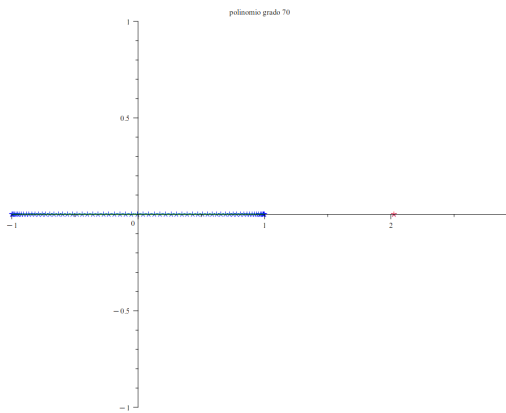
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



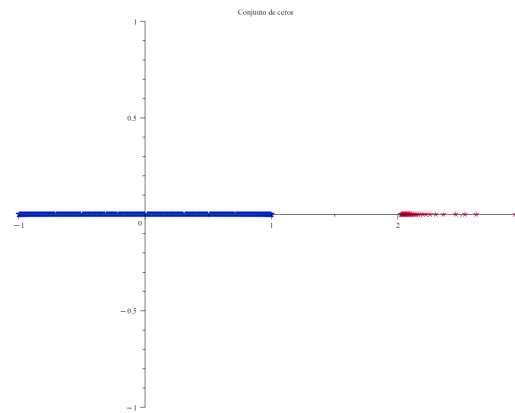
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 4,704$
2. $\sigma_{2,70} = 0,999$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 0,999$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 0,999$

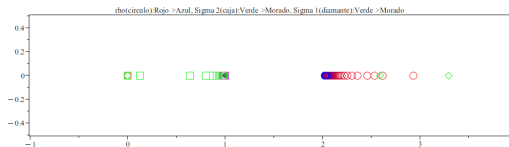
Ejemplo 13. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt + p'(2)q'(2)$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



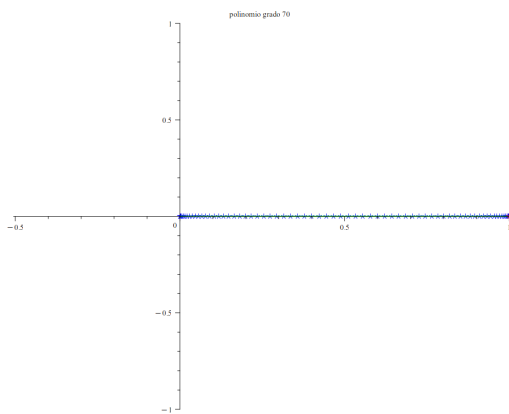
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



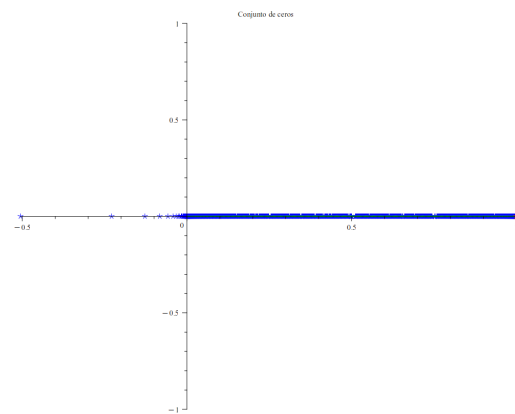
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 7,441 \times 10^{36}$
2. $\sigma_{2,70} = 0,999$
3. $R = 2$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 2,025$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 2,933$

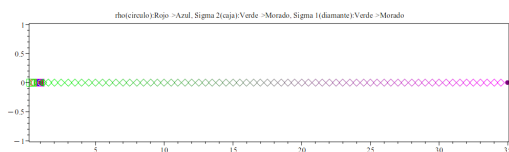
Ejemplo 14. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_0^1 p(t)q(t) dt + p'(0)q'(0)$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.

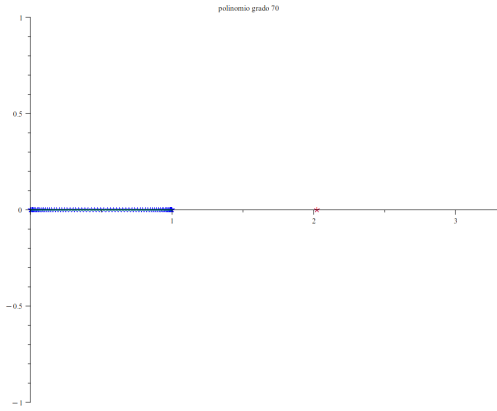


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

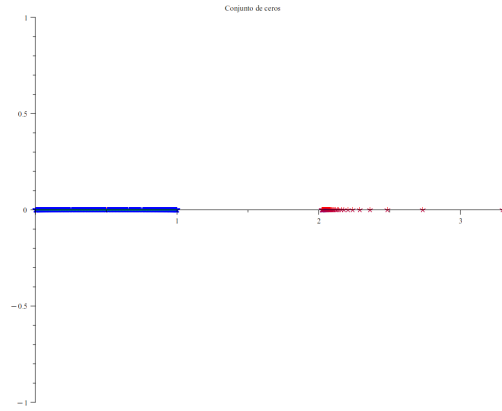
1. $\sigma_{1,70} = 35,000$
2. $\sigma_{2,70} = 0,999$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 0,999$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 0,999$

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

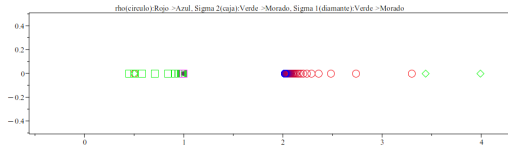
Ejemplo 15. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_0^1 p(t)q(t) dt + p'(2)q'(2)$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 1,405 \times 10^{50}$
2. $\sigma_{2,70} = 0,999$
3. $R = 2$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 2,021$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 3,299$

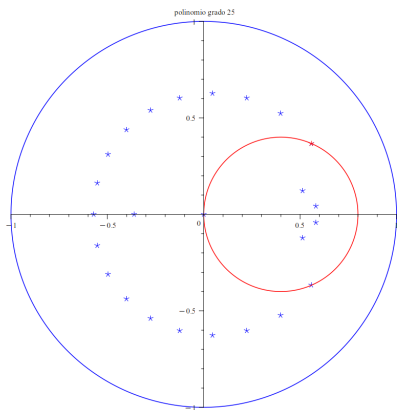
Cuadro 3.1: Resumen de ejemplos sobre la localización de ceros.

Parámetros	SECUENCIALMENTE DOMINADO				NO SECUENCIALMENTE DOMINADO				ÁTOMO			
	$\sigma_{1,n}$	$\sigma_{2,n}$	$\rho(D_n)$	máx Z	$\sigma_{1,n}$	$\sigma_{2,n}$	$\rho(D_n)$	máx Z	$\sigma_{1,n}$	$\sigma_{2,n}$	$\rho(D_n)$	máx Z
Ej.1: $[-1, 1]t^2, [-1, 1]t^{10}$	1.276	1.276	1.000	1.133	-	-	-	-	-	-	-	-
Ej.2: $[-2, 2], [-1, 1]$	1.999	1.999	1.999	1.999	-	-	-	-	-	-	-	-
Ej.3: $[-1, 1]t^{10}, [-1, 1]t^2$	-	-	-	-	2.204	2.122	1.000	1.275	-	-	-	-
Ej.4: $[0, 10], [30, 40]$	-	-	-	-	$9,272 \times 10^{16}$	39.998	42.930	50.052	-	-	-	-
Ej.5: $[30, 40], [0, 10]$	-	-	-	-	$9,272 \times 10^{16}$	39.991	39.991	39.991	-	-	-	-
Ej.6: $[0, 10], [30, 50]$	-	-	-	-	$5,990 \times 10^{13}$	49.983	52.656	59.814	-	-	-	-
Ej.7: $[30, 50], [0, 10]$	-	-	-	-	$3,752 \times 10^{13}$	49.987	49.987	49.987	-	-	-	-
Ej.8: $[0, 20], [30, 40]$	-	-	-	-	$2,944 \times 10^9$	39.985	40.951	44.196	-	-	-	-
Ej.9: $[30, 40], [0, 20]$	-	-	-	-	$4,136 \times 10^8$	39.989	39.989	39.989	-	-	-	-
Ej.10: $[-15, -5], [5, 16]$	-	-	-	-	$3,711 \times 10^{10}$	15.990	17.107	21.152	-	-	-	-
Ej.11: $[-15, -5], [5, 14]$	-	-	-	-	$2,338 \times 10^{11}$	14.992	15.094	19.007	-	-	-	-
Ej.12: $[-1, 1], c = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	4.704	0.999	0.999	0.999
Ej.13: $[-1, 1], c = 2$	-	-	-	-	-	-	-	-	$7,441 \times 10^{36}$	0.999	2.025	2.933
Ej.14: $[0, 1], c = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	35.000	0.999	0.999	0.999
Ej.15: $[0, 1], c = 2$	-	-	-	-	-	-	-	-	$1,405 \times 10^{50}$	0.999	2.021	3.299

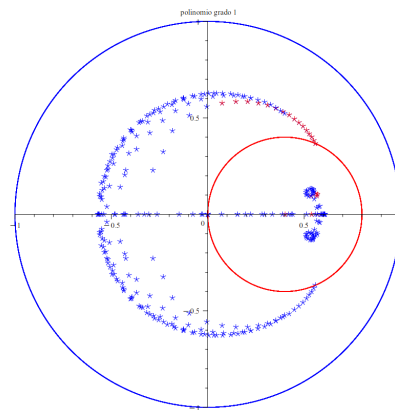
3.2. Caso Circunferencia

En este capítulo analizamos el comportamiento de los ceros de polinomios ortogonales de Sobolev en el caso complejo, donde las medidas están soportadas en circunferencias. Este enfoque nos permite extender nuestro estudio más allá del eje real y comprender mejor los fenómenos de distribución de ceros en el plano complejo.

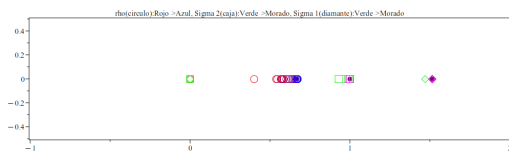
Ejemplo 1. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0;1} + \int_{S_{0,4}(0,4)} p'(z)\overline{q'(z)} dm_{0,4;0,4}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{25} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{25}$.

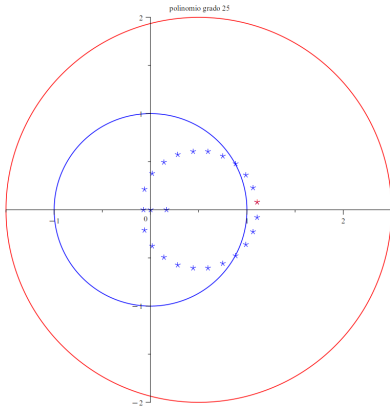


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{25}$.

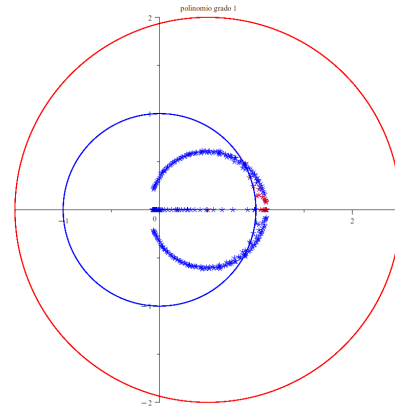
1. $\sigma_{1,25} = 1,516$
2. $\sigma_{2,25} = 1,000$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{25}) = 0,667$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{25} = 0,672$

3.2. Caso Circunferencia

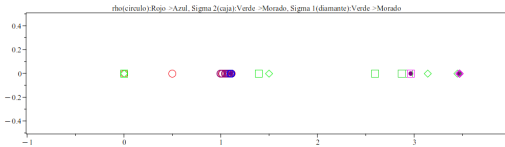
Ejemplo 2. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0,1} + \int_{S_2(0,5)} p'(z)\overline{q'(z)} dm_{0,5;2}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{25} .



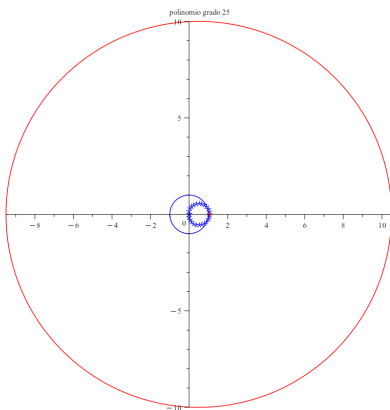
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{25}$.



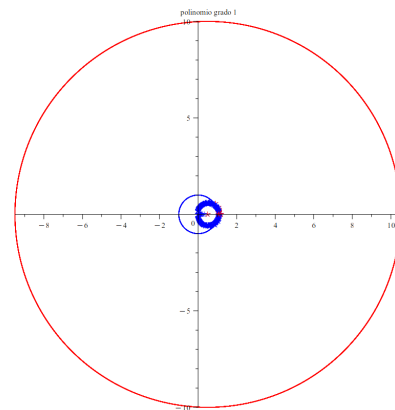
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{25}$.

1. $\sigma_{1,25} = 3,470$
2. $\sigma_{2,25} = 2,968$
3. $R = 2,5$
4. $\rho(\mathbf{D}_{25}) = 1,108$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{25} = 1,112$

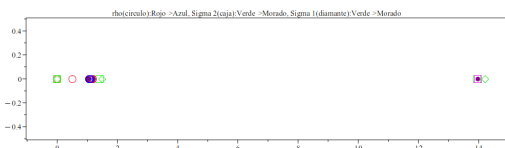
Ejemplo 3. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0,1} + \int_{S_{10}(0,5)} p'(z)\overline{q'(z)} dm_{0,5;10}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{25} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{25}$.

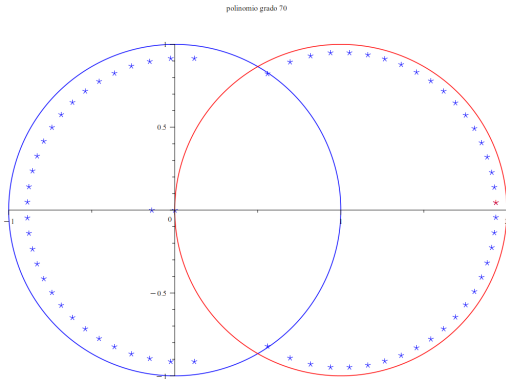


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{25}$.

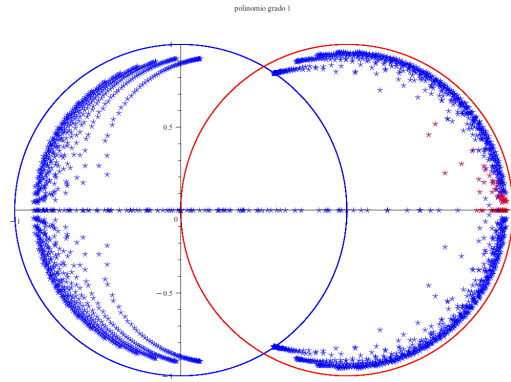
1. $\sigma_{1,25} = 15,248$
2. $\sigma_{2,25} = 13,972$
3. $R = 10,5$
4. $\rho(\mathbf{D}_{25}) = 1,068$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{25} = 1,185$

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

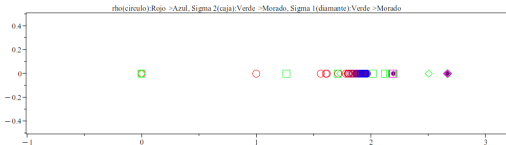
Ejemplo 4. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0;1} + \int_{S_1(1)} p'(z)\overline{q'(z)} dm_{1;1}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



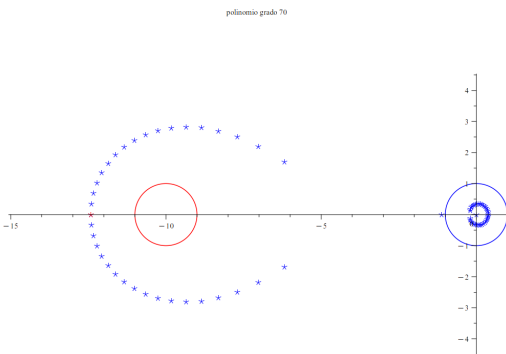
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



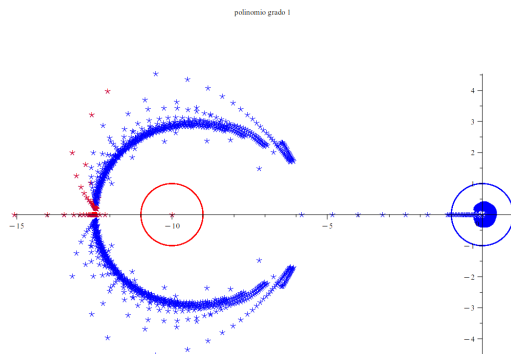
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 2,672$
2. $\sigma_{2,70} = 2,672$
3. $R = 2$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 1,933$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 1,963$

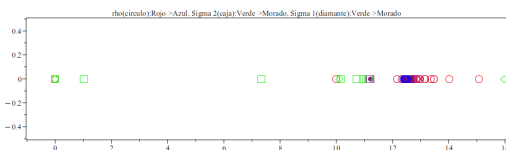
Ejemplo 5. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0;1} + \int_{S_1(-10)} p'(z)\overline{q'(z)} dm_{-10;1}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.

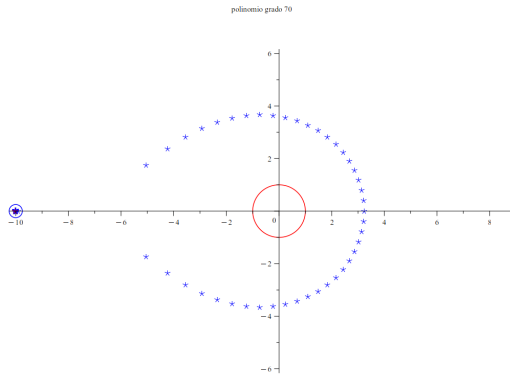


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

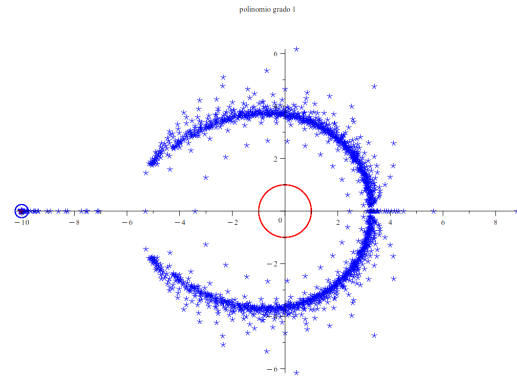
1. $\sigma_{1,70} = 4,963 \times 10^{14}$
2. $\sigma_{2,70} = 11,211$
3. $R = 11$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 12,424$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 15,074$

3.2. Caso Circunferencia

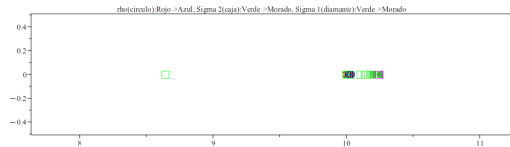
Ejemplo 6. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_{0,25}(-10)} p(z)\overline{q(z)} dm_{-10;0,25} + \int_{S_1(0)} p'(z)\overline{q'(z)} dm_{0;1}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



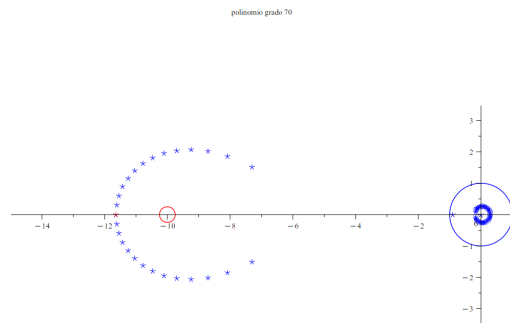
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



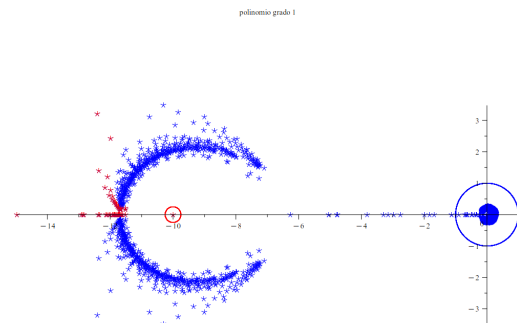
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 9,660 \times 10^{22}$
2. $\sigma_{2,70} = 10,249$
3. $R = 10,25$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 10,035$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 10,035$

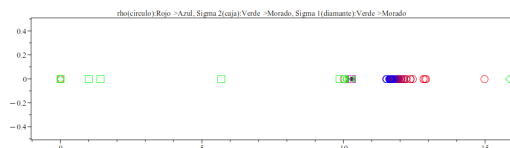
Ejemplo 7. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0;1} + \int_{S_{0,25}(-10)} p'(z)\overline{q'(z)} dm_{-10;0,25}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.

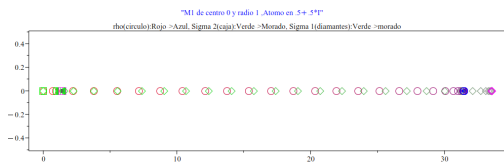


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 1,409 \times 10^{23}$
2. $\sigma_{2,70} = 10,298$
3. $R = 10,25$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 11,641$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 14,981$

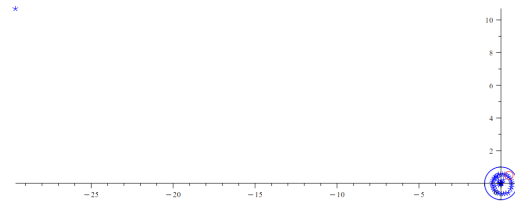
Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

Ejemplo 8. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z) \overline{q(z)} dm_{0;1} + p'(0,5 + 0,5i) \overline{q'(0,5 + 0,5i)}$



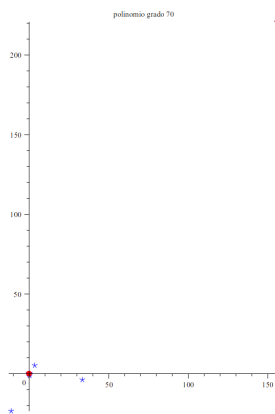
(a) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{50}$.

1. $\sigma_{1,50} = 33,560$
2. $\sigma_{2,50} = 1,457$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{50}) = 31,489$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{50} = 31,489$

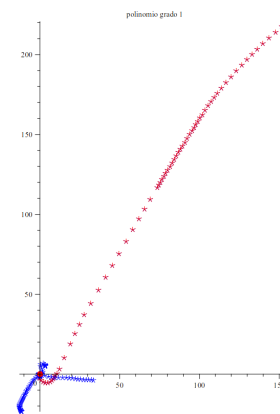


(b) Conjunto de ceros de φ_{50} .

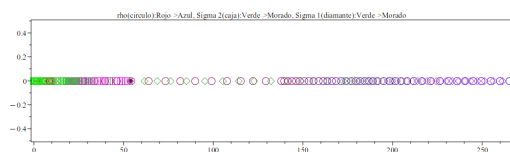
Ejemplo 9. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(-0,5-0,5i)} p(z) \overline{q(z)} dm_{-0,5-0,5i;1} + p'(0) \overline{q'(0)}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 314,848$
2. $\sigma_{2,70} = 54,035$
3. $R = 1,5$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 270,137$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 270,137$

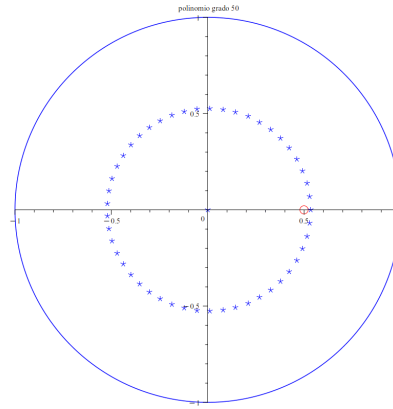
3.2. Caso Circunferencia

Ejemplo 10. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0;1} + p'(0,5)\overline{q'(0,5)}$



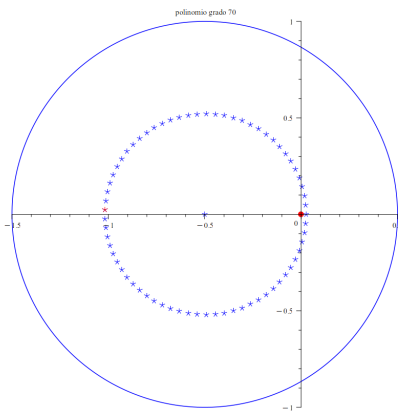
(a) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{50}$.

1. $\sigma_{1,50} = 1,542$
2. $\sigma_{2,50} = 1,000$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{50}) = 0,533$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{50} = 0,651$

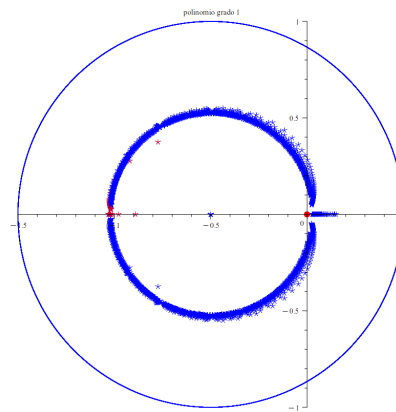


(b) Conjunto de ceros de φ_{50} .

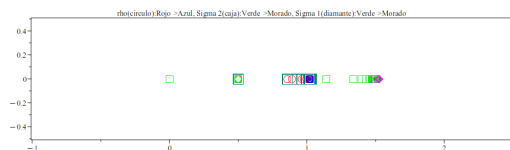
Ejemplo 11. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(-0,5)} p(z)\overline{q(z)} dm_{-0,5;1} + p'(0)\overline{q'(0)}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.

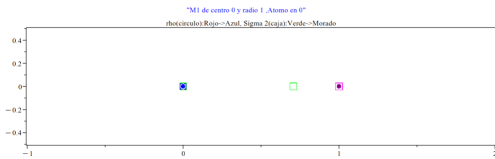


(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 1,525$
2. $\sigma_{2,70} = 1,500$
3. $R = 1,5$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 1,017$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 1,031$

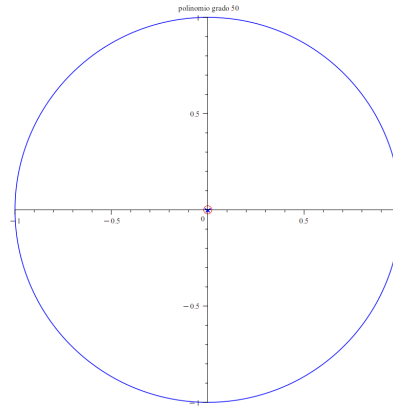
Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

Ejemplo 12. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0;1} + p'(0)\overline{q'(0)}$



(a) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{50}$.

1. $\sigma_{1,50} = 1,414$
2. $\sigma_{2,50} = 1,000$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{50}) = 0,000$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{50} = 0,000$



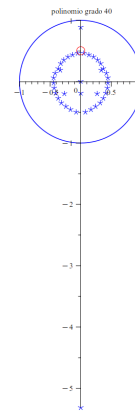
(b) Conjunto de ceros de φ_{50} .

Ejemplo 13. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0;1} + p'(0,5i)\overline{q'(0,5i)}$



(a) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{50}$.

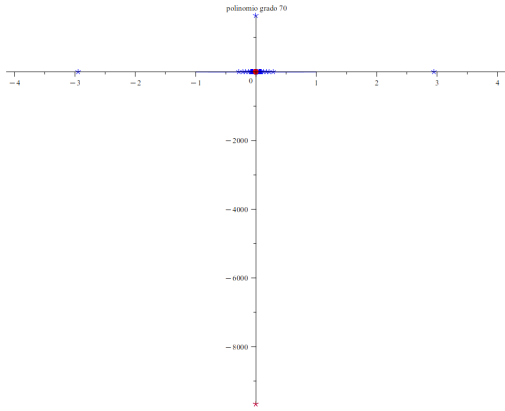
1. $\sigma_{1,50} = 6,325$
2. $\sigma_{2,50} = 1,492$
3. $R = 1$
4. $\rho(\mathbf{D}_{50}) = 5,311$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{50} = 5,311$



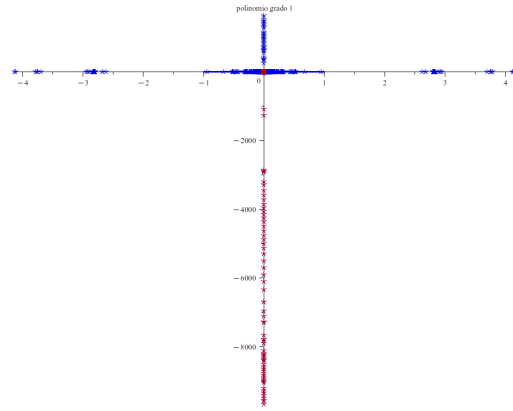
(b) Conjunto de ceros de φ_{50} .

3.2. Caso Circunferencia

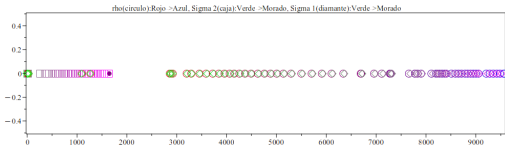
Ejemplo 14. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(-0,5i)} p(z)\overline{q(z)} dm_{-0,5i;1} + p'(0)\overline{q'(0)}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



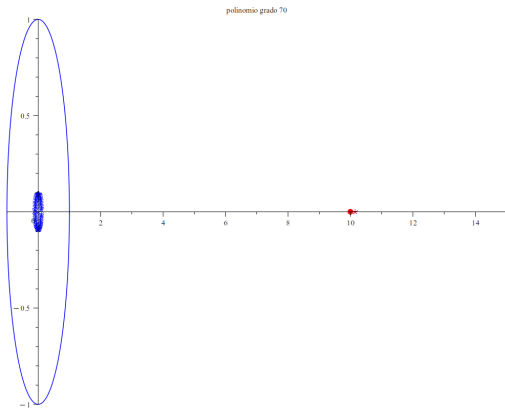
(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



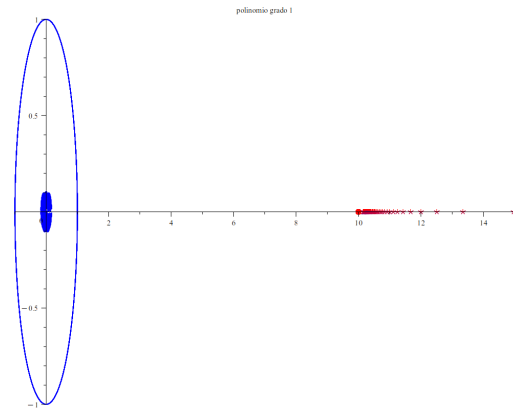
(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 9690,600$
2. $\sigma_{2,70} = 1647,790$
3. $R = 1,5$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 9665,190$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 9665,190$

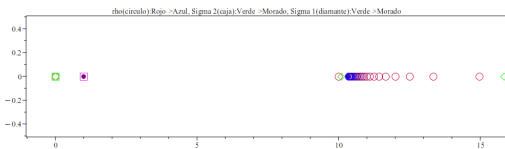
Ejemplo 15. $\langle p(z), q(z) \rangle_S = \int_{S_1(0)} p(z)\overline{q(z)} dm_{0;1} + p'(10)\overline{q'(10)}$



(a) Conjunto de ceros de φ_{70} .



(b) Conjunto de ceros de $\varphi_0, \dots, \varphi_{70}$.



(c) Secuencia de $\{\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70}$.

1. $\sigma_{1,70} = 3,502 \times 10^{26}$
2. $\sigma_{2,70} = 1,000$
3. $R = 10$
4. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 10,345$
5. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 14,975$

Cuadro 3.2: Resumen de ejemplos sobre la localización de ceros en el caso de circunferencias.

Parámetros	SECUCIALLY DOMINANTE				NO SECUCIALLY DOMINANTE				ÁTOMO			
	$\sigma_{1,n}$	$\sigma_{2,n}$	$\rho(D_n)$	máx Z	$\sigma_{1,n}$	$\sigma_{2,n}$	$\rho(D_n)$	máx Z	$\sigma_{1,n}$	$\sigma_{2,n}$	$\rho(D_n)$	máx Z
Ej.1: $S_0(1), S_{0,4}(0,4)$	1,516	1,000	0,667	0,672	-	-	-	-	-	-	-	-
Ej.2: $S_0(1), S_{0,5}(2)$	3,470	2,968	1,108	1,112	-	-	-	-	-	-	-	-
Ej.3: $S_0(1), S_{0,5}(10)$	15,248	13,972	1,068	1,185	-	-	-	-	-	-	-	-
Ej.4: $S_0(1), S_1(1)$	-	-	-	-	2,672	2,672	1,933	1,963	-	-	-	-
Ej.5: $S_0(1), S_{-10}(1)$	-	-	-	-	$4,963 \times 10^{14}$	11,211	12,424	15,074	-	-	-	-
Ej.6: $S_{-10}(0,25), S_0(1)$	-	-	-	-	$9,660 \times 10^{22}$	10,249	10,035	10,035	-	-	-	-
Ej.7: $S_0(1), S_{-10}(0,25)$	-	-	-	-	$1,409 \times 10^{23}$	10,298	11,641	14,981	-	-	-	-
Ej.8: $S_0(1), c = 0,5 + 0,5i$	-	-	-	-	-	-	-	-	33,560	1,457	31,489	31,489
Ej.9: $S_{-0,5-0,5i}(1), c = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	314,848	54,035	270,137	270,137
Ej.10: $S_0(1), c = 0,5$	-	-	-	-	-	-	-	-	1,542	1,000	0,533	0,651
Ej.11: $S_{-0,5}(1), c = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	1,525	1,500	1,017	1,031
Ej.12: $S_0(1), c = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	1,414	1,000	0,000	0,000
Ej.13: $S_0(1), c = 0,5i$	-	-	-	-	-	-	-	-	6,325	1,492	5,311	5,311
Ej.14: $S_{-0,5i}(1), c = 0$	-	-	-	-	-	-	-	-	9690,600	1647,790	9665,190	9665,190
Ej.15: $S_0(1), c = 10$	-	-	-	-	-	-	-	-	$3,502 \times 10^{26}$	1,000	10,345	14,975

3.3. Análisis y Conjeturas

El Cuadro 3.1, que resume los experimentos numéricos para el caso real, revela una variedad de comportamientos. Notablemente, en ejemplos como el primero, donde el producto de Sobolev puede considerarse secuencialmente dominado (es decir, el soporte de la integral que involucra las derivadas, $I_2 = [c, d]$, está contenido en el soporte de la integral del término sin derivadas, $I_1 = [a, b]$, y el cociente de los pesos $w_1(t)/w_0(t)$ está acotado en I_1), los valores singulares del operador de multiplicación truncado D_n y su radio espectral confirman la acotación del operador \mathcal{D} . La Proposición a continuación aborda formalmente esta situación, estableciendo una cota para la norma de \mathcal{D} bajo dichas condiciones de dominación secuencial en el caso real continuo.

Proposición 7. *Para el caso continuo real secuencialmente dominado con soportes $I_1 = [a, b]$ y $I_2 = [c, d]$ con $[c, d] \subset [a, b]$, definamos $R = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$, $\alpha = \max_{t \in [a, b]} \frac{w_1(t)}{w_0(t)}$. Entonces el operador multiplicación \mathcal{D} es acotado en el producto Sobolev y satisface $\|\mathcal{D}\| \leq \sqrt{2(R^2 + \alpha)}$.*

Demostración. Sea $p(t) \in \mathbb{P}[t]$. Utilizando que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ para $a, b \geq 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}(p(t))\|^2 &= \int_a^b t^2 p^2(t) w_0(t) dt + \int_c^d [(tp(t))']^2 w_1(t) dt \\ &= \int_a^b t^2 p^2(t) w_0(t) dt + \int_c^d (p(t) + tp'(t))^2 w_1(t) dt \leq \\ &\int_a^b t^2 p^2(t) w_0(t) dt + 2 \left(\int_c^d p(t)^2 w_1(t) dt + \int_c^d t^2 p'(t)^2 w_1(t) dt \right) \leq \\ &R^2 \left(\int_a^b p^2(t) w_0(t) dt + 2 \int_c^d p'(t)^2 w_1(t) dt \right) + 2 \int_c^d p(t)^2 w_1(t) dt \leq \\ &2R^2 \|p(t)\|^2 + 2\alpha \int_c^d p(t)^2 w_0(t) dt \leq 2R^2 \|p(t)\|^2 + 2\alpha \int_a^b p(t)^2 w_0(t) dt = \\ &2(R^2 + \alpha) \|p(t)\|^2 \end{aligned}$$

□

Aplicando la Proposición 7 al **Ejemplo 1** del Caso Real: tenemos $I_1 = [-1, 1]$ (con $w_0(t) = t^2$) y $I_2 = [-1, 1]$ (con $w_1(t) = t^{10}$). Así, $R = \max\{|-1|, |1|\} = 1$. El cociente de pesos $w_1(t)/w_0(t) = t^8$ (para $t \neq 0$) implica $\alpha = 1$. Por lo tanto, la cota es $\|\mathcal{D}\| \leq \sqrt{2(R^2 + \alpha)} = \sqrt{2(1^2 + 1)} = \sqrt{4} = 2$. Este resultado es consistente con el valor numérico $\sigma_{1,70} = 1,2760$ (Cuadro 2.1), ya que $1,2760 \leq 2$.

Para el **Ejemplo 2**, tenemos $I_1 = [-2, 2]$ (con $w_0(t) = 1$) y $I_2 = [-1, 1]$ (con $w_1(t) = 1$). Aquí, $R = \max\{|-2|, |2|, |-1|, |1|\} = 2$. Como $w_1(t)/w_0(t) = 1$ para $t \in [-1, 1]$, tenemos $\alpha = 1$. Así, obtenemos $\|\mathcal{D}\| \leq \sqrt{2(R^2 + \alpha)} = \sqrt{2(2^2 + 1)} = \sqrt{2(4 + 1)} = \sqrt{10} \approx 3,16$. Esto también es consistente con el valor experimental $\sigma_{1,70} = 1,999$, confirmando que la cota teórica es válida.

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

Es interesante notar que el **Ejemplo 3**, aunque no es secuencialmente dominado (ya que $w_1(t)/w_0(t) = t^{-8}$ no está acotado en $[-1, 1]$), presenta $\sigma_{1,70} = 2,2040$. Si bien la Proposición 7 no aplica directamente, el valor experimental es cercano a la cota de 2 obtenida para el Ejemplo 1, lo que podría sugerir alguna relación subyacente o la necesidad de una cota más general.

Para continuar el análisis, aplicaré el Teorema 2 de la Introducción a los *Ejemplos 4-11*, explorando cómo la relación entre los soportes de las medidas afecta la acotación del operador y la distribución de ceros.

Para los casos no secuencialmente dominados (*Ejemplos 3-11*), podemos observar patrones interesantes. En el *Ejemplo 3*, donde $I_1 = [-1, 1]$ (con $w_0(t) = t^{10}$) y $I_2 = [-1, 1]$ (con $w_1(t) = t^2$), aunque los soportes coinciden, el cociente $w_1(t)/w_0(t) = t^{-8}$ no está acotado cerca de $t = 0$. Esto se refleja en $\sigma_{1,70} = 2,204$, mientras que $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 1,000$, evidenciando un operador acotado pero no necesariamente por las razones del Teorema 2.

Los *Ejemplos 4 y 5* muestran casos donde $I_1 = [0, 10]$ e $I_2 = [30, 40]$ (y viceversa), con soportes disjuntos y relativamente distantes. Aquí observamos que $\sigma_{1,n}$ crece exponencialmente ($\approx 9,272 \times 10^{16}$), sugiriendo un operador no acotado, mientras que $\rho(\mathbf{D}_n)$ permanece acotado (42.930 y 39.991 respectivamente). Es importante destacar que, aunque $\sigma_{1,n}$ sugiere un operador no acotado en estos casos, $\sigma_{2,n}$ parece converger al máximo absoluto de los extremos de los soportes, $R = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$. Por ejemplo, en los Ejemplos 4 y 5, $R = 40$, y los valores de $\sigma_{2,70}$ son 39,998 y 39,991 respectivamente (según el Cuadro 2.1). Esta tendencia de $\sigma_{2,n}$ a aproximarse a R se mantiene en los siguientes ejemplos de este grupo (*Ejemplos 6-11*). Notablemente, cuando el soporte de la medida sin derivada está a la derecha del soporte con derivada (*Ejemplo 5*), los ceros tienden a permanecer dentro del soporte de mayor magnitud, con $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 39,991$.

Los *Ejemplos 6 y 7* con $I_1 = [0, 10]$ e $I_2 = [30, 50]$ (y viceversa) confirman esta tendencia. Cuando la segunda medida tiene un soporte más amplio (*Ejemplo 6*), los ceros se extienden más allá del soporte máximo ($\rho(\mathbf{D}_{70}) = 59,814 > 50$), mientras que en el *Ejemplo 7*, con la configuración inversa, los ceros permanecen confinados ($\rho(\mathbf{D}_{70}) = 49,987 \approx 50$).

Los *Ejemplos 8-11* con diferentes configuraciones de soportes $[0, 20]$ y $[30, 40]$ (y viceversa), así como $[-15, -5]$ y $[5, 16]$ (o $[5, 14]$), refuerzan esta observación: cuando la medida sin derivada (I_1) tiene el soporte de mayor magnitud, los ceros tienden a permanecer dentro de ese soporte (es decir, $\rho(\mathbf{D}_{70}) \approx R$). Por el contrario, cuando la medida con derivada (I_2) tiene el soporte más extremo, los ceros pueden exceder significativamente R . En estos casos, la localización de los ceros más externos, $\rho(\mathbf{D}_n)$, puede describirse como $R + k$, donde el factor k (positivo en este contexto) depende de la geometría relativa de los soportes I_1 e I_2 , incluyendo su separación, tamaños relativos y cuál de ellos corresponde a la medida con derivada.

A partir de los *Ejemplos 4-11*, donde los soportes $I_1 = [a, b]$ y $I_2 = [c, d]$ varían en posición y tamaño, se observan las siguientes tendencias:

- **Operador \mathcal{D} (Norma $\sigma_{1,n}$):** En casos con soportes disjuntos y I_2 significa-

tivamente alejado o más extenso que I_1 (e.g., Ej. 4, 6, 10), $\sigma_{1,n}$ tiende a valores muy grandes, sugiriendo que \mathcal{D} es no acotado.

- **Segundo Valor Singular ($\sigma_{2,n}$):** Consistentemente, $\sigma_{2,n}$ se aproxima a $R = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$, el extremo de mayor módulo entre todos los límites de los soportes.
- **Radio Espectral ($\rho(\mathbf{D}_n)$):** Aunque $\sigma_{1,n}$ pueda divergir, $\rho(\mathbf{D}_n)$ permanece acotado, influenciado por R y la posición relativa de los soportes.
 - Si el soporte de la medida sin derivada, I_1 , contiene el extremo de mayor módulo (e.g., Ej. 5, 7, 9), $\rho(\mathbf{D}_n)$ tienden a converger a R .
 - Si el soporte de la medida con derivada, I_2 , contiene el extremo de mayor módulo (e.g., Ej. 4, 6, 8, 10, 11), $\rho(\mathbf{D}_n)$ pueden superar R . En estos casos, $\rho(\mathbf{D}_n)$ puede describirse como $R + k$, donde $k \geq 0$ es un factor que depende de:
 - La separación entre I_1 e I_2 .
 - Los tamaños relativos de I_1 e I_2 .
 - Cuál de los soportes (I_1 o I_2) es el más externo. El factor k tiende a ser mayor cuando I_2 es el soporte más externo y de mayor magnitud.

La Proposición 7 nos dio una perspectiva sobre la acotación de \mathcal{D} en ciertos casos continuos. Ahora, dirigimos nuestra atención a los productos internos que, además de la integral usual, incorporan un término atómico para la derivada, como se observa en los Ejemplos 11-14 (Cuadro 3.1). Estos productos, de la forma $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_a^b p(t)q(t) dt + p'(c)q'(c)$, son particularmente interesantes. Aunque la adición de este átomo a menudo implica que el operador \mathcal{D} no sea acotado (como sugiere $\sigma_{1,n}$ en dichos ejemplos), los ceros de los polinomios ortogonales resultantes parecen mantenerse acotados. Esta aparente acotación de los ceros es lo que exploraremos seguidamente.

A continuación, se analiza el comportamiento en los *Ejemplos 12-15* del Cuadro 3.1, que corresponden a productos internos con una medida atómica para la derivada, de la forma $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_a^b p(t)q(t) dt + p'(c)q'(c)$. Estos casos no son secuencialmente dominados en el sentido de la Proposición 7. Una observación clave es que $\sigma_{1,n}$ (la norma de \mathbf{D}_n) tiende a ser extremadamente grande o infinita (ver Ej. 13: $\sigma_{1,70} = 7,4 \times 10^{36}$ y Ej. 15: $\sigma_{1,70} = 1,4 \times 10^{50}$), lo que sugiere que el operador \mathcal{D} es generalmente no acotado en presencia del término atómico.

A pesar de esta aparente no acotación de \mathcal{D} , $\rho(\mathbf{D}_{70})$ se mantienen acotados. El comportamiento de los ceros y del radio espectral $\rho(\mathbf{D}_n)$ depende de la posición del átomo c respecto al intervalo de integración $[a, b]$:

- Si $c \in [a, b]$ (como en el Ej. 12, con $c = 0 \in [-1, 1]$, y el Ej. 14, con $c = 0 \in [0, 1]$), $\rho(\mathbf{D}_n)$ converge al radio del soporte de la integral, $R_0 = \max\{|a|, |b|\}$. En ambos ejemplos, este valor es 1 (observado como 0,999).

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

- Si $c \notin [a, b]$ (como en el Ej. 13, con $c = 2 \notin [-1, 1]$, y el Ej. 15, con $c = 2 \notin [0, 1]$), $\rho(\mathcal{D}_n)$ es fuertemente influenciado por la posición del átomo. Específicamente, $\rho(\mathcal{D}_n)$ se aproxima a $|c| = R$ (e.g., $2,025 \approx |2|$ en Ej. 13 y $2,021 \approx |2|$ en Ej. 15), y el cero máximo de φ_n también se localiza en la vecindad de c , pudiendo incluso superarlo (e.g., 2,933 en Ej. 13 y 3,299 en Ej. 15).

De manera crucial, en los cuatro ejemplos atómicos (12-15), el segundo mayor valor singular, $\sigma_{2,70}$, converge consistentemente a $R_0 = \max\{|a|, |b|\}$ (que es 1 en estos casos, observado como 0,999), y en algunos ejemplos coincide con R (cuando $c = 0$). Esto indica que $\sigma_{2,n}$ puede servir como un estimador robusto del radio efectivo del soporte de la parte integral del producto de Sobolev, incluso cuando el término atómico induce la no acotación del operador de multiplicación \mathcal{D} .

En resumen, la influencia del átomo en c sobre los ceros en los casos reales analizados es la siguiente:

- Si el átomo c se encuentra **dentro** del intervalo de integración $[a, b]$ (e.g., Ej. 12, 14):
 - El radio espectral $\rho(\mathbf{D}_n)$ convergen a $R_0 = \max\{|a|, |b|\} = R$, que es el radio del soporte de la integral.
 - El segundo valor singular $\sigma_{2,n}$ también converge a R_0 , sirviendo como un estimador de esta cota para los ceros.
- Si el átomo c se encuentra **fuera** del intervalo de integración $[a, b]$ (e.g., Ej. 13, 15):
 - El radio espectral $\rho(\mathbf{D}_n)$ se aproxima a $|c| = R$.
 - Los ceros máximos de φ_n son fuertemente atraídos por la posición del átomo, localizándose en la vecindad de c y pudiendo tener módulo mayor que R (y que R_0). La cota efectiva para los ceros parece depender de R y su distancia al intervalo $[a, b]$.
 - Aunque el operador \mathcal{D} es generalmente no acotado (evidenciado por $\sigma_{1,n}$ grande), $\sigma_{2,n}$ sigue convergiendo a R_0 .

Pasando ahora al **Caso Circunferencia**, resumido en el Cuadro 3.2, se investiga cómo las observaciones del caso real se trasladan al plano complejo. En este escenario, las medidas de Sobolev se definen sobre circunferencias, y los términos atómicos, si existen, son puntos en \mathbb{C} . El análisis se centra en la acotación del operador de multiplicación \mathcal{D} y la localización de los ceros, interpretando los resultados experimentales a la luz de las siguientes conclusiones sobre la acotación de \mathcal{D} .

CASO CONTINUO DOS CIRCUNFERENCIAS: Se consideran productos internos donde ambas medidas son integrales sobre circunferencias, de la forma $\langle p(z), q(z) \rangle = \int_{S_{r_b}(b)} p(z)\overline{q(z)} dm_{b;r_b} + \int_{S_{r_a}(a)} p'(z)\overline{q'(z)} dm_{a;r_a}$.

1. **Cuando la segunda circunferencia $S_{r_a}(a)$ (y su interior $\mathbb{D}_{r_a}(a)$) está contenida en el primer disco abierto $\mathbb{D}_{r_b}(b)$:** Esta situación corresponde a un

caso secuencialmente dominado, y por tanto, el operador \mathcal{D} está acotado.

- El *Ejemplo 1* del Cuadro 3.2 ($S_1(0)$ y $S_{0,4}(0,4)$) satisface esta condición, ya que $|0,4 - 0| + 0,4 = 0,8 < 1$. Consistentemente, $\sigma_{1,n} \approx 1,516$ es finito, indicando acotación.

2. **Cuando el centro de la segunda circunferencia a está contenido en el primer disco abierto $\mathbb{D}_{r_b}(b)$ (aunque $S_{r_a}(a)$ no esté contenido en dicho disco):** En este caso, se ha demostrado que \mathcal{D} está acotado [9]. Este caso no es necesariamente secuencialmente dominado ni matricialmente secuencialmente dominado en el sentido clásico.

- El *Ejemplo 2* ($S_1(0)$ y $S_2(0,5)$): $a = 0,5 \in \mathbb{D}_1(0)$. Se observa $\sigma_{1,25} = 3,470$.
- El *Ejemplo 3* ($S_1(0)$ y $S_{10}(0,5)$): $a = 0,5 \in \mathbb{D}_1(0)$. Se observa $\sigma_{1,25} = 15,248$.

Ambos ejemplos muestran convergencia para $\sigma_{1,n}$, apoyando la acotación de \mathcal{D} .

3. **Cuando el centro de la segunda circunferencia a no está contenido en el primer disco abierto $\mathbb{D}_{r_b}(b)$:** Este es un caso no secuencialmente dominado, y el comportamiento de \mathcal{D} no se conoce teóricamente de forma general.

- El *Ejemplo 5* ($S_1(0)$ y $S_1(-10)$): $a = -10 \notin \mathbb{D}_1(0)$. $\sigma_{1,70} = 4,963 \times 10^{14}$.
- El *Ejemplo 6* ($S_{0,25}(-10)$ y $S_1(0)$): $b = -10, r_b = 0,25, a = 0$. $a = 0 \notin \mathbb{D}_{0,25}(-10)$. $\sigma_{1,70} = 9,660 \times 10^{22}$.
- El *Ejemplo 7* ($S_1(0)$ y $S_{0,25}(-10)$): $a = -10 \notin \mathbb{D}_1(0)$. $\sigma_{1,70} = 1,409 \times 10^{23}$. En estos ejemplos, los valores extremadamente grandes de $\sigma_{1,n}$ sugieren que \mathcal{D} es no acotado.
- El *Ejemplo 4* ($S_1(0)$ y $S_1(1)$): $a = 1$, que está en el borde de $\mathbb{D}_1(0)$ (no en el disco abierto). $\sigma_{1,70} = 2,672$. A pesar de no poder asegurar acotación, parece que los ceros sí lo están.

CASO DE CIRCUNFERENCIA Y ÁTOMO: Se analizan productos de la forma $\langle p(z), q(z) \rangle = \int_{S_{r_b}(b)} p(z)q(z) dm_{b;r_b} + p'(c)\overline{q'(c)}$.

1. **Cuando el átomo c está dentro del disco abierto $\mathbb{D}_{r_b}(b)$:**

a) El operador \mathcal{D} está acotado. Este es un caso secuencialmente dominado 3.

- *Ejemplo 10* ($S_1(0), c = 0,5$): $0,5 \in \mathbb{D}_1(0)$. $\sigma_{1,50} = 1,542$.
- *Ejemplo 12* ($S_1(0), c = 0$): $0 \in \mathbb{D}_1(0)$. $\sigma_{1,50} = 1,414$.
- *Ejemplo 13* ($S_1(0), c = 0,5i$): $0,5i \in \mathbb{D}_1(0)$. $\sigma_{1,50} = 6,325$.
- *Ejemplo 11* ($S_1(-0,5), c = 0$): $0 \in \mathbb{D}_1(-0,5)$. $\sigma_{1,70} = 1,525$.
- *Ejemplo 8* ($S_1(0), c = 0,5+0,5i$): $c \in \mathbb{D}_1(0)$ ya que $|0,5+0,5i| \approx 0,707 < 1$. $\sigma_{1,50} = 33,560$.

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

- *Ejemplo 9* ($S_1(-0,5-0,5i), c = 0$): $c \in \mathbb{D}_1(-0,5-0,5i)$ ya que $|0 - (-0,5-0,5i)| \approx 0,707 < 1$. $\sigma_{1,70} = 314,848$.
- *Ejemplo 14* ($S_1(-0,5i), c = 0$): $c \in \mathbb{D}_1(-0,5i)$ ya que $|0 - (-0,5i)| = 0,5 < 1$. $\sigma_{1,70} = 9690,60$.

En todos estos casos, $\sigma_{1,n}$ es finito, lo que es consistente con la acotación teórica de \mathcal{D} , aunque el límite de la magnitud de la cota puede variar considerablemente.

2. **Cuando el átomo c está fuera del disco abierto $\mathbb{D}_{r_b}(b)$:** El comportamiento de \mathcal{D} no se conoce teóricamente de forma general, pero la experimentación numérica sugiere que podría ser no acotado.

- *Ejemplo 15* ($S_1(0), c = 10$): $c = 10 \notin \mathbb{D}_1(0)$. $\sigma_{1,70} = 3,502 \times 10^{26}$, un valor muy grande que sugiere la no acotación de \mathcal{D} .

Analizando globalmente los resultados obtenidos en ambos casos (real y circunferencia), podemos observar patrones significativos respecto a la acotación del operador multiplicación y la localización de los ceros. A pesar de la diversidad de configuraciones estudiadas, destaca una característica sorprendente: incluso cuando el operador \mathcal{D} no es acotado (como sugieren los valores extremadamente grandes de $\sigma_{1,n}$), los ceros de los polinomios ortogonales correspondientes parecen permanecer acotados en todos los casos. Además, existe una aparente correlación entre el segundo valor singular $\sigma_{2,n}$ y el máximo de los extremos de los soportes R . Esta evidencia numérica nos lleva a formular una conjetura fundamental sobre el comportamiento asintótico del radio espectral de las matrices truncadas \mathbf{D}_n , que tiene importantes implicaciones para la teoría de polinomios ortogonales de Sobolev.

Observación Empírica sobre el radio espectral Una observación fundamental, verificada en la totalidad de los ejemplos numéricos presentados en los Cuadros 3.1 y 3.2, es que el radio espectral de las matrices de multiplicación truncadas \mathbf{D}_n permanece acotado incluso cuando el operador \mathcal{D} no es acotado (como indican los valores extremadamente grandes de $\sigma_{1,n}$). Esta acotación del radio espectral se manifiesta de diferentes maneras según la configuración de los soportes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{D}_n) < \infty.$$

Específicamente, cuando la medida sin derivada I_1 contiene el soporte de mayor magnitud, $\rho(\mathbf{D}_n)$ tiende a converger aproximadamente a $R = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$. Cuando la medida con derivada I_2 contiene el soporte de mayor magnitud, $\rho(\mathbf{D}_n)$ puede exceder R , aproximándose a $R + k$ donde $k \geq 0$ depende de la separación entre soportes y sus tamaños relativos.

Conjetura 1. *El análisis numérico exhaustivo de los diversos ejemplos de productos internos de Sobolev presentados (Cuadros 3.1 y 3.2), abarcando las configuraciones previamente categorizadas como (1.3)-(1.6), sugiere de manera consistente que el radio espectral de las secciones truncadas del operador de multiplicación,*

D_n , converge a un límite finito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{D}_n) < \infty.$$

Esta propiedad parece mantenerse incluso en escenarios donde el operador \mathcal{D} no es acotado. De hecho, los ejemplos sugieren que el radio espectral $\rho(\mathbf{D}_n)$ tiende a converger $R + k$ con $k \in \mathbb{R}$ dependiente de las posiciones y tamaños relativos de los soportes y si se alcanza en el soporte de la derivada o no.

Observación Empírica sobre el Segundo Valor Singular : Una observación fundamental, verificada en la totalidad de los ejemplos numéricos presentados en los Cuadros 3.1 y 3.2 (representativos de las categorías de productos de Sobolev (1.3)-(1.6)), es la convergencia del segundo mayor valor singular de la matriz de multiplicación truncada \mathbf{D}_n , en los casos reales con soportes compactos, converge a R , en casos reales con átomo, converge a R_0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2,n} < \infty.$$

Esta convergencia se manifiesta consistentemente en todos los casos estudiados.

Conjetura 2. Basándose en la observación anterior, y con especial énfasis en aquellos casos donde el operador de multiplicación \mathcal{D} es no acotado (lo cual se infiere de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{1,n} = \infty$), se postula la siguiente conjetura:

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{1,n} = \infty, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2,n} < \infty.$$

En esta dirección hemos obtenido unos resultados que apoyan esta conjetura [6].

Teorema de entrelazamiento de Cauchy [17] Sea A una matriz de orden n y sea B una submatriz principal de A de orden $n - 1$. Si $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ son los autovalores de A y $\mu_{n-1} \leq \dots \leq \mu_2 \leq \mu_1$ son los autovalores de B , entonces

$$\lambda_n \leq \mu_{n-1} \leq \dots \leq \mu_2 \leq \lambda_1.$$

Proposición 8. Sea M una matriz infinita hermitiana semidefinida positiva. Sean

$$0 \leq \lambda_{n,n} \leq \dots \leq \lambda_{2,n} \leq \lambda_{1,n}.$$

los autovalores de la matriz M_n . Entonces La sucesión $\{\sigma_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente, es decir,

$$\lambda_{2,n+1} \leq \lambda_{2,n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

por lo que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{2,n}$ pudiendo ser finito o infinito.

Demostración. Utilizando el teorema de entrelazamiento se tiene que:

$$0 \leq \lambda_{n+1,n+1} \leq \lambda_{n,n} \lambda_{n,n+1} \leq \dots \leq \lambda_{2,n} \leq \lambda_{2,n+1} \leq \lambda_{1,n} \leq \lambda_{1,n+1}$$

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

En particular,

$$\lambda_{2,n+1} \leq \lambda_{2,n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Lema 2. Sea D una matriz infinita de Hessenberg superior y D_n las secciones de orden n . Entonces se tiene que

$$(D_{n+1}^* D_{n+1})_n = D_n^* D_n + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n+1,n}^2 \end{pmatrix}$$

Demostración. Expresando el producto $(D_{n+1}^* D_{n+1})$ adecuadamente y multiplicando por cajas, obtenemos el resultado:

$$(D_{n+1}^* D_{n+1}) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & D_n^* & & d_{n+1,n}^* \\ \hline d_{1,n+1}^* & \dots & d_{n,n+1}^* & d_{n+1,n+1}^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} & d_{1,n+1} \\ & \vdots \\ D_n & d_{n,n+1} \\ \hline 0 & \dots & d_{n+1,n} & d_{n+1,n+1} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & D_n^* D_n + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n+1,n}^2 \end{pmatrix} & & X \\ \hline & & & Y & Z \end{array} \right)$$

□

Proposición 9. Sea D una matriz infinita de Hessenberg, y D_n las secciones de orden n entonces si

$$0 \leq \sigma_{n,n} \leq \dots \leq \sigma_{2,n} \leq \sigma_{1,n}.$$

los valores singulares de la matriz D_n se tiene que la sucesión $\{\sigma_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2,n} \leq \infty$$

Demostración. Sean $\lambda_{2,n}$ los segundos autovalores de una matriz hermitiana de orden n . Denotamos por H_n la siguiente matriz de orden n :

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n+1,n}^2 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que H_n es hermitiana semidefinida positiva y utilizando las propiedades de monotonía de Weyl ([17]):

$$\lambda_{2,n}(\mathbf{D}_n^* \mathbf{D}_n) \leq \lambda_{2,n}(\mathbf{D}_n^* \mathbf{D}_n + H_n) = \lambda_{2,n}(\mathbf{D}_{n+1}^* \mathbf{D}_{n+1})_n$$

Ahora por las propiedades de entrelazamiento

$$\lambda_{2,n}(\mathbf{D}_{n+1}^* \mathbf{D}_{n+1})_n \leq \lambda_{2,n+1}(\mathbf{D}_{n+1}^* \mathbf{D}_{n+1}),$$

de donde

$$\lambda_{2,n}(\mathbf{D}_n^* \mathbf{D}_n) \leq \lambda_{2,n+1}(\mathbf{D}_{n+1}^* \mathbf{D}_{n+1}).$$

Por tanto $\sigma_{2,n} \leq \sigma_{2,n+1}$ y se verifica el resultado. □

Observación Empírica sobre la traslación de los soportes : Se ha observado que cuando los soportes están en la recta real y se trasladan a lo largo del eje real, los ceros también se trasladan de igual manera. Sin embargo, si la traslación de los soportes tiene una componente imaginaria, se observan comportamientos anómalos en la localización de los ceros.

Conjetura 3. *Basándonos en la observación del comportamiento de los ceros de Sobolev cuando trasladamos los soportes de ambas medidas mediante una traslación en el eje real, se postula la siguiente conjetura: Los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev asociados a las nuevas medidas trasladadas, se trasladan mediante la misma traslación.*

Estas observaciones indican que la geometría de los soportes en el plano complejo (posición relativa de circunferencias y átomos) es determinante para las propiedades del operador de multiplicación y la distribución de los ceros. Las transformaciones de semejanza, que se discuten a continuación, ofrecen herramientas para comprender cómo los cambios de escala y las translaciones afectan estas propiedades.

El siguiente resultado refleja la situación de traslación de ceros en el caso estándar de polinomios ortogonales asociados a una medida.

Proposición 10. [18] *Sea μ una medida con soporte en el plano complejo \mathbb{C} y $f(z) = \alpha z + \beta$ una semejanza con $\alpha > 0$ y sea \mathbf{D} la matriz del operador multiplicación por z respecto de la SPON definida por μ . Entonces, si consideramos la medida imagen de μ por f , $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$, obtenemos un nuevo producto interior y una secuencia de polinomios ortonormales, tal que la matriz D^f del operador multiplicación por z tiene como sección de orden n la matriz*

$$D_n^f = \alpha D_n + \beta I_n.$$

De este resultado podemos deducir el comportamiento de los ceros de los polinomios si transformamos el soporte mediante una semejanza, puesto que los ceros de los polinomios mónicos son autovalores de las secciones \mathbf{D}_n .

Capítulo 3. Casos Analizados y Conjeturas

Corolario 4. En las condiciones de proposición anterior, denotamos por $\{P_k(z)\}_0^\infty$ y $\{P_k^f(z)\}_0^\infty$, las secuencias de polinomios mónicos asociados respectivamente a μ y a μ_f , entonces

$$P_n^f(z) = \alpha^n P_n\left(\frac{z - \beta}{\alpha}\right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} P_n^f(z) &= |z\mathbf{I}_n - \mathbf{D}_n^f| = |z\mathbf{I}_n - (\alpha\mathbf{D}_n + \beta\mathbf{I}_n)| = |(z - \beta)\mathbf{I}_n - \alpha\mathbf{D}_n| = \\ &= \left| \left(\alpha\frac{z - \beta}{\alpha}\right)\mathbf{I}_n - \alpha\mathbf{D}_n \right| = \left| \alpha\left(\frac{z - \beta}{\alpha}\mathbf{I}_n - \mathbf{D}_n\right) \right| = \alpha^n P_n\left(\frac{z - \beta}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

□

Por lo que z_0 es un cero de $P_k^f(z) \Leftrightarrow P_n^f(z_0) = 0 \Leftrightarrow P_n\left(\frac{z_0 - \beta}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{z_0 - \beta}{\alpha}$ es un cero de $P_n(z)$, esto es, $\alpha\omega_0 + \beta = z_0$.

En el contexto de los productos internos de Sobolev, la aplicabilidad directa de este corolario sobre la transformación de los ceros no es, en general, válida según visto en los ejemplos. Se puede observar cómo al hacer traslaciones con un vector con componentes complejas, se obtiene un comportamiento diferente al del corolario. Habría que investigar si es un error de cálculo o si es un resultado que no se puede aplicar directamente a los productos internos de Sobolev.

Capítulo 4

Análisis de impacto

4.1. Impacto Personal

El desarrollo de este TFG ha supuesto un impacto personal significativo en términos de adquisición de conocimientos sobre la teoría de polinomios ortogonales de Sobolev, el manejo avanzado de herramientas de cálculo simbólico como MAPLE, y el desarrollo de habilidades de investigación, análisis crítico y comunicación científica.

4.2. Impacto en Investigación

En el ámbito de la investigación, este trabajo busca:

- **Aportar nuevas herramientas computacionales y de visualización** que permitan la experimentación numérica y la formulación de nuevas conjeturas en el campo.
- **Ofrecer evidencia empírica y vías futuras** sobre el comportamiento de los ceros y los valores singulares en casos poco estudiados, como aquellos donde no hay dominación secuencial o en presencia de átomos discretos.

4.3. Beneficios Esperados y Limitaciones

Los resultados y herramientas desarrolladas en este TFG ofrecen una valiosa contribución a la teoría matemática fundamental, conectando con problemas abiertos en teoría espectral de matrices infinitas y teoría del potencial en el plano complejo. Además, refuerzan la comprensión de fenómenos de transición de fase en matrices aleatorias con restricciones derivativas, con aplicaciones relevantes en física estadística y teoría cuántica de la información, como se menciona en la introducción.

No obstante, es importante reconocer ciertas limitaciones, principalmente relacionadas con la complejidad computacional. El análisis de polinomios de grado alto y la manipulación de matrices de momentos pueden demandar recur-

sos computacionales significativos, lo que podría restringir algunas aplicaciones prácticas o requerir optimizaciones adicionales para su implementación efectiva.

4.4. Impacto en los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)

Este trabajo, aunque fundamentalmente teórico y computacional en el ámbito de las matemáticas, puede contribuir indirectamente a ciertos Objetivos de Desarrollo Sostenible[19]:

- **ODS 4: Educación de Calidad.** Las herramientas y visualizaciones desarrolladas pueden enriquecer la educación superior en matemáticas, sirviendo como material didáctico avanzado y apoyando la formación científica[20].
- **ODS 9: Industria, Innovación e Infraestructura.** El estudio de polinomios ortogonales de Sobolev puede impulsar innovaciones en modelos numéricos para problemas industriales complejos, contribuyendo a la infraestructura científica necesaria para el avance tecnológico[21].
- **ODS 17: Alianzas para Lograr los Objetivos.** La publicación de resultados y código abierto promueve la colaboración científica internacional, facilitando la construcción colectiva de conocimiento y el fortalecimiento de redes académicas[22].

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

En este Trabajo Fin de Grado hemos llevado a cabo un análisis y visualización del conjunto de ceros de los *polinomios ortogonales de Sobolev* cuando el producto interior incorpora derivadas de primer orden y las medidas están soportadas en la recta real o en subconjuntos compactos del plano complejo. El manuscrito ofrece un marco teórico unificado que recopila y organiza resultados clásicos y recientes sobre matrices de momentos, operadores de multiplicación de tipo Hessenberg y criterios de acotación de ceros basados en la norma del operador \mathcal{D} . Esta panorámica sitúa el problema dentro de la teoría espectral moderna y facilita la comparación con otros contextos de ortogonalidad no estándar.

Destacamos el enfoque matricial adoptado en este trabajo, que ha permitido caracterizar los polinomios ortogonales de Sobolev a través de estructuras algebraicas que capturan completamente su comportamiento. Este enfoque ha sido fundamental para establecer conexiones entre el análisis funcional y la teoría de matrices, proporcionando herramientas computacionales robustas para el estudio de las propiedades espectrales.

Los **principales logros** de este trabajo incluyen:

- Desarrollo de un marco teórico unificado para el análisis de polinomios ortogonales de Sobolev desde una perspectiva matricial.
- Implementación de algoritmos eficientes en MAPLE para el cálculo de matrices de Gram, ortonormalización y generación de matrices D_n .
- Creación de un sistema interactivo de visualización que permite analizar gráficamente las relaciones entre soportes, cotas teóricas y distribución de ceros.
- Validación numérica de las condiciones de acotación del operador \mathcal{D} en diversos contextos geométricos.
- Análisis pionero del comportamiento del segundo valor singular $\sigma_{2,n}$ en operadores no secuencialmente dominados.

Capítulo 5. Conclusiones y trabajo futuro

- Caracterización del efecto de los átomos en la distribución de ceros, aportando evidencia visual a una cuestión abierta.

Sobre el plano computacional, se diseñó e implementó en MAPLE un conjunto de algoritmos que, a partir de los datos de la medida, construye la matriz de Gram, ortonormaliza la base monomial, genera la familia de matrices \mathbf{D}_n y calcula tanto sus radios espectrales $\rho(\mathbf{D}_n)$ como sus valores singulares $\sigma_{k,n}$. A partir de esta infraestructura se elaboró un sistema interactivo de visualización que superpone los soportes de las medidas, la circunferencia de cota teórica ($|z| \leq \|\mathcal{D}\|$) y las trayectorias de los ceros al crecer el grado n , facilitando la validación numérica de conjeturas y la formulación de nuevas hipótesis.

Los resultados experimentales confirman, para los casos continuos de dos circunferencias concéntricas, tangentes y disjuntas, el acotamiento uniforme de los ceros cuando el operador \mathcal{D} es acotado, reproduciendo y extendiendo los ejemplos existentes en la literatura. Por primera vez se analiza de forma sistemática el comportamiento del segundo valor singular $\sigma_{2,n}$ en situaciones donde el operador no es secuencialmente dominado, observándose su convergencia hacia el radio máximo del soporte combinado y sugiriendo refinamientos en las cotas espectrales actuales. En el caso discreto —una medida continua perturbada por un átomo— se pone de manifiesto que la presencia del átomo fuera del disco de la medida base provoca la pérdida de acotación y la fuga de algunos ceros, aportando evidencia visual a una cuestión hasta ahora abierta.

Contribuciones originales:

- Criterios gráficos basados en diagramas $(\rho(\mathbf{D}_n), \sigma_{2,n})$ para diagnosticar la acotación de \mathcal{D} .
- Conjetura sobre la convergencia de $\rho(\mathbf{D}_n)$ al radio de la envolvente convexa del soporte para productos Sobolev compacto-compacto.
- Conjetura sobre la convergencia de $\sigma_{2,n}$ al máximo módulo de los puntos de soporte cuando $\|\mathcal{D}\| = \infty$.
- Repositorio de casos de prueba que garantiza la reproducibilidad de los resultados.

En conjunto, el trabajo integra teoría, experimentación computacional y visualización interactiva, aportando nuevas evidencias y herramientas que favorecen la exploración de los polinomios ortogonales de Sobolev en contexto poco estudiados. Consideramos que estas contribuciones no sólo consolidan resultados previos, sino que abren vías prometedoras hacia una comprensión más profunda de la interacción entre la geometría del soporte, la estructura del producto de Sobolev y el espectro del operador de multiplicación.

Para concluir, cabe destacar que los experimentos presentados se han realizado en casos concretos de Sobolev involucrando intervalos, circunferencias y átomos. Sin embargo, los resultados obtenidos y la metodología desarrollada permiten vislumbrar generalizaciones naturales al caso de productos Sobolev asociados a medidas más generales, e incluso extenderse al contexto de **productos Sobolev matriciales**, como se esquematiza en el siguiente diagrama. Esta

estructura jerárquica ilustra cómo los casos particulares estudiados se insertan en un marco teórico más amplio, proporcionando una base sólida para futuras investigaciones que busquen generalizar los resultados a contextos de mayor complejidad analítica.

$$\langle p(z), q(z) \rangle_{\mathbf{M}_S} = \langle p(z), q(z) \rangle_{\mathbf{M}_1} + \langle p'(z), q'(z) \rangle_{\mathbf{M}_2}$$

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{C}} p(z) q(z) d\mu_1(z) + \int_{\mathbb{C}} p'(z) q'(z) d\mu_2(z)$$

Sobolev

Real

Circunferencia

5.2. Reflexión personal

Al cursar la asignatura de Análisis Funcional y aprender sobre los espacios de Sobolev, este estudio me intrigó desde el primer momento en que me lo comentaron. Los resultados obtenidos a lo largo del trabajo me han sorprendido y, sinceramente, me he quedado con ganas de profundizar aún más en este campo.

Este TFG muestra perfectamente la esencia del Grado en Matemáticas e Informática. A diferencia de otros dobles grados duales, esta titulación busca constantemente puntos de convergencia entre ambas disciplinas. El presente trabajo, fundamentado en teoría matemática y desarrollado mediante implementaciones computacionales, ejemplifica esta intersección de manera notable. Evidencia claramente la profunda interrelación entre matemáticas e informática, mostrando cómo cada disciplina potencia a la otra para generar conocimiento innovador. La experiencia de traducir conceptos matemáticos abstractos a modelos computacionales, para luego explorarlos y validarlos mediante algoritmos, ha sido extraordinariamente formativa y refleja fielmente las competencias adquiridas durante mis estudios.

5.3. Trabajos Futuros

El presente TFG abre diversos frentes de investigación que, de abordarse con mayor profundidad, podrían consolidar y ampliar los resultados obtenidos. A continuación se describen varias líneas prioritarias, agrupadas según su naturaleza teórica, computacional y aplicada, pero sin perder de vista las ideas nucleares ya esbozadas en el texto.

Productos Sobolev de orden superior ($N > 1$). Un paso natural es incorporar derivadas de segundo y tercer orden en el producto interior. Continuar con el análisis de los valores singulares siguientes $(\sigma_{3,n}, \sigma_{4,n}, \dots)$, como se ilustrará en los ejemplos posteriores.

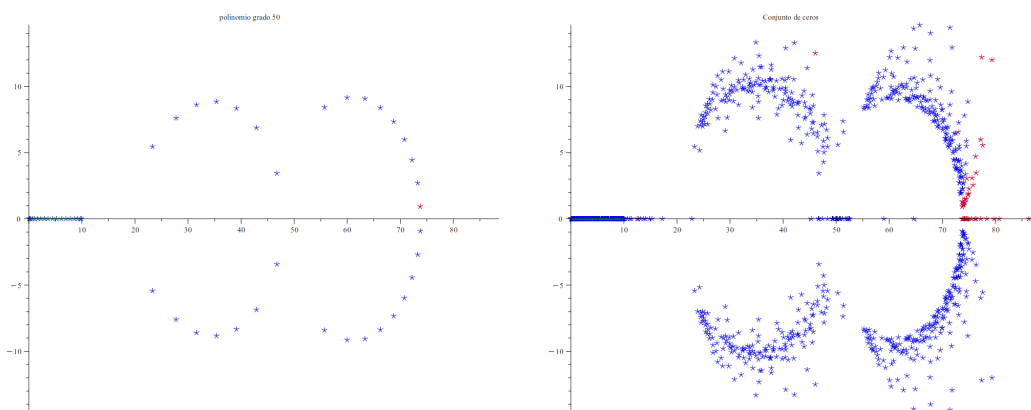
Capítulo 5. Conclusiones y trabajo futuro

Leyes de distribución de ceros. Derivar distribuciones límite (tipo medida de equilibrio) para los ceros en distintos regímenes de soportes y pesos Sobolev proporcionaría una analogía con la Ley de Zeros de Ullman-Stahl en la ortogonalidad estándar.

Convergencia del autovalor máximo. Investigar la convergencia del autovalor que determina $\rho(\mathbf{D}_n)$, verificando si el autovalor que determina el radio espectral converge.

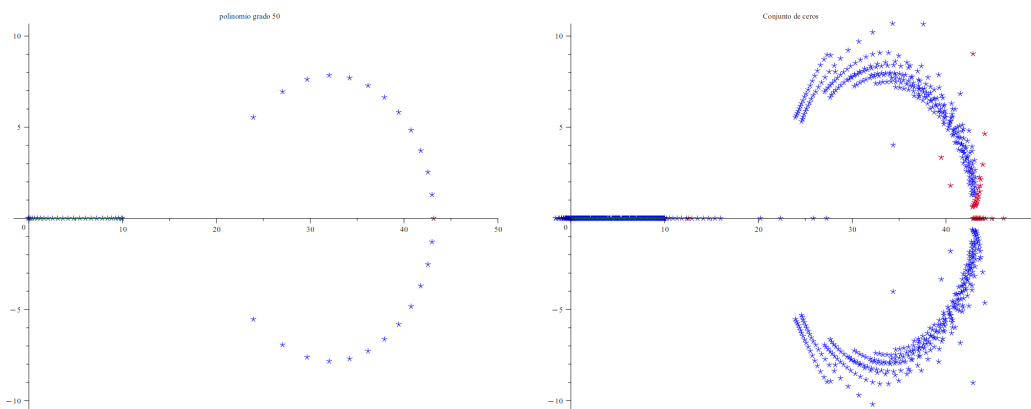
Átomos bpe como caso secuencialmente dominado. Finalmente, se profundizará en el estudio de los átomos, utilizando como base los trabajos de Gonzalo y Escribano sobre la secuencialidad matricial en el caso de productos de Sobolev con átomos.

Ejemplo 1. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_0^{10} p(t)q(t) dt + \int_{30}^{40} p'(t)q'(t) dt + \int_{60}^{70} p''(t)q''(t) dt$



1. $\sigma_{1,70} = 4,939 \times 10^8$
2. $\sigma_{2,70} = 1,847 \times 10^8$
3. $\sigma_{3,70} = 69,956$
4. $R = 70$
5. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 73,791$
6. $\max\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 88,570$

Ejemplo 2. $\langle p(t), q(t) \rangle_S = \int_0^{10} p(t)q(t) dt + \int_{30}^{40} p'(t)q'(t) dt + p''(0)c''(0) dt$



1. $\sigma_{1,70} = 1,521 \times 10^{12}$
2. $\sigma_{2,70} = 212,771$
3. $\sigma_{3,70} = 39,976$
4. $R = 40$
5. $\rho(\mathbf{D}_{70}) = 43,136$
6. $\text{máx}\{\rho(\mathbf{D}_n)\}_{n=0}^{70} = 50,046$

Como se puede observar en los ejemplos, $\sigma_{1,n} = \infty$ y $\sigma_{2,n} = \infty$, mientras que $\sigma_{3,n} = R < \infty$.

En resumen, estas líneas de investigación futura prometen extender el alcance y la profundidad de los resultados obtenidos en este TFG, estableciendo conexiones más sólidas entre la teoría espectral y los polinomios ortogonales de Sobolev. El marco teórico desarrollado, junto con las herramientas computacionales implementadas, proporciona una base robusta desde la cual abordar estos desafíos, contribuyendo así a una comprensión más completa de la interacción entre estructura algebraica, propiedades espectrales y comportamiento asintótico en sistemas polinomiales con derivadas.

Bibliografía

- [1] P. Althammer, “Eine erweiterung des orthogonalitätsbegriffes bei polynomen und deren anwendung auf die beste approximation,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 211, pp. 192–204, 1962.
- [2] J. Brenner, “Über eine erweiterung des orthogonalitätsbegriffes bei polynomen,” in *Constructive Theory of Functions (Budapest, 1969)*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1972, pp. 77–83.
- [3] E. A. Cohen, “Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in the sobolev space $w^{1,2}[-1, 1]$,” *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 6, no. 1, pp. 105–116, 1975.
- [4] H. G. Meijer, “On real and complex zeros of orthogonal polynomials in a discrete sobolev space,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 49, pp. 179–191, 1993.
- [5] —, “Sobolev orthogonal polynomials with a small number of real zeros,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 77, pp. 305–313, 1994.
- [6] C. Escribano, R. Gonzalo, and G. Suárez, “A note on singular values of hessenberg matrices and orthogonal polynomials,” *preprint*, 2025.
- [7] G. L. Lagomasino, H. P. Cabrera, and I. P. Izquierdo, “Sobolev orthogonal polynomials in the complex plane,” *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 127, no. 1-2, pp. 219–230, 2001.
- [8] A. J. Durán and E. B. Saff, “Zero location for nonstandard orthogonal polynomials,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 113, pp. 127–141, 2001.
- [9] C. Escribano and R. Gonzalo, “Zeros of orthogonal polynomials and some matrix inequalities,” *arXiv preprint arXiv:2503.15131*, 2025.
- [10] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2012.
- [11] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators II. Spectral Theory: Self Adjoint Operators in Hilbert Space*. Interscience Publishers, Inc., 1963.
- [12] J. Gallier, “Spectral theory of unsigned and signed graphs applications to graph clustering some slides,” Presentation slides, 2017.

- [13] C. Escribano and R. Gonzalo, “Boundedness of zeros of sobolev orthogonal polynomials via generalized eigenvalues,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, p. 116556, 2025.
- [14] G. L. Lagomasino and H. P. Cabrera, “Zero location and nth root asymptotics of sobolev orthogonal polynomials,” *Journal of approximation theory*, vol. 99, no. 1, pp. 30–43, 1999.
- [15] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, 2nd ed., ser. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1978, vol. 11, ver VII.3, Ejemplo 3.
- [16] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras*, ser. Prentice–Hall Series in Modern Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall, 1969, véase Cap. 1, Prop. 1.7.
- [17] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, ser. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer–Verlag, 1997, vol. 169.
- [18] M. del Carmen Escribano Iglesias, “Medidas autosemejantes en el plano complejo, momentos y matrices de hessenberg,” Ph. D. thesis, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain, 2012. [Online]. Available: https://oa.upm.es/14306/1/MARIA_DEL_CARMEN_ESCRIBANO_IGLESIAS.pdf
- [19] United Nations, “Transforming our world: the 2030 agenda for sustainable development,” Resolution adopted by the General Assembly on 25 September 2015, 2015, a/RES/70/1. [Online]. Available: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/>
- [20] —, “Sustainable development goal 4: Ensure inclusive and equitable quality education and promote lifelong learning opportunities for all,” UN Sustainable Development Goals, 2015. [Online]. Available: <https://sdgs.un.org/goals/goal4>
- [21] —, “Sustainable development goal 9: Build resilient infrastructure, promote inclusive and sustainable industrialization and foster innovation,” UN Sustainable Development Goals, 2015. [Online]. Available: <https://sdgs.un.org/goals/goal9>
- [22] —, “Sustainable development goal 17: Strengthen the means of implementation and revitalize the global partnership for sustainable development,” UN Sustainable Development Goals, 2015. [Online]. Available: <https://sdgs.un.org/goals/goal17>

Anexos

Apéndice A

Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	1.00010e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
7.74597e-01	9.34199e-01	6.42262e-01	1.00008e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
1.13329e+00	1.24449e+00	1.13353e+00	9.99973e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.09721e+00	1.26640e+00	1.26588e+00	9.99923e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.04561e+00	1.26963e+00	1.26800e+00	9.99976e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
9.71497e-01	1.27118e+00	1.26940e+00	1.00004e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.82619e-01	1.27385e+00	1.26967e+00	1.00004e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.94919e-01	1.27478e+00	1.27418e+00	9.99998e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.01776e+00	1.27514e+00	1.27498e+00	9.99969e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.01373e+00	1.27557e+00	1.27504e+00	9.99983e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00086e+00	1.27566e+00	1.27553e+00	1.00001e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.90342e-01	1.27568e+00	1.27568e+00	1.00002e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.90640e-01	1.27587e+00	1.27569e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00262e+00	1.27592e+00	1.27584e+00	9.99987e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00530e+00	1.27593e+00	1.27588e+00	9.99992e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00241e+00	1.27595e+00	1.27593e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.96402e-01	1.27596e+00	1.27595e+00	1.00001e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.93901e-01	1.27597e+00	1.27595e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.98855e-01	1.27597e+00	1.27597e+00	9.99994e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00162e+00	1.27598e+00	1.27597e+00	9.99995e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00154e+00	1.27598e+00	1.27597e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.99791e-01	1.27598e+00	1.27598e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.98200e-01	1.27598e+00	1.27598e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.99206e-01	1.27599e+00	1.27598e+00	9.99997e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00036e+00	1.27599e+00	1.27599e+00	9.99998e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00064e+00	1.27599e+00	1.27599e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00021e+00	1.27599e+00	1.27599e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.99557e-01	1.27599e+00	1.27599e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.99557e-01	1.27599e+00	1.27599e+00	9.99999e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00005e+00	1.27599e+00	1.27599e+00	9.99999e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00027e+00	1.27599e+00	1.27599e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
1.00014e+00	1.27599e+00	1.27599e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.99893e-01	1.27599e+00	1.27599e+00	1.00000e+00	1.27599e+00	1.27599e+00
9.99822e-01	1.27599e+00	1.27599e+00	9.99999e-01	1.27599e+00	1.27599e+00
9.99967e-01	1.27599e+00	1.27599e+00	9.99999e-01	1.27599e+00	1.27599e+00

Figura A.1: Ejemplo 1. Caso Real.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>	1.99536e+00	1.99536e+00	1.99536e+00
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	1.99560e+00	1.99560e+00	1.99560e+00
1.15470e+00	1.35401e+00	9.84732e-01	1.99583e+00	1.99583e+00	1.99583e+00
1.42063e+00	1.49832e+00	1.45227e+00	1.99606e+00	1.99606e+00	1.99606e+00
1.59734e+00	1.61642e+00	1.60481e+00	1.99624e+00	1.99625e+00	1.99624e+00
1.74451e+00	1.74789e+00	1.74647e+00	1.99642e+00	1.99642e+00	1.99642e+00
1.83714e+00	1.83875e+00	1.83737e+00	1.99660e+00	1.99660e+00	1.99660e+00
1.87461e+00	1.87585e+00	1.87494e+00	1.99676e+00	1.99676e+00	1.99676e+00
1.90071e+00	1.90095e+00	1.90079e+00	1.99690e+00	1.99690e+00	1.99690e+00
1.92403e+00	1.92412e+00	1.92410e+00	1.99704e+00	1.99704e+00	1.99704e+00
1.93924e+00	1.93940e+00	1.93921e+00	1.99717e+00	1.99717e+00	1.99717e+00
1.94831e+00	1.94844e+00	1.94834e+00	1.99729e+00	1.99729e+00	1.99729e+00
1.95679e+00	1.95680e+00	1.95680e+00	1.99741e+00	1.99741e+00	1.99741e+00
1.96392e+00	1.96396e+00	1.96394e+00	1.99751e+00	1.99751e+00	1.99751e+00
1.96859e+00	1.96863e+00	1.96858e+00	1.99761e+00	1.99761e+00	1.99761e+00
1.97241e+00	1.97242e+00	1.97241e+00	1.99770e+00	1.99770e+00	1.99770e+00
1.97614e+00	1.97615e+00	1.97614e+00	1.99779e+00	1.99779e+00	1.99779e+00
1.97886e+00	1.97887e+00	1.97886e+00	1.99787e+00	1.99787e+00	1.99787e+00
1.98097e+00	1.98098e+00	1.98097e+00	1.99795e+00	1.99795e+00	1.99795e+00
1.98306e+00	1.98306e+00	1.98306e+00	1.99803e+00	1.99803e+00	1.99803e+00
1.98481e+00	1.98482e+00	1.98481e+00	1.99810e+00	1.99810e+00	1.99810e+00
1.98611e+00	1.98612e+00	1.98611e+00	1.99816e+00	1.99816e+00	1.99816e+00
1.98738e+00	1.98738e+00	1.98738e+00	1.99823e+00	1.99823e+00	1.99823e+00
1.98854e+00	1.98855e+00	1.98854e+00	1.99829e+00	1.99829e+00	1.99829e+00
1.98943e+00	1.98944e+00	1.98943e+00	1.99834e+00	1.99834e+00	1.99834e+00
1.99025e+00	1.99025e+00	1.99025e+00	1.99840e+00	1.99840e+00	1.99840e+00
1.99105e+00	1.99105e+00	1.99105e+00	1.99845e+00	1.99845e+00	1.99845e+00
1.99169e+00	1.99169e+00	1.99169e+00	1.99850e+00	1.99850e+00	1.99850e+00
1.99225e+00	1.99225e+00	1.99225e+00	1.99855e+00	1.99855e+00	1.99855e+00
1.99282e+00	1.99282e+00	1.99282e+00	1.99859e+00	1.99859e+00	1.99859e+00
1.99329e+00	1.99329e+00	1.99329e+00	1.99863e+00	1.99863e+00	1.99863e+00
1.99370e+00	1.99370e+00	1.99370e+00	1.99868e+00	1.99868e+00	1.99868e+00
1.99411e+00	1.99411e+00	1.99411e+00	1.99872e+00	1.99872e+00	1.99872e+00
1.99447e+00	1.99447e+00	1.99447e+00	1.99875e+00	1.99875e+00	1.99875e+00
1.99478e+00	1.99478e+00	1.99478e+00	1.99879e+00	1.99879e+00	1.99879e+00
1.99508e+00	1.99508e+00	1.99508e+00			

Figura A.2: Ejemplo 2. Caso Real.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.05367e+00
9.19866e-01	2.12434e+00	3.98314e-01	1.00299e+00	2.20395e+00	2.05418e+00
1.27475e+00	2.19620e+00	1.45344e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.06061e+00
9.49062e-01	2.20129e+00	1.51898e+00	1.00558e+00	2.20395e+00	2.06107e+00
9.98980e-01	2.20351e+00	1.53925e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.06694e+00
9.82823e-01	2.20366e+00	1.64694e+00	1.00257e+00	2.20395e+00	2.06735e+00
1.08768e+00	2.20391e+00	1.66668e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.07273e+00
9.96746e-01	2.20393e+00	1.73341e+00	1.00472e+00	2.20395e+00	2.07310e+00
1.01247e+00	2.20395e+00	1.74286e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.07805e+00
9.99692e-01	2.20395e+00	1.79632e+00	1.00224e+00	2.20395e+00	2.07839e+00
1.04467e+00	2.20395e+00	1.80274e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.08296e+00
9.99995e-01	2.20395e+00	1.84411e+00	1.00405e+00	2.20395e+00	2.08327e+00
1.01051e+00	2.20395e+00	1.84855e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.08749e+00
9.99999e-01	2.20395e+00	1.88174e+00	1.00197e+00	2.20395e+00	2.08778e+00
1.02740e+00	2.20395e+00	1.88502e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.09170e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	1.91219e+00	1.00351e+00	2.20395e+00	2.09197e+00
1.00817e+00	2.20395e+00	1.91471e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.09562e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	1.93735e+00	1.00174e+00	2.20395e+00	2.09587e+00
1.01868e+00	2.20395e+00	1.93935e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.09927e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	1.95850e+00	1.00308e+00	2.20395e+00	2.09950e+00
1.00641e+00	2.20395e+00	1.96012e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.10268e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	1.97653e+00	1.00156e+00	2.20395e+00	2.10290e+00
1.01363e+00	2.20395e+00	1.97787e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.10588e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	1.99208e+00	1.00272e+00	2.20395e+00	2.10608e+00
1.00514e+00	2.20395e+00	1.99321e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.10888e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	2.00563e+00	1.00140e+00	2.20395e+00	2.10907e+00
1.01043e+00	2.20395e+00	2.00660e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.11171e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	2.01756e+00	1.00243e+00	2.20395e+00	2.11188e+00
1.00422e+00	2.20395e+00	2.01839e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.11437e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	2.02812e+00	1.00127e+00	2.20395e+00	2.11453e+00
1.00826e+00	2.20395e+00	2.02885e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.11688e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	2.03755e+00	1.00218e+00	2.20395e+00	2.11703e+00
1.00352e+00	2.20395e+00	2.03820e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.11925e+00
1.00000e+00	2.20395e+00	2.04602e+00	1.00115e+00	2.20395e+00	2.11940e+00
1.00672e+00	2.20395e+00	2.04659e+00	1.00000e+00	2.20395e+00	2.12150e+00

Figura A.3: Ejemplo 3. Caso Real.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
5.00000e+00	5.00000e+00	5.00000e+00	4.33321e+01	7.59212e+08	3.99509e+01
1.25346e+01	1.25393e+01	3.89252e+00	4.29551e+01	2.03800e+09	3.99546e+01
5.00520e+01	5.03380e+01	7.75619e+00	4.33479e+01	2.25096e+09	3.99563e+01
4.34869e+01	5.66230e+01	1.73812e+01	4.29667e+01	6.17695e+09	3.99594e+01
4.38240e+01	5.99675e+01	3.42880e+01	4.32524e+01	6.68484e+09	3.99608e+01
4.27266e+01	1.06585e+02	3.69058e+01	4.28700e+01	1.86936e+10	3.99635e+01
4.60081e+01	1.07949e+02	3.75902e+01	4.32641e+01	1.98820e+10	3.99646e+01
4.30933e+01	2.68197e+02	3.85470e+01	4.28738e+01	5.64970e+10	3.99670e+01
4.41786e+01	2.92011e+02	3.88563e+01	4.31846e+01	5.92123e+10	3.99680e+01
4.46758e+01	7.38339e+02	3.91529e+01	4.27878e+01	1.70539e+11	3.99700e+01
4.47447e+01	8.96812e+02	3.92979e+01	4.31936e+01	1.76558e+11	3.99708e+01
4.40372e+01	2.07457e+03	3.94491e+01	4.27834e+01	5.14212e+11	3.99726e+01
4.38882e+01	2.80692e+03	3.95352e+01	4.31264e+01	5.27034e+11	3.99733e+01
4.44751e+01	5.87919e+03	3.96124e+01	4.27019e+01	1.54890e+12	3.99749e+01
4.41310e+01	8.79189e+03	3.96680e+01	4.31335e+01	1.57477e+12	3.99755e+01
4.39967e+01	1.67728e+04	3.97132e+01	4.26858e+01	4.66134e+12	3.99769e+01
4.36334e+01	2.74621e+04	3.97514e+01	4.30760e+01	4.70957e+12	3.99775e+01
4.41741e+01	4.81360e+04	3.97793e+01	4.25989e+01	1.40165e+13	3.99787e+01
4.37629e+01	8.54706e+04	3.98068e+01	4.30816e+01	1.40960e+13	3.99792e+01
4.38349e+01	1.38876e+05	3.98251e+01	4.25565e+01	4.21161e+13	3.99803e+01
4.34360e+01	2.65027e+05	3.98455e+01	4.30318e+01	4.22207e+13	3.99807e+01
4.39240e+01	4.02541e+05	3.98581e+01	4.24233e+01	1.26463e+14	3.99817e+01
4.35134e+01	8.18884e+05	3.98737e+01	4.30364e+01	1.26544e+14	3.99821e+01
4.36763e+01	1.17162e+06	3.98826e+01	4.20552e+01	3.79500e+14	3.99830e+01
4.32808e+01	2.52189e+06	3.98947e+01	4.29929e+01	3.79501e+14	3.99833e+01
4.37277e+01	3.42250e+06	3.99013e+01	4.24288e+01	1.13821e+15	3.99841e+01
4.33299e+01	7.74327e+06	3.99109e+01	4.29967e+01	1.13873e+15	3.99844e+01
4.35403e+01	1.00301e+07	3.99159e+01	4.25139e+01	3.41207e+15	3.99851e+01
4.31546e+01	2.37102e+07	3.99237e+01	4.29583e+01	3.41850e+15	3.99854e+01
4.35729e+01	2.94793e+07	3.99275e+01	4.25914e+01	1.02239e+16	3.99861e+01
4.31866e+01	7.24219e+07	3.99339e+01	4.29615e+01	1.02669e+16	3.99863e+01
4.34269e+01	8.68641e+07	3.99369e+01	4.26095e+01	3.06226e+16	3.99869e+01
4.30482e+01	2.20715e+08	3.99421e+01	4.29274e+01	3.08474e+16	3.99872e+01
4.34490e+01	2.56541e+08	3.99446e+01	4.26534e+01	9.16870e+16	3.99877e+01
4.30686e+01	6.71299e+08	3.99489e+01	4.29301e+01	9.27151e+16	3.99879e+01

Figura A.4: Ejemplo 4. Caso Real.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
3.50000e+01	3.50000e+01	3.50000e+01	3.99676e+01	7.59212e+08	3.99662e+01
3.61060e+01	3.61095e+01	2.74627e+01	3.99686e+01	2.03800e+09	3.99685e+01
3.79785e+01	3.81180e+01	3.25273e+01	3.99709e+01	2.25096e+09	3.99697e+01
3.82265e+01	3.83595e+01	3.75491e+01	3.99717e+01	6.17695e+09	3.99716e+01
3.89591e+01	4.30646e+01	3.81500e+01	3.99737e+01	6.68484e+09	3.99726e+01
3.90681e+01	9.43780e+01	3.90646e+01	3.99744e+01	1.86936e+10	3.99743e+01
3.93712e+01	9.78907e+01	3.91961e+01	3.99761e+01	1.98820e+10	3.99751e+01
3.94355e+01	2.62758e+02	3.94277e+01	3.99767e+01	5.64970e+10	3.99766e+01
3.95801e+01	2.88683e+02	3.94999e+01	3.99782e+01	5.92123e+10	3.99773e+01
3.96235e+01	7.36243e+02	3.96149e+01	3.99787e+01	1.70539e+11	3.99787e+01
3.97003e+01	8.95820e+02	3.96589e+01	3.99800e+01	1.76558e+11	3.99793e+01
3.97316e+01	2.07380e+03	3.97235e+01	3.99804e+01	5.14212e+11	3.99804e+01
3.97757e+01	2.80662e+03	3.97529e+01	3.99816e+01	5.27034e+11	3.99809e+01
3.97992e+01	5.87891e+03	3.97920e+01	3.99820e+01	1.54890e+12	3.99820e+01
3.98261e+01	8.79180e+03	3.98130e+01	3.99830e+01	1.57477e+12	3.99824e+01
3.98442e+01	1.67727e+04	3.98380e+01	3.99834e+01	4.66134e+12	3.99834e+01
3.98614e+01	2.74621e+04	3.98537e+01	3.99843e+01	4.70957e+12	3.99838e+01
3.98756e+01	4.81360e+04	3.98703e+01	3.99846e+01	1.40165e+13	3.99846e+01
3.98871e+01	8.54706e+04	3.98824e+01	3.99854e+01	1.40960e+13	3.99849e+01
3.98984e+01	1.38876e+05	3.98939e+01	3.99857e+01	4.21161e+13	3.99857e+01
3.99064e+01	2.65027e+05	3.99034e+01	3.99864e+01	4.22207e+13	3.99860e+01
3.99155e+01	4.02541e+05	3.99116e+01	3.99867e+01	1.26463e+14	3.99867e+01
3.99212e+01	8.18884e+05	3.99193e+01	3.99873e+01	1.26544e+14	3.99869e+01
3.99286e+01	1.17162e+06	3.99253e+01	3.99876e+01	3.79500e+14	3.99876e+01
3.99328e+01	2.52189e+06	3.99315e+01	3.99882e+01	3.79501e+14	3.99878e+01
3.99389e+01	3.42250e+06	3.99361e+01	3.99884e+01	1.13821e+15	3.99884e+01
3.99420e+01	7.74327e+06	3.99412e+01	3.99888e+01	1.13873e+15	3.99886e+01
3.99471e+01	1.00301e+07	3.99447e+01	3.99891e+01	3.41207e+15	3.99891e+01
3.99495e+01	2.37102e+07	3.99490e+01	3.99896e+01	3.41850e+15	3.99893e+01
3.99538e+01	2.94793e+07	3.99517e+01	3.99897e+01	1.02239e+16	3.99897e+01
3.99556e+01	7.24219e+07	3.99553e+01	3.99902e+01	1.02669e+16	3.99899e+01
3.99593e+01	8.68641e+07	3.99574e+01	3.99903e+01	3.06226e+16	3.99903e+01
3.99607e+01	2.20715e+08	3.99605e+01	3.99908e+01	3.08474e+16	3.99905e+01
3.99638e+01	2.56541e+08	3.99622e+01	3.99909e+01	9.16870e+16	3.99909e+01
3.99650e+01	6.71299e+08	3.99648e+01	3.99913e+01	9.27151e+16	3.99910e+01

Figura A.5: Ejemplo 5. Caso Real.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
5.00000e+00	5.00000e+00	5.00000e+00	5.22610e+01	3.20865e+07	4.99338e+01
1.91378e+01	1.91485e+01	4.40811e+00	5.31264e+01	3.21320e+07	4.99368e+01
5.98139e+01	6.04658e+01	7.93591e+00	5.29610e+01	7.11825e+07	4.99407e+01
4.96312e+01	6.69768e+01	3.68722e+01	5.29083e+01	9.00159e+07	4.99438e+01
5.10772e+01	6.95948e+01	4.42951e+01	5.31232e+01	1.38387e+08	4.99465e+01
5.69860e+01	8.28781e+01	4.52877e+01	5.27265e+01	2.64614e+08	4.99496e+01
4.88184e+01	1.29034e+02	4.73520e+01	5.30031e+01	2.83363e+08	4.99515e+01
5.38007e+01	1.30040e+02	4.82082e+01	5.26961e+01	6.75355e+08	4.99543e+01
5.52819e+01	2.46312e+02	4.85622e+01	5.29622e+01	7.03808e+08	4.99562e+01
5.43115e+01	3.35823e+02	4.88842e+01	5.29219e+01	1.40710e+09	4.99583e+01
5.42314e+01	4.40461e+02	4.91141e+01	5.27761e+01	2.04608e+09	4.99603e+01
5.03681e+01	9.53891e+02	4.92853e+01	5.29948e+01	2.73245e+09	4.99618e+01
5.45015e+01	9.54143e+02	4.93813e+01	5.24854e+01	5.83753e+09	4.99637e+01
5.36532e+01	2.09816e+03	4.94916e+01	5.28858e+01	5.91090e+09	4.99649e+01
5.34133e+01	2.69466e+03	4.95635e+01	5.27634e+01	1.38934e+10	4.99666e+01
5.43223e+01	3.95512e+03	4.96158e+01	5.28394e+01	1.56478e+10	4.99679e+01
5.29325e+01	7.98164e+03	4.96707e+01	5.28625e+01	2.78105e+10	4.99691e+01
5.36867e+01	8.20891e+03	4.97024e+01	5.26661e+01	4.61213e+10	4.99705e+01
5.34652e+01	1.93126e+04	4.97407e+01	5.28903e+01	5.49196e+10	4.99714e+01
5.36636e+01	2.16161e+04	4.97661e+01	5.21744e+01	1.25965e+11	4.99727e+01
5.35913e+01	3.79260e+04	4.97895e+01	5.27931e+01	1.26062e+11	4.99735e+01
5.29887e+01	6.46431e+04	4.98116e+01	5.27622e+01	2.81844e+11	4.99746e+01
5.37179e+01	7.43542e+04	4.98256e+01	5.27431e+01	3.50085e+11	4.99754e+01
5.24866e+01	1.73863e+05	4.98436e+01	5.28012e+01	5.52305e+11	4.99762e+01
5.33210e+01	1.75940e+05	4.98547e+01	5.25658e+01	1.02775e+12	4.99772e+01
5.34394e+01	3.71513e+05	4.98675e+01	5.28050e+01	1.12334e+12	4.99778e+01
5.32319e+01	5.06541e+05	4.98780e+01	5.24796e+01	2.66711e+12	4.99787e+01
5.33529e+01	7.13599e+05	4.98860e+01	5.27180e+01	2.73259e+12	4.99792e+01
5.25818e+01	1.47353e+06	4.98956e+01	5.27376e+01	5.67492e+12	4.99800e+01
5.33597e+01	1.50903e+06	4.99013e+01	5.26640e+01	7.83814e+12	4.99806e+01
5.29191e+01	3.56679e+06	4.99091e+01	5.27438e+01	1.10516e+13	4.99811e+01
5.30801e+01	3.95359e+06	4.99145e+01	5.24603e+01	2.26075e+13	4.99818e+01
5.32774e+01	7.12654e+06	4.99199e+01	5.27346e+01	2.33581e+13	4.99823e+01
5.29505e+01	1.17111e+07	4.99253e+01	5.25488e+01	5.56161e+13	4.99829e+01
5.31549e+01	1.39759e+07	4.99289e+01	5.26558e+01	5.98960e+13	4.99833e+01

Figura A.6: Ejemplo 6. Caso Real.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
4.00000e+01	4.00000e+01	4.00000e+01	4.99533e+01	1.55001e+07	4.99523e+01
4.52794e+01	4.52796e+01	3.36860e+01	4.99553e+01	2.74485e+07	4.99551e+01
4.62491e+01	4.62597e+01	3.48516e+01	4.99582e+01	3.17376e+07	4.99570e+01
4.77907e+01	4.78912e+01	4.06522e+01	4.99596e+01	7.31722e+07	4.99596e+01
4.81734e+01	4.81772e+01	4.13239e+01	4.99621e+01	7.31797e+07	4.99611e+01
4.87829e+01	4.91682e+01	4.59104e+01	4.99635e+01	1.67076e+08	4.99633e+01
4.89478e+01	6.96315e+01	4.89471e+01	4.99654e+01	1.96297e+08	4.99649e+01
4.92331e+01	7.21273e+01	4.90946e+01	4.99670e+01	3.39483e+08	4.99665e+01
4.92330e+01	1.52745e+02	4.93213e+01	4.99683e+01	5.65524e+08	4.99681e+01
4.94717e+01	1.70547e+02	4.94311e+01	4.99700e+01	6.86090e+08	4.99693e+01
4.95460e+01	3.19823e+02	4.95268e+01	4.99708e+01	1.54019e+09	4.99708e+01
4.96139e+01	4.56783e+02	4.96017e+01	4.99724e+01	1.54417e+09	4.99718e+01
4.96741e+01	6.55514e+02	4.96512e+01	4.99732e+01	3.59922e+09	4.99732e+01
4.97061e+01	1.25234e+03	4.97039e+01	4.99745e+01	4.07098e+09	4.99741e+01
4.97522e+01	1.38908e+03	4.97330e+01	4.99755e+01	7.37326e+09	4.99752e+01
4.97702e+01	3.23424e+03	4.97702e+01	4.99763e+01	1.17264e+10	4.99762e+01
4.98030e+01	3.23540e+03	4.97906e+01	4.99774e+01	1.47866e+10	4.99770e+01
4.98174e+01	7.41205e+03	4.98159e+01	4.99780e+01	3.24013e+10	4.99780e+01
4.98387e+01	8.48524e+03	4.98329e+01	4.99790e+01	3.27008e+10	4.99786e+01
4.98532e+01	1.53738e+04	4.98489e+01	4.99796e+01	7.70873e+10	4.99795e+01
4.98654e+01	2.39135e+04	4.98636e+01	4.99804e+01	8.49952e+10	4.99802e+01
4.98794e+01	3.12351e+04	4.98736e+01	4.99811e+01	1.59121e+11	4.99809e+01
4.98862e+01	6.60050e+04	4.98860e+01	4.99817e+01	2.44446e+11	4.99816e+01
4.98980e+01	6.80394e+04	4.98931e+01	4.99824e+01	3.17629e+11	4.99821e+01
4.99031e+01	1.62335e+05	4.99030e+01	4.99828e+01	6.82125e+11	4.99828e+01
4.99121e+01	1.69437e+05	4.99091e+01	4.99835e+01	6.93592e+11	4.99832e+01
4.99174e+01	3.48027e+05	4.99162e+01	4.99839e+01	1.64496e+12	4.99839e+01
4.99232e+01	4.72607e+05	4.99221e+01	4.99845e+01	1.78283e+12	4.99843e+01
4.99290e+01	7.00094e+05	4.99267e+01	4.99849e+01	3.41716e+12	4.99848e+01
4.99324e+01	1.34191e+06	4.99322e+01	4.99854e+01	5.11775e+12	4.99853e+01
4.99379e+01	1.46615e+06	4.99355e+01	4.99859e+01	6.80177e+12	4.99857e+01
4.99403e+01	3.46421e+06	4.99403e+01	4.99862e+01	1.43779e+13	4.99862e+01
4.99448e+01	3.49423e+06	4.99431e+01	4.99867e+01	1.47189e+13	4.99865e+01
4.99472e+01	7.68373e+06	4.99468e+01	4.99870e+01	3.50178e+13	4.99870e+01
4.99505e+01	9.55956e+06	4.99497e+01	4.99874e+01	3.75202e+13	4.99873e+01

Figura A.7: Ejemplo 7. Caso Real.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
1.00000e+01	1.00000e+01	1.00000e+01	4.12228e+01	3.31086e+04	3.99405e+01
1.61548e+01	1.61550e+01	4.58408e+00	4.11050e+01	5.17714e+04	3.99444e+01
3.35013e+01	3.35339e+01	1.47579e+01	4.10855e+01	6.27901e+04	3.99473e+01
4.41962e+01	4.45570e+01	1.74885e+01	4.10928e+01	7.75324e+04	3.99499e+01
4.15075e+01	4.53366e+01	2.58075e+01	4.09384e+01	1.19788e+05	3.99530e+01
4.06678e+01	4.60920e+01	3.64334e+01	4.11601e+01	1.22181e+05	3.99548e+01
3.98459e+01	4.86896e+01	3.73396e+01	4.09693e+01	2.07040e+05	3.99576e+01
4.26348e+01	5.12708e+01	3.76668e+01	4.10883e+01	2.16865e+05	3.99593e+01
4.19842e+01	5.54041e+01	3.83459e+01	4.10219e+01	3.19190e+05	3.99614e+01
4.12489e+01	6.26335e+01	3.89672e+01	4.10512e+01	4.17884e+05	3.99632e+01
4.12757e+01	6.75938e+01	3.91931e+01	4.10967e+01	4.79319e+05	3.99647e+01
4.14963e+01	8.78161e+01	3.93023e+01	4.10678e+01	7.80916e+05	3.99666e+01
4.19626e+01	9.05359e+01	3.93875e+01	4.10601e+01	7.81472e+05	3.99677e+01
4.07102e+01	1.36528e+02	3.95226e+01	4.09437e+01	1.29498e+06	3.99693e+01
4.14733e+01	1.37395e+02	3.95940e+01	4.10656e+01	1.43985e+06	3.99705e+01
4.10634e+01	2.12508e+02	3.96534e+01	4.10365e+01	1.95195e+06	3.99717e+01
4.16855e+01	2.37809e+02	3.96534e+01	4.09302e+01	2.78751e+06	3.99729e+01
4.15401e+01	3.19311e+02	3.96890e+01	4.10224e+01	2.98009e+06	3.99738e+01
4.11347e+01	4.42805e+02	3.97274e+01	4.08132e+01	5.02704e+06	3.99750e+01
4.13398e+01	4.86288e+02	3.97631e+01	4.10478e+01	5.07974e+06	3.99758e+01
4.01799e+01	8.02439e+02	3.97858e+01	4.09760e+01	7.98120e+06	3.99768e+01
4.15252e+01	8.02439e+02	3.98110e+01	4.09758e+01	9.66264e+06	3.99776e+01
4.12321e+01	8.02539e+02	3.98253e+01	4.09827e+01	1.19076e+07	3.99784e+01
4.12753e+01	1.31869e+03	3.98448e+01	4.08617e+01	1.84802e+07	3.99792e+01
4.11966e+01	1.46721e+03	3.98575e+01	4.10181e+01	1.87814e+07	3.99798e+01
4.12111e+01	2.00327e+03	3.98699e+01	4.10181e+01	3.17722e+07	3.99806e+01
4.13611e+01	2.81030e+03	3.98811e+01	4.09018e+01	3.17722e+07	3.99812e+01
4.07564e+01	3.06262e+03	3.98890e+01	4.09800e+01	3.36175e+07	3.99812e+01
4.12377e+01	3.06262e+03	3.98890e+01	4.09421e+01	4.86040e+07	3.99818e+01
4.10550e+01	5.11233e+03	3.98992e+01	4.09419e+01	6.51235e+07	3.99824e+01
4.12638e+01	5.12092e+03	3.99051e+01	4.09848e+01	7.30419e+07	3.99829e+01
4.12251e+01	8.30577e+03	3.99130e+01	4.06878e+01	1.20704e+08	3.99836e+01
4.09907e+01	9.52207e+03	3.99183e+01	4.09664e+01	1.20743e+08	3.99840e+01
4.11659e+01	1.25160e+04	3.99237e+01	4.08963e+01	1.96837e+08	3.99845e+01
4.08453e+01	1.82955e+04	3.99290e+01	4.09602e+01	2.25889e+08	3.99850e+01
	1.93097e+04	3.99326e+01	4.09508e+01	2.94357e+08	3.99854e+01
	3.26627e+04	3.99376e+01			

Figura A.8: Ejemplo 8. Caso Real.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
3.50000e+01	3.50000e+01	3.50000e+01	3.99605e+01	5.17929e+04	3.99591e+01
3.57957e+01	3.58059e+01	2.45199e+01	3.99618e+01	8.76911e+04	3.99618e+01
3.77777e+01	3.79426e+01	3.24491e+01	3.99643e+01	9.00967e+04	3.99633e+01
3.81834e+01	3.82144e+01	3.26189e+01	3.99659e+01	1.34173e+05	3.99654e+01
3.85838e+01	3.86957e+01	3.52067e+01	3.99673e+01	1.76798e+05	3.99671e+01
3.90387e+01	3.92497e+01	3.65494e+01	3.99693e+01	1.97758e+05	3.99684e+01
3.91610e+01	4.02756e+01	3.90610e+01	3.99702e+01	3.29445e+05	3.99702e+01
3.93588e+01	4.61814e+01	3.92367e+01	3.99720e+01	3.31099e+05	3.99713e+01
3.94784e+01	5.28368e+01	3.94021e+01	3.99730e+01	5.21037e+05	3.99728e+01
3.95385e+01	7.51108e+01	3.95364e+01	3.99742e+01	6.39535e+05	3.99739e+01
3.96380e+01	7.64103e+01	3.95903e+01	3.99755e+01	7.62814e+05	3.99749e+01
3.96739e+01	1.21041e+02	3.96673e+01	3.99762e+01	1.22536e+06	3.99762e+01
3.97213e+01	1.35661e+02	3.97078e+01	3.99775e+01	1.22670e+06	3.99769e+01
3.97614e+01	1.71874e+02	3.97445e+01	3.99782e+01	2.01919e+06	3.99780e+01
3.97806e+01	2.62821e+02	3.97805e+01	3.99791e+01	2.30667e+06	3.99788e+01
3.98148e+01	2.64863e+02	3.98002e+01	3.99800e+01	2.96943e+06	3.99796e+01
3.98292e+01	4.35032e+02	3.98264e+01	3.99805e+01	4.50492e+06	3.99805e+01
3.98475e+01	4.95764e+02	3.98427e+01	3.99815e+01	4.59803e+06	3.99810e+01
3.98645e+01	6.27299e+02	3.98427e+01	3.99820e+01	7.77198e+06	3.99819e+01
3.98731e+01	9.71616e+02	3.98574e+01	3.99827e+01	8.32848e+06	3.99825e+01
3.9885e+01	9.78539e+02	3.98730e+01	3.99833e+01	1.16340e+07	3.99831e+01
3.9885e+01	9.78539e+02	3.98819e+01	3.99838e+01	1.63762e+07	3.99837e+01
3.98954e+01	1.62106e+03	3.98942e+01	3.99845e+01	1.74752e+07	3.99842e+01
3.99046e+01	1.83098e+03	3.98942e+01	3.99848e+01	2.95792e+07	3.99848e+01
3.99129e+01	2.35810e+03	3.99095e+01	3.99855e+01	3.02458e+07	3.99852e+01
3.99176e+01	3.59852e+03	3.99175e+01	3.99859e+01	4.56861e+07	3.99858e+01
3.99258e+01	3.64992e+03	3.99222e+01	3.99863e+01	5.90029e+07	3.99862e+01
3.99295e+01	6.11860e+03	3.99290e+01	3.99868e+01	6.73632e+07	3.99866e+01
3.99349e+01	6.72555e+03	3.99332e+01	3.99871e+01	1.10940e+08	3.99871e+01
3.99394e+01	8.99361e+03	3.99376e+01	3.99876e+01	1.11020e+08	3.99874e+01
3.99423e+01	1.32678e+04	3.99422e+01	3.99879e+01	1.78890e+08	3.99878e+01
3.99471e+01	1.36955e+04	3.99450e+01	3.99883e+01	2.11568e+08	3.99882e+01
3.99493e+01	2.31865e+04	3.99491e+01	3.99887e+01	2.62884e+08	3.99885e+01
3.99528e+01	2.46160e+04	3.99516e+01	3.99889e+01	4.09485e+08	3.99889e+01
3.99555e+01	3.46315e+04	3.99545e+01	3.99893e+01	4.13591e+08	3.99891e+01
3.99574e+01	4.85999e+04	3.99572e+01			

Figura A.9: Ejemplo 9. Caso Real.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
1.00000e+01	1.00000e+01	1.00000e+01	1.71479e+01	5.51793e+05	1.59609e+01
1.13576e+01	1.13639e+01	3.85936e+00	1.73603e+01	6.06485e+05	1.59629e+01
2.11519e+01	2.15969e+01	1.29146e+01	1.71363e+01	1.10448e+06	1.59650e+01
1.75740e+01	2.41776e+01	1.33374e+01	1.72928e+01	1.15921e+06	1.59667e+01
1.72855e+01	2.50032e+01	1.38905e+01	1.70180e+01	2.19470e+06	1.59685e+01
1.79062e+01	3.35665e+01	1.41279e+01	1.73087e+01	2.23270e+06	1.59700e+01
1.87994e+01	3.55038e+01	1.45071e+01	1.69145e+01	4.32693e+06	1.59715e+01
1.75394e+01	5.24872e+01	1.50205e+01	1.72499e+01	4.33454e+06	1.59728e+01
1.75329e+01	6.25763e+01	1.52756e+01	1.69289e+01	8.46286e+06	1.59741e+01
1.84222e+01	8.81302e+01	1.53769e+01	1.72606e+01	8.48102e+06	1.59752e+01
1.79369e+01	1.24232e+02	1.55093e+01	1.70195e+01	1.64250e+07	1.59763e+01
1.78486e+01	1.55463e+02	1.56077e+01	1.72094e+01	1.67162e+07	1.59774e+01
1.72803e+01	2.53359e+02	1.56681e+01	1.71016e+01	3.16531e+07	1.59783e+01
1.80946e+01	2.83982e+02	1.57112e+01	1.72168e+01	3.31652e+07	1.59792e+01
1.73734e+01	5.12579e+02	1.57540e+01	1.71044e+01	6.06250e+07	1.59800e+01
1.77112e+01	5.32999e+02	1.57869e+01	1.71718e+01	6.61684e+07	1.59809e+01
1.67570e+01	1.01942e+03	1.58122e+01	1.71464e+01	1.15529e+08	1.59816e+01
1.78218e+01	1.02318e+03	1.58332e+01	1.71769e+01	1.32604e+08	1.59823e+01
1.68598e+01	1.99157e+03	1.58515e+01	1.71332e+01	2.19313e+08	1.59829e+01
1.75616e+01	2.00135e+03	1.58672e+01	1.71368e+01	2.66611e+08	1.59836e+01
1.73103e+01	3.83080e+03	1.58797e+01	1.71587e+01	4.15256e+08	1.59842e+01
1.76245e+01	3.97361e+03	1.58913e+01	1.71396e+01	5.37146e+08	1.59848e+01
1.72919e+01	7.28001e+03	1.59006e+01	1.71395e+01	7.85206e+08	1.59853e+01
1.74376e+01	7.97735e+03	1.59096e+01	1.71395e+01	7.85206e+08	1.59853e+01
1.74497e+01	1.37190e+04	1.59165e+01	1.71029e+01	1.08313e+09	1.59858e+01
1.74769e+01	1.61344e+04	1.59234e+01	1.71556e+01	1.48452e+09	1.59862e+01
1.73730e+01	2.57257e+04	1.59288e+01	1.71033e+01	2.18343e+09	1.59867e+01
1.73346e+01	3.27668e+04	1.59344e+01	1.71341e+01	2.80944e+09	1.59871e+01
1.74510e+01	4.81486e+04	1.59386e+01	1.71341e+01	2.80944e+09	1.59871e+01
1.73582e+01	6.66283e+04	1.59431e+01	1.70683e+01	4.39539e+09	1.59876e+01
1.73688e+01	9.01753e+04	1.59465e+01	1.71443e+01	5.32767e+09	1.59879e+01
1.72425e+01	1.35320e+05	1.59502e+01	1.70649e+01	8.82693e+09	1.59883e+01
1.74115e+01	1.69361e+05	1.59530e+01	1.71222e+01	1.01335e+10	1.59887e+01
1.72518e+01	2.73936e+05	1.59560e+01	1.70289e+01	1.76674e+10	1.59890e+01
1.73352e+01	3.19537e+05	1.59584e+01	1.71288e+01	1.93487e+10	1.59893e+01
			1.70183e+01	3.52151e+10	1.59897e+01
			1.71071e+01	3.71133e+10	1.59900e+01

Figura A.10: Ejemplo 10. Caso Real.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
1.00000e+01	1.00000e+01	1.00000e+01	1.50987e+01	1.26521e+06	1.49715e+01
1.15556e+01	1.15601e+01	4.64115e+00	1.53347e+01	1.29158e+06	1.49729e+01
1.90066e+01	1.93987e+01	1.29459e+01	1.51000e+01	2.60738e+06	1.49744e+01
1.64408e+01	2.20146e+01	1.34015e+01	1.53552e+01	2.64190e+06	1.49756e+01
1.57104e+01	2.33836e+01	1.39277e+01	1.50130e+01	5.37017e+06	1.49769e+01
1.41650e+01	3.29444e+01	1.41660e+01	1.53015e+01	5.40799e+06	1.49779e+01
1.70314e+01	3.41627e+01	1.43715e+01	1.49830e+01	1.10516e+07	1.49790e+01
1.44950e+01	5.91730e+01	1.44947e+01	1.53178e+01	1.10805e+07	1.49799e+01
1.59293e+01	6.00488e+01	1.45899e+01	1.49808e+01	2.27216e+07	1.49808e+01
1.54091e+01	1.14834e+02	1.46630e+01	1.52728e+01	2.27279e+07	1.49816e+01
1.63062e+01	1.17408e+02	1.47154e+01	1.49825e+01	4.66604e+07	1.49825e+01
1.51555e+01	2.29275e+02	1.47600e+01	1.52859e+01	4.66772e+07	1.49832e+01
1.57812e+01	2.38305e+02	1.47917e+01	1.49839e+01	9.56964e+07	1.49839e+01
1.55695e+01	4.63034e+02	1.48207e+01	1.52475e+01	9.59956e+07	1.49845e+01
1.59581e+01	4.88550e+02	1.48413e+01	1.50055e+01	1.95987e+08	1.49851e+01
1.53275e+01	9.40729e+02	1.48611e+01	1.52581e+01	1.97718e+08	1.49857e+01
1.56521e+01	1.00338e+03	1.48752e+01	1.50573e+01	4.00773e+08	1.49863e+01
1.55111e+01	1.91885e+03	1.48893e+01	1.52248e+01	4.07877e+08	1.49868e+01
1.57547e+01	2.05978e+03	1.48994e+01	1.50553e+01	8.18247e+08	1.49872e+01
1.53266e+01	3.92565e+03	1.49097e+01	1.52334e+01	8.42796e+08	1.49877e+01
1.55544e+01	4.22406e+03	1.49172e+01	1.50875e+01	1.66789e+09	1.49881e+01
1.54250e+01	8.04995e+03	1.49250e+01	1.52040e+01	1.74438e+09	1.49886e+01
1.56212e+01	8.65322e+03	1.49307e+01	1.50781e+01	3.39424e+09	1.49889e+01
1.52830e+01	1.65373e+04	1.49367e+01	1.52108e+01	3.61644e+09	1.49893e+01
1.54798e+01	1.77102e+04	1.49412e+01	1.51009e+01	6.89638e+09	1.49897e+01
1.53407e+01	3.40208e+04	1.49459e+01	1.51846e+01	7.50988e+09	1.49900e+01
1.55266e+01	3.62202e+04	1.49494e+01	1.50888e+01	1.39903e+10	1.49903e+01
1.52272e+01	7.00600e+04	1.49532e+01	1.51899e+01	1.56196e+10	1.49906e+01
1.54212e+01	7.40377e+04	1.49561e+01	1.51059e+01	2.83395e+10	1.49909e+01
1.52614e+01	1.44377e+05	1.49592e+01	1.51660e+01	3.25348e+10	1.49912e+01
1.54556e+01	1.51296e+05	1.49615e+01	1.50930e+01	5.73279e+10	1.49914e+01
1.51663e+01	2.97648e+05	1.49640e+01	1.51699e+01	6.78612e+10	1.49917e+01
1.53739e+01	3.09149e+05	1.49660e+01	1.51064e+01	1.15826e+11	1.49919e+01
1.51839e+01	6.13706e+05	1.49681e+01	1.51479e+01	1.41718e+11	1.49922e+01
1.54001e+01	6.31784e+05	1.49697e+01	1.50935e+01	2.33763e+11	1.49924e+01

Figura A.11: Ejemplo 11. Caso Real.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	9.97830e-01	3.36385e+00	9.97830e-01
5.77350e-01	9.12871e-01	3.65148e-01	9.97936e-01	3.45476e+00	9.97936e-01
4.89898e-01	9.56556e-01	4.89898e-01	9.98050e-01	3.45706e+00	9.98050e-01
8.61136e-01	1.13839e+00	8.58782e-01	9.98140e-01	3.54573e+00	9.98140e-01
8.83461e-01	1.27394e+00	8.83461e-01	9.98238e-01	3.54784e+00	9.98238e-01
9.32470e-01	1.36395e+00	9.32224e-01	9.98316e-01	3.63441e+00	9.98316e-01
9.43074e-01	1.52326e+00	9.43074e-01	9.98400e-01	3.63636e+00	9.98400e-01
9.60290e-01	1.57025e+00	9.60242e-01	9.98467e-01	3.72098e+00	9.98467e-01
9.65898e-01	1.72766e+00	9.65898e-01	9.98540e-01	3.72278e+00	9.98540e-01
9.73907e-01	1.75637e+00	9.73893e-01	9.98600e-01	3.80558e+00	9.98600e-01
9.77194e-01	1.90669e+00	9.77194e-01	9.98663e-01	3.80725e+00	9.98663e-01
9.81561e-01	1.92622e+00	9.81556e-01	9.98715e-01	3.88833e+00	9.98715e-01
9.83644e-01	2.06881e+00	9.83644e-01	9.98771e-01	3.88989e+00	9.98771e-01
9.86284e-01	2.08308e+00	9.86282e-01	9.98817e-01	3.96936e+00	9.98817e-01
9.87685e-01	2.21843e+00	9.87685e-01	9.98866e-01	3.97082e+00	9.98866e-01
9.89401e-01	2.22940e+00	9.89400e-01	9.98908e-01	4.04877e+00	9.98908e-01
9.90387e-01	2.35822e+00	9.90387e-01	9.98951e-01	4.05013e+00	9.98951e-01
9.91565e-01	2.36696e+00	9.91565e-01	9.98988e-01	4.12665e+00	9.98988e-01
9.92285e-01	2.48997e+00	9.92285e-01	9.99027e-01	4.12793e+00	9.99027e-01
9.93129e-01	2.49714e+00	9.93128e-01	9.99060e-01	4.20308e+00	9.99060e-01
9.93670e-01	2.61498e+00	9.93670e-01	9.99094e-01	4.20429e+00	9.99094e-01
9.94295e-01	2.62099e+00	9.94294e-01	9.99124e-01	4.27815e+00	9.99124e-01
9.94712e-01	2.73420e+00	9.94712e-01	9.99155e-01	4.27929e+00	9.99155e-01
9.95187e-01	2.73933e+00	9.95187e-01	9.99182e-01	4.35192e+00	9.99182e-01
9.95516e-01	2.84838e+00	9.95516e-01	9.99210e-01	4.35300e+00	9.99210e-01
9.95886e-01	2.85283e+00	9.95886e-01	9.99234e-01	4.42446e+00	9.99234e-01
9.96149e-01	2.95813e+00	9.96149e-01	9.99260e-01	4.42549e+00	9.99260e-01
9.96442e-01	2.96204e+00	9.96442e-01	9.99282e-01	4.49583e+00	9.99282e-01
9.96656e-01	3.06393e+00	9.96656e-01	9.99305e-01	4.49681e+00	9.99305e-01
9.96893e-01	3.06739e+00	9.96893e-01	9.99325e-01	4.56609e+00	9.99325e-01
9.97070e-01	3.16618e+00	9.97070e-01	9.99346e-01	4.56702e+00	9.99346e-01
9.97264e-01	3.16927e+00	9.97264e-01	9.99365e-01	4.63528e+00	9.99365e-01
9.97411e-01	3.26522e+00	9.97411e-01	9.99384e-01	4.63616e+00	9.99384e-01
9.97572e-01	3.26800e+00	9.97572e-01	9.99401e-01	4.70345e+00	9.99401e-01
9.97696e-01	3.36133e+00	9.97696e-01	9.99418e-01	4.70429e+00	9.99418e-01

Figura A.12: Ejemplo 12. Caso Real.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	2.04981e+00	5.27310e+17	9.97751e-01
2.53167e+00	2.59039e+00	1.28681e-01	2.04842e+00	1.91281e+18	9.97872e-01
2.93312e+00	3.29622e+00	6.39811e-01	2.04710e+00	6.94415e+18	9.97983e-01
2.61916e+00	4.41033e+00	8.03266e-01	2.04586e+00	2.52284e+19	9.98085e-01
2.45692e+00	9.72175e+00	8.76739e-01	2.04467e+00	9.17202e+19	9.98180e-01
2.36179e+00	2.74221e+01	9.15519e-01	2.04355e+00	3.33681e+20	9.98268e-01
2.29940e+00	8.37262e+01	9.38455e-01	2.04248e+00	1.21471e+21	9.98350e-01
2.25535e+00	2.65178e+02	9.53157e-01	2.04147e+00	4.42464e+21	9.98426e-01
2.22259e+00	8.60088e+02	9.63149e-01	2.04050e+00	1.61262e+22	9.98497e-01
2.19727e+00	2.83885e+03	9.70251e-01	2.03957e+00	5.88064e+22	9.98563e-01
2.17712e+00	9.49787e+03	9.75481e-01	2.03869e+00	2.14558e+23	9.98625e-01
2.16070e+00	3.21228e+04	9.79442e-01	2.03784e+00	7.83218e+23	9.98683e-01
2.14707e+00	1.09610e+05	9.82516e-01	2.03703e+00	2.86041e+24	9.98738e-01
2.13556e+00	3.76791e+05	9.84948e-01	2.03626e+00	1.04514e+25	9.98789e-01
2.12573e+00	1.30337e+06	9.86906e-01	2.03551e+00	3.82041e+25	9.98837e-01
2.11722e+00	4.53284e+06	9.88505e-01	2.03480e+00	1.39710e+26	9.98882e-01
2.10980e+00	1.58379e+07	9.89828e-01	2.03412e+00	5.11121e+26	9.98925e-01
2.10325e+00	5.55643e+07	9.90935e-01	2.03346e+00	1.87063e+27	9.98965e-01
2.09745e+00	1.95641e+08	9.91871e-01	2.03282e+00	6.84880e+27	9.99003e-01
2.09226e+00	6.91063e+08	9.92669e-01	2.03221e+00	2.50841e+28	9.99039e-01
2.08759e+00	2.44806e+09	9.93355e-01	2.03162e+00	9.19035e+28	9.99073e-01
2.08338e+00	8.69461e+09	9.93949e-01	2.03106e+00	3.36830e+29	9.99106e-01
2.07955e+00	3.09525e+10	9.94467e-01	2.03051e+00	1.23490e+30	9.99136e-01
2.07606e+00	1.10424e+11	9.94921e-01	2.02998e+00	4.52881e+30	9.99165e-01
2.07286e+00	3.94712e+11	9.95321e-01	2.02947e+00	1.66138e+31	9.99193e-01
2.06992e+00	1.41342e+12	9.95676e-01	2.02898e+00	6.09649e+31	9.99219e-01
2.06721e+00	5.06961e+12	9.95992e-01	2.02850e+00	2.23776e+32	9.99244e-01
2.06470e+00	1.82111e+13	9.96275e-01	2.02804e+00	8.21605e+32	9.99268e-01
2.06237e+00	6.55104e+13	9.96528e-01	2.02759e+00	3.01737e+33	9.99291e-01
2.06020e+00	2.35966e+14	9.96757e-01	2.02716e+00	1.10842e+34	9.99313e-01
2.05818e+00	8.50978e+14	9.96964e-01	2.02674e+00	4.07273e+34	9.99333e-01
2.05629e+00	3.07241e+15	9.97151e-01	2.02634e+00	1.49683e+35	9.99353e-01
2.05452e+00	1.11046e+16	9.97322e-01	2.02594e+00	5.50248e+35	9.99372e-01
2.05285e+00	4.01752e+16	9.97478e-01	2.02556e+00	2.02322e+36	9.99390e-01
2.05129e+00	1.45486e+17	9.97620e-01	2.02519e+00	7.44084e+36	9.99407e-01

Figura A.13: Ejemplo 13. Caso Real.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
5.00000e-01	5.00000e-01	5.00000e-01	9.98913e-01	1.80001e+01	9.98912e-01
5.82843e-01	1.20795e+00	2.44109e-01	9.98970e-01	1.85001e+01	9.98970e-01
8.51332e-01	1.55502e+00	8.34346e-01	9.99023e-01	1.90001e+01	9.99023e-01
9.18629e-01	2.02050e+00	9.14687e-01	9.99072e-01	1.95001e+01	9.99072e-01
9.47966e-01	2.51011e+00	9.46582e-01	9.99117e-01	2.00001e+01	9.99117e-01
9.63669e-01	3.00592e+00	9.63054e-01	9.99159e-01	2.05001e+01	9.99159e-01
9.73127e-01	3.50388e+00	9.72810e-01	9.99198e-01	2.10001e+01	9.99198e-01
9.79288e-01	4.00273e+00	9.79108e-01	9.99235e-01	2.15001e+01	9.99235e-01
9.83534e-01	4.50204e+00	9.83424e-01	9.99269e-01	2.20001e+01	9.99269e-01
9.86589e-01	5.00158e+00	9.86518e-01	9.99301e-01	2.25001e+01	9.99301e-01
9.88862e-01	5.50126e+00	9.88814e-01	9.99331e-01	2.30001e+01	9.99330e-01
9.90600e-01	6.00103e+00	9.90566e-01	9.99359e-01	2.35001e+01	9.99358e-01
9.91959e-01	6.50086e+00	9.91935e-01	9.99385e-01	2.40001e+01	9.99385e-01
9.93043e-01	7.00073e+00	9.93024e-01	9.99409e-01	2.45001e+01	9.99409e-01
9.93920e-01	7.50062e+00	9.93907e-01	9.99433e-01	2.50001e+01	9.99432e-01
9.94641e-01	8.00054e+00	9.94631e-01	9.99454e-01	2.55000e+01	9.99454e-01
9.95241e-01	8.50048e+00	9.95233e-01	9.99475e-01	2.60000e+01	9.99475e-01
9.95745e-01	9.00042e+00	9.95739e-01	9.99494e-01	2.65000e+01	9.99494e-01
9.96173e-01	9.50037e+00	9.96168e-01	9.99513e-01	2.70000e+01	9.99513e-01
9.96540e-01	1.00003e+01	9.96535e-01	9.99530e-01	2.75000e+01	9.99530e-01
9.96856e-01	1.05003e+01	9.96852e-01	9.99547e-01	2.80000e+01	9.99547e-01
9.97130e-01	1.10003e+01	9.97127e-01	9.99562e-01	2.85000e+01	9.99562e-01
9.97370e-01	1.15003e+01	9.97368e-01	9.99577e-01	2.90000e+01	9.99577e-01
9.97582e-01	1.20002e+01	9.97579e-01	9.99591e-01	2.95000e+01	9.99591e-01
9.97768e-01	1.25002e+01	9.97766e-01	9.99605e-01	3.00000e+01	9.99605e-01
9.97934e-01	1.30002e+01	9.97932e-01	9.99617e-01	3.05000e+01	9.99617e-01
9.98082e-01	1.35002e+01	9.98081e-01	9.99630e-01	3.10000e+01	9.99630e-01
9.98215e-01	1.40002e+01	9.98214e-01	9.99641e-01	3.15000e+01	9.99641e-01
9.98334e-01	1.45002e+01	9.98333e-01	9.99652e-01	3.20000e+01	9.99652e-01
9.98442e-01	1.50001e+01	9.98441e-01	9.99663e-01	3.25000e+01	9.99663e-01
9.98539e-01	1.55001e+01	9.98539e-01	9.99673e-01	3.30000e+01	9.99673e-01
9.98628e-01	1.60001e+01	9.98627e-01	9.99683e-01	3.35000e+01	9.99682e-01
9.98709e-01	1.65001e+01	9.98708e-01	9.99692e-01	3.40000e+01	9.99692e-01
9.98783e-01	1.70001e+01	9.98782e-01	9.99701e-01	3.45000e+01	9.99700e-01
9.98851e-01	1.75001e+01	9.98850e-01	9.99709e-01	3.50000e+01	9.99709e-01

Figura A.14: Ejemplo 14. Caso Real.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
5.00000e-01	5.00000e-01	5.00000e-01	2.04051e+00	2.60020e+24	9.98736e-01
3.29900e+00	3.43862e+00	4.51135e-01	2.03938e+00	1.47318e+25	9.98808e-01
2.73489e+00	3.99111e+00	5.79906e-01	2.03831e+00	8.35300e+25	9.98873e-01
2.48441e+00	1.07704e+01	7.07324e-01	2.03730e+00	4.73970e+26	9.98934e-01
2.36098e+00	4.45158e+01	8.44121e-01	2.03635e+00	2.69130e+27	9.98989e-01
2.28765e+00	2.04372e+02	9.08112e-01	2.03543e+00	1.52920e+28	9.99041e-01
2.23907e+00	9.84223e+02	9.40366e-01	2.03457e+00	8.69437e+28	9.99088e-01
2.20452e+00	4.88903e+03	9.58438e-01	2.03374e+00	4.94623e+29	9.99132e-01
2.17870e+00	2.48309e+04	9.69466e-01	2.03296e+00	2.81552e+30	9.99173e-01
2.15866e+00	1.28243e+05	9.76654e-01	2.03221e+00	1.60354e+31	9.99211e-01
2.14266e+00	6.71065e+05	9.81586e-01	2.03149e+00	9.13752e+31	9.99247e-01
2.12959e+00	3.54866e+06	9.85112e-01	2.03080e+00	5.20946e+32	9.99280e-01
2.11872e+00	1.89287e+07	9.87718e-01	2.03015e+00	2.97142e+33	9.99311e-01
2.10952e+00	1.01699e+08	9.89696e-01	2.02952e+00	1.69564e+34	9.99340e-01
2.10165e+00	5.49769e+08	9.91234e-01	2.02891e+00	9.68043e+34	9.99368e-01
2.09484e+00	2.98768e+09	9.92452e-01	2.02834e+00	5.52888e+35	9.99393e-01
2.08888e+00	1.63110e+10	9.93433e-01	2.02778e+00	3.15904e+36	9.99417e-01
2.08362e+00	8.94069e+10	9.94234e-01	2.02724e+00	1.80568e+37	9.99440e-01
2.07896e+00	4.91819e+11	9.94898e-01	2.02673e+00	1.03250e+38	9.99462e-01
2.07478e+00	2.71403e+12	9.95453e-01	2.02623e+00	5.90598e+38	9.99482e-01
2.07103e+00	1.50195e+13	9.95923e-01	2.02576e+00	3.37944e+39	9.99501e-01
2.06763e+00	8.33309e+13	9.96323e-01	2.02529e+00	1.93439e+40	9.99519e-01
2.06454e+00	4.63407e+14	9.96668e-01	2.02485e+00	1.10760e+41	9.99536e-01
2.06173e+00	2.58246e+15	9.96966e-01	2.02442e+00	6.34386e+41	9.99552e-01
2.05915e+00	1.44192e+16	9.97225e-01	2.02401e+00	3.63459e+42	9.99568e-01
2.05677e+00	8.06526e+16	9.97453e-01	2.02361e+00	2.08297e+43	9.99582e-01
2.05458e+00	4.51858e+17	9.97654e-01	2.02322e+00	1.19408e+44	9.99596e-01
2.05255e+00	2.53535e+18	9.97832e-01	2.02284e+00	6.84700e+44	9.99609e-01
2.05067e+00	1.42456e+19	9.97991e-01	2.02248e+00	3.92718e+45	9.99622e-01
2.04892e+00	8.01462e+19	9.98133e-01	2.02213e+00	2.25305e+46	9.99634e-01
2.04728e+00	4.51451e+20	9.98260e-01	2.02179e+00	1.29291e+47	9.99645e-01
2.04575e+00	2.54582e+21	9.98375e-01	2.02146e+00	7.42113e+47	9.99656e-01
2.04432e+00	1.43716e+22	9.98478e-01	2.02114e+00	4.26061e+48	9.99666e-01
2.04297e+00	8.12099e+22	9.98572e-01	2.02082e+00	2.44664e+49	9.99676e-01
2.04170e+00	4.59323e+23	9.98658e-01	2.02052e+00	1.40528e+50	9.99686e-01

Figura A.15: Ejemplo 15. Caso Real.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00
4.00000e-01	1.46969e+00	0.00000e+00
5.67476e-01	1.51370e+00	9.29138e-01
5.87060e-01	1.51615e+00	9.74831e-01
5.39689e-01	1.51620e+00	9.88395e-01
5.43888e-01	1.51620e+00	9.96188e-01
5.70227e-01	1.51620e+00	9.99391e-01
5.78288e-01	1.51620e+00	9.99919e-01
5.74522e-01	1.51620e+00	9.99990e-01
5.82221e-01	1.51620e+00	9.99999e-01
6.02769e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.19664e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.33502e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.44664e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.53484e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.60267e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.65295e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.68816e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.71052e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.72202e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.72441e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.71924e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.70788e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.69154e-01	1.51620e+00	1.00000e+00
6.67123e-01	1.51620e+00	1.00000e+00

Figura A.16: Ejemplo 1. Caso Circunferencia.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00
5.00000e-01	1.50000e+00	0.00000e+00
1.10088e+00	3.13847e+00	1.39607e+00
1.01427e+00	3.44791e+00	2.59738e+00
1.11154e+00	3.46832e+00	2.87061e+00
1.06283e+00	3.46961e+00	2.94460e+00
1.08289e+00	3.46968e+00	2.96336e+00
1.05121e+00	3.46968e+00	2.96740e+00
1.04732e+00	3.46969e+00	2.96811e+00
1.02080e+00	3.46969e+00	2.96821e+00
1.00154e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
9.96006e-01	3.46969e+00	2.96822e+00
1.04412e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.07287e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.07865e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.09325e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.09351e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.10232e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.10089e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.10671e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.10473e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.10880e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.10667e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.10963e+00	3.46969e+00	2.96822e+00
1.10753e+00	3.46969e+00	2.96822e+00

Figura A.17: Ejemplo 2. Caso Circunferencia.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00
5.00000e-01	1.50000e+00	0.00000e+00
1.17933e+00	1.42124e+01	1.41357e+00
1.04585e+00	1.52265e+01	1.39489e+01
1.18526e+00	1.52474e+01	1.39704e+01
1.11874e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.15946e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.12099e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.13798e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.11295e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.12145e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.10383e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.10856e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.09546e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.09828e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.08814e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.08990e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.08180e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.08293e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.07631e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.07704e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.07151e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.07198e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.06731e+00	1.52476e+01	1.39716e+01
1.06760e+00	1.52476e+01	1.39716e+01

Figura A.18: Ejemplo 3. Caso Circunferencia.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	1.91421e+00	2.67207e+00	2.19556e+00
1.00000e+00	1.73205e+00	0.00000e+00	1.93445e+00	2.67207e+00	2.19556e+00
1.78213e+00	2.50630e+00	1.26334e+00	1.92904e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.56109e+00	2.66052e+00	1.70858e+00	1.93458e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.61776e+00	2.66845e+00	2.01843e+00	1.93547e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.81985e+00	2.67055e+00	2.12474e+00	1.92883e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.60828e+00	2.67133e+00	2.16392e+00	1.94301e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.79918e+00	2.67146e+00	2.18318e+00	1.92419e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.80740e+00	2.67165e+00	2.19096e+00	1.94535e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.81942e+00	2.67171e+00	2.19355e+00	1.91071e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.84386e+00	2.67180e+00	2.19479e+00	1.94960e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.71262e+00	2.67184e+00	2.19533e+00	1.88430e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.88467e+00	2.67188e+00	2.19545e+00	1.94995e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.80413e+00	2.67192e+00	2.19549e+00	1.91116e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.87180e+00	2.67194e+00	2.19553e+00	1.95222e+00	2.67208e+00	2.19556e+00
1.87266e+00	2.67197e+00	2.19554e+00	1.92778e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.87300e+00	2.67197e+00	2.19554e+00	1.95132e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.88993e+00	2.67199e+00	2.19554e+00	1.93886e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.83349e+00	2.67200e+00	2.19554e+00	1.95213e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.91097e+00	2.67201e+00	2.19554e+00	1.94464e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.80306e+00	2.67202e+00	2.19555e+00	1.95018e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.90958e+00	2.67203e+00	2.19555e+00	1.95052e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.87442e+00	2.67203e+00	2.19555e+00	1.94958e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.91564e+00	2.67204e+00	2.19555e+00	1.95330e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.89856e+00	2.67205e+00	2.19555e+00	1.94628e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.90679e+00	2.67205e+00	2.19555e+00	1.95698e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.91863e+00	2.67205e+00	2.19555e+00	1.94359e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.90210e+00	2.67205e+00	2.19555e+00	1.95832e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.92440e+00	2.67206e+00	2.19555e+00	1.93723e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.87955e+00	2.67206e+00	2.19555e+00	1.96072e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.93342e+00	2.67206e+00	2.19555e+00	1.92709e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.84652e+00	2.67207e+00	2.19555e+00	1.96121e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.93352e+00	2.67207e+00	2.19555e+00	1.91306e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.89422e+00	2.67207e+00	2.19555e+00	1.96274e+00	2.67209e+00	2.19556e+00
1.93732e+00	2.67207e+00	2.19555e+00	1.93291e+00	2.67209e+00	2.19556e+00

Figura A.19: Ejemplo 4. Caso Circunferencia.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	1.25958e+01	4.22153e+07	1.12110e+01
1.00000e+01	1.00995e+01	0.00000e+00	1.25574e+01	9.46715e+07	1.12110e+01
1.50739e+01	1.59718e+01	1.01789e+00	1.25931e+01	1.10127e+08	1.12110e+01
1.27056e+01	2.23387e+01	7.32700e+00	1.25378e+01	2.40713e+08	1.12110e+01
1.29816e+01	2.44731e+01	1.01575e+01	1.25614e+01	2.87324e+08	1.12110e+01
1.40191e+01	4.02395e+01	1.07220e+01	1.25461e+01	6.12010e+08	1.12110e+01
1.34674e+01	5.76489e+01	1.09391e+01	1.25589e+01	7.49654e+08	1.12110e+01
1.33567e+01	8.66952e+01	1.10726e+01	1.25276e+01	1.55611e+09	1.12110e+01
1.28756e+01	1.55807e+02	1.11314e+01	1.25326e+01	1.95578e+09	1.12110e+01
1.34771e+01	2.04131e+02	1.11623e+01	1.25325e+01	3.95710e+09	1.12110e+01
1.29558e+01	4.23192e+02	1.11830e+01	1.25303e+01	5.10178e+09	1.12110e+01
1.31393e+01	4.98521e+02	1.11940e+01	1.25155e+01	1.00646e+10	1.12110e+01
1.26607e+01	1.13363e+03	1.12014e+01	1.25081e+01	1.33059e+10	1.12110e+01
1.31617e+01	1.24125e+03	1.12049e+01	1.25183e+01	2.56044e+10	1.12110e+01
1.26532e+01	2.99740e+03	1.12077e+01	1.25060e+01	3.46952e+10	1.12110e+01
1.29671e+01	3.13037e+03	1.12089e+01	1.25029e+01	6.51546e+10	1.12110e+01
1.24381e+01	7.84440e+03	1.12099e+01	1.24870e+01	9.04453e+10	1.12110e+01
1.29708e+01	7.96791e+03	1.12103e+01	1.25043e+01	1.65844e+11	1.12110e+01
1.23232e+01	2.03695e+04	1.12106e+01	1.24851e+01	2.35714e+11	1.12110e+01
1.28454e+01	2.04202e+04	1.12108e+01	1.24904e+01	4.22265e+11	1.12110e+01
1.21616e+01	5.25821e+04	1.12109e+01	1.24687e+01	6.14131e+11	1.12110e+01
1.28442e+01	5.25994e+04	1.12109e+01	1.24910e+01	1.07549e+12	1.12110e+01
1.23757e+01	1.35138e+05	1.12109e+01	1.24669e+01	1.59959e+12	1.12110e+01
1.27569e+01	1.36001e+05	1.12110e+01	1.24783e+01	2.74008e+12	1.12110e+01
1.24960e+01	3.46170e+05	1.12110e+01	1.24525e+01	4.16512e+12	1.12110e+01
1.27543e+01	3.52630e+05	1.12110e+01	1.24784e+01	6.98329e+12	1.12110e+01
1.25038e+01	8.84602e+05	1.12110e+01	1.24508e+01	1.08421e+13	1.12110e+01
1.26900e+01	9.16196e+05	1.12110e+01	1.24669e+01	1.78031e+13	1.12110e+01
1.25521e+01	2.25652e+06	1.12110e+01	1.24382e+01	2.82143e+13	1.12110e+01
1.26871e+01	2.38399e+06	1.12110e+01	1.24667e+01	4.54015e+13	1.12110e+01
1.25376e+01	5.74889e+06	1.12110e+01	1.24366e+01	7.33995e+13	1.12110e+01
1.26378e+01	6.20982e+06	1.12110e+01	1.24562e+01	1.15820e+14	1.12110e+01
1.25626e+01	1.46335e+07	1.12110e+01	1.24254e+01	1.90892e+14	1.12110e+01
1.26349e+01	1.61872e+07	1.12110e+01	1.24557e+01	2.95549e+14	1.12110e+01
1.25433e+01	3.72272e+07	1.12110e+01	1.24239e+01	4.96310e+14	1.12110e+01

Figura A.20: Ejemplo 5. Caso Circunferencia.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>	1.00294e+01	6.43696e+11	1.02448e+01
1.00000e+01	1.00000e+01	1.00000e+01	1.00296e+01	2.33638e+12	1.02451e+01
1.00000e+01	1.02079e+01	8.64379e+00	1.00308e+01	4.80701e+12	1.02454e+01
1.00000e+01	2.09286e+01	1.00099e+01	1.00275e+01	6.44110e+12	1.02455e+01
1.00000e+01	2.32646e+01	1.00249e+01	1.00303e+01	2.83456e+13	1.02459e+01
1.00090e+01	8.36021e+01	1.01049e+01	1.00310e+01	3.29211e+13	1.02460e+01
1.00124e+01	1.59747e+02	1.01372e+01	1.00302e+01	8.19387e+13	1.02461e+01
1.00110e+01	2.07996e+02	1.01446e+01	1.00316e+01	2.57016e+14	1.02464e+01
1.00103e+01	8.91621e+02	1.01771e+01	1.00312e+01	2.65425e+14	1.02464e+01
1.00124e+01	1.21587e+03	1.01864e+01	1.00311e+01	1.08528e+15	1.02467e+01
1.00124e+01	2.26781e+03	1.01916e+01	1.00320e+01	1.80959e+15	1.02468e+01
1.00181e+01	9.02541e+03	1.02065e+01	1.00295e+01	2.93907e+15	1.02469e+01
1.00196e+01	9.29707e+03	1.02094e+01	1.00323e+01	1.21951e+16	1.02471e+01
1.00163e+01	2.76190e+04	1.02146e+01	1.00327e+01	1.26866e+16	1.02471e+01
1.00187e+01	7.53981e+04	1.02209e+01	1.00316e+01	3.88798e+16	1.02473e+01
1.00185e+01	8.17195e+04	1.02220e+01	1.00327e+01	9.89523e+16	1.02474e+01
1.00216e+01	3.42619e+05	1.02268e+01	1.00314e+01	1.13936e+17	1.02474e+01
1.00234e+01	5.43400e+05	1.02289e+01	1.00328e+01	5.00289e+17	1.02476e+01
1.00174e+01	9.00469e+05	1.02298e+01	1.00335e+01	6.73359e+17	1.02477e+01
1.00224e+01	3.73974e+06	1.02332e+01	1.00317e+01	1.38342e+18	1.02477e+01
1.00235e+01	3.93040e+06	1.02340e+01	1.00332e+01	5.02232e+18	1.02478e+01
1.00237e+01	1.14439e+07	1.02353e+01	1.00332e+01	5.02355e+18	1.02479e+01
1.00258e+01	3.13432e+07	1.02371e+01	1.00332e+01	1.85848e+19	1.02480e+01
1.00248e+01	3.42150e+07	1.02374e+01	1.00340e+01	3.69573e+19	1.02480e+01
1.00249e+01	1.45818e+08	1.02390e+01	1.00306e+01	5.12707e+19	1.02481e+01
1.00262e+01	2.20428e+08	1.02397e+01	1.00337e+01	2.24005e+20	1.02482e+01
1.00240e+01	3.89715e+08	1.02400e+01	1.00341e+01	2.51761e+20	1.02482e+01
1.00274e+01	1.56247e+09	1.02412e+01	1.00334e+01	6.65350e+20	1.02483e+01
1.00281e+01	1.59481e+09	1.02415e+01	1.00344e+01	1.96692e+21	1.02483e+01
1.00265e+01	5.08802e+09	1.02421e+01	1.00338e+01	2.08643e+21	1.02484e+01
1.00280e+01	1.24717e+10	1.02428e+01	1.00340e+01	8.81569e+21	1.02484e+01
1.00263e+01	1.46210e+10	1.02429e+01	1.00347e+01	1.35662e+22	1.02485e+01
1.00287e+01	6.42655e+10	1.02436e+01	1.00331e+01	2.40517e+22	1.02485e+01
1.00298e+01	8.58600e+10	1.02439e+01	1.00348e+01	9.54087e+22	1.02486e+01
1.00272e+01	1.76049e+11	1.02441e+01	1.00349e+01	9.66004e+22	1.02486e+01
1.00293e+01	6.43696e+11	1.02446e+01			

Figura A.21: Ejemplo 6. Caso Circunferencia.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	1.18007e+01	6.00617e+11	1.02977e+01
1.00000e+01	1.00995e+01	0.00000e+00	1.16429e+01	2.50268e+12	1.02977e+01
1.49814e+01	1.58403e+01	9.99073e-01	1.18284e+01	2.58509e+12	1.02977e+01
1.29161e+01	3.33173e+01	1.42051e+00	1.17681e+01	8.34020e+12	1.02977e+01
1.28201e+01	4.11930e+01	5.68083e+00	1.17477e+01	1.94235e+13	1.02977e+01
1.22375e+01	1.04878e+02	9.86443e+00	1.17730e+01	2.45210e+13	1.02977e+01
1.28718e+01	2.60326e+02	1.00666e+01	1.16821e+01	1.08101e+14	1.02977e+01
1.28329e+01	3.39750e+02	1.01049e+01	1.17903e+01	1.26131e+14	1.02977e+01
1.20396e+01	1.48233e+03	1.02103e+01	1.17462e+01	3.25519e+14	1.02977e+01
1.24377e+01	1.56182e+03	1.02250e+01	1.16714e+01	9.63300e+14	1.02977e+01
1.21419e+01	5.04035e+03	1.02528e+01	1.17501e+01	1.03707e+15	1.02977e+01
1.23744e+01	1.11615e+04	1.02677e+01	1.16870e+01	4.45293e+15	1.02977e+01
1.23517e+01	1.53570e+04	1.02719e+01	1.17548e+01	6.35283e+15	1.02977e+01
1.19096e+01	6.63502e+04	1.02836e+01	1.17275e+01	1.26755e+16	1.02977e+01
1.22003e+01	7.01794e+04	1.02857e+01	1.15183e+01	4.61455e+16	1.02977e+01
1.20216e+01	2.20009e+05	1.02896e+01	1.17302e+01	4.62138e+16	1.02977e+01
1.21049e+01	5.16276e+05	1.02923e+01	1.16822e+01	1.76746e+17	1.02977e+01
1.21364e+01	6.64677e+05	1.02929e+01	1.17174e+01	3.25075e+17	1.02977e+01
1.18801e+01	2.91958e+06	1.02951e+01	1.17115e+01	4.99093e+17	1.02977e+01
1.20562e+01	3.26466e+06	1.02955e+01	1.16150e+01	2.09452e+18	1.02977e+01
1.19387e+01	9.17186e+06	1.02961e+01	1.17120e+01	2.18326e+18	1.02977e+01
1.19239e+01	2.45840e+07	1.02967e+01	1.16745e+01	6.85491e+18	1.02977e+01
1.20129e+01	2.84523e+07	1.02968e+01	1.16735e+01	1.65862e+19	1.02977e+01
1.18524e+01	1.25316e+08	1.02972e+01	1.16976e+01	2.02313e+19	1.02977e+01
1.19573e+01	1.56588e+08	1.02973e+01	1.16401e+01	8.93690e+19	1.02977e+01
1.18795e+01	3.72685e+08	1.02974e+01	1.16937e+01	1.08380e+20	1.02977e+01
1.17684e+01	1.17540e+09	1.02976e+01	1.16664e+01	2.63336e+20	1.02977e+01
1.19319e+01	1.23409e+09	1.02976e+01	1.16127e+01	8.25493e+20	1.02977e+01
1.18223e+01	5.21652e+09	1.02976e+01	1.16852e+01	8.62137e+20	1.02977e+01
1.18809e+01	7.71091e+09	1.02977e+01	1.16436e+01	3.61330e+21	1.02977e+01
1.18352e+01	1.49563e+10	1.02977e+01	1.16731e+01	5.54885e+21	1.02977e+01
1.15110e+01	5.52313e+10	1.02977e+01	1.16585e+01	1.01590e+22	1.02977e+01
1.18736e+01	5.52784e+10	1.02977e+01	1.15191e+01	3.91242e+22	1.02977e+01
1.17936e+01	2.10919e+11	1.02977e+01	1.16737e+01	3.92077e+22	1.02977e+01
1.18140e+01	3.86283e+11	1.02977e+01	1.16410e+01	1.40850e+23	1.02977e+01

Figura A.22: Ejemplo 7. Caso Circunferencia.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
7.07107e-01	7.07107e-01	7.07107e-01	1.50719e+02	1.86099e+02	2.34417e+01
1.58114e+00	1.93649e+00	8.32666e-300	1.53310e+02	1.88852e+02	2.37984e+01
2.62383e+00	2.84338e+00	8.88934e-01	1.56019e+02	1.91731e+02	2.42049e+01
3.83969e+00	4.35253e+00	1.31297e+00	1.58705e+02	1.94586e+02	2.46487e+01
5.18373e+00	6.07079e+00	1.54718e+00	1.61259e+02	1.97304e+02	2.51230e+01
6.41183e+00	7.81183e+00	1.75300e+00	1.63686e+02	1.99890e+02	2.56332e+01
7.41655e+00	9.55670e+00	1.98251e+00	1.66073e+02	2.02436e+02	2.61905e+01
8.15303e+00	1.13258e+01	2.28373e+00	1.68544e+02	2.05070e+02	2.68043e+01
8.61597e+00	1.31696e+01	2.73975e+00	1.71203e+02	2.07904e+02	2.74790e+01
8.87944e+00	1.51707e+01	3.44593e+00	1.74053e+02	2.10938e+02	2.82061e+01
9.13126e+00	1.74694e+01	4.46070e+00	1.76913e+02	2.13984e+02	2.89552e+01
9.60988e+00	2.03334e+01	5.82690e+00	1.79580e+02	2.16825e+02	2.96961e+01
1.05822e+01	2.43462e+01	7.63200e+00	1.82022e+02	2.19431e+02	3.04206e+01
1.26597e+01	3.10167e+01	1.00594e+01	1.84335e+02	2.21900e+02	3.11309e+01
1.84095e+01	4.30175e+01	1.29875e+01	1.86641e+02	2.24360e+02	3.18310e+01
2.67443e+01	5.38042e+01	1.46883e+01	1.89049e+02	2.26926e+02	3.25350e+01
3.35988e+01	6.17865e+01	1.56783e+01	1.91688e+02	2.29736e+02	3.32818e+01
3.97712e+01	6.88592e+01	1.64946e+01	1.94898e+02	2.33152e+02	3.41683e+01
4.63424e+01	7.62703e+01	1.73022e+01	1.98552e+02	2.37035e+02	3.51181e+01
5.43771e+01	8.51048e+01	1.81356e+01	2.01648e+02	2.40322e+02	3.58816e+01
6.39589e+01	9.53847e+01	1.89030e+01	2.04745e+02	2.43614e+02	3.66334e+01
7.32747e+01	1.05239e+02	1.94870e+01	2.08126e+02	2.47215e+02	3.74505e+01
8.17318e+01	1.14144e+02	1.99481e+01	2.11965e+02	2.51310e+02	3.83768e+01
9.00727e+01	1.22907e+02	2.03734e+01	2.16360e+02	2.56009e+02	3.94440e+01
9.89398e+01	1.32175e+02	2.07847e+01	2.21238e+02	2.61240e+02	4.06506e+01
1.07644e+02	1.41212e+02	2.11317e+01	2.26285e+02	2.66674e+02	4.19406e+01
1.15230e+02	1.49056e+02	2.13983e+01	2.31175e+02	2.71965e+02	4.32433e+01
1.22121e+02	1.56180e+02	2.16344e+01	2.35818e+02	2.77013e+02	4.45302e+01
1.29390e+02	1.63700e+02	2.18905e+01	2.40317e+02	2.81929e+02	4.58120e+01
1.38007e+02	1.72600e+02	2.22030e+01	2.44852e+02	2.86902e+02	4.71136e+01
1.39727e+02	1.74419e+02	2.23281e+01	2.49593e+02	2.92115e+02	4.84589e+01
1.41763e+02	1.76578e+02	2.24860e+01	2.54631e+02	2.97666e+02	4.98567e+01
1.43882e+02	1.78828e+02	2.26701e+01	2.59885e+02	3.03468e+02	5.12838e+01
1.46050e+02	1.81132e+02	2.28850e+01	2.65116e+02	3.09264e+02	5.26890e+01
1.48309e+02	1.83535e+02	2.31391e+01	2.70137e+02	3.14848e+02	5.40348e+01

Figura A.23: Ejemplo 9. Caso Circunferencia.

Capítulo A. Primer anexo

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
5.00000e-01	5.00000e-01	5.00000e-01	1.02450e+00	1.52451e+00	1.49858e+00
5.00000e-01	1.50000e+00	3.33333e-301	1.02516e+00	1.52451e+00	1.49866e+00
8.90388e-01	1.50975e+00	1.14135e+00	1.02396e+00	1.52451e+00	1.49873e+00
8.59381e-01	1.52133e+00	1.34009e+00	1.02454e+00	1.52451e+00	1.49880e+00
9.78311e-01	1.52279e+00	1.39789e+00	1.02344e+00	1.52451e+00	1.49886e+00
9.60426e-01	1.52386e+00	1.43132e+00	1.02395e+00	1.52451e+00	1.49892e+00
1.00984e+00	1.52420e+00	1.45016e+00	1.02294e+00	1.52451e+00	1.49897e+00
9.96867e-01	1.52437e+00	1.46270e+00	1.02338e+00	1.52451e+00	1.49902e+00
1.02275e+00	1.52445e+00	1.47103e+00	1.02245e+00	1.52451e+00	1.49907e+00
1.01291e+00	1.52448e+00	1.47700e+00	1.02284e+00	1.52451e+00	1.49911e+00
1.02838e+00	1.52450e+00	1.48132e+00	1.02197e+00	1.52451e+00	1.49915e+00
1.02071e+00	1.52450e+00	1.48458e+00	1.02232e+00	1.52451e+00	1.49919e+00
1.03079e+00	1.52451e+00	1.48706e+00	1.02152e+00	1.52451e+00	1.49922e+00
1.02467e+00	1.52451e+00	1.48901e+00	1.02183e+00	1.52451e+00	1.49925e+00
1.03166e+00	1.52451e+00	1.49056e+00	1.02108e+00	1.52451e+00	1.49928e+00
1.02666e+00	1.52451e+00	1.49181e+00	1.02136e+00	1.52451e+00	1.49931e+00
1.03174e+00	1.52451e+00	1.49283e+00	1.02066e+00	1.52451e+00	1.49934e+00
1.02758e+00	1.52451e+00	1.49367e+00	1.02091e+00	1.52451e+00	1.49937e+00
1.03140e+00	1.52451e+00	1.49438e+00	1.02026e+00	1.52451e+00	1.49939e+00
1.02788e+00	1.52451e+00	1.49497e+00	1.02048e+00	1.52451e+00	1.49941e+00
1.03083e+00	1.52451e+00	1.49548e+00	1.01987e+00	1.52451e+00	1.49943e+00
1.02782e+00	1.52451e+00	1.49591e+00	1.02007e+00	1.52451e+00	1.49946e+00
1.03015e+00	1.52451e+00	1.49629e+00	1.01949e+00	1.52451e+00	1.49947e+00
1.02754e+00	1.52451e+00	1.49661e+00	1.01968e+00	1.52451e+00	1.49949e+00
1.02942e+00	1.52451e+00	1.49690e+00	1.01913e+00	1.52451e+00	1.49951e+00
1.02714e+00	1.52451e+00	1.49715e+00	1.01930e+00	1.52451e+00	1.49953e+00
1.02867e+00	1.52451e+00	1.49737e+00	1.01879e+00	1.52451e+00	1.49954e+00
1.02665e+00	1.52451e+00	1.49757e+00	1.01894e+00	1.52451e+00	1.49956e+00
1.02793e+00	1.52451e+00	1.49774e+00	1.01845e+00	1.52451e+00	1.49957e+00
1.02613e+00	1.52451e+00	1.49790e+00	1.01859e+00	1.52451e+00	1.49958e+00
1.02720e+00	1.52451e+00	1.49804e+00	1.01813e+00	1.52451e+00	1.49960e+00
1.02559e+00	1.52451e+00	1.49817e+00	1.01826e+00	1.52451e+00	1.49961e+00
1.02649e+00	1.52451e+00	1.49829e+00	1.01782e+00	1.52451e+00	1.49962e+00
1.02504e+00	1.52451e+00	1.49839e+00	1.01794e+00	1.52451e+00	1.49963e+00
1.02581e+00	1.52451e+00	1.49849e+00	1.01752e+00	1.52451e+00	1.49964e+00

Figura A.24: Ejemplo 11. Caso Circunferencia.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>			
5.00000e-01	5.00000e-01	5.00000e-01	7.11418e+03	7.13783e+03	1.53236e+01
1.50000e+00	1.83712e+00	2.94392e-300	7.27169e+03	7.29554e+03	1.54686e+01
4.31185e+00	4.49093e+00	1.80821e+00	7.29054e+03	7.31442e+03	1.55089e+01
2.70695e+01	2.98239e+01	2.35115e+00	7.29610e+03	7.31999e+03	1.55142e+01
1.08832e+03	1.09144e+03	2.58291e+00	7.65787e+03	7.68183e+03	2.58086e+02
1.26464e+03	1.26776e+03	2.58295e+00	7.77923e+03	7.80323e+03	3.55825e+02
2.86101e+03	2.86442e+03	2.68951e+00	7.78058e+03	7.80459e+03	3.83161e+02
2.87920e+03	2.88389e+03	3.24564e+00	7.82986e+03	7.85390e+03	4.01049e+02
2.91602e+03	2.92179e+03	3.91162e+00	7.90230e+03	7.92637e+03	4.38074e+02
3.19400e+03	3.20406e+03	6.70489e+00	8.11240e+03	8.13656e+03	5.63896e+02
3.28871e+03	3.29988e+03	7.51029e+00	8.19608e+03	8.22029e+03	6.15250e+02
3.45763e+03	3.47023e+03	8.49844e+00	8.23138e+03	8.25560e+03	6.31249e+02
3.59073e+03	3.60420e+03	9.15471e+00	8.26968e+03	8.29393e+03	6.63437e+02
3.72345e+03	3.73758e+03	9.57144e+00	8.32582e+03	8.35010e+03	7.06777e+02
3.85042e+03	3.86503e+03	9.93813e+00	8.37283e+03	8.39714e+03	7.43176e+02
3.95423e+03	3.96915e+03	1.01257e+01	8.40352e+03	8.42785e+03	7.68914e+02
4.06129e+03	4.07651e+03	1.03439e+01	8.51192e+03	8.53631e+03	8.29551e+02
4.15204e+03	4.16752e+03	1.04997e+01	8.58598e+03	8.61042e+03	8.76858e+02
4.25698e+03	4.27280e+03	1.07230e+01	8.65084e+03	8.67533e+03	9.18222e+02
4.36467e+03	4.38088e+03	1.09685e+01	8.71186e+03	8.73640e+03	9.55543e+02
4.48959e+03	4.50629e+03	1.12648e+01	8.78140e+03	8.80598e+03	9.86467e+02
4.62421e+03	4.64144e+03	1.16081e+01	8.83899e+03	8.86361e+03	1.03074e+03
4.75546e+03	4.77322e+03	1.19150e+01	8.89658e+03	8.92125e+03	1.07102e+03
4.88556e+03	4.90382e+03	1.22281e+01	8.95105e+03	8.97576e+03	1.10794e+03
5.00568e+03	5.02438e+03	1.24842e+01	9.00442e+03	9.02917e+03	1.14331e+03
5.14000e+03	5.15918e+03	1.27783e+01	9.04845e+03	9.07324e+03	1.17119e+03
5.29368e+03	5.31338e+03	1.30699e+01	9.20927e+03	9.23419e+03	1.28720e+03
5.49850e+03	5.51884e+03	1.34598e+01	9.28068e+03	9.30566e+03	1.33494e+03
5.69997e+03	5.72088e+03	1.37959e+01	9.35206e+03	9.37711e+03	1.38136e+03
5.90612e+03	5.92756e+03	1.41153e+01	9.41857e+03	9.44367e+03	1.42291e+03
6.10589e+03	6.12781e+03	1.43843e+01	9.48891e+03	9.51407e+03	1.46315e+03
6.33710e+03	6.35950e+03	1.46618e+01	9.56311e+03	9.58833e+03	1.49248e+03
6.69335e+03	6.71638e+03	1.50342e+01	9.56462e+03	9.58990e+03	1.54640e+03
6.69837e+03	6.72141e+03	1.50455e+01	9.57128e+03	9.59662e+03	1.63761e+03
6.95677e+03	6.98020e+03	1.52112e+01	9.66519e+03	9.69060e+03	1.64779e+03

Figura A.25: Ejemplo 14. Caso Circunferencia.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00
1.00000e+01	1.00995e+01	0.00000e+00
1.49752e+01	1.58315e+01	9.98879e-01
1.33406e+01	3.64656e+01	1.00000e+00
1.25047e+01	2.54666e+02	1.00000e+00
1.20032e+01	2.03411e+03	1.00000e+00
1.16690e+01	1.69460e+04	1.00000e+00
1.14303e+01	1.45222e+05	1.00000e+00
1.12514e+01	1.27049e+06	1.00000e+00
1.11122e+01	1.12918e+07	1.00000e+00
1.10009e+01	1.01616e+08	1.00000e+00
1.09098e+01	9.23709e+08	1.00000e+00
1.08340e+01	8.46674e+09	1.00000e+00
1.07698e+01	7.81499e+10	1.00000e+00
1.07148e+01	7.25640e+11	1.00000e+00
1.06671e+01	6.77234e+12	1.00000e+00
1.06254e+01	6.34882e+13	1.00000e+00
1.05886e+01	5.97515e+14	1.00000e+00
1.05558e+01	5.64302e+15	1.00000e+00
1.05266e+01	5.34587e+16	1.00000e+00
1.05002e+01	5.07845e+17	1.00000e+00
1.04764e+01	4.83651e+18	1.00000e+00
1.04547e+01	4.61657e+19	1.00000e+00
1.04350e+01	4.41577e+20	1.00000e+00
1.04168e+01	4.23170e+21	1.00000e+00
1.04002e+01	4.06237e+22	1.00000e+00
1.03848e+01	3.90606e+23	1.00000e+00
1.03705e+01	3.76134e+24	1.00000e+00
1.03573e+01	3.62696e+25	1.00000e+00
1.03449e+01	3.50185e+26	1.00000e+00

Figura A.26: Ejemplo 15. Caso Circunferencia.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>	<i>k_thrd_singVals</i>				
5.00000e+00	5.00000e+00	5.00000e+00	5.00000e+00	7.55107e+01	4.11515e+04	3.58866e+04	6.98082e+01
1.25346e+01	1.25393e+01	3.89252e+00	3.89252e+00	7.45392e+01	1.24563e+05	3.61198e+04	6.98253e+01
5.01916e+01	5.04788e+01	7.76843e+00	2.02927e+00	7.49663e+01	1.28117e+05	8.45135e+04	6.98417e+01
4.77414e+01	5.61153e+01	4.06925e+01	7.64056e+00	7.48892e+01	1.49297e+05	9.55812e+04	6.98505e+01
8.85695e+01	9.00051e+01	5.53469e+01	1.18399e+01	7.44344e+01	3.26304e+05	1.34365e+05	6.98656e+01
8.62798e+01	9.17222e+01	6.23843e+01	3.35521e+01	7.50430e+01	3.77994e+05	2.07911e+05	6.98729e+01
7.83792e+01	1.11094e+02	7.44054e+01	5.17564e+01	7.45338e+01	6.14767e+05	2.42777e+05	6.98809e+01
8.02603e+01	1.17097e+02	8.94259e+01	6.34085e+01	7.43027e+01	7.65273e+05	5.29724e+05	6.98916e+01
7.33241e+01	1.71634e+02	8.99016e+01	6.63898e+01	7.45834e+01	9.94138e+05	6.15873e+05	6.98962e+01
8.06912e+01	1.74559e+02	1.46930e+02	6.76686e+01	7.38083e+01	2.22674e+06	6.69846e+05	6.99035e+01
7.97223e+01	2.63028e+02	1.74377e+02	6.81806e+01	7.45019e+01	2.26467e+06	1.59385e+06	6.99099e+01
7.74965e+01	3.89595e+02	2.00042e+02	6.86842e+01	7.44384e+01	2.67790e+06	2.12734e+06	6.99145e+01
7.78314e+01	6.04723e+02	2.58621e+02	6.88788e+01	7.40438e+01	6.29275e+06	2.14264e+06	6.99204e+01
7.63752e+01	6.89821e+02	6.04314e+02	6.91509e+01	7.42804e+01	7.88229e+06	3.82651e+06	6.99238e+01
7.83546e+01	8.29602e+02	6.08021e+02	6.92745e+01	7.40043e+01	1.01457e+07	5.70891e+06	6.99285e+01
7.72474e+01	2.15717e+03	6.53251e+02	6.93498e+01	7.41225e+01	1.51759e+07	7.88816e+06	6.99328e+01
7.46444e+01	2.26305e+03	1.67799e+03	6.94896e+01	7.42087e+01	2.35635e+07	1.05128e+07	6.99350e+01
7.64805e+01	2.31376e+03	1.74927e+03	6.95322e+01	7.37244e+01	3.88340e+07	1.45151e+07	6.99392e+01
7.56716e+01	6.49534e+03	2.28207e+03	6.95969e+01	7.40230e+01	3.91771e+07	2.79289e+07	6.99420e+01
7.63750e+01	6.54805e+03	4.19601e+03	6.96536e+01	7.39485e+01	6.29722e+07	3.58705e+07	6.99444e+01
7.62040e+01	9.31328e+03	4.20169e+03	6.96747e+01	7.37182e+01	1.20184e+08	3.98532e+07	6.99477e+01
7.44333e+01	1.63754e+04	9.07710e+03	6.97261e+01	7.39439e+01	1.40995e+08	7.13004e+07	6.99494e+01
7.58374e+01	1.64922e+04	1.12743e+04	6.97474e+01	7.37955e+01	1.80958e+08	1.24795e+08	6.99521e+01
7.50302e+01	3.72808e+04	1.13145e+04	6.97645e+01	7.37544e+01	3.04206e+08	1.26968e+08	6.99543e+01
7.47597e+01	3.93578e+04	3.43367e+04	6.97970e+01	7.37909e+01	4.93912e+08	1.84663e+08	6.99555e+01

Figura A.27: Ejemplo 1. Trabajos futuros.

<i>k_mod_eigVals</i>	<i>k_singVals</i>	<i>k_sec_singVals</i>	<i>k_thrd_singVals</i>				
5.00000e+00	5.00000e+00	5.00000e+00	5.00000e+00	4.36924e+01	3.40490e+06	3.99011e+01	3.95583e+01
1.25346e+01	1.25393e+01	3.89252e+00	3.89252e+00	4.33967e+01	6.44759e+06	3.99114e+01	3.96036e+01
5.00459e+01	5.03321e+01	7.75562e+00	2.01720e+00	4.35166e+01	9.94828e+06	3.99166e+01	3.96267e+01
4.35587e+01	5.65435e+01	1.72266e+01	7.42842e+00	4.32198e+01	2.00638e+07	4.06574e+01	3.99145e+01
4.38044e+01	5.99554e+01	3.42034e+01	8.50986e+00	4.35575e+01	2.91471e+07	4.66422e+01	3.99271e+01
3.96446e+01	9.97324e+01	3.68243e+01	1.10646e+01	4.32520e+01	6.21796e+07	4.90102e+01	3.99325e+01
4.61325e+01	1.01849e+02	3.74725e+01	2.63193e+01	4.34166e+01	8.56191e+07	5.64164e+01	3.99366e+01
4.31810e+01	2.17402e+02	3.84255e+01	3.37839e+01	4.31136e+01	1.91993e+08	5.91263e+01	3.99414e+01
4.43514e+01	2.24889e+02	3.87689e+01	3.47173e+01	4.34427e+01	2.52111e+08	6.75052e+01	3.99444e+01
4.05140e+01	6.40251e+02	3.91198e+01	3.63258e+01	4.31352e+01	5.90871e+08	7.06903e+01	3.99485e+01
4.49027e+01	6.40611e+02	3.92461e+01	3.68297e+01	4.33283e+01	7.44001e+08	7.99799e+01	3.99508e+01
4.27620e+01	1.93899e+03	3.94355e+01	3.75975e+01	4.30230e+01	1.81307e+09	8.37317e+01	3.99543e+01
4.40094e+01	2.00239e+03	3.95077e+01	3.78768e+01	4.33461e+01	2.20007e+09	9.39180e+01	3.99561e+01
4.38476e+01	5.71290e+03	3.96068e+01	3.83044e+01	4.30371e+01	5.54862e+09	9.83175e+01	3.99592e+01
4.42369e+01	6.39638e+03	3.96523e+01	3.84919e+01	4.32517e+01	6.51785e+09	1.09399e+02	3.99607e+01
4.36403e+01	1.66001e+04	3.97104e+01	3.87385e+01	4.29433e+01	1.69402e+10	1.14525e+02	3.99633e+01
4.37232e+01	2.04899e+04	3.97425e+01	3.88730e+01	4.32645e+01	1.93422e+10	1.26503e+02	3.99645e+01
4.39661e+01	4.80155e+04	3.97778e+01	3.90251e+01	4.29514e+01	5.16080e+10	1.32435e+02	3.99668e+01
4.38455e+01	6.54257e+04	3.98016e+01	3.91265e+01	4.31856e+01	5.74881e+10	1.45310e+02	3.99679e+01
4.37038e+01	1.38863e+05	3.98242e+01	3.92242e+01	4.28704e+01	1.56919e+11	1.52129e+02	3.99699e+01
4.35110e+01	2.07830e+05	3.98425e+01	3.93030e+01	4.31951e+01	1.71103e+11	1.65903e+02	3.99708e+01
4.38419e+01	4.02328e+05	3.98575e+01	3.93681e+01	4.28733e+01	4.76290e+11	1.73692e+02	3.99725e+01
4.35851e+01	6.56498e+05	3.98720e+01	3.94310e+01	4.31282e+01	5.09909e+11	1.88362e+02	3.99733e+01
4.36219e+01	1.16873e+06	3.98822e+01	3.94757e+01	4.28011e+01	1.44339e+12	1.97206e+02	3.99748e+01
4.33488e+01	2.06255e+06	3.98940e+01	3.95273e+01	4.31355e+01	1.52136e+12	2.12771e+02	3.99755e+01

Figura A.28: Ejemplo 2. Trabajos futuros.

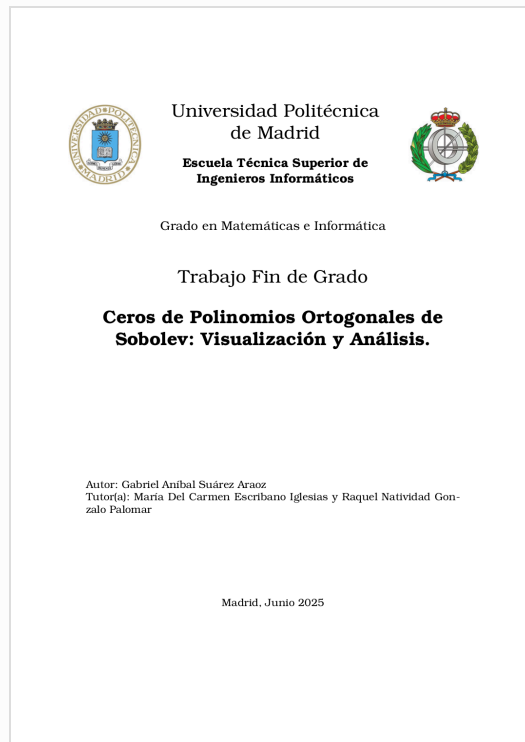


Digital Receipt


This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author: GABRIEL SUAREZ ARAOZ
Assignment title: Turnitin Memoria Final
Submission title: tfg_etsiinf_GabrielSuarez.pdf
File name: 28461_GABRIEL_SUAREZ_ARAOZ_tfg_etsiinf_GabrielSuarez_83...
File size: 4.11M
Page count: 99
Word count: 17,429
Character count: 80,956
Submission date: 04-Jun-2025 02:55PM (UTC+0200)
Submission ID: 2692004468



Este documento esta firmado por

	Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
	Fecha/Hora	Wed Jun 04 21:35:22 CEST 2025
	Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
	Numero de Serie	561
	Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)