



Universidad Politécnica
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos**



Grado en Matemáticas e informática

Trabajo Fin de Grado

**Existencia de Soluciones para una
Ecuación de Navier-Stokes y su
Aplicación al Movimiento de
Espermatozoides**

Autor: Enrique Barroso Melón
Tutor: Paulo Seminario Huertas

Madrid, 4 de junio de 2025

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas e informática

Título: Existencia de Soluciones para una Ecuación de Navier-Stokes y su Aplicación al Movimiento de Espermatozoides

4 de junio de 2025

Autor: Enrique Barroso Melón

Tutor: Paulo Seminario Huertas

MATEMÁTICA APLICADA A LAS TECNOLOGÍAS DE LA IN-
FORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos

Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

El presente trabajo se centra en el desarrollo de dos bloques principales: en primer lugar, se aborda la fase de modelización, en la que se adaptan las ecuaciones de Navier-Stokes para describir el comportamiento de los espermatozoides en entornos biológicos, incorporando tanto aspectos físicos como biológicos del medio. En segundo lugar, se estudia la existencia de soluciones para el sistema estacionario mediante una formulación débil y la aplicación del método de Faedo-Galerkin, con el objetivo de garantizar una base matemática sólida. La motivación principal del trabajo surge de la necesidad de describir con rigor el comportamiento dinámico de los espermatozoides, utilizando herramientas analíticas que permitan establecer un marco teórico extrapolable a escenarios reales, como la propia fecundación del óvulo.

En primer lugar, se establece un marco teórico que recoge los fundamentos matemáticos, físicos y físico-biológicos necesarios para el estudio del tema. Este marco se estructura de acuerdo con la división general del trabajo: por un lado, los fundamentos físicos y físico-biológicos se orientan a la fase de modelización, proporcionando las bases para adaptar las ecuaciones de Navier-Stokes al contexto del movimiento espermático en fluidos biológicos implicados en la fecundación del óvulo, como el moco cervical o el líquido uterino; por otro lado, la parte más matemática del marco teórico se centra en el análisis funcional y los conceptos clave para el estudio de la existencia de soluciones del sistema estacionario. Esta estructura permite construir una formulación precisa del problema y justificar rigurosamente tanto su planteamiento como su análisis.

Sobre esta base, se procede a la obtención del sistema de ecuaciones adaptado, así como de las condiciones de contorno apropiadas, dando lugar a un modelo cerrado que describe el entorno en el que se desplazan los espermatozoides.

En la segunda parte del trabajo, se aborda el análisis matemático del sistema desde el punto de vista de la existencia de soluciones. Para ello, se introduce el concepto de solución débil, formulado en el marco de los espacios funcionales adecuados. Con esta formulación previa, se implementa el método de Faedo-Galerkin, una técnica de aproximación basada en proyecciones sobre subespacios finito-dimensionales. A través de estimaciones a priori y herramientas de compacidad, se demuestra que la sucesión de soluciones aproximadas converge hacia una solución débil del sistema original, lo que garantiza la consistencia y validez del modelo.

Abstract

This work is structured around two main components. First, it addresses the modeling phase, in which the Navier–Stokes equations are adapted to describe the behavior of sperm cells in biological environments, incorporating both physical and physico-biological aspects of the medium. Second, it focuses on the existence of solutions for the stationary system through a weak formulation and the application of the Faedo–Galerkin method, with the aim of providing a solid mathematical foundation. The main motivation of the study lies in the need to rigorously describe the dynamic behavior of spermatozoa using analytical tools that allow for the establishment of a theoretical framework applicable to real-life scenarios, such as the process of ovum fertilization.

The theoretical framework is established at the beginning and encompasses the mathematical, physical, and physico-biological foundations required for the subject. This framework is organized according to the general structure of the work: on the one hand, the physical and physico-biological foundations support the modeling phase, providing the basis for adapting the Navier–Stokes equations to the context of sperm movement in biological fluids involved in fertilization, such as cervical mucus or uterine fluid; on the other hand, the mathematical component focuses on functional analysis and key concepts for studying the existence of solutions to the stationary system. This structure allows for a precise formulation of the problem and a rigorous justification of both the modeling and analytical approaches.

Based on this foundation, the adapted system of equations is derived along with appropriate boundary conditions, resulting in a closed model that describes the environment through which spermatozoa move.

In the second part of the work, the mathematical analysis of the system is carried out from the perspective of the existence of solutions. For this purpose, the concept of weak solution is introduced within the framework of suitable functional spaces. Building on this formulation, the Faedo–Galerkin method is implemented—an approximation technique based on projections onto finite-dimensional subspaces. Through a priori estimates and compactness tools, it is shown that the sequence of approximate solutions converges to a weak solution of the original system, ensuring the consistency and validity of the model.

Tabla de contenidos

1. Introducción	1
2. Desarrollo	3
2.1. Marco teórico	3
2.1.1. Base matemática	3
2.1.2. Base física	32
2.1.3. Base fisico-biológica	44
2.2. Planteamiento de la modelización	47
2.2.1. Obtencion del modelaje	47
2.2.2. Condiciones de Borde	54
2.3. Resultados modelización	54
2.3.1. Modelo Final	54
2.4. Existencia de soluciones	55
2.4.1. Sistema estacionario de Navier–Stokes y formulación débil .	56
2.4.2. Marco funcional para el método de Galerkin	56
2.4.3. Formulación débil	58
2.4.4. Definición operador A	60
2.4.5. Primera etapa: sistema aproximado	61
2.4.6. Lema del Ángulo Agudo	63
2.4.7. Estimación a priori detallada del sistema aproximado	68
2.4.8. Convergencias y paso al límite	69
3. Análisis de impacto	71
4. Conclusiones y trabajo futuro	73
Bibliografía	75
Anexos	77

Capítulo 1

Introducción

El estudio del movimiento de espermatozoides en fluidos representa un tema de gran interés en diversas áreas de la ciencia como la biología, la matemática aplicada y la dinámica de fluidos. En particular, comprender cómo los espermatozoides se desplazan en fluidos no newtonianos es esencial para el análisis de procesos biológicos fundamentales como la fecundación del óvulo, así como para aplicaciones en fertilización asistida.

Este trabajo aborda el problema desde un enfoque matemático. Se comienza desarrollando una modelización matemática del movimiento de espermatozoides, basada en las ecuaciones de Navier-Stokes adaptadas para describir el comportamiento de fluidos no newtonianos en medios pseudoplásticos. La formulación del modelo es un aspecto central de nuestro estudio, ya que nos permite describir con precisión la interacción entre el fluido y el movimiento flagelar, incorporando las propiedades reológicas del medio. Una vez planteado el sistema de ecuaciones, se aborda el problema de la existencia de soluciones en el caso estacionario. Esta cuestión resulta fundamental, ya que garantiza la coherencia matemática del modelo y su aplicabilidad en el estudio de la dinámica de microorganismos en medios biológicos. Es importante destacar que las ecuaciones utilizadas para demostrar la existencia de soluciones no son las mismas que las ecuaciones que modelan el movimiento de los espermatozoides, sino que corresponden a un sistema diferente.

La reología es la rama de la física que estudia las propiedades de flujo junto a la deformación de los materiales y desempeña un papel crucial en este análisis ya que no solo se centra en la caracterización de los fluidos, sino también en la forma en que responden a fuerzas externas.

El comportamiento del fluido en el que se desplazan los espermatozoides juega un papel crucial en su dinámica de movimiento mientras que los fluidos newtonianos, como el agua o el aire, presentan una viscosidad constante independiente de las fuerzas aplicadas, los fluidos no newtonianos exhiben comportamientos reológicos complejos, donde la viscosidad puede variar en función de factores como la tasa de deformación, el tiempo de aplicación del esfuerzo, condiciones

Capítulo 1. Introducción

ambientales e incluso el ciclo menstrual.

En este estudio, se analiza el papel de los fluidos pseudoplásticos, caracterizados por una viscosidad que disminuye con el aumento de la deformación. Esta propiedad facilita el desplazamiento de los espermatozoides y afecta directamente la interacción entre el flagelo y el medio circundante. Además, en el contexto biológico, la reología del fluido no newtoniano que rodea a los espermatozoides no es estática, sino que varía en función del fase ovulatoria. Durante los periodos de mayor fertilidad, el fluido reduce su viscosidad y facilita el desplazamiento espermático.

Tras la formulación del modelo matemático, se aborda el problema de la existencia de soluciones en el caso estacionario. Para demostrar la existencia de soluciones en este contexto, se emplea un enfoque basado en teoría de la medida, análisis funcional y teoría de distribuciones. Además, las soluciones se manejan dentro de un espacio funcional adecuado, lo que permite garantizar la existencia de soluciones débiles al problema.

Aunque las ecuaciones del modelo original están formuladas para un fluido no newtoniano, las técnicas matemáticas utilizadas para la existencia de soluciones provienen del análisis de ecuaciones de Navier-Stokes en el contexto de fluidos newtonianos y su formulación en el caso estacionario.

Más allá del interés teórico, el estudio de la locomoción espermática en fluidos no newtonianos es fundamental para desentrañar los procesos que determinan la fecundación del óvulo. Desde el instante en que un espermatozoide inicia su viaje hasta el momento en que alcanza el óvulo, cada factor que influye en su movilidad puede marcar la diferencia entre la vida y la nada. Comprender estas dinámicas no solo nos acerca a los principios físicos y biológicos que rigen la reproducción, sino que también contribuye a avances en fertilidad asistida y medicina reproductiva, áreas en las que la ciencia y la vida convergen en su forma más esencial: el origen mismo de la existencia.

Capítulo 2

Desarrollo

2.1. Marco teórico

2.1.1. Base matemática

Fundamentos del Análisis Vectorial para Fluidos

Definición 2.1.1. Consideramos que el dominio del fluido, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es un conjunto abierto, acotado y suficientemente regular.

- **Abierto:** El dominio Ω no incluye su frontera, es decir, para cualquier punto $x \in \Omega$, existe una bola abierta $B(x, \epsilon)$ tal que $B(x, \epsilon) \subset \Omega$.
- **Acotado:** El conjunto Ω está contenido en una región finita del espacio \mathbb{R}^n , lo que significa que existe una constante $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in \Omega$.
- **Suficientemente regular:** La frontera $\partial\Omega$ es lo suficientemente suave, típicamente asumiendo que $\partial\Omega \in C^k$ para algún $k \geq 1$.

Observación 2.1.1. Exceso de notación

En este documento, al ser la velocidad un campo vectorial en dimensión $n = 2$ o $n = 3$, es decir,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

donde cada componente $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función definida en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la expresión del gradiente de \mathbf{u} se interpreta como la matriz Jacobiana

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Así, cuando aparezca $\nabla \mathbf{u}$, se refiere a esta matriz de derivadas parciales que depende del espacio de dimensión $n = 2$ o 3 .

Capítulo 2. Desarrollo

Definición 2.1.2. Las **condiciones de Dirichlet** son un tipo de condiciones de frontera que especifican el valor de una función en la frontera del dominio, donde la función $u(\mathbf{x})$ que estamos tratando de resolver está definida en la frontera $\partial\Omega$, y las condiciones se expresan como:

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \text{para } \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

donde:

- $u(\mathbf{x})$ es la función desconocida que se busca resolver en el dominio Ω .
- $g(\mathbf{x})$ es una función dada, definida en la frontera $\partial\Omega$, que describe el valor de $u(\mathbf{x})$ en los puntos de la frontera.

Definición 2.1.3. El **producto escalar** (producto interno) entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en un espacio euclidiano se define como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

donde:

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ son dos vectores en el espacio \mathbb{R}^n ,
- a_i y b_i son las componentes del vector \mathbf{a} y \mathbf{b} , respectivamente,
- θ es el ángulo entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} ,
- $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{b}|$ son las longitudes (módulos) de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , respectivamente.

Definición 2.1.4. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de conjuntos indexada por un conjunto A . El **producto cartesiano** de esta familia es el conjunto:

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \left\{ f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in A \right\}.$$

Si todos los conjuntos X_α coinciden con un mismo conjunto X , se denota por X^A .

Definición 2.1.5. El **divergente** mide la tasa neta de salida o flujo de un campo vectorial \mathbf{F} desde un punto en un espacio n -dimensional. Si \mathbf{F} es un campo vectorial dado por $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, su divergente se define como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

donde:

- $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ es el campo vectorial, con F_i como su componente en la i -ésima dirección,

- x_i representa la i -ésima coordenada del espacio.

si $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$, hay un sumidero; y si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, el flujo es conservativo en ese punto.

Definición 2.1.6. El **gradiente** es un operador vectorial que mide la tasa de cambio de una función escalar diferenciable $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en la dirección del máximo incremento. El gradiente de ϕ se define como:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \right),$$

donde:

- ϕ : es una función escalar diferenciable,
- x_i : representa la i -ésima coordenada en un espacio n -dimensional,
- $\nabla\phi$: es un vector que apunta en la dirección del mayor cambio de ϕ , con una magnitud igual a la tasa de cambio en esa dirección.

Definición 2.1.7. El **laplaciano** mide la divergencia del gradiente de un campo escalar o vectorial. Dado un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, el laplaciano de ϕ se define como:

$$\nabla^2\phi = \Delta\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2},$$

donde:

- ϕ : es una función escalar diferenciable, $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
- x_i : representa la i -ésima coordenada en un espacio n -dimensional.

Definición 2.1.8. La **derivada convectiva**, describe el cambio de una propiedad física de un fluido (como la velocidad, temperatura o densidad) medida desde el punto de vista de una partícula que se mueve con el flujo.

Sea $f(\mathbf{x}, t)$ una función escalar que representa una propiedad del fluido en un punto \mathbf{x} y tiempo t . La derivada convectiva de f está dada por:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \quad (2.1)$$

donde:

- $\frac{\partial f}{\partial t}$: representa el cambio local en el tiempo en un punto fijo del espacio,
- $\mathbf{u} \cdot \nabla f$: representa el cambio debido al movimiento espacial de la partícula de fluido (advección) y se trata del producto escalar 2.1.3 de \mathbf{u} y ∇f
- \mathbf{u} : es el campo de velocidad del fluido.

Capítulo 2. Desarrollo

Definición 2.1.9. El delta de Kronecker, denotado como δ_{ij} , es una función matemática que se utiliza en álgebra tensorial. Está definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Teorema 2.1.1. Teorema de la Divergencia. Sea \mathbf{F} un campo vectorial continuamente diferenciable definido en una región V del espacio tridimensional, y sea ∂V la superficie cerrada que delimita V , orientada según la normal exterior. Este teorema nos dice que:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA,$$

donde:

- $\nabla \cdot \mathbf{F}$ es la divergencia del campo \mathbf{F} 2.1.5,
- dV es un elemento de volumen en V ,
- ∂V es la frontera de V ,
- \mathbf{n} es el vector normal unitario a la superficie ∂V , orientado hacia afuera,
- dA es un elemento diferencial de área sobre ∂V .

Lema 2.1.1. Primera identidad de Green. Sea $u, v \in H_0^1(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio abierto, acotado y con frontera suficientemente regular, y sea Δu el laplaciano (2.1.7) de u . Entonces, se verifica la siguiente identidad:

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Definición 2.1.10. El **flujo a través de una superficie** describe la cantidad de campo vectorial \mathbf{F} que atraviesa una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Matemáticamente se define como:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA,$$

donde:

- \mathbf{F} : es un campo vectorial continuamente diferenciable,
- \mathbf{n} : es el vector normal unitario a la superficie S ,
- dA : es el elemento diferencial de área sobre S .

Este flujo mide cuánta cantidad de \mathbf{F} entra o sale a través de la superficie, con el signo dependiendo de la orientación de \mathbf{n} .

Definición 2.1.11. Un espacio topológico X se dice **separable** si existe un subconjunto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que es denso en X ; es decir,

$$\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X.$$

De manera equivalente, para toda $x \in X$ y toda vecindad abierta $U \ni x$ existe algún x_n en U .

Teoría de la medida

Definición 2.1.12. Una σ -álgebra \mathcal{A} sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ que satisface:

- $X \in \mathcal{A}$.
- Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$ (cerrada por complemento).
- Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (cerrada por uniones numerables).

Definición 2.1.13. Una σ -álgebra completa es una σ -álgebra \mathcal{A} tal que:

- \mathcal{A} es una σ -álgebra en el sentido usual (ver 2.1.12).
- Si $N \in \mathcal{A}$ y $\mu(N) = 0$, entonces todo subconjunto $A \subset N$ también pertenece a \mathcal{A} .

Definición 2.1.14. Un **espacio medible** es un par (X, \mathcal{A}) donde:

- X es un conjunto no vacío.
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra sobre X .

Definición 2.1.15. Sea X un conjunto. Una **medida exterior** es una función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ que cumple:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. **Monotonía:** Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
3. **Subaditividad numerable:** para toda familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Definición 2.1.16. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Llamamos **conjuntos borelianos** a los elementos de la σ -álgebra de Borel de X , que se define como:

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}),$$

es decir, la menor σ -álgebra que contiene a todos los abiertos de X . Esta σ -álgebra se llama σ -álgebra de Borel, sirve como punto de partida para definir medidas como la de Lebesgue.

Capítulo 2. Desarrollo

Definición 2.1.17. La σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R}^n , denotada por \mathcal{L}^n , es la σ -álgebra completa 2.1.13 generada por los conjuntos de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la medida de Lebesgue λ^n .

Esto significa que:

$$\mathcal{L}^n := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), N \subseteq N_0 \text{ con } \lambda^n(N_0) = 0\}$$

Es decir, \mathcal{L}^n contiene todos los conjuntos borelianos y además todos los subconjuntos de conjuntos de medida nula.

Definición 2.1.18. Una función $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, donde \mathcal{B} es la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} , se dice **medible** si:

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Definición 2.1.19. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **Borel-medible** si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo conjunto Borel $B \subset \mathbb{R}$. Es decir, la preimagen de cualquier conjunto boreliano es medible.

Definición 2.1.20. Una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es **Lebesgue-medible** si es medible respecto de la σ -álgebra de Lebesgue \mathcal{L}^n definida en 2.1.17, es decir, si $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{L}^n$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1.21. Una **medida** sobre un espacio medible (X, \mathcal{A}) es una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. (Aditividad numerable) Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definición 2.1.22. Sea \mathcal{E} la familia de intervalos semiabiertos $[a, b) \subset \mathbb{R}$. La **premedida de Lebesgue** λ sobre \mathcal{E} se define por:

$$\lambda([a, b)) := b - a.$$

Teorema 2.1.2. Extensión de Carathéodory Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de un conjunto X y sea $\mu_0 : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ una premedida sobre \mathcal{E} , es decir, una función aditiva finitamente y no negativa tal que $\mu_0(\emptyset) = 0$.

Entonces, existe una medida exterior μ^* sobre $\mathcal{P}(X)$ tal que:

- $\mu^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(E_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{E} \}$.
- El conjunto de subconjuntos $A \subset X$ que verifican el criterio de Carathéodory:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A), \quad \forall E \subset X,$$

forma una σ -álgebra \mathcal{A} , y la restricción $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$ es una medida sobre \mathcal{A} que extiende a μ_0 .

Definición 2.1.23. A partir de la premedida de Lebesgue definida sobre intervalos semiabiertos, y aplicando el Teorema de Carathéodory (2.1.2), se construye la **medida de Lebesgue** λ^n sobre \mathbb{R}^n , a través de los siguientes pasos:

1. Se define primero la **medida exterior de Lebesgue** λ_*^n sobre todos los subconjuntos $E \subset \mathbb{R}^n$ como:

$$\lambda_*^n(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(I_k) \mid E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ rectángulos abiertos} \right\},$$

donde $\text{vol}(I_k)$ es el volumen del rectángulo I_k .

2. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice **medible en el sentido de Carathéodory** si para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$\lambda_*^n(E) = \lambda_*^n(E \cap A) + \lambda_*^n(E \setminus A).$$

La colección de todos estos conjuntos forma una σ -álgebra, y la restricción de λ_*^n a dicha σ -álgebra define la medida de Lebesgue λ^n .

Definición 2.1.24. Dada una función monótona creciente $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se define la **medida de Stieltjes** μ_F mediante:

$$\mu_F((a, b]) := F(b) - F(a).$$

Esta medida se extiende a la σ -álgebra de Borel, y generaliza la medida de Lebesgue.

Definición 2.1.25. Una **familia elemental** en \mathbb{R}^n es una colección finita de productos de intervalos semiabiertos de la forma:

$$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i), \quad a_i < b_i.$$

Las uniones finitas disjuntas de conjuntos de este tipo permiten definir funciones escalonadas y aproximaciones simples.

Definición 2.1.26. Una **métrica** en un conjunto X es una función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisface, para todo $x, y, z \in X$, las siguientes propiedades:

1. **No negatividad:** $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
2. **Simetría:** $d(x, y) = d(y, x)$.

Capítulo 2. Desarrollo

3. **Desigualdad triangular:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definición 2.1.27. Un **espacio métrico** es un par (X, d) , donde X es un conjunto y d es una métrica en X . Es decir, d asigna una “distancia” a cada par de puntos de X y cumple las propiedades de la Definición 2.1.26:

$$(X, d).$$

Definición 2.1.28. Un **espacio métrico completo** es un espacio métrico (X, d) tal que toda sucesión de Cauchy en X converge en X .

En otras palabras, si $\{x_n\}$ es una sucesión en X que cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \text{para todo } m, n \geq N,$$

entonces existe $x \in X$ con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Relación con la norma: Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces puede definirse una métrica d en X mediante

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Esta métrica hereda todas las propiedades derivadas de la norma, como la no negatividad y la desigualdad triangular.

Definición 2.1.29. Un **espacio de medida** es un triplete (X, \mathcal{A}, μ) donde:

- (X, \mathcal{A}) es un espacio medible.
- $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida, es decir, una función que satisface:
 - $\mu(\emptyset) = 0$,
 - (aditividad numerable) si $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ es una familia disjunta de conjuntos medibles, entonces:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definición 2.1.30. Dado un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) , su **completación** es un espacio de medida $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ tal que:

- $\bar{\mathcal{A}}$ contiene todos los subconjuntos de conjuntos de medida cero.
- $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$, donde $A \in \mathcal{A}$ y $N \subseteq N_0 \in \mathcal{A}$ con $\mu(N_0) = 0$.

Esta extensión preserva la σ -aditividad y permite trabajar con conjuntos no medibles en el sentido estricto, pero que son “casi”medibles.

Proposición 2.1.1. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y sea \mathcal{T}_f la topología inicial inducida por f . Entonces, f es continua con respecto a \mathcal{T}_f , y la σ -álgebra generada por los abiertos de \mathcal{T}_f coincide con la σ -álgebra generada por f .

Definición 2.1.31. Dado un conjunto $A \subseteq X$, la **función característica** $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ se define como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Esta función es medible si y solo si $A \in \mathcal{A}$.

Definición 2.1.32. Una **función escalonada** o **simple** es una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que toma un número finito de valores, y puede escribirse como:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i},$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y A_i son conjuntos medibles disjuntos.

Definición 2.1.33. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida. Sean $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles. Decimos que:

- $f_n \rightarrow f$ **casi en todo punto** si existe un conjunto $N \subset X$ con $\mu(N) = 0$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in X \setminus N$.
- $f_n \rightarrow f$ **en medida** si para todo $\varepsilon > 0$:

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Definición 2.1.34. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida. Diremos que una propiedad $P(x)$ se cumple **casi siempre** (o **casi en todo punto**) si el conjunto de puntos donde $P(x)$ no se cumple tiene medida cero, es decir:

$$\mu(\{x \in X : \neg P(x)\}) = 0.$$

Definición 2.1.35. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida. Una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se dice **integrable en el sentido de Lebesgue** si cumple:

- f es **medible**, es decir, para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A},$$

- y la integral del valor absoluto de f es finita:

$$\int_X |f| d\mu < +\infty.$$

Capítulo 2. Desarrollo

Definición 2.1.36. Para una función integrable $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se define la **integral de Lebesgue** como

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu,$$

donde

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\},$$

son las partes positiva y negativa de f , ambas medibles y no negativas.

Esta definición es válida siempre que al menos una de las integrales de f^+ o f^- sea finita. Cuando ambas son finitas, f se considera integrable y la integral está bien definida.

Dado que la medida de Lebesgue (2.1.23) está construida sobre la σ -álgebra generada por los conjuntos de Borel (2.1.16) y completada para incluir todos los subconjuntos de conjuntos de medida nula (2.1.30), se obtiene una teoría de integración más amplia y robusta que generaliza la integral clásica de Riemann.

Análisis Funcional

Definición 2.1.37. Una **notación de multiíndice** se refiere a un arreglo

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0.$$

Para cada multiíndice definimos:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

Dado un punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

La derivada parcial de orden α de una función $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ se denota

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definición 2.1.38. Sea $k \in \mathbb{N}_0$. Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a la clase $C^k(\Omega)$ si existe y es continua toda derivada parcial $\partial^\alpha f$ para todo multiíndice α con $|\alpha| \leq k$.

Definición 2.1.39. La clase $C^\infty(\Omega)$ es la intersección de todas las clases $C^k(\Omega)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Es decir,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega),$$

de modo que $f \in C^\infty(\Omega)$ si todas sus derivadas de cualquier orden existen y son continuas en Ω .

Definición 2.1.40. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. El **soporte** de f , denotado $\text{supp } f$, es el cierre del conjunto donde f no es nula:

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Definición 2.1.41. Se define $C_0^\infty(\Omega)$ como el espacio de funciones de clase C^∞ con soporte compacto contenido en Ω :

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } f \Subset \Omega\}.$$

Aquí $\text{supp } f \Subset \Omega$ indica que $\text{supp } f$ es un subconjunto compacto de Ω .

Definición 2.1.42. Un **espacio vectorial normado** es un espacio vectorial X sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} junto con una función llamada **norma** $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada elemento $x \in X$ un número real $\|x\|$ y satisface las siguientes propiedades para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ o \mathbb{C} :

1. **Positividad:** $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. **Homogeneidad:** $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
3. **Desigualdad triangular:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 2.1.43. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge en X .

Es decir, si (x_n) es una sucesión en X tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que:

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N,$$

entonces existe un $x \in X$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Definición 2.1.44. Sean X y Y espacios normados. Una aplicación lineal $T : X \rightarrow Y$ se dice un **isomorfismo isométrico** (o que X e Y son **isométricamente isomorfos**) si:

1. T es lineal y biyectiva,
2. $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$.

En este caso, los espacios X e Y no solo son algebraicamente equivalentes, sino que tienen estructuras métricas idénticas.

Capítulo 2. Desarrollo

Teorema 2.1.3. Teorema de Hahn–Banach Sea X un espacio vectorial real normado, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal y $f_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal definida sobre un subespacio $M \subset X$ tal que $f_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$.

Entonces existe una extensión $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ de f_0 (es decir, $f|_M = f_0$) tal que:

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Además, si $p(x) = \|x\|$, entonces $\|f\| = \|f_0\|$.

Definición 2.1.45. Dado un espacio vectorial normado X , su **espacio dual** X^* es el conjunto de todas las aplicaciones lineales acotadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Es decir:

$$X^* = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid f \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Cada $f \in X^*$ define una norma dual en X :

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

El espacio dual es un espacio de Banach, incluso si X no lo es.

Definición 2.1.46. Sea X un espacio vectorial topológico sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} . Su **espacio dual topológico** X' es

$$X' = \{\ell : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid \ell \text{ es lineal y continua}\}.$$

y, en particular, si X es un espacio normado, entonces la continuidad equivale a la acotación

$$\|\ell\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\ell(x)| < +\infty.$$

Definición 2.1.47. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ su espacio de funciones test (Definición 2.1.59). El **espacio de distribuciones** $\mathcal{D}'(\Omega)$ se define como el espacio dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ es lineal y continuo (en la topología de } C_0^\infty)\}.$$

Observación 2.1.2. La continuidad de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ equivale a que, si $\varphi_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ (es decir, existe $K \Subset \Omega$ que contiene φ_j y $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \rightarrow 0$ para todo multiíndice α), entonces

$$T(\varphi_j) \rightarrow 0.$$

De este modo, $\mathcal{D}'(\Omega)$ recoge todas las formas lineales que “miden” funciones test de manera continua respecto a la convergencia uniforme de todas sus derivadas sobre soportes compactos.

Teorema 2.1.4. Dualidad y reversión de inclusiones Sea X y Y espacios vectoriales normados tales que

$$X \hookrightarrow Y$$

es una inclusión continua e inyectiva. Entonces la aplicación dual

$$i^* : Y^* \longrightarrow X^*, \quad i^*(\ell) = \ell \circ i,$$

es una inclusión continua e inyectiva de los espacios duales, es decir,

$$Y^* \hookrightarrow X^*.$$

Definición 2.1.48. Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ que es completo.

Definición 2.1.49. Un **espacio de Hilbert** es un espacio de Banach donde la norma proviene de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir, un espacio vectorial completo en el que existe un producto escalar que satisface:

1. **Linealidad:** $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$.
2. **Simetría:** $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
3. **Positividad:** $\langle u, u \rangle \geq 0$ con igualdad si y solo si $u = 0$.

Teorema 2.1.5. Sea H un espacio de Hilbert separable. Entonces existe una **base ortonormal** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ tal que:

$$\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = H,$$

$$\text{y } \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Esta base permite expresar cualquier $u \in H$ como serie convergente:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n,$$

con convergencia en la norma de H .

Construcción mediante el proceso de Gram-Schmidt Dado un subconjunto denso $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el espacio de Hilbert H , el *proceso de Gram-Schmidt* genera recíprocamente una secuencia ortonormal $\{e_n\}$ mediante:

$$\tilde{e}_1 = v_1, \quad e_1 = \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|},$$

y para $k \geq 2$:

$$\tilde{e}_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, e_j \rangle e_j, \quad e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|},$$

excluyendo en cada paso aquellos v_k que resulten linealmente dependientes de los anteriores. El conjunto $\{e_n\}$ así obtenido es ortonormal y su clausura lineal es todo H .

Capítulo 2. Desarrollo

Definición 2.1.50. Sean (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$. El **espacio** $L^p(X)$ se define como el conjunto de clases de funciones medibles $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) tales que:

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

Es decir:

$$L^p(X) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \mid \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Además, a cada función $f \in L^p(X)$ se le asocia la **norma**:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Para el caso $p = \infty$, definimos:

$$L^\infty(X) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \mid \exists M < \infty \text{ tal que } |f(x)| \leq M \text{ c.t.p.} \},$$

con la norma:

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

Los espacios $L^p(X)$ **se conocen como espacios de Lebesgue**, ya que están definidos mediante la integral de Lebesgue (2.1.36) y permiten trabajar con funciones más generales que en los espacios de tipo Riemann.

Definición 2.1.51. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si y solo si para todo compacto $K \Subset \Omega$,

$$\int_K |f(x)| dx < +\infty.$$

En otras palabras, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si es integrable sobre cualquier subconjunto compacto de Ω .

Definición 2.1.52. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega),$$

entonces f define una distribución $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mediante

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposición 2.1.2. Inmersiones en espacios L^p Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con medida de Lebesgue finita, $|\Omega| < \infty$. Entonces, para $1 \leq q \leq p \leq \infty$ se tiene la inclusión continua

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

En particular, cuando $p < q$ invertimos la flecha:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Observación 2.1.3. De la Proposición 2.1.2 se obtiene la cadena de inclusiones continuas, para $1 \leq r \leq s \leq t \leq \infty$:

$$L^t(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Teorema 2.1.6. Riesz–Fréchet–Riesz para L^p Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un espacio de medida finita y $1 \leq p < \infty$. Defínase q por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces el espacio dual $(L^p(\Omega))^*$ se identifica isométricamente con $L^q(\Omega)$ mediante la correspondencia

$$T_g : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_g(f) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

Teorema 2.1.7. Desigualdad de Hölder Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con medida de Lebesgue finita, y sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Para toda pareja de funciones $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ se cumple

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Proposición 2.1.3. Cadena de inmersiones Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Entonces se verifican las inclusiones continuas

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\text{loc}}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Capítulo 2. Desarrollo

Observación 2.1.4. La Norma Inducida y la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sea H un espacio vectorial con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La función definida por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

es una norma en H . Para verificar esto, basta demostrar que se satisface la desigualdad triangular:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

Esto se sigue de la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**, que establece que:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Usando esta desigualdad y la expansión de $\|u + v\|^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada en ambos lados, obtenemos la desigualdad triangular:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Esto demuestra que la función definida es efectivamente una norma en H .

Definición 2.1.53. La afirmación de que una **Sucesión de funciones** f_n definidas en un conjunto X converge a una función f cuando $n \rightarrow \infty$ puede interpretarse de diferentes maneras, dependiendo del tipo de convergencia considerada.

1. **Convergencia puntual:** Decimos que f_n **converge puntualmente** a f en X si, para cada $x \in X$, la sucesión de valores $f_n(x)$ se aproxima a $f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Este tipo de convergencia no implica necesariamente que la convergencia sea uniforme en todo el dominio.

2. **Convergencia uniforme:** Decimos que f_n **converge uniformemente** a f si la convergencia no solo ocurre en cada punto, sino que ocurre de manera uniforme en todo X . Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Esto significa que la diferencia entre $f_n(x)$ y $f(x)$ se hace arbitrariamente pequeña para todos los puntos x de X , de manera controlada. La convergencia uniforme es más fuerte que la convergencia puntual.

3. **Convergencia casi en todas partes (c.a.e.):** Si X es un espacio de medida, podemos hablar de convergencia casi en todas partes, lo que significa que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para casi todos los puntos x de X , excepto en un conjunto de medida cero. Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{para casi todo } x \in X.$$

Esta noción se usa mucho en teoría de la medida y en análisis funcional.

Definición 2.1.54. Sea X un espacio normado. Decimos que una sucesión $(x_n) \subset X$ converge **fuertemente** (o en norma) a $x \in X$ si:

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Definición 2.1.55. Sea X un espacio vectorial normado con norma $\|\cdot\|$. La **topología inducida por la norma** es la topología generada por las bolas abiertas:

$$B_r(x) := \{y \in X : \|y - x\| < r\}, \quad \text{con } x \in X, r > 0.$$

Esta topología también se conoce como **topología fuerte**.

Definición 2.1.56. Sea X un conjunto. Un **operador de cerradura** en X es una aplicación

$$\text{cl} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X),$$

que a cada subconjunto $A \subset X$ le asocia su cerradura $\text{cl}(A)$, y satisface para todo $A, B \subset X$:

1. $A \subset \text{cl}(A)$. (*Extensividad*)
2. $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$. (*Idempotencia*)
3. $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$. (*Preservación de uniones finitas*)
4. $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$. (*Cerradura del vacío*)

Definición 2.1.57. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. El **punto de adherencia** de A es todo $x \in X$ tal que para toda vecindad abierta U de x , $U \cap A \neq \emptyset$. La

Capítulo 2. Desarrollo

cerradura de A , denotada \bar{A} , es el conjunto de todos los puntos de adherencia de A :

$$\bar{A} = \{x \in X : \forall \text{ vecindad abierta } U \ni x, U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Equivalentemente, \bar{A} es el menor conjunto cerrado que contiene a A .

Definición 2.1.58. Dado un operador de cerradura cl en X , la familia

$$\tau = \{U \subset X : \text{cl}(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una **topología** en X . Sus miembros son los conjuntos abiertos de X .

Equivalentemente, un conjunto $U \subset X$ es abierto si y solo si su complemento es cerrado, es decir, si

$$\text{cl}(X \setminus U) = X \setminus U.$$

Observación 2.1.5. En la topología τ definida por cl , una sucesión $(x_n) \subset X$ converge a $x \in X$ si y solo si

$$\forall \text{ vecindad } U \in \tau \text{ de } x, \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in U \forall n \geq N.$$

Equivalentemente, usando el operador de cerradura,

$$x_n \rightarrow x \iff \forall N \in \mathbb{N}, x \in \text{cl}(\{x_n : n \geq N\}).$$

Este hecho conecta directamente la noción de punto de adherencia (Definición 2.1.57) con la creación de topología τ .

Observación 2.1.6. La topología en $C_0^\infty(\Omega)$ definida a partir del operador de cerradura y la convergencia secuencial (Observación anterior) se traduce concretamente en:

Una sucesión $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge a $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si y solo si existe un compacto $K \Subset \Omega$ tal que

$$\varphi_j \subset K \quad \text{y} \quad \varphi \subset K \quad \forall j,$$

y además, para todo multiíndice α ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| = 0.$$

Así, la noción de punto de adherencia (Definición 2.1.57) y de convergencia secuencial en la topología dada coincide con la familiar convergencia “con soporte común compacto + convergencia uniforme de todas las derivadas” propia de $C_0^\infty(\Omega)$.

Definición 2.1.59. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. El **espacio de funciones de prueba** o **espacio de funciones test** en Ω se define como

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi \Subset \Omega\},$$

esto es, las funciones infinitamente diferenciables que tienen soporte compacto en Ω .

Observación 2.1.7. El espacio $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ hereda la topología de convergencia secuencial descrita en la Observación anterior: una sucesión $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si existe un compacto $K \Subset \Omega$ que contiene todos sus soportes y

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Proposición 2.1.4. Cadena de inclusiones ampliada Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Entonces se verifican las inclusiones continuas

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\text{loc}}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Lema 2.1.2. Lema de Rellich-Kondrachov Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto, limitado y con frontera de clase C^1 . Entonces la inclusión:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

es compacta. Es decir, toda sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ posee una subsecuencia que converge fuertemente en $L^2(\Omega)$.

Además, por la **desigualdad de Poincaré**, existe constante $C_P > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

de donde se obtiene la inclusión continua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Observación 2.1.8. Diferencia Rellich-Kondrachov y Poncairé Una inclusión $T : X \rightarrow Y$ entre espacios normados es continua si existe $C > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

lo que equivale a enviar bolas acotadas en X a conjuntos acotados en Y .

En cambio, T es compacta si lleva cualquier sucesión acotada $\{x_n\} \subset X$ a una sucesión $\{T(x_n)\} \subset Y$ que tiene necesariamente una subsecuencia convergente en Y .

Definición 2.1.60. Decimos que un subconjunto $A \subset X$ tiene **interior no vacío** si existe una bola $B_r(x) \subset A$. Un conjunto es **compacto** si toda cubierta abierta de A admite una subcubierta finita.

En espacios de dimensión infinita, ningún subconjunto con interior no vacío es compacto en la topología de la norma.

Observación 2.1.9. Para superar la falta de compacidad en espacios de dimensión infinita, se introducen topologías más débiles, es decir, con menos conjuntos abiertos y más conjuntos compactos.

Capítulo 2. Desarrollo

Lema 2.1.3. Sea X un espacio vectorial normado sobre \mathbb{K} , y sea $M \subset X$ un subespacio vectorial cerrado y propio. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un vector $u \in X$ tal que:

$$\|u\| = 1 \quad \text{y} \quad \text{dist}(u, M) > 1 - \varepsilon.$$

Teorema 2.1.8. Sea X un espacio vectorial normado sobre \mathbb{K} . Si la bola unidad cerrada

$$B_1(0) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

es compacta en la topología de la norma, entonces X es de **dimensión finita**.

Definición 2.1.61. Sea X un conjunto, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, y sea $\{f_i : X \rightarrow \mathbb{K}\}_{i \in I}$ una familia de funciones.

La **topología inducida por la familia** $\{f_i\}_{i \in I}$ es la topología más débil en X que hace a todas las funciones f_i continuas.

Esta topología es generada por los conjuntos del tipo:

$$f_i^{-1}(U), \quad \text{donde } U \subset \mathbb{K} \text{ es abierto y } i \in I.$$

Definición 2.1.62. Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos. Llamamos **subbase** a \mathcal{E} si la topología generada por \mathcal{E} , denotada por $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, es la colección de todos los conjuntos que se pueden escribir como:

- Uniones arbitrarias de
- Intersecciones finitas de elementos de \mathcal{E} .

En el caso de la topología inducida por funciones $\{f_i\}_{i \in I}$, la colección

$$\mathcal{E} := \{f_i^{-1}(U) : U \subset \mathbb{K} \text{ abierto, } i \in I\}$$

forma una subbase para la topología inducida.

Proposición 2.1.5. Sea X un conjunto con la topología inducida por una familia $\{f_i : X \rightarrow \mathbb{K}\}_{i \in I}$. Una sucesión $(x_n) \subset X$ converge a $x \in X$ si, y solo si,

$$f_i(x_n) \rightarrow f_i(x) \quad \text{para todo } i \in I.$$

Es decir, la convergencia en la topología inducida equivale a la **convergencia puntual** (2.1.53) de todas las imágenes a través de las funciones de la familia.

Proposición 2.1.6. Sea (X, \mathcal{T}) un conjunto con la topología inducida por una familia $\{f_i : X \rightarrow \mathbb{K}\}_{i \in I}$, y sea Z un espacio topológico. Entonces, una función $\phi : Z \rightarrow X$ es continua si, y solo si, todas las composiciones $f_i \circ \phi : Z \rightarrow \mathbb{K}$ son continuas.

Esto caracteriza completamente la continuidad hacia espacios con topología inducida por funciones.

Definición 2.1.63. Supongamos que cada X_α está dotado de una topología \mathcal{T}_α . La **topología producto** en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es la topología más débil (menos fina) que hace **continuas todas las proyecciones**:

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta, \quad \pi_\beta(f) = f(\beta).$$

Esta topología tiene como subbase la colección de conjuntos:

$$\mathcal{E} := \{\pi_\beta^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_\beta, \beta \in A\}.$$

La topología generada por \mathcal{E} se llama **topología producto**, y se denota por $\prod_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$.

Teorema 2.1.9. Teorema de Tychonoff Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos compactos. Entonces, el producto cartesiano $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, dotado de la topología producto, es **compacto**.

Este resultado es válido incluso cuando el conjunto índice A es infinito.

Teorema 2.1.10. Teorema de Banach–Alaoglu Sea X un espacio de Banach. Entonces, la bola cerrada unidad del dual X^* , es decir,

$$B := \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\},$$

es compacta en la topología débil* $\sigma(X^*, X)$.

Corolario 2.1.1. El **Teorema de Riesz** (2.1.8) muestra que en espacios normados de dimensión infinita, la bola unidad cerrada no puede ser compacta en la topología de la norma. En cambio, el **Teorema de Tychonoff** (2.1.9) nos asegura que ciertos productos de compactos siguen siendo compactos, incluso en dimensión infinita.

Esta tensión entre ambos teoremas motiva la introducción de **topologías más débiles**, como la **topología débil 2.1.64 y débil-* 2.1.68**, bajo las cuales bolas cerradas sí pueden ser compactas (por ejemplo, en la topología débil-* gracias al Teorema de Banach–Alaoglu 2.1.10).

Así, Tychonoff inspira directamente el desarrollo de estructuras funcionales que permiten trabajar con compacidad en contextos infinitamente dimensionales, en contraste con las limitaciones impuestas por el Teorema de Riesz.

Capítulo 2. Desarrollo

Definición 2.1.64. Sea X un espacio vectorial normado real y sea X^* su dual topológico, es decir, el conjunto de todos los funcionales lineales continuos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

La **topología débil** en X , denotada por $\sigma(X, X^*)$, es la topología más débil que hace continuas todas las aplicaciones:

$$x \mapsto f(x), \quad \text{para cada } f \in X^*.$$

Es decir, es la topología inducida por la familia $\{f\}_{f \in X^*}$.

Definición 2.1.65. Una sucesión $(x_n) \subset X$ converge **débilmente** a $x \in X$, lo que se escribe como $x_n \rightharpoonup x$, si:

$$f(x_n) \rightarrow f(x), \quad \text{para todo } f \in X^*.$$

Proposición 2.1.7. Para cualquier espacio vectorial normado X , se cumple que:

$$x_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup x.$$

Es decir, la convergencia fuerte implica convergencia débil. Sin embargo, la recíproca no es verdadera en general.

Corolario 2.1.2. Si X es de **dimensión finita**, entonces la **topología débil coincide con la topología de la norma**.

En particular, una sucesión converge débilmente si y solo si converge en norma (2.1.54).

Proposición 2.1.8. Sea $C \subset X$ un conjunto **convexo**. Entonces:

C es cerrado en la topología fuerte $\Leftrightarrow C$ es cerrado en la topología débil.

Definición 2.1.66. Sea X un espacio vectorial normado real y X^* su dual, es decir, el conjunto de todos los funcionales lineales continuos $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

El **bidual** de X , denotado por X^{**} , es el dual de X^* , es decir:

$$X^{**} := (X^*)^* = \{\Phi : X^* \rightarrow \mathbb{R} \mid \Phi \text{ lineal y continua}\}.$$

Definición 2.1.67. Existe una aplicación canónica $J : X \rightarrow X^{**}$ definida por:

$$J(x)(f) := f(x), \quad \text{para todo } f \in X^*.$$

Esta aplicación es lineal, isométrica e inyectiva. Es decir, X puede identificarse con un subespacio de su bidual X^{**} .

Definición 2.1.68. La **topología débil-*** (también llamada **topología débil-estrella**) en X^* , denotada por $\sigma(X^*, X)$, es la topología más débil que hace continuas todas las aplicaciones de evaluación:

$$f \mapsto f(x), \quad \text{para cada } x \in X.$$

Esta topología está inducida por la familia $\{x : X^* \rightarrow \mathbb{R}\}_{x \in X}$, donde $x(f) = f(x)$.

Definición 2.1.69. Una sucesión $(f_n) \subset X^*$ converge a $f \in X^*$ en la topología débil-* si, y solo si:

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \text{para todo } x \in X.$$

Esta convergencia se denota por $f_n \rightharpoonup^* f$.

Definición 2.1.70. Cerradura de subespacios en espacios normados Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $Y \subset X$ un subespacio lineal. La cerradura de Y en X , denotada \overline{Y}^X , es el menor subespacio cerrado de X que contiene Y . Equivalentemente,

$$\overline{Y}^X = \left\{ x \in X : \exists \{y_n\} \subset Y, y_n \rightarrow x \text{ en } X \right\}.$$

Entonces \overline{Y}^X es un subespacio cerrado de X y cualquier subespacio cerrado que contenga Y también contiene \overline{Y}^X .

Observación 2.1.10. Sea $(X, \|\cdot\|) = (H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ y $Y = C_0^\infty(\Omega) \subset X$. La cerradura de Y en X es

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \exists \varphi_n \in C_0^\infty(\Omega), \varphi_n \rightarrow u \text{ en } H^1(\Omega) \right\}.$$

Este espacio coincide con el espacio de Sobolev de traza nula

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

De este modo, $C_0^\infty(\Omega)$ genera densa y continuamente $H_0^1(\Omega)$ bajo la norma de H^1 .

Definición 2.1.71. Sea X un espacio de Banach. Se dice que X es **reflexivo** si la aplicación canónica

$$J : X \rightarrow X^{**}, \quad J(x)(f) := f(x),$$

es sobreyectiva, es decir, si $J(X) = X^{**}$. En tal caso, todo funcional continuo sobre X^* proviene de un único elemento de X , y se tiene la identificación natural $X \cong X^{**}$.

Capítulo 2. Desarrollo

Observación 2.1.11. La reflexividad solo tiene sentido si X es un espacio de Banach (2.1.48), es decir, completo (2.1.43). Aunque la aplicación canónica J siempre es una isometría e inyectiva, no siempre es sobreyectiva. Por tanto, la completitud es una condición necesaria para que X sea reflexivo.

Antes del siguiente teorema, recordemos que según el **Teorema de Riesz** (ver Teorema 2.1.8), en espacios infinitamente dimensionales la bola unidad cerrada no puede ser compacta en la topología de la norma. Sin embargo, al dotar al espacio de la topología débil y asumir reflexividad, dicha bola unidad sí se vuelve compacta.

Teorema 2.1.11. Si X es un espacio reflexivo, entonces:

1. Toda sucesión acotada en X tiene una subsucesión débilmente convergente.
2. La bola unidad cerrada de X es débilmente compacta.
3. Se tiene la identificación canónica $X \cong X^{**}$ como espacios topológicos.

Teorema 2.1.12. Sea X un espacio de Banach. Si la bola unidad cerrada

$$B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

es compacta en el bidual X^{**} con la topología débil-*, es decir, en $\sigma(X^{**}, X^*)$, entonces X es reflexivo.

Proposición 2.1.9. Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $M \subset X$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces M , con la topología inducida por X , también es un espacio reflexivo.

Corolario 2.1.3. Sea X un espacio de Banach. Entonces:

$$X \text{ es reflexivo} \Leftrightarrow X^* \text{ es reflexivo.}$$

Corolario 2.1.4. Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si $K \subset X$ es un conjunto cerrado, acotado y convexo, entonces K es compacto en la topología débil, es decir, en $(X, \sigma(X, X^*))$.

Teorema 2.1.13. entonces el dominio del adjunto A^* es denso en Y , lo que permite definir:

$$A^* : D(A^*) \subset Y \rightarrow X.$$

Observación 2.1.12. En muchos problemas elípticos, los operadores diferenciales (como el laplaciano $-\Delta$) se definen inicialmente en dominios densos. Este teorema garantiza que, en espacios reflexivos como $H_0^1(\Omega)$, podemos extender su acción y

definir sus adjuntos de forma consistente, lo cual es clave en la formulación débil

Definición 2.1.72. Un espacio vectorial normado X es **uniformemente convexo** si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todos $x, y \in B_X$ (la bola unidad de X), si $\|x - y\| \geq \varepsilon$, entonces:

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Es decir, si dos vectores de norma menor o igual a 1 están suficientemente separados, su punto medio cae estrictamente dentro de la bola unidad.

Teorema 2.1.14. Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

Corolario 2.1.5. Todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo. En particular, todo espacio de Hilbert es reflexivo.

Observación 2.1.13. Los espacios uniformemente convexos no solo garantizan reflexividad (lo que implica compacidad débil de la bola unidad), sino que también tienen propiedades mejoradas de convergencia: en muchos casos, la convergencia débil implica convergencia fuerte. Esto los hace especialmente útiles en la aplicación del método de Galerkin, ya que permite demostrar que las aproximaciones no solo existen, sino que convergen fuertemente a la solución verdadera bajo condiciones razonables.

Proposición 2.1.10. Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo y $(x_n) \subset X$ una sucesión tal que:

- $x_n \rightharpoonup x$ débilmente,
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|$,

entonces se tiene:

$$x_n \rightarrow x \text{ fuertemente en } X.$$

Observación 2.1.14. Este resultado mejora la convergencia en el método de Galerkin. Cuando se trabaja en espacios uniformemente convexos como $H^1(\Omega)$, si la sucesión aproximante u_n converge débilmente y sus normas no sobrepasan la de u , entonces $u_n \rightarrow u$ fuertemente. Esto es muy útil para garantizar convergencia en norma sin recurrir a compactitud adicional.

Definición 2.1.73. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución. La **derivada distribucional** $\partial^\alpha T$ de orden multiíndice α se define por

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De este modo, $\partial^\alpha T$ es la única distribución que actúa sobre φ con el signo alternado y moviendo la derivada a la función test.

Capítulo 2. Desarrollo

Definición 2.1.74. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $k \in \mathbb{N}_0$. El **espacio de Sobolev**

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k \right\}$$

está formado por las funciones de $L^2(\Omega)$ cuyas derivadas débiles (en el sentido de distribuciones, Definición 2.1.73) hasta orden k también pertenecen a $L^2(\Omega)$.

Equipamos $H^k(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

y con el producto interno

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Con esta estructura, $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

En particular, para $k = 1$ se tiene

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\}, \quad \|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

Lema 2.1.4. Lema de Lax-Milgram Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, es decir:

1. **Continuidad:** $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$.
2. **Coercividad:** $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$ para algún $\alpha > 0$.

Si $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ es funcional lineal y continuo, entonces existe un único $u \in H$ tal que:

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H.$$

Este resultado garantiza la existencia y unicidad de la solución en la formulación débil.

Teorema 2.1.15. Principio de Lax Sea H un espacio de Hilbert y $\{H_n\}$ una sucesión de subespacios de dimensión finita de H . Sea u la solución del problema variacional:

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H.$$

Si u_n es la solución del problema aproximado en H_n :

$$a(u_n, v_n) = F(v_n), \quad \forall v_n \in H_n,$$

y si u_n converge en norma a u cuando $n \rightarrow \infty$, entonces u_n es una buena aproximación de u .

Teorema 2.1.16. Teorema de Lax-Milgram Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma inducida $\| \cdot \|$. Sea $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal que satisfice:

1. **Continuidad:** Existe una constante $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

2. **Coercividad** (o **elipticidad**): Existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

3. $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal y acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$|F(v)| \leq M \|v\|, \quad \forall v \in H.$$

Entonces, existe un único $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H.$$

Este resultado garantiza la **existencia y unicidad** de la solución en la formulación débil de ecuaciones en derivadas parciales.

Observación 2.1.15. El **Teorema de Lax-Milgram** y el **Principio de Lax** tienen objetivos distintos:

- El **Teorema de Lax-Milgram** garantiza que el problema variacional tiene una **única solución** en un espacio de Hilbert H . Se usa para demostrar la existencia y unicidad de soluciones de EDPs elípticas.
- El **Principio de Lax** justifica que una sucesión de aproximaciones u_n en subespacios finito-dimensionales $H_n \subset H$ es una **buena aproximación** de la solución exacta u .

En resumen, el **Teorema de Lax-Milgram** asegura la existencia de u , mientras que el **Principio de Lax** garantiza que una aproximación numérica u_n converge a u .

Definición 2.1.75. Sean X, Y, Z espacios vectoriales sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} . Una **forma trilineal** es una aplicación

$$b : X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{o } \mathbb{C}),$$

tal que para cada uno de sus argumentos, manteniendo fijos los otros dos, es lineal. Es decir, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) y $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, $z_1, z_2 \in Z$:

$$b(\alpha x_1 + \beta x_2, y, z) = \alpha b(x_1, y, z) + \beta b(x_2, y, z),$$

$$b(x, \alpha y_1 + \beta y_2, z) = \alpha b(x, y_1, z) + \beta b(x, y_2, z),$$

Capítulo 2. Desarrollo

$$b(x, y, \alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha b(x, y, z_1) + \beta b(x, y, z_2).$$

Si además X, Y, Z son espacios normados, decimos que b es continua si existe $C > 0$ tal que

$$|b(x, y, z)| \leq C \|x\|_X \|y\|_Y \|z\|_Z \quad \forall x \in X, y \in Y, z \in Z.$$

Lema 2.1.5. Antisimetría en los dos últimos argumentos Sea $b : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una forma trilineal definida en un espacio vectorial X . Si, además,

$$b(x, y, y) = 0 \quad \forall x, y \in X,$$

entonces para todo $x, y, z \in X$:

$$b(x, y, z) = -b(x, z, y).$$

Definición 2.1.76. Desigualdad de Rayleigh general Sea $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal autoadjunto y semidefinido positivo en un espacio de Hilbert H . Para todo $u \in D(A) \setminus \{0\}$, definimos el cociente de Rayleigh como

$$R(u) := \frac{(Au, u)_H}{(u, u)_H}.$$

El menor valor propio (autovalor) de A viene dado por

$$\lambda_1 = \inf_{u \in D(A) \setminus \{0\}} R(u).$$

Además, para todo $u \in D(A)$ se cumple la desigualdad de Rayleigh

$$(Au, u)_H \geq \lambda_1 (u, u)_H,$$

lo que implica que A es coercitivo si $\lambda_1 > 0$.

Definición 2.1.77. Desigualdad de Cauchy-Schwarz Sea X un espacio de producto interno con producto (\cdot, \cdot) . Para cualesquiera $x, y \in X$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

donde $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ es la norma inducida por el producto interno.

Definición 2.1.78. Desigualdad de Young general con ε

Sean $a, b > 0$, $\varepsilon > 0$, $y p, q > 1$ exponentes conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces se cumple:

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

donde

$$C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}.$$

Demostración. Escribimos ab en la forma factorizada:

$$ab = \left((\varepsilon p)^{1/p} a \right) \left(\frac{b}{(\varepsilon p)^{1/p}} \right),$$

y aplicamos la desigualdad de Young clásica:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad \text{para } x, y > 0.$$

Sustituyendo:

$$ab \leq \frac{\left((\varepsilon p)^{1/p} a \right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{b}{(\varepsilon p)^{1/p}} \right)^q}{q} = \varepsilon a^p + \frac{1}{q} (\varepsilon p)^{-q/p} b^q = \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q.$$

Aplicación al Método de Galerkin

Definición 2.1.79. Dada una ecuación diferencial parcial del tipo

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

la **solución débil** es una función u que satisface la ecuación en el sentido de distribuciones. Es decir, u pertenece a un espacio funcional adecuado y cumple la siguiente ecuación débil:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde v es una función de prueba.

La **formulación débil** es una reformulación de una ecuación diferencial en la que se permite que la solución no sea suave, es decir, que no tenga derivadas de todas las órdenes. En lugar de exigir que la solución cumpla la ecuación punto por punto, la formulación débil requiere que la solución cumpla una integral de la ecuación sobre todo el dominio.

Para una ecuación diferencial general, la formulación débil es derivada multiplicando la ecuación por una función de prueba v (de test), y luego aplicando la integración por partes para reducir los términos que involucran derivadas de la solución a términos que involucran derivadas de v .

Definición 2.1.80. El **método de Galerkin** es un procedimiento aproximado para resolver ecuaciones diferenciales, en el que se busca la solución dentro de un subespacio de dimensión finita.

Dados espacios funcionales V y H y una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, el método consiste en:

1. Elegir una base $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$.
2. Buscar una solución aproximada $u_n = \sum_{i=1}^n c_i v_i \in V_n$, donde V_n es el subespacio de dimensión finita generado por los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Capítulo 2. Desarrollo

3. Imponer que:

$$a(u_n, v_j) = F(v_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Este método garantiza una solución aproximada en el subespacio V_n , que minimiza el error en el sentido de que la solución obtenida es ortogonal a las funciones de prueba en ese subespacio.

Este método reduce un problema funcional infinito-dimensional a un sistema lineal finito-dimensional y consiste en buscar una solución aproximada de la forma débil del problema, es decir, una función que verifique $a(u, v) = F(v)$ para toda función de prueba $v \in V$, restringida a un subespacio finito $V_n \subset V$.

Teorema 2.1.17. Sea $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, continua, y $F \in V'$ un funcional lineal y continuo. Entonces:

1. El método de Galerkin genera una sucesión de soluciones $u_n \in V_n \subset V$, donde V_n es un subespacio de dimensión finita.
2. Esta sucesión converge débilmente hacia la única solución $u \in V$ que satisface la ecuación débil:

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V.$$

Definición 2.1.81. En el contexto del método de Galerkin, se selecciona una familia de funciones base $\{\phi_1, \phi_2, \dots\} \subset V$ que sean linealmente independientes. Se define el espacio V_n como el subespacio generado por las primeras n funciones base:

$$V_n := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}.$$

Luego, se busca una solución aproximada $u_n \in V_n$, lo que reduce el problema original de dimensión infinita a un sistema lineal de n ecuaciones.

Proposición 2.1.11. Si el problema variacional tiene una única solución u , y las soluciones aproximadas $u_n \in V_n$ convergen débilmente a u , entonces $u_n \rightarrow u$ fuertemente en H , siempre que $\dim V_n \rightarrow \infty$ y V_n sea denso en H .

Lema 2.1.6. Lema del ángulo agudo Sea $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación continua. Si existe $\rho_0 > 0$ tal que

$$(P(\xi), \xi) > 0 \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^m \text{ con } \|\xi\| = \rho_0,$$

entonces existe $\xi^* \in \overline{B}_{\rho_0}(0)$ tal que

$$P(\xi^*) = 0.$$

Aquí, $\overline{B}_{\rho_0}(0)$ denota la bola cerrada en \mathbb{R}^m de radio ρ_0 centrada en el origen.

2.1.2. Base física

Definición 2.1.82. Descripción del tipo de fluido

El medio en el que se desplazan los espermatozoides se ha modelado como un

fluido no newtoniano, isotrópico, homogéneo e incompresible. Cada una de estas características responde a propiedades observadas en medios biológicos reales como el moco cervical o el líquido intrauterino:

- **No newtoniano:** Este tipo de fluido presenta una viscosidad que depende de la tasa de deformación, lo que refleja la realidad de muchos fluidos biológicos donde la interacción entre el fluido y las fuerzas generadas por los espermatozoides es altamente no lineal.
- **Isotrópico:** Se asume que las propiedades del fluido son idénticas en todas las direcciones. Aunque los fluidos biológicos pueden presentar anisotropías en determinadas circunstancias, este supuesto simplifica el modelado sin sacrificar significativamente la fidelidad de los resultados.
- **Homogéneo:** Consideramos que el fluido tiene propiedades uniformes en toda la región de estudio, lo que elimina variaciones espaciales en densidad o viscosidad. Este supuesto facilita la formulación matemática y reduce la complejidad computacional.
- **Incompresible:** Debido a que los fluidos biológicos son esencialmente incompresibles a las escalas y velocidades involucradas, este supuesto es apropiado y ampliamente utilizado en modelización de dinámica de fluidos.

Definición 2.1.83. La densidad se define como la cantidad de masa contenida en una unidad de volumen y se expresa matemáticamente como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.2)$$

donde:

- ρ es la densidad (una magnitud escalar),
- m es la masa,
- V es el volumen.

Definición 2.1.84. La **velocidad** es una magnitud vectorial que describe la tasa de cambio temporal de la posición de una partícula o punto material. Si $\mathbf{r}(t)$ es la posición de la partícula en función del tiempo, la velocidad $\mathbf{u}(t)$ se define como:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \quad (2.3)$$

donde:

- $\mathbf{r}(t)$: es el vector posición, que describe la ubicación de la partícula en un sistema de coordenadas,
- t : es el tiempo,
- $\mathbf{u}(t)$: es el vector velocidad, que indica la dirección y la magnitud del desplazamiento instantáneo por unidad de tiempo.

Capítulo 2. Desarrollo

Definición 2.1.85. El campo de velocidades de nuestro modelaje va a ser en 3D por lo que nuestro sistema de ecuaciones diferenciales va a ser una aplicación tal que: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio de la siguiente forma (ver en 2.1.1) en el espacio, definimos la función:

$$\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

dada por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t)),$$

donde:

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ es la posición espacial,
- $t \in \mathbb{R}^+$ es el tiempo,
- $u_i(\mathbf{x}, t)$ para $i = 1, 2, 3$ representan las componentes del campo vectorial \mathbf{u} en las direcciones $x_1, x_2,$ y $x_3,$ respectivamente.

La función $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ puede interpretarse como un campo vectorial dependiente del tiempo, que asigna un vector tridimensional a cada punto del dominio Ω en un instante t .

Definición 2.1.86. La **aceleración** es una magnitud vectorial que describe la tasa de cambio temporal de la velocidad de una partícula o punto material. Si $\mathbf{u}(t)$ es el vector velocidad en función del tiempo, la aceleración $\mathbf{a}(t)$ se define como:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}, \quad (2.4)$$

donde:

- $\mathbf{u}(t)$: es el vector velocidad, que representa la derivada del vector posición respecto al tiempo, $\mathbf{u}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$,
- t : es el tiempo,
- $\mathbf{a}(t)$: es la aceleración, que indica la variación de la velocidad en magnitud y dirección con respecto al tiempo.

Definición 2.1.87. El **momento lineal** es una magnitud vectorial que describe el movimiento de un cuerpo y se define como el producto de su masa m por su velocidad \mathbf{v} . Matemáticamente, se expresa como:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

donde:

- \mathbf{p} es el momento lineal del cuerpo (un vector),

- m es la masa del cuerpo (un escalar),
- \mathbf{v} es la velocidad del cuerpo (un vector).

En el contexto de un fluido continuo, se trabaja con una descripción más general. La densidad de momento lineal en un volumen infinitesimal de fluido está dada por:

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{u}, \quad (2.5)$$

donde:

- ρ es la densidad del fluido (2.1.83),
- \mathbf{u} es la velocidad del fluido (2.1.85).

Definición 2.1.88. La **segunda ley de Newton** establece que la fuerza neta que actúa sobre un objeto es igual al producto de su masa por la aceleración que experimenta:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.6)$$

donde:

- \vec{F} : Es la fuerza neta que actúa sobre un objeto (magnitud vectorial).
- m : Es la masa del objeto (magnitud escalar).
- \vec{a} : Es la aceleración del objeto (magnitud vectorial).

Definición 2.1.89. El **enfoque euleriano** se centra en un punto fijo en el espacio y analiza cómo las propiedades del fluido (como la velocidad, presión, densidad, etc.) cambian con el tiempo en ese punto. Las propiedades del fluido se describen como funciones del tiempo y del espacio:

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t),$$

donde:

- \vec{u} es el vector de velocidad de la partícula (2.1.85).
- $\vec{x}(t)$ es la posición de la partícula en el espacio.
- t es el tiempo en el que se evalúan las propiedades de la partícula.

Definición 2.1.90. El **enfoque lagrangiano** sigue a partículas individuales a medida que se mueven a través del espacio y el tiempo. Las propiedades del fluido se describen desde el punto de vista de cada partícula y se expresan como funciones del tiempo:

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}(t), t),$$

donde:

- \vec{u} es el vector de velocidad de la partícula (ver en 2.1.85).
- $\vec{x}(t)$ es la posición de la partícula en el espacio en función del tiempo.

Capítulo 2. Desarrollo

- t es el tiempo en el que se evalúan las propiedades de la partícula.

Definición 2.1.91. La **presión** en un fluido es una magnitud escalar que representa la fuerza ejercida por las moléculas del fluido sobre las superficies de su contorno o sobre las partículas dentro del fluido. En términos matemáticos, la presión p está definida como la fuerza F por unidad de área A :

$$p = \frac{F}{A} \quad (2.7)$$

Definición 2.1.92. Un **líquido incompresible** es aquel fluido cuyo volumen permanece constante en el tiempo por lo cual la densidad ρ (ver en 2.1.83) también permanece constante en el tiempo y el espacio, independientemente de los cambios en la presión o la temperatura bajo condiciones normales. Esto implica que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \cdot u = 0,$$

donde:

- ρ : es la densidad del fluido (ver en 2.1.83),
- $\nabla \cdot u$: es el divergente 2.1.5 del campo de velocidad del fluido (ver en 2.1.85).

La condición de incompresibilidad simplifica las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes, siendo válida para la mayoría de los líquidos en condiciones normales. Sin embargo, esta suposición no se aplica en situaciones donde las variaciones de presión o temperatura generen cambios significativos en la densidad del fluido.

Definición 2.1.93. La Ley de Conservación de la Masa establece que la masa de un sistema cerrado permanece constante en el tiempo, independientemente de los procesos físicos o químicos que ocurran. Matemáticamente, para un fluido en movimiento, esta ley se expresa mediante la **ecuación de continuidad**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (2.8)$$

donde:

- ρ es la densidad del fluido 2.1.83,
- u es el campo de velocidad del fluido 2.1.85,
- t es el tiempo.

Esta ecuación indica que el cambio en la densidad de un fluido en un punto $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ más la divergencia del flujo de masa $\nabla \cdot (\rho u)$ debe ser cero, garantizando la conservación de la masa y explicando así la definición de líquido incompresible (ver en 2.1.92).

Definición 2.1.94. La **deformación en un fluido** se refiere al cambio continuo y permanente en la forma o disposición de los elementos del fluido cuando se somete a fuerzas externas. Este fenómeno se caracteriza por el movimiento relativo de las partículas del fluido, que pueden deslizarse o rodar unas sobre otras sin ofrecer una resistencia finita a la deformación continua. A diferencia de los sólidos, los fluidos no tienen una forma definida y se deforman continuamente mientras se les aplique una fuerza, por pequeña que sea. La tasa de deformación en un fluido está directamente relacionada con las fuerzas aplicadas y las propiedades intrínsecas del fluido, como su viscosidad. Y se caracteriza como:

- **Desplazamiento y Ángulo de Deformación:** El desplazamiento δ se define como el cambio en la posición de un punto en el material con respecto a su posición original, dado por:

$$\delta = x_f - x_i \quad (2.9)$$

donde x_f es la posición final y x_i es la posición inicial. Este desplazamiento puede tener una componente lineal o angular. En el caso de deformaciones por cizallamiento, el desplazamiento angular entre dos puntos puede caracterizarse mediante el ángulo α . Así, la deformación puede visualizarse como el desplazamiento de los puntos, ya sea linealmente (como un cambio en la posición) o angularmente (como la formación de un ángulo entre los puntos).

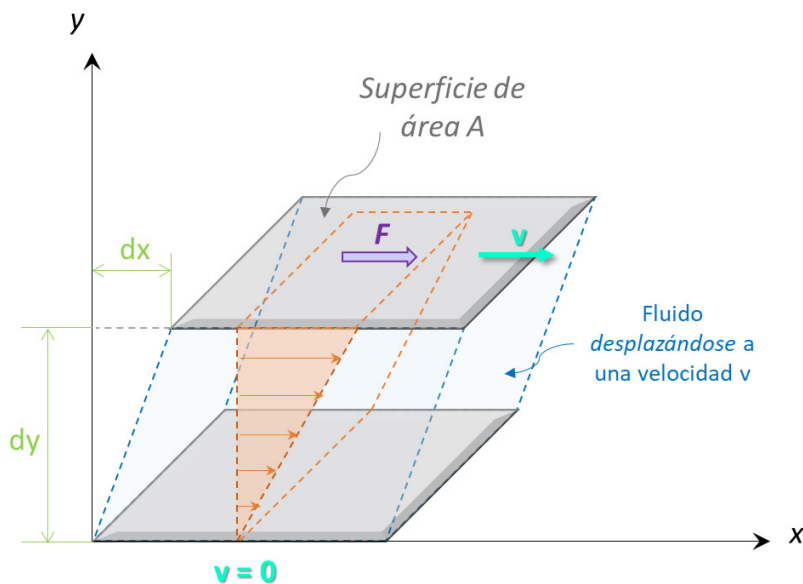


Figura 2.1: Caracterización de la deformación

- **Deformación Continua:** La deformación continua en un fluido ocurre porque el fluido experimenta una deformación constante mientras actúen las fuerzas que originan tensiones cortantes, por pequeñas que sean. Esto significa que cualquier esfuerzo tangencial aplicado, sin importar su magnitud, provocará un movimiento relativo entre las capas del fluido, resultando en una deformación que persiste mientras se mantenga la fuerza aplicada. A diferencia de los sólidos, los fluidos carecen de un umbral mínimo de esfuerzo para iniciar la deformación, lo que permite que incluso fuerzas muy

Capítulo 2. Desarrollo

pequeñas causen un flujo continuo.

Definición 2.1.95. La **viscosidad dinámica**, también conocida como viscosidad absoluta, es una propiedad física de un fluido que mide su resistencia al flujo o deformación cuando se somete a un esfuerzo de deformación. En un fluido newtoniano, la viscosidad dinámica es constante y está relacionada con la tensión de corte (τ) y la tasa de cizalladura ($\dot{\gamma}$) mediante la siguiente expresión lineal:

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}, \quad (2.10)$$

donde:

- τ es el tensor de esfuerzos viscosos (ver en 2.1.101),
- μ es la viscosidad dinámica, una cte si el fluido es newtoniano (ver en 2.1.97),
- $\dot{\gamma}$ es la tasa de cizalladura o la velocidad de deformación (ver en 2.1.103) .

Proposición 2.1.12. Aunque la viscosidad dinámica 2.1.95 de un fluido no newtoniano no es constante, en algunos casos, se puede aproximar utilizando la fórmula:

$$\tau = \mu_{\text{efectiva}} \dot{\gamma} \quad (2.11)$$

donde μ_{efectiva} es una función que depende $\dot{\gamma}$ (ver en 2.1.103), y depende de las características específicas del fluido (como el índice de comportamiento, n , en la ley de potencia).

Definición 2.1.96. La constante de **viscosidad volumétrica**, denotada como λ , es un parámetro físico que describe la resistencia de un fluido a las deformaciones volumétricas, es decir, a los cambios en su volumen debido a la compresibilidad. Matemáticamente, se relaciona con otras propiedades del fluido mediante la expresión:

$$\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu,$$

donde:

- λ es la constante de viscosidad volumétrica,
- κ es el coeficiente de viscosidad de volumen,
- μ es la viscosidad dinámica.

Esta relación establece cómo los esfuerzos viscosos dependen tanto de las deformaciones por cizalladura como de las deformaciones volumétricas.

Observación 2.1.16. el término $\frac{\partial u}{\partial y}$ en la ecuación de viscosidad dinámica (ver en 2.1.95) es **semejante** a la tasa de deformación, $\dot{\gamma}$, ya que ambos representan la velocidad de cambio del perfil de velocidad del fluido en la dirección perpendicular al flujo. En este contexto, $\frac{\partial u}{\partial y}$ mide el gradiente de velocidad, mientras que $\dot{\gamma}$

2.1. Marco teórico

representa la tasa de deformación. Así, $\frac{\partial u}{\partial y}$ se puede interpretar como una forma específica de $\dot{\gamma}$.

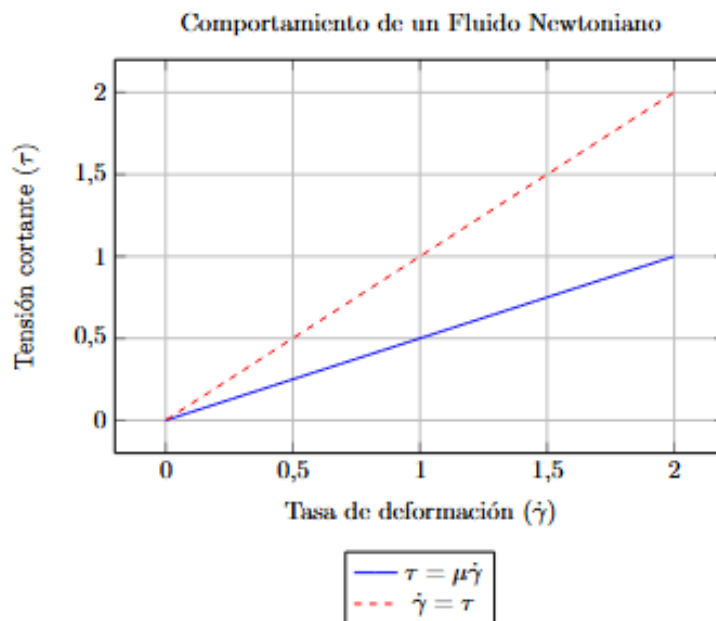
Definición 2.1.97. Un **fluido newtoniano** es un fluido cuya viscosidad es constante e independiente de la tasa de deformación o gradiente de velocidad. Esto implica que la relación entre la tensión cortante y la tasa de deformación es lineal, y se expresa como:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

donde:

- τ es la tensión de corte (en unidades de fuerza por unidad de área).
- μ es la viscosidad dinámica (ver en 2.1.95), que es constante para los fluidos newtonianos,
- $\frac{\partial u}{\partial y}$ es el gradiente de velocidad o tasa de deformación.

Así, en un fluido newtoniano, la viscosidad no depende del gradiente de velocidad.



Definición 2.1.98. El **tensor de tensiones** σ , es un tensor que describe las tensiones internas en un material o fluido debido a la interacción entre sus partículas. En el contexto de la mecánica de fluidos, este tensor refleja cómo se distribuyen las fuerzas de tensión dentro de un fluido y está relacionado con las deformaciones y las fuerzas de contacto que se desarrollan debido a la viscosidad. La expresión general del tensor de tensiones es:

$$\sigma = -pI + \tau, \quad (2.12)$$

donde:

Capítulo 2. Desarrollo

- p es la presión interna del fluido (ver en 2.1.91),
- I es la matriz identidad,
- τ es el tensor de esfuerzos viscosos (ver en 2.1.101).

Observación 2.1.17. La ecuación del tensor de tensiones es:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau,$$

donde I es la matriz identidad. En un contexto más general, la matriz identidad puede expresarse como un operador utilizando el delta de Kronecker (δ_{ij} ver en 2.1.9), que actúa como la forma discreta de la matriz identidad. Es decir, se tiene:

$$I_{ij} = \delta_{ij},$$

Donde los componentes de un vector o tensor se mantienen inalterados cuando $i = j$, mientras que se eliminan cuando $i \neq j$.

Definición 2.1.99. La **hipótesis de Stokes** establece que, para los fluidos newtonianos, los esfuerzos viscosos son directamente proporcionales a las tasas de deformación del fluido. Esta hipótesis implica que la viscosidad es una propiedad constante que describe la resistencia interna del fluido al flujo, y que los esfuerzos viscosos dentro del fluido son causados por las variaciones en las velocidades de las partículas del fluido.

Definición 2.1.100. La **ley de viscosidad de Newton** establece que la tensión de corte en un fluido es directamente proporcional al gradiente de velocidad. La constante de proporcionalidad es la viscosidad dinámica μ (ver en 2.1.95), que depende de las propiedades del fluido y se considera constante para los fluidos newtonianos.

Según esta ley, los fluidos que siguen este comportamiento tienen una viscosidad que no varía con el gradiente de velocidad, lo que significa que la relación entre la tensión de corte y el gradiente de velocidad es lineal y constante.

Definición 2.1.101. El **tensor de esfuerzos viscosos**, denotado comúnmente como τ o σ_v , es una magnitud matemática que describe la distribución de las tensiones internas generadas por la viscosidad en un fluido. Su componente τ_{ij} (o $\sigma_{v,ij}$) describe la tensión viscosa en la dirección i debida a un gradiente de velocidad en la dirección j . Matemáticamente, se expresa como:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}, \quad (2.13)$$

donde:

- τ_{ij} es la componente (i, j) del tensor de esfuerzos viscosos,
- μ es la viscosidad dinámica del fluido (ver en 2.1.95, constante en el caso de un fluido newtoniano),
- λ es el coeficiente de viscosidad volumétrica ,

- D_{ij} es la componente (i, j) del tensor de deformaciones (ver en 2.1.102),
- $\nabla \cdot \mathbf{u}$ es el divergente del campo de velocidades (ver en 2.1.5),
- δ_{ij} es el delta de Kronecker (2.1.9).

Derivación del tensor de esfuerzos viscosos:

Para llegar a la ecuación del tensor de esfuerzos viscosos que hemos presentado, se siguen varios pasos basados en principios físicos y matemáticos. En primer lugar, partimos de la **hipótesis de Stokes** (ver en 2.1.99) para fluidos newtonianos, que establece que los esfuerzos viscosos son proporcionales a las tasas de deformación del fluido. A continuación, consideramos el tensor de deformaciones D_{ij} (ver en 2.1.102)

Luego, aplicamos **la ley de viscosidad de Newton** (ver en 2.1.100), que relaciona los esfuerzos viscosos con las tasas de deformación a través de la viscosidad dinámica μ (2.1.95).

Posteriormente, se incluye el término de **viscosidad volumétrica**, que involucra el coeficiente λ (2.1.96), y se añade para considerar los efectos de compresibilidad en el fluido. Finalmente, al combinar estos conceptos, llegamos a la expresión general del tensor de esfuerzos viscosos:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}.$$

Esta ecuación captura tanto los efectos de cizallamiento (primer término) como los efectos de compresibilidad (segundo término) en el fluido.

Observación 2.1.18. En el contexto de un fluido incomprensible, donde el divergente del campo de velocidades es nulo ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), el término asociado con la viscosidad volumétrica en el tensor de esfuerzos viscosos, es decir, el término $\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij}$, desaparece. Siendo la expresión del tensor de esfuerzos viscosos reducida a:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}.$$

Definición 2.1.102. El **tensor de deformaciones**, describe cómo se deforma un material o fluido debido a la acción de tensiones internas. Este tensor se define en términos del gradiente de la velocidad del fluido o las deformaciones en el cuerpo. Matemáticamente, se expresa como:

$$D = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right), \tag{2.14}$$

donde:

- D es la expresión general del tensor de deformaciones,
- ∇u es el gradiente de velocidad del fluido, que se puede ver en forma matricial en 2.1.1.

Capítulo 2. Desarrollo

Este tensor mide la cantidad de deformación o estiramiento en un material o fluido debido a la acción de fuerzas.

Observación 2.1.19. La expresión general del tensor de deformaciones D se puede escribir de forma equivalente de la siguiente manera:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

donde D_{ij} es la componente (i, j) del tensor de deformaciones. Esta forma es especialmente útil al trabajar con coordenadas cartesianas en las que se expresan las derivadas parciales con respecto a las componentes espaciales.

Definición 2.1.103. En un fluido unidimensional, **la tasa de deformación** (o tasa de cizalladura) es la rapidez con que se produce la deformación en una dirección específica. Si consideramos que el fluido se deforma solo en una dirección x , la tasa de deformación se puede definir como el gradiente de velocidad en esa dirección:

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|,$$

donde:

- $\dot{\gamma}$ es la tasa de deformación (o tasa de cizalladura) en la dirección x .
- u es la componente de la velocidad del fluido en la dirección x .
- $\frac{\partial u}{\partial x}$ es el gradiente de la velocidad en la dirección x .

En un fluido tridimensional, **la tasa de deformación** se refiere a la rapidez con la que se deforman las partículas del fluido en varias direcciones. Esta tasa se puede definir tomando la norma del tensor de deformación D_{ij} , que está relacionado con los gradientes de velocidad. La tasa de deformación en un fluido tridimensional se expresa como:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2D_{ij}D_{ij}}, \quad (2.15)$$

donde:

- $\dot{\gamma}$ es la tasa de deformación (o tasa de cizalladura) total en el fluido.
- D_{ij} es la componente (i, j) del tensor de deformación (ver en 2.1.102).

Definición 2.1.104. La **ley de potencia** (o modelo de Ostwald-de Waele) es una relación empírica utilizada para modelar el comportamiento de los fluidos no newtonianos, que establece que la tensión cortante (τ) es proporcional a la tasa de deformación ($\dot{\gamma}$) elevada a un exponente n . La expresión matemática general de la ley de potencia es:

$$\tau = K\dot{\gamma}^n \quad (2.16)$$

donde:

- τ es el tensor de esfuerzos viscosos (2.1.101),

- K es una constante de consistencia que depende de las propiedades del fluido,
- $\dot{\gamma}$ es la tasa de deformación (2.1.103),
- n es el índice de flujo, un parámetro que describe el comportamiento del fluido. Para un fluido pseudoplástico, $n < 1$, lo que implica que la viscosidad disminuye con el aumento de la tasa de deformación, mientras que para un fluido dilatante, $n > 1$, la viscosidad aumenta con el aumento de la tasa de deformación.

Teorema 2.1.18. El **Teorema de Transporte de Reynolds** establece una relación fundamental entre la tasa de cambio temporal de una propiedad física extensiva 2.1.105 de un sistema y su comportamiento en un volumen de control fijo. Si B es una propiedad extensiva del sistema con una densidad específica b (es decir, $B = \int_V b dV$), el teorema se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} b dV = \int_{V(t)} \frac{\partial b}{\partial t} dV + \int_{\partial V(t)} b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA, \quad (2.17)$$

donde:

- $V(t)$ es el volumen de control, que puede cambiar con el tiempo,
- $\partial V(t)$ es la superficie que delimita el volumen de control,
- \mathbf{u} es la velocidad del fluido en la superficie $\partial V(t)$,
- \mathbf{n} es el vector normal unitario a la superficie $\partial V(t)$, orientado hacia afuera,
- b es la densidad específica de la propiedad extensiva B ,
- dV y dA son elementos diferenciales de volumen y área, respectivamente.

El primer término del lado derecho representa el cambio temporal local de b dentro del volumen de control, mientras que el segundo término describe el flujo neto de b a través de la superficie $\partial V(t)$.

Definición 2.1.105. Una **propiedad extensiva** es una magnitud física cuya medida depende del tamaño o extensión del sistema considerado. Matemáticamente, se puede expresar como una integral sobre un volumen V , es decir:

$$B = \int_V b dV,$$

donde:

- B es la propiedad extensiva (por ejemplo, masa, energía o cantidad de movimiento),
- b es la densidad específica correspondiente a B , esto es, la propiedad por unidad de volumen,

Capítulo 2. Desarrollo

- V es el dominio ocupado por el sistema o el volumen de control en estudio.

En contraste, las propiedades intensivas no dependen del tamaño del sistema (como la temperatura o la presión).

Definición 2.1.106. Un **fluido no newtoniano** es un fluido cuya viscosidad no es constante y depende de la tasa de deformación o gradiente de velocidad. A diferencia de los fluidos newtonianos, la relación entre la tensión cortante y la tasa de deformación no es lineal. En estos fluidos, la viscosidad puede variar de manera compleja en función de la tasa de deformación.

Existen varios tipos de fluidos no newtonianos, que se clasifican según su comportamiento ante esfuerzos cortantes:

- **Fluidos plásticos:** Un ejemplo común es la pasta de dientes.
- **Fluidos dilatantes:** Un ejemplo típico es una suspensión de almidón en agua.
- **Fluidos pseudoplásticos:** Un ejemplo común son las pinturas o la sangre.
- **Fluidos viscoelásticos:** Algunos ejemplos son el caucho y algunos geles.

Definición 2.1.107. Un **fluido pseudoplástico** es un tipo de fluido no newtoniano cuya viscosidad disminuye a medida que aumenta la tasa de deformación o el esfuerzo cortante.

En términos matemáticos, la relación entre la tensión cortante (τ) y la tasa de deformación ($\dot{\gamma}$) en los fluidos pseudoplásticos generalmente no es lineal y puede describirse mediante una ley de poder o un modelo empírico adecuado a cada tipo de fluido.

2.1.3. Base físico-biológica

El estudio del movimiento de espermatozoides en un medio fluido requiere una descripción precisa tanto de las propiedades del fluido como de las características biológicas de los espermatozoides. En esta sección, se justifica la elección de un fluido pseudoplástico como modelo del entorno y se describen las propiedades principales de los espermatozoides que influyen en su dinámica.

Definición 2.1.108. Elección del fluido pseudoplástico

Los medios biológicos como el moco cervical, el fluido uterino y otros fluidos en los que los espermatozoides deben desplazarse son ejemplos de fluidos no newtonianos pseudoplásticos. Estos fluidos presentan características reológicas complejas que dependen de la tasa de deformación ($\dot{\gamma}$). La composición de estos fluidos incluye macromoléculas como glicoproteínas, mucinas y otros polímeros biológicos, que forman una red tridimensional que se reorganiza bajo estrés lo que lleva a cambios en la viscosidad. A bajas tasas de deformación, las moléculas están enredadas, lo que da lugar a alta viscosidad. A altas tasas de deformación, las moléculas se alinean en la dirección del flujo, lo que reduce la viscosidad. En particular, estos

medios son **pseudoplásticos**, lo que significa que su viscosidad disminuye con el aumento de $\dot{\gamma}$. Matemáticamente, la viscosidad efectiva de un fluido pseudoplástico se modela como:

$$\mu_{ef} = K\dot{\gamma}^{n-1},$$

donde:

- K es la consistencia del fluido,
- n es el índice de comportamiento del fluido ($n < 1$ para un pseudoplástico),
- $\dot{\gamma}$ es la tasa de deformación.

Este comportamiento facilita el movimiento de los espermatozoides, ya que al batir sus flagelos, generan altas tasas de deformación local, lo que reduce la viscosidad del medio circundante. Además, la composición y propiedades del moco cervical cambian durante el ciclo menstrual, volviéndose más pseudoplástico durante el período fértil, lo que favorece el paso de los espermatozoides. Este comportamiento hace que el modelo pseudoplástico sea más representativo de los entornos biológicos que un fluido newtoniano.

Definición 2.1.109. *CatSper (Canal de Calcio Específico de Espermatozoide) es un canal iónico selectivo de calcio, altamente especializado y exclusivo de la membrana del flagelo de los espermatozoides maduros, cuya función principal es regular la entrada de iones calcio durante la capacitación espermática, modulando la motilidad, hiperactivación y capacidad de fertilización del gameto masculino.*

Definición 2.1.110. *El movimiento de los espermatozoides es impulsado por la acción del flagelo, que genera fuerzas oscilatorias en el medio circundante. Estas fuerzas se modelan como una combinación de componentes: Su diseño físico y mecánico está adaptado para maximizar su movilidad en entornos complejos y viscoelásticos. Las características clave que afectan su dinámica son:*

- **Movimiento flagelar básico:** *El flagelo es una estructura filamentosa que genera las fuerzas propulsoras necesarias para el desplazamiento. Su movimiento es altamente dinámico, genera un movimiento característico que consiste en un bateo simétrico de la cola, permitiendo que se desplace de forma progresiva.*

$$f_b = A \sin(\omega t) \hat{n}, \quad (2.18)$$

donde f_b representa la **fuerza base del movimiento flagelar simétrico**

- **Función sinusoidal ($\sin(\omega t)$):**
Se utiliza una función seno porque el movimiento del flagelo es oscilatorio y periódico. El seno captura la naturaleza cíclica del batido flagelar, alternando entre valores positivos y negativos que representan el movimiento de lado a lado.

- **Frecuencia angular (ω):**
 ω representa la velocidad angular del movimiento oscilatorio y se relaciona con la frecuencia f del batido flagelar mediante $\omega = 2\pi f$. Típicamente, los flagelos de espermatozoides baten a frecuencias de 20 – 60 Hz.
- **Tiempo (t):**
Representa el tiempo transcurrido, permitiendo que la fuerza varíe con el tiempo.
- **Amplitud (A):**
Determina la magnitud máxima de la fuerza generada por el flagelo. Está relacionada con la longitud del flagelo y la intensidad de su movimiento.
- **Vector unitario (\hat{n}):**
Indica la dirección instantánea del movimiento. Este vector puede ser constante para un movimiento en línea recta o variable para trayectorias más complejas.
- **Hiperactivación:***Durante la capacitación, el espermatozoide experimenta una hiperactivación, que se caracteriza por un movimiento asimétrico y amplio del flagelo, resultando en una trayectoria circular y errática, con mayor fuerza de propulsión, asimismo un batido más vigoroso de la cola.*

$$f_h = B(1 - e^{-kt}) \sin(\omega_h t) \hat{n}_h, \quad (2.19)$$

donde f_h representa la fuerza adicional debido a la hiperactivación.

- **Amplitud máxima de la hiperactivación (B):**
 B representa la magnitud máxima de la fuerza generada durante la hiperactivación del espermatozoide.
- **Constante de tiempo (k):**
 k es la constante que determina la velocidad con la que inicia la hiperactivación. Un valor mayor de k implica un inicio más rápido de la hiperactivación.
- **Tiempo (t):**
Representa el tiempo transcurrido, permitiendo que la hiperactivación evolucione con el tiempo.
- **Vector unitario de dirección errática (\hat{n}_h):**
Este vector describe la dirección instantánea del movimiento hiperactivado, que cambia con el tiempo para representar la trayectoria errática del espermatozoide durante la hiperactivación.

Esta ecuación captura:

- El inicio gradual de la hiperactivación $(1 - e^{-kt})$,
- La naturaleza oscilatoria del movimiento $\sin(\omega_h t)$,
- La dirección variable del movimiento \hat{n}_h .

2.2. Planteamiento de la modelización

La hiperactivación es esencial para la fertilización exitosa, ya que permite al espermatozoide superar las barreras físicas y llegar al óvulo con la energía necesaria para la fecundación.

- **Influencia del gradiente de calcio:** Este proceso está estrechamente relacionado con la hiperactivación ya que el aumento de la concentración intracelular de calcio y la fosforilación de proteínas son necesarias. Los canales de calcio CatSper juegan un papel crucial en la hiperactivación, ya que los espermatozoides que carecen de estos canales no pueden hiperactivarse correctamente

$$f_c = C\nabla[\text{Ca}^{2+}], \quad (2.20)$$

donde f_c representa la contribución de las corrientes de calcio.

- **Gradiente de concentración de calcio ($\nabla[\text{Ca}^{2+}]$):**
Representa cómo varía la concentración de iones de calcio en el espacio. Es crucial porque los canales de calcio, especialmente CatSper, juegan un papel fundamental en la hiperactivación y capacitación espermática. El gradiente se forma debido a la entrada de calcio a través de canales como CatSper y la liberación de calcio de reservorios intracelulares del flagelo.
- **Constante (C):**
Relaciona el gradiente de concentración de calcio con la fuerza generada. Su valor dependerá de factores como la sensibilidad de los mecanismos moleculares del espermatozoide al calcio.

En conjunto, estas componentes permiten representar tanto el movimiento simétrico básico como la hiperactivación asimétrica y la influencia del calcio en la propulsión.
- **Distribución de calcio:** Se asume una distribución inicial homogénea de Ca^{2+} en el medio, es decir, $\text{Ca}^{2+}(\mathbf{x}, 0) = C_0$, donde C_0 es una constante positiva.

Esta ecuación simplifica un proceso complejo. En realidad, la relación entre el gradiente de calcio y la fuerza generada puede no ser estrictamente lineal. Además, otros factores como el pH y la presencia de otros iones también influyen en la motilidad espermática.

2.2. Planteamiento de la modelización

2.2.1. Obtención del modelaje

Nuestro objetivo es modelar el comportamiento del fluido, que en este caso es una mezcla de fluido seminal y vaginal, dentro de un entorno sin bordes, lo cual asemeja el comportamiento del fluido en el útero. Sin embargo, debemos aclarar que no estamos modelando un útero real, sino un entorno cerrado que simula las condiciones del útero, considerando también la posibilidad de simular un útero artificial, como el utilizado en técnicas de fecundación asistida, para explorar cómo

Capítulo 2. Desarrollo

los espermatozoides interactúan con el fluido en condiciones controladas. Para modelizar este fenómeno vamos a partir utilizando como base la 2ª Ley de Newton (ver en 2.1.88). Considerando la ecuación (2.6) vamos a describir cómo se aplica esta a nuestro fluido:

Obtención de la parte convectiva de la ecuación con Enfoque Lagrangiano

Para adaptar la parte convectiva a nuestro fluido podemos considerar un Enfoque Lagrangiano (2.1.90) y observar el fluido desde una escala microscópica siguiendo a una partícula del fluido en específico.

Aceleración:

Para describir la aceleración de un fluido y considerando la definición de aceleración (2.1.86), es necesario obtener la tasa de variación de la velocidad u con respecto al tiempo t :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x(t), y(t), z(t), t) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Esto también puede expresarse como un producto escalar de dos vectores más la suma de $\frac{\partial u}{\partial t}$, dado que $\frac{\partial t}{\partial t} = 1$, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x(t), y(t), z(t), t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.22)$$

En este punto, se puede observar que el primer vector es el gradiente de u y que el segundo término del producto escalar corresponde a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x(t), y(t), z(t)),$$

es decir, la derivada de la posición con respecto al tiempo, lo que coincide con la definición de velocidad (2.1.84). Teniendo esto en cuenta, la aceleración del fluido puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x(t), y(t), z(t), t) = \nabla u \cdot u + u_t. \quad (2.23)$$

Esta es una forma de derivar esta expresión para la aceleración. Sin embargo, se puede observar que coincide con la expresión de la derivada convectiva (ver en 2.1.8). En el caso particular en que f es el vector velocidad $u(x, t)$, la derivada convectiva describe la aceleración total de una partícula del fluido y se expresa como:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u. \quad (2.24)$$

Masa:

2.2. Planteamiento de la modelización

En mecánica de fluidos, y como consecuencia del enfoque Lagrangiano, el fluido se modela como un medio continuo. Se define una pequeña porción del fluido como un elemento de volumen infinitesimal ΔV . La masa m de este elemento se expresa como:

$$m = \rho \Delta V,$$

donde ρ es la densidad del fluido.

La aceleración de cada elemento de fluido se describe mediante la aceleración local del campo de velocidad $u(x, t)$. Al aplicar la Segunda Ley de Newton a una unidad de volumen infinitesimal del fluido, las fuerzas se distribuyen por unidad de volumen. Por lo tanto, si se considera $\Delta V = 1$, se tiene:

$$m = \rho.$$

Conclusión:

Unificando los términos obtenidos, la parte derecha de la ecuación finalmente se expresa como:

$$ma = \rho(\nabla u \cdot u + u_t). \quad (2.25)$$

Parte convectiva de la ecuación considerando un enfoque Euleriano

Para modelizar la parte difusiva de la ecuación, también podemos considerar un enfoque euleriano (2.1.89), en el cual se analizan las propiedades del fluido en puntos fijos del espacio.

Masa:

Dado que estamos trabajando con un fluido a escala macroscópica, se considera una distribución continua de masa. En lugar de emplear m , utilizamos la densidad ρ y el volumen infinitesimal dV para describir la masa de un elemento fluido:

$$dm = \rho dV.$$

De este modo, la fuerza total sobre un volumen V del fluido se expresa en términos de fuerzas internas y externas.

Aceleración:

La cantidad de movimiento total en un volumen de control V se representa como:

$$\int_V \rho \vec{u} dV,$$

lo cual proviene de la fórmula del momento lineal 2.1.87, pero aplicada al fluido contenido dentro del volumen de control. La aceleración, definida como la tasa de cambio de la cantidad de movimiento 2.1.86, se escribe como:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV.$$

Capítulo 2. Desarrollo

Al aplicar el Teorema de Transporte de Reynolds (ver en 2.1.18) a un volumen de control fijo, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) dV + \int_{\partial V} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA. \quad (2.26)$$

De acuerdo con el Teorema de la Divergencia (ver en 2.1.1), el término superficial se transforma en:

$$\int_{\partial V} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) dV. \quad (2.27)$$

Finalmente, la expresión para la aceleración queda de la siguiente forma:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) dV. \quad (2.28)$$

Parte difusiva de la ecuación considerando un enfoque Euleriano

Para adaptar la parte difusiva de la ecuación a nuestro fluido, consideramos un enfoque euleriano . Las fuerzas sobre un volumen de fluido se clasifican en dos categorías:

a. Fuerzas Volumétricas (f):

Estas fuerzas, también denominadas fuerzas externas, actúan sobre toda la masa del fluido, como la gravedad, y se definen como:

$$F_{vol} = \int_V f dV. \quad (2.29)$$

b. Fuerzas Superficiales (σ):

Estas fuerzas actúan sobre la superficie del volumen de control, como la presión (2.1.91) y las tensiones viscosas (2.1.95), y se definen como:

$$F_{sup} = \int_{\partial V} \sigma \cdot \vec{n} dA. \quad (2.30)$$

De acuerdo con el Teorema de la Divergencia, esta integral superficial puede convertirse en una integral volumétrica:

$$\int_{\partial V} \sigma \cdot \vec{n} dA = \int_V \nabla \cdot \sigma dV. \quad (2.31)$$

Ecuación Completa

Unificando las dos partes, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) dV = \int_V \vec{f} dV + \int_V \nabla \cdot \sigma dV. \quad (2.32)$$

2.2. Planteamiento de la modelización

Dado que esta ecuación es válida para cualquier volumen de control V , podemos escribir la forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \nabla \cdot \sigma + \vec{f}. \quad (2.33)$$

Para un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$), podemos extraer ρ de las derivadas:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) = \nabla \cdot \sigma + \vec{f}. \quad (2.34)$$

El término $\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})$ se puede expandir utilizando la **regla del producto vectorial**:

$$\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \vec{u} (\nabla \cdot \vec{u}). \quad (2.35)$$

Dado que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ (condición de incompresibilidad), el segundo término se anula:

$$\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot \sigma + \vec{f}. \quad (2.36)$$

Sacando como factor común ρ en la parte izquierda, se obtiene:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \nabla \cdot \sigma + \vec{f}. \quad (2.37)$$

Descomponiendo el tensor de tensiones σ (2.1.98) en su parte debida a la presión p y las tensiones viscosas τ (2.1.101), se obtiene:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \vec{f}. \quad (2.38)$$

Se puede observar que la aceleración (la parte convectiva de la ecuación) es la misma que se había obtenido con el enfoque Lagrangiano.

Una vez obtenida la forma básica de las ecuaciones de Navier-Stokes, desarrollamos el término τ . De acuerdo con la definición de tensor de esfuerzos viscosos, tenemos:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda (\nabla \cdot u) \delta_{ij}. \quad (2.39)$$

Dado que el fluido es incompresible ($\nabla \cdot u = 0$ ver en 2.1.92), el segundo término se anula:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}. \quad (2.40)$$

En el caso de un fluido no newtoniano, la viscosidad dinámica μ no es constante y depende de la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$ (2.1.95). Por lo tanto, la ecuación es:

$$\tau_{ij} = 2\mu(\dot{\gamma}) D_{ij}. \quad (2.41)$$

Capítulo 2. Desarrollo

Dado que μ es una función de $\dot{\gamma}$, usamos una ecuación para describir su comportamiento, denominada viscosidad efectiva (ver en 2.1.12). Aplicando la Ley de Potencia (2.1.104) en (2.11), tenemos:

$$K\dot{\gamma}^n = \mu_{eff}\dot{\gamma}. \quad (2.42)$$

Despejando μ_{eff} :

$$\mu_{eff} = K\dot{\gamma}^{n-1}. \quad (2.43)$$

Sustituyendo en (2.41), obtenemos:

$$\tau_{ij} = 2K\dot{\gamma}^{n-1}D_{ij}. \quad (2.44)$$

Expresando la tasa de cizalladura $\dot{\gamma}$ en términos del tensor de deformaciones:

$$\tau_{ij} = 2K\left(\sqrt{2D_{ij}D_{ij}}\right)^{n-1}D_{ij}.$$

Finalmente, sustituyendo en (2.38), la ecuación final para un fluido no newtoniano es:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot 2K\left(\sqrt{2D\cdot D}\right)^{n-1}D + \vec{f}. \quad (2.45)$$

Donde:

- ρ : densidad del fluido 2.1.83.
- \vec{u} : campo de velocidad del fluido 2.1.84.
- t : tiempo.
- ∇ : operador gradiente 2.1.6.
- $\nabla\cdot$: divergente 2.1.5.
- p : presión del fluido 2.1.91.
- D : tensor de deformación 2.1.102.
- $D\cdot D$: producto escalar de tensores.
- K : constante de propiedades del fluido.
- n : índice de comportamiento en la ley de potencia.
- \vec{f} : fuerzas externas (como la gravedad).

Incorporación del movimiento de los espermatozoides

Para introducir el movimiento de los espermatozoides en el modelo de Navier-Stokes para un medio no newtoniano, se propone modificar el término de fuerza externa (f) en la ecuación. Esta fuerza externa representará la propulsión generada por el flagelo del espermatozoide, considerando varios aspectos clave de su dinámica:

2.2. Planteamiento de la modelización

- **Movimiento flagelar básico**
- **Hiperactivación**
- **Papel del calcio**

Para modelar estas características, la fuerza flagelar (ver en 2.1.110) se define como la suma de tres componentes:

$$\mathcal{F}_{\text{flagelo}} = f_b + f_h + f_c, \quad (2.46)$$

Esta formulación permite capturar los aspectos esenciales del movimiento espermático, incluyendo el batido simétrico inicial, la transición hacia un movimiento hiperactivado y la influencia de las corrientes de calcio. La función resultante f se integrará en el término de fuerza externa de la ecuación de Navier-Stokes para proporcionar una representación precisa del efecto del flagelo en el medio pseudo-plástico.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot 2K \left(\sqrt{2D \cdot D} \right)^{n-1} D + \mathcal{F}_{\text{flagelo}} \quad (2.47)$$

Para pasar de la primera ecuación a la segunda, se realiza una generalización del término que representa el esfuerzo viscoso. Sustituyendo el tensor de deformaciones D por (2.14) y la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ por (2.15) nos queda la ecuación final del modelo.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [K \dot{\gamma}^{n-1} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)] + \mathcal{F}_{\text{flagelo}} \quad (2.48)$$

Esta generalización permite una representación más flexible del comportamiento no newtoniano del fluido, especialmente útil para fluidos pseudoplásticos donde $n < 1$. La nueva forma es más explícita en términos del gradiente de velocidad y su transpuesta, lo que facilita la implementación en algunos métodos numéricos.

Segunda Ecuación

La segunda ecuación viene de la Ley de Conservación de la masa (ver en 2.1.93) por lo que partimos de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.49)$$

Pero, debido a que la densidad ρ es constante por ser el líquido incompresible, la ecuación finalmente queda:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.50)$$

2.2.2. Condiciones de Borde

Para modelar el borde en este problema, hemos elegido las condiciones de borde de Dirichlet (ver en 2.1.2); concretamente, hemos impuesto una condición de no-desplazamiento, por lo que nos queda la siguiente ecuación:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{en } \partial\Omega_{\text{pared}}, \quad (2.51)$$

Donde Ω cumple todas las condiciones necesarias mencionadas en nuestro dominio (2.1.1).

2.3. Resultados modelización

2.3.1. Modelo Final

Después del desarrollo completo, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) que describe el comportamiento del fluido modelado:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [K \dot{\gamma}^{n-1} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)] + \mathcal{F}_{\text{tagelo}}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ \vec{u}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega_{\text{pared}}, t > 0, \\ \vec{u}(x, t = 0) = \vec{u}_0(x), \quad \nabla \cdot \vec{u}_0 = 0, \quad \vec{u}_0 = 0 & x \in \Omega, \\ p(x, t = 0) = p_0(x), & x \in \Omega, \\ \mathcal{F}_{\text{tagelo}}(x, t = 0) = \mathcal{F}_0(x), & x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (2.52)$$

En este sistema, la primera ecuación representa el balance de momento lineal derivado de la segunda ley de Newton aplicada al fluido. Este balance se expresa de forma vectorial, lo que implica que, en un espacio tridimensional, puede descomponerse en tres ecuaciones escalares, una por cada componente de la velocidad $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

La segunda ecuación corresponde a la condición de incompresibilidad del fluido, derivada de la conservación de la masa bajo el supuesto de que la densidad del fluido, ρ , es constante.

La tercera ecuación define una condición de frontera de tipo Dirichlet, que en este caso impone que la velocidad del fluido sea nula en las superficies sólidas del dominio, $\partial\Omega_{\text{pared}}$, reflejando la condición de no deslizamiento característica de los fluidos viscosos.

Finalmente, las últimas tres ecuaciones describen las condiciones iniciales del sistema. Estas incluyen:

- El campo de velocidad inicial, $\vec{u}_0(\vec{x})$, que satisface la condición de incompresibilidad ($\nabla \cdot \vec{u}_0 = 0$) y la adherencia en las paredes ($\vec{u}_0 = 0$ en $\partial\Omega_{\text{pared}}$).

- El campo de presión inicial, $p_0(\vec{x})$, que proporciona el estado inicial de presión en el dominio.
- El término $\mathcal{F}_{\text{flagelo}}$, que modela la fuerza externa aplicada por el flagelo, especificada en el tiempo inicial como $\mathcal{F}_0(\vec{x})$.

Este sistema de ecuaciones proporciona un marco teórico completo para analizar el comportamiento del fluido bajo las condiciones físicas impuestas, incluyendo las fuerzas viscosas no lineales asociadas al término proporcional a $\dot{\gamma}^{n-1}$.

2.4. Existencia de soluciones

Partimos del modelo general de un fluido incompresible con comportamiento no newtoniano, sujeto a una fuerza activa interna generada por el flagelo:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [K \dot{\gamma}^{n-1} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)] + \mathcal{F}_{\text{flagelo}}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ \vec{u}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega_{\text{pared}}, t > 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

Aplicamos ahora una serie de simplificaciones físicas:

- **Densidad constante:** $\rho = 1$, lo que elimina el factor de inercia multiplicativo, sin pérdida de generalidad, lo cual es habitual en modelos biofísicos a escala microscópica.
- **Régimen estacionario:** $\partial_t \vec{u} = 0$, lo que suprime la derivada temporal, suponiendo que el sistema ha alcanzado un estado permanente, anulando así el término inercial.
- **Comportamiento newtoniano:** $n = 1$ y $K = \mu > 0$ constante. En este caso,

$$\nabla \cdot [\mu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)] = \mu \Delta \vec{u} \quad (\text{por incomprensibilidad}).$$
- **Fuerza estacionaria:** Definimos $f := \mathcal{F}_{\text{flagelo}}$ modela la fuerza motriz generada por el movimiento del flagelo y se considera constante en el tiempo.

Bajo estas hipótesis, el sistema (2.48) se reduce a:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = f & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.54)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática.

Estas hipótesis no solo simplifican el análisis matemático, sino que también reflejan condiciones físicas realistas para el estudio del movimiento espermático en un fluido viscoso bajo régimen estacionario. Bajo estas consideraciones, el sistema se reduce a la siguiente formulación estacionaria.

2.4.1. Sistema estacionario de Navier–Stokes y formulación débil

Consideramos el siguiente sistema estacionario de Navier–Stokes:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (2.55)$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (ver en 2.1.1) un dominio abierto, acotado y con frontera suficientemente regular. Donde $\nu > 0$ denota la viscosidad cinemática del fluido, $f \in V'$ representa una fuerza externa estacionaria, y se imponen condiciones de contorno homogéneas de tipo Dirichlet (2.1.2).

2.4.2. Marco funcional para el método de Galerkin

A continuación desarrollando el marco funcional adecuado y la formulación débil que permitirá aplicar el método de Faedo–Galerkin para demostrar la existencia de soluciones.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto limitado con frontera de clase C^1 . Recordemos que

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$$

es el espacio de funciones test (Definición 2.1.59), el cual es separable (2.1.11) y lleva la topología de convergencia sobre soportes compactos.

Definimos el espacio de campos vectoriales de prueba divergencia–libre:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega)^2 &= \{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = 1, 2 \}, \\ \mathcal{V} &= \{ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^2 : \nabla \cdot \varphi = 0 \}. \end{aligned}$$

Al ser este espacio separable, su producto finito $\mathcal{D}(\Omega)^2$ también lo es. Dado que $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(\Omega)^2$ es un subespacio lineal, hereda la separabilidad) y es pre–hilbertiano, ya que en $\mathcal{D}(\Omega)^2$ definimos el producto interno en el espacio \mathcal{V} como el inducido por L^2 :

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{V}} := \int_{\Omega} \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varphi_i(x) \psi_i(x) dx, \quad (2.56)$$

con norma asociada $\|\varphi\|_{\mathcal{V}} := (\varphi, \varphi)_{\mathcal{V}}^{1/2}$.

Definimos

$$V = \overline{\mathcal{V}}^{H_0^1(\Omega)^2}$$

Es decir,

$$V = \{ u \in H_0^1(\Omega)^2 \mid \exists \{ \varphi_n \} \subset \mathcal{V}, \varphi_n \rightarrow u \text{ en } H_0^1(\Omega)^2 \},$$

2.4. Existencia de soluciones

donde la cerradura se toma en el espacio $H_0^1(\Omega)^2$ con la norma $\|\cdot\|_{H^1}$ (véase Definición 2.1.57 y Observación sobre cerradura de subespacios).

El espacio V equipado con el producto interno

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \, dx \quad (2.57)$$

y la norma asociada $\|u\|_V = (u, u)_V^{1/2}$ es un espacio de Hilbert (2.1.49).

Definimos

$$H = \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)^2} = \{u \in L^2(\Omega)^2 : \exists \{\varphi_n\} \subset \mathcal{V}, \varphi_n \rightarrow u \text{ en } L^2(\Omega)^2\}.$$

con condiciones de contorno implícitas de traza nula en $\partial\Omega$.

En H definimos el producto interno

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) \, dx, \quad (2.58)$$

y la norma asociada $\|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}$. Con ello, H es un espacio de Hilbert, separable.

Estos espacios son reflexivos, en particular, $\mathcal{V} \subset H_0^1(\Omega)^2$, y como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Sobolev (ver en 2.1.74), que a su vez es un espacio de Hilbert y por tanto reflexivo (ver Definición 2.1.49 y Corolario 2.1.5), se concluye que \mathcal{V} es reflexivo como subespacio cerrado (ver Proposición 2.1.9).

Los espacios definidos satisfacen las siguientes inclusiones continuas y densas:

$$\mathcal{V} \subset V \subset H,$$

En cada paso:

$$\mathcal{V} \hookrightarrow V \quad \text{y} \quad V \hookrightarrow H$$

- $V \rightarrow H$: esta inclusión es continua gracias a la desigualdad de Poincaré (Lema de Rellich–Kondrachov 2.1.2), que asegura $\|u\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2}$, y es además compacta por el mismo Lema de Rellich–Kondrachov (2.1.2).
- $\mathcal{V} \rightarrow V$: como \mathcal{V} es denso en V y ambas llevan la topología inducida por la norma de $H_0^1(\Omega)^2$, la inclusión es continua, pero no compacta (pues \mathcal{V} no es completo).

Y por último vamos a definir el dual de nuestro V : Su **espacio dual** V' (ver Definición 2.1.45) está formado por todas las formas lineales continuas sobre V :

$$V' = \{\ell : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \ell \text{ es lineal y continua}\},$$

con la norma $\|\ell\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\ell(v)|$.

2.4.3. Formulación débil

Partimos de la ecuación de Navier–Stokes estacionaria:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega.$$

En la formulación débil queremos encontrar la velocidad u tal que

$$u \in V, \quad f \in V',$$

Multiplicamos escalarmente por una función test $\mathbf{v} \in V$, es decir, de traza nula y divergencia cero, y se obtiene:

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} - \nu(\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla p) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.59)$$

Posteriormente, integramos cada término sobre el dominio Ω

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} \, dx - \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx. \quad (2.60)$$

Paso 1: término de viscosidad. En la formulación débil interpretamos

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad (2.61)$$

que, tras aplicar la identidad de Green (integración por partes), se transforma en

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, dS.$$

Aquí, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ es la derivada normal de \mathbf{u} en la frontera $\partial \Omega$, donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior.

Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \subset H_0^1(\Omega)^2$, las funciones se anulan en la frontera, es decir, $\mathbf{v}|_{\partial \Omega} = \mathbf{0}$. Por tanto, el término de frontera desaparece:

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, dS = 0.$$

De esta forma, obtenemos la relación fundamental para la formulación débil, que puede expresarse mediante el producto interno en el espacio V :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V := \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^{2 \times 2} \times L^2(\Omega)^{2 \times 2}}. \quad (2.62)$$

note que

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^{2 \times 2} \times L^2(\Omega)^{2 \times 2}} = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V.$$

Paso 2: término de presión.

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \, dx. \quad (2.63)$$

Usamos la identidad de divergencia en cada término:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \, dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) \, dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx.$$

Por el Teorema de la Divergencia,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) \, dx = \int_{\partial\Omega} p v_i n_i \, dS = 0,$$

puesto que $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$. Por tanto,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \, dx = - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx.$$

Sumando en i y usando $\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_i \partial_i v_i = 0$ se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dx = 0.$$

Paso 3: término convectivo. Se deja en su forma trilineal:

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v \, dx = b(u, u, v), \quad (2.64)$$

donde

$$b(u, u, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx.$$

Vamos a estudiar la continuidad de b (Definición 2.1.75): En dimensión 2 utilizamos la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (Proposición 2.1.2 con $p = 4$) y la desigualdad de Hölder (Teorema 2.1.7):

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |b(u, u, v)| &\leq \sum_{i,j} \|u_j \partial_{x_j} u_i\|_{L^{4/3}(\Omega)} \|v_i\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i,j} \|u_j\|_{L^4(\Omega)} \|\partial_{x_j} u_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_1^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_2 \|u\|_V^2 \|v\|_V, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ y la desigualdad de Poincaré $\|u\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2}$. Así, existe $C > 0$ tal que

$$|b(u, u, v)| \leq C \|u\|_V^2 \|v\|_V,$$

lo que demuestra la continuidad de la forma trilineal $b : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Capítulo 2. Desarrollo

Paso 4: término de la fuerza externa. Dado que $\mathbf{f} \in V' \subset \mathcal{D}'(\Omega)^2$, la acción sobre $\mathbf{v} \in V \subset \mathcal{D}(\Omega)^2$ se interpreta como el emparejamiento dual

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{v}(x) dx, \quad (2.65)$$

que concuerda con el caso distribucional cuando $\mathbf{f} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)^2$ (ver en 2.1.52).

Finalmente, sustituyendo en 2.60 los cuatro términos desarrollados, viscosidad 2.61, presión 2.63, término convectivo 2.64 y fuerza externa 2.65 obtenemos:

$$\nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^{2 \times 2} \times L^2(\Omega)^{2 \times 2}} + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.66)$$

2.4.4. Definición operador A

$A = -\Delta$ en el espacio H Definimos el operador

$$A : D(A) \subset H \longrightarrow V'$$

mediante la ternaria $(V, H, ((\cdot, \cdot))_V)$, con dominio

$$D(A) = \left\{ u \in V : \exists f \in H \text{ tal que } (f, v)_H = (u, v)_V \quad \forall v \in V \right\},$$

Sea $u \in D(A)$. Entonces:

1. Por definición, existe $f = (f_1, f_2) \in H$ tal que

$$(f, v)_H = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i(x) v_i(x) dx = (u, v)_V = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in V.$$

Producto interno usado: $(u, v)_V = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^{2 \times 2} \times L^2(\Omega)^{2 \times 2}}$.

2. Tomando $v = \varphi \in V$, ambas expresiones coinciden con

$$\sum_{i=1}^2 \langle -\Delta u_i, \varphi_i \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i dx.$$

Por unicidad en $\mathcal{D}'(\Omega)$, se concluye que $f_i = -\Delta u_i$ (en el sentido de derivada débil), para $i = 1, 2$.

3. En consecuencia, $Au = f = -\Delta u$ en V' , y la acción dual se escribe:

$$\langle Au, v \rangle_{V' \times V} = (f, v)_H = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (-\Delta u_i) v_i dx.$$

4. Finalmente, aplicando integración por partes componente a componente y usando las condiciones de contorno homogéneas $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$, se tiene:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u_i) v_i dx = \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx.$$

Por tanto, obtenemos:

$$\langle Au, v \rangle_{V' \times V} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^{2 \times 2} \times L^2(\Omega)^{2 \times 2}} = (u, v)_V.$$

Tras la identificación de A con $-\Delta$ en el espacio V , entonces existen

$$\{\omega_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset D(A), \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_\nu \rightarrow \infty,$$

concluyendo que:

- Existe una base ortonormal $\{\omega_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset D(A)$ de H (ver Definición 2.1.5 en preliminares)
- La misma colección, es ortonormal en V respecto del producto interior $(\cdot, \cdot)_V$, lo que equivale a ser ortogonal en $H_0^1(\Omega)^2$ y normalizada en $L^2(\Omega)^2$.

2.4.5. Primera etapa: sistema aproximado

Sea $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ la sucesión de autofunciones de A definida en la Sección anterior. Definimos el subespacio de Galerkin de dimensión m :

$$V_m = \text{span}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}.$$

Justificación de la aproximación Galerkin y paso al límite Al considerar la sucesión de subespacios finito-dimensionales

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m \subset \dots \subset V$$

donde $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de autofunciones de A , obtenemos:

- **Sistema aproximado:** En cada V_m resolvemos el sistema de ecuaciones ordinarias en las incógnitas $\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)$, cuya solución $u_m(t)$ es la mejor aproximación en V_m .
- **Estimaciones a priori y compacidad:** Las estimaciones obtenidas aseguran que $\{u_m\}$ está acotada en $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$. Por el Lema de Rellich-Kondrachov (2.1.2), la inclusión $V \hookrightarrow H$ es compacta, lo que permite extraer una subsecuencia $\{u_{m_k}\}$ que converge:

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \text{ en } L^2(0, T; V), \quad u_{m_k} \rightarrow u \text{ en } L^2(0, T; H).$$

- **Paso al límite:** Al hacer $k \rightarrow \infty$, se comprueba que el límite u satisface la formulación débil original en V . La densidad de $\bigcup V_m$ asegura que cualquier $v \in V$ puede aproximarse por $v_m \in V_m$ y tomar límites en cada término.

En consecuencia, el método de Faedo-Galerkin combinado con el argumento de compacidad demuestra la existencia de una solución débil $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ del sistema de Navier-Stokes estacionario.

tenemos la equivalencia:

$$u_m \in V_m \iff \exists (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m \text{ tales que } u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i.$$

Demostración (esbozo):

Capítulo 2. Desarrollo

\Rightarrow Si $u_m \in V_m$, por definición de espacio generado, $\{\omega_i\}_{i=1}^m$ es una base de V_m . Entonces existen coeficientes únicos ξ_i que expresan u_m como combinación lineal de esa base.

\Leftarrow Si existen ξ_1, \dots, ξ_m tales que $u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i$, entonces por construcción u_m pertenece a $\text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_m\} = V_m$.

La unicidad de los ξ_i se sigue de la linealidad e independencia de $\{\omega_i\}$.

$$u_m \in V_m \iff u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i \quad (2.67)$$

Partimos de la ecuación débil proyectada sobre ω_j en V_m (sustituir 2.66):

$$\nu (u_m, \omega_j)_V + b(u_m, u_m, \omega_j) = \langle f, \omega_j \rangle_{V' \times V}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.68)$$

Paso 1: sustituir $u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i$. Por linealidad:

$$\begin{aligned} (u_m, \omega_j)_V &= \left(\sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i, \omega_j \right)_V = \sum_{i=1}^m \xi_i (\omega_i, \omega_j)_V, \\ b(u_m, u_m, \omega_j) &= b\left(\sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i, \sum_{k=1}^m \xi_k \omega_k, \omega_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \xi_i \xi_k b(\omega_i, \omega_k, \omega_j). \end{aligned}$$

Paso 2: insertar en 2.68:

$$\nu \sum_{i=1}^m \xi_i (\omega_i, \omega_j)_V + \sum_{i,k=1}^m \xi_i \xi_k b(\omega_i, \omega_k, \omega_j) = \langle f, \omega_j \rangle_{V' \times V}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Paso 3: explotación de la propiedad de autofunción

Recordemos que cada ω_i satisface

$$A\omega_i = \lambda_i \omega_i \quad \text{en } V',$$

y que por definición de A

$$(\omega_i, \omega_j)_V = \langle A\omega_i, \omega_j \rangle_{V' \times V} = (\lambda_i \omega_i, \omega_j)_H.$$

Ahora, puesto que las $\{\omega_i\}$ están normalizadas ortonormalmente en H , se cumple

$$(\omega_i, \omega_j)_H = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Por tanto,

$$((\omega_i, \omega_j))_V = \lambda_i (\omega_i, \omega_j)_H = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Entonces la suma

$$\sum_{i=1}^m \xi_i (\omega_i, \omega_j)_V = \sum_{i=1}^m \xi_i \lambda_i \delta_{ij} = \xi_j \lambda_j,$$

pues todos los términos con $i \neq j$ se anulan ($\delta_{ij} = 0$), quedando únicamente el término $i = j$. De este modo, el término viscoso en la ecuación aproximada se reduce a

$$\nu \sum_{i=1}^m \xi_i (\omega_i, \omega_j)_V = \nu \xi_j \lambda_j.$$

Quedando la ecuación

$$\nu \xi_j \lambda_j + b\left(\sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i, \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i, \omega_j\right) = \langle f, \omega_j \rangle_{V' \times V} \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.69)$$

Definición de η_j :

$$\eta_j = \nu \xi_j \lambda_j + \sum_{i,k=1}^m \xi_i \xi_k b(\omega_i, \omega_k, \omega_j) - \langle f, \omega_j \rangle_{V' \times V} \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.70)$$

Obsérvese que cada η_j está definida como una combinación de los coeficientes $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ en la expansión $u_m = \sum_i \xi_i \omega_i$, es decir,

$$\eta_j = \eta_j(\xi_1, \dots, \xi_m).$$

Aunque en su expresión aparecen las autofunciones ω_i , éstas son fijadas de antemano y la única incógnita es el vector ξ . Por tanto, $\eta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un mapeo puramente en términos de los coeficientes ξ_i .

La función $\eta(\xi)$ reúne todos los residuos del sistema aproximado y nos permite aplicar el Lema del ángulo agudo.

2.4.6. Lema del Ángulo Agudo

Definimos la aplicación

$$P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \mapsto P(\xi) = \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m),$$

donde cada componente η_j está dada por 2.70

Funcionamiento de P : La función P toma un vector $\xi \in \mathbb{R}^m$ que representa los coeficientes en la base $\{\omega_i\}$ y devuelve otro vector $\eta \in \mathbb{R}^m$ que mide el residuo del sistema aproximado proyectado en cada ω_j . es continua por las siguientes razones:

La función lineal $\xi \mapsto \nu \lambda_j \xi_j$ es claramente continua en \mathbb{R}^m .

El término $\xi \mapsto b(\sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i, \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i, \omega_j)$ es continuo porque: La forma trilineal

$$b : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua como vimos antes. La aplicación lineal $\xi \mapsto \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i$ es continua desde \mathbb{R}^m a V . Por composición y bilinealidad, b aplicada a estas combinaciones lineales depende de ξ de forma polinómica continua.

El término constante $\langle f, \omega_j \rangle_{V' \times V}$ no depende de ξ y, por tanto, no afecta a la continuidad.

Capítulo 2. Desarrollo

Sustitución en la ecuación 2.70 Para $\xi \in \mathbb{R}^m$, desarrollamos el producto escalar usual en \mathbb{R}^m :

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} = \sum_{j=1}^m \eta_j \xi_j = \sum_{j=1}^m (\nu \lambda_j \xi_j + b(u_m, u_m, \omega_j) - \langle f, \omega_j \rangle_{V' \times V}) \xi_j, \quad (2.71)$$

donde $u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i$.

Esto se reagrupa como

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} = \nu \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2 + b \left(u_m, u_m, \sum_{j=1}^m \xi_j \omega_j \right) - \langle f, u_m \rangle_{V' \times V}.$$

Pero por propiedades (ver 2.1.5) de la forma trilineal y el espacio V_m ,

$$b(u_m, u_m, u_m) = 0.$$

por lo que queda

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} = \nu \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2 - \langle f, u_m \rangle_{V' \times V}. \quad (2.72)$$

Comprobar que P es definida positiva en la esfera adecuada Queremos mostrar que existe $\rho_0 > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$ con $\|\xi\| = \rho_0$ se cumple

$$(P(\xi), \xi) = \sum_{j=1}^m \eta_j \xi_j > 0.$$

1. El término viscoso:

$$\nu \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2.$$

Recordemos que

$$u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i,$$

donde $\{\omega_i\}$ es la base ortonormal de autofunciones de A en H , con autovalores asociados $\lambda_i > 0$ que cumplen

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m.$$

Por definición de la norma en V y la propiedad del operador A , sabemos que

$$\|u_m\|_V^2 = (u_m, u_m)_V = \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2,$$

Además, dado que la base $\{\omega_j\}$ es ortonormal en H (ver Definición 2.1.5), para cada j se cumple

$$(\omega_j, \omega_j)_H = 1,$$

y para $j \neq k$,

$$(\omega_j, \omega_k)_H = 0.$$

Por lo tanto, la norma de $u_m = \sum_{j=1}^m \xi_j \omega_j$ en H se calcula como

$$\|u_m\|_H^2 = (u_m, u_m)_H = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \xi_j \xi_k (\omega_j, \omega_k)_H = \sum_{j=1}^m \xi_j^2,$$

que coincide exactamente con la norma euclídea de $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ en \mathbb{R}^m :

$$\|u_m\|_H^2 = \|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^m \xi_j^2.$$

Finalmente, usando que λ_1 es el menor autovalor positivo, se aplica la desigualdad de Rayleigh (Definición 2.1.76) para obtener

$$\|u_m\|_V^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2 \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^m \xi_j^2 = \lambda_1 \|u_m\|_H^2.$$

Por lo tanto,

$$\nu \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2 = \nu \|u_m\|_V^2 \geq \nu \lambda_1 \|u_m\|_H^2 = \nu \lambda_1 \|\xi\|^2.$$

2. El término de la fuerza externa: Sabemos que $f \in V'$ es un funcional lineal y continuo sobre V , y que $u_m \in V_m \subset V$. Por la continuidad de f y la definición de la norma dual,

$$|\langle f, u_m \rangle_{V' \times V}| \leq \|f\|_{V'} \|u_m\|_V.$$

por tanto, existe una constante $C > 0$ (dependiente de la base $\{\omega_i\}$) tal que

$$\|u_m\|_V \leq C \|\xi\|,$$

donde $\|\xi\| = (\sum_{i=1}^m \xi_i^2)^{1/2}$ es la norma euclídea en \mathbb{R}^m .

Por tanto,

$$|\langle f, u_m \rangle_{V' \times V}| \leq \|f\|_{V'} \|u_m\|_V \leq \|f\|_{V'} C \|\xi\|.$$

3. Conclusión:

Juntando todo, y sustituyendo en 2.72

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq \nu \lambda_1 \|\xi\|^2 - \|f\|_{V'} C \|\xi\|. \quad (2.73)$$

Para $\|\xi\| = \rho_0$ suficientemente grande, el término cuadrático domina y se obtiene

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} > 0.$$

Por tanto, existe $\rho_0 > 0$ tal que P es definida positiva en la esfera $\{\xi : \|\xi\| = \rho_0\}$.

Vamos a encontrar este radio: Partimos de la desigualdad obtenida para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$, 2.73

Capítulo 2. Desarrollo

Caso 1: $\|u_m\|_V = 0$, entonces directamente

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq 0,$$

lo que satisface la condición requerida para cualquier radio $\rho > 0$.

Caso 2: $\|u_m\|_V \neq 0$, partimos de la desigualdad obtenida para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$:

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq \nu \|u_m\|_V^2 - \|f\|_{V'} \|u_m\|_V.$$

Como $\|u_m\|_V > 0$ en este caso, podemos dividir ambos lados de la desigualdad por $\|u_m\|_V$. Esto nos da:

$$\frac{(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m}}{\|u_m\|_V} \geq \nu \|u_m\|_V - \|f\|_{V'}.$$

Queremos garantizar que $(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq 0$. Observamos que

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} = \|u_m\|_V \cdot \frac{(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m}}{\|u_m\|_V}.$$

Por lo tanto, para que $(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq 0$, es necesario que el factor $\frac{(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m}}{\|u_m\|_V}$ sea mayor o igual a cero, es decir,

$$\frac{(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m}}{\|u_m\|_V} \geq 0.$$

De la desigualdad previa se deduce que para esto basta que

$$\nu \|u_m\|_V - \|f\|_{V'} \geq 0,$$

es decir,

$$\nu \|u_m\|_V \geq \|f\|_{V'}.$$

Dividiendo ambos lados entre $\nu > 0$, llegamos a la condición crucial

$$\|u_m\|_V \geq \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'} =: c_1. \quad (2.74)$$

Relación entre $\|u_m\|_V$ y $\|\xi\|$ Recordemos que el vector $u_m \in V_m$ está representado en la base ortonormal $\{\omega_j\}_{j=1}^m$ por

$$u_m = \sum_{j=1}^m \xi_j \omega_j,$$

donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ son los coeficientes.

La norma al cuadrado se expresa como

$$\|u_m\|_V^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2,$$

donde $\lambda_j > 0$ son los autovalores asociados a cada autofunción ω_j .

Para facilitar la estimación, definimos

$$\beta_m := \min_{1 \leq j \leq m} \lambda_j,$$

es decir, el menor autovalor entre los primeros m .

Como $\lambda_j \geq \beta_m$ para todo j , se tiene la desigualdad

$$\|u_m\|_V^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \xi_j^2 \geq \beta_m \sum_{j=1}^m \xi_j^2 = \beta_m \|\xi\|^2,$$

donde $\|\xi\|$ es la norma euclídea en \mathbb{R}^m .

Esta relación es crucial porque nos permite controlar la norma en V mediante la norma estándar de los coeficientes ξ . En particular, muestra que un crecimiento en $\|\xi\|$ induce un crecimiento proporcional en $\|u_m\|_V$, con la constante de proporcionalidad $\sqrt{\beta_m}$.

Elección del radio ρ_0 Del paso anterior, recordamos la condición para que

$$(P(\xi), \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq 0,$$

que requiere que

$$\|u_m\|_V \geq c_1 := \frac{\|f\|_{V'}}{\nu}.$$

Aplicando la desigualdad anterior,

$$\|u_m\|_V \geq \sqrt{\beta_m} \|\xi\|,$$

seguimos que basta imponer

$$\sqrt{\beta_m} \|\xi\| \geq c_1,$$

es decir,

$$\|\xi\| \geq \frac{c_1}{\sqrt{\beta_m}}.$$

Por lo tanto, definimos el radio crítico

$$\rho_0 := \frac{c_1}{\sqrt{\beta_m}} = \frac{\|f\|_{V'}}{\nu \sqrt{\beta_m}}.$$

Este valor ρ_0 representa la norma mínima en \mathbb{R}^m que deben tener los coeficientes ξ para asegurar que el vector u_m cumple la condición necesaria para que el producto $(P(\xi), \xi)$ sea no negativo.

Conclusión Con este valor ρ_0 , el Lema del Ángulo Agudo garantiza la existencia de $\xi^* \in \overline{B}_{\rho_0}(0)$ tal que

$$P(\xi^*) = 0,$$

es decir, existe solución del sistema aproximado Galerkin.

2.4.7. Estimación a priori detallada del sistema aproximado

Partimos del sistema aproximado en V_m :

$$\nu(u_m, \omega_j)_V + b(u_m, u_m, \omega_j) = \langle f, \omega_j \rangle_{V' \times V}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.75)$$

donde

$$u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i.$$

Multiplicamos 2.75 por ξ_j y sumamos sobre $j = 1, \dots, m$ para obtener una expresión escalar que permita aplicar el Lema del Ángulo Agudo y analizar la positividad del operador asociado al sistema aproximado:

$$\sum_{j=1}^m \xi_j (\nu(u_m, \omega_j))_V + b(u_m, u_m, \omega_j) = \sum_{j=1}^m \xi_j \langle f, \omega_j \rangle_{V' \times V}.$$

Por linealidad y definición del producto en V ,

$$\nu(u_m, u_m)_V + b(u_m, u_m, u_m) = \langle f, u_m \rangle_{V' \times V}.$$

De la propiedad antisimétrica de la forma trilineal (Lema 2.1.5) se deduce que

$$b(u_m, u_m, u_m) = 0,$$

por lo que la expresión se reduce a

$$\nu \|u_m\|_V^2 = \langle f, u_m \rangle_{V' \times V}.$$

Aplicamos ahora la desigualdad de Cauchy–Schwarz (ver en 2.1.77) para dualidad entre V' y V ,

$$|\langle f, u_m \rangle_{V' \times V}| \leq \|f\|_{V'} \|u_m\|_V.$$

Luego, usando la desigualdad de Young para productos, identificamos

$$a = \|f\|_{V'}, \quad b = \|u_m\|_V,$$

de modo que

$$\|f\|_{V'} \|u_m\|_V \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \|u_m\|_V^2.$$

Para elegir el parámetro ε , consideramos la desigualdad previa:

$$\nu \|u_m\|_V^2 = \langle f, u_m \rangle_{V' \times V} \leq \|f\|_{V'} \|u_m\|_V.$$

Queremos balancear el término cuadrático $\|u_m\|_V^2$ para que al reorganizar la desigualdad podamos despejar una cota para $\|u_m\|_V^2$.

Para ello, elegimos $\varepsilon = \nu > 0$, que es exactamente el coeficiente que multiplica a $\|u_m\|_V^2$ en el lado izquierdo.

Con esta elección,

$$\|f\|_{V'} \|u_m\|_V \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \|u_m\|_V^2.$$

Sustituyendo en la desigualdad original,

$$\nu \|u_m\|_V^2 \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \|u_m\|_V^2.$$

Restando $\frac{\nu}{2} \|u_m\|_V^2$ a ambos lados para agrupar términos semejantes,

$$\frac{\nu}{2} \|u_m\|_V^2 \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{2\nu}.$$

Finalmente, despejando,

$$\|u_m\|_V^2 \leq \frac{1}{\nu^2} \|f\|_{V'}^2.$$

Interpretación final Esta cota uniforme en m demuestra que la sucesión $\{u_m\}$ está acotada en V , condición fundamental para aplicar el método de la compacidad y extraer subsecuencias convergentes.

Con esta estimación y el Lema del Ángulo Agudo aplicado anteriormente, concluimos que existe una solución u_m para el sistema aproximado.

Con esta base, estaremos listos para abordar el paso al límite y analizar las convergencias de las soluciones aproximadas, garantizando así la existencia de una solución débil al problema original.

2.4.8. Convergencias y paso al límite

Con la sucesión de soluciones aproximadas $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset V_m \subset V$ obtenida del sistema finito-dimensional, y la estimación a priori

$$\|u_m\|_V \leq C, \quad \text{con } C = \frac{1}{\nu} \|f\|_{V'},$$

sabemos que $\{u_m\}$ está acotada en V . Por la reflexividad de V y el teorema de Banach–Alaoglu (ver en 2.1.10), existe una subsecuencia (denotada también $\{u_m\}$) y un elemento $u \in V$ tal que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } V.$$

Esto significa que para todo $v \in V$, las integrales de productos escalares con v convergen:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (u_m, v)_V = (u, v)_V.$$

Esta convergencia es suficiente para pasar al límite en términos lineales y garantizar la estabilidad de la formulación variacional.

Capítulo 2. Desarrollo

Además, por el Lema de Rellich–Kondrachov (ver lema 2.1.2), la inclusión

$$V \hookrightarrow H$$

es compacta, por lo que

$$u_m \rightarrow u \text{ fuertemente en } H,$$

lo que implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_H = 0,$$

asegurando que las aproximaciones u_m se acercan en norma L^2 a u .

El elemento $u \in V$ obtenido como límite débil de la subsecuencia $\{u_m\}$ representa la función que será la solución débil del problema estacionario de Navier–Stokes.

Convergencia en los términos lineales La convergencia débil en V y fuerte en H permite pasar al límite en los términos lineales de la formulación débil, concretamente en

$$\nu(u_m, v)_V = \nu \int_{\Omega} \nabla u_m : \nabla v,$$

podemos intercambiar el límite y la integral gracias a la continuidad del producto interior y a la convergencia débil, obteniendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu(u_m, v)_V = \nu(u, v)_V = \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v.$$

Convergencia en el término convectivo Para el término no lineal convectivo

$$b(u_m, u_m, v) = \int_{\Omega} (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot v,$$

la convergencia fuerte en H y débil en V junto con las propiedades de la forma trilineal (continuidad y antisimetría) permiten concluir que

$$b(u_m, u_m, v) \rightarrow b(u, u, v), \quad \forall v \in V.$$

Convergencia en el término de la fuerza externa Dado que $f \in V'$ es funcional lineal continuo, por la convergencia fuerte $u_m \rightarrow u$ en H y continuidad de la dualidad se tiene

$$\langle f, u_m \rangle_{V' \times V} \rightarrow \langle f, u \rangle_{V' \times V}.$$

Conclusión Al pasar al límite en la formulación débil aproximada, para todo $v \in V$ se cumple

$$\nu(u, v)_V + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle_{V' \times V},$$

lo que demuestra que $u \in V$ es una solución débil del sistema estacionario de Navier–Stokes.

Capítulo 3

Análisis de impacto

Desde el punto de vista personal, este trabajo ha supuesto una transformación profunda en mi comprensión de las matemáticas aplicadas y su capacidad para describir fenómenos complejos del mundo real. El estudio ha requerido la asimilación y aplicación de herramientas como la teoría de la medida, el análisis funcional, la teoría de distribuciones y los fundamentos de la mecánica de fluidos, así como un acercamiento a nociones fundamentales de biología y física, particularmente en lo relativo a la locomoción espermática.

Este proceso de aprendizaje me ha motivado firmemente a continuar mi formación académica, impulsándome a matricularme en una maestría en Matemáticas, con el objetivo de seguir profundizando en la investigación de ecuaciones en derivadas parciales, dinámica de fluidos y modelos matemáticos aplicados a sistemas biológicos. Además, me gustaría dar continuidad a este trabajo en mis estudios de posgrado, ampliando el análisis a casos tridimensionales, condiciones con bordes móviles, explorando entornos fluidos más complejos y, eventualmente, desarrollando simulaciones computacionales que complementen el enfoque teórico. Este trabajo ha marcado, en definitiva, un antes y un después en mi vocación científica, y constituye una base sólida para futuras investigaciones.

Tras compartir este proyecto con personas de mayor experiencia en el ámbito científico y profesional, he podido constatar que su temática presenta aplicaciones directas en el campo de la biotecnología reproductiva. Comprender mejor la dinámica del movimiento espermático en medios biológicos puede contribuir a optimizar técnicas de fecundación in vitro, selección espermática y simulación de medios artificiales que reproduzcan condiciones biológicas reales, impactando positivamente en la eficiencia de los tratamientos de fertilidad humana y animal. Empresas dedicadas a la fertilidad asistida o al desarrollo de tecnologías de microfluidos aplicados a la medicina podrían beneficiarse de modelos matemáticos más precisos y adaptados.

Desde una perspectiva más amplia, este trabajo también se inscribe en el campo general de la modelización de fluidos, donde las ecuaciones de Navier–Stokes juegan un papel fundamental. Las aplicaciones de estos modelos son esenciales en industrias como la aeronáutica, la automoción, la meteorología, la simulación

Capítulo 3. Análisis de impacto

computacional, e incluso en ámbitos creativos como los videojuegos, el cine de animación o el diseño de microrrobots. Por tanto, avanzar en la comprensión de estas ecuaciones, así como en técnicas numéricas asociadas como el método de Galerkin, tiene un impacto transversal sobre múltiples sectores productivos que requieren simulación y control preciso de fluidos.

Además, desde el punto de vista de la investigación matemática, el estudio se enmarca en una línea de trabajo fundamental: la comprensión profunda de las ecuaciones de Navier–Stokes. Este sistema, formulado en el siglo XIX, sigue planteando enormes desafíos teóricos. En particular, uno de los Problemas del Milenio del Clay Mathematics Institute consiste en demostrar la existencia y suavidad de soluciones para las Navier–Stokes en tres dimensiones bajo condiciones generales. Resolver este problema supondría un avance teórico colosal en el entendimiento del comportamiento de los fluidos.

El trabajo aquí desarrollado no resuelve, por supuesto, ese desafío, pero sí profundiza en una versión estacionaria y bidimensional del problema, contribuyendo a la consolidación de técnicas como el método de Galerkin y el estudio de soluciones débiles.

Este trabajo invita a reflexionar sobre la potencia del lenguaje matemático como herramienta para describir fenómenos tan fundamentales como el nacimiento de la vida. Modelar matemáticamente el proceso por el cual los espermatozoides se desplazan hasta fecundar el óvulo, en un entorno físico-biológico altamente complejo, supone un ejercicio de abstracción que trasciende el cálculo y se adentra en la esencia misma del conocimiento humano.

Esta línea de investigación no solo tiene valor técnico, sino también simbólico: entender cómo comienza la vida desde un punto de vista estructural y matemático es, sin duda, uno de los grandes retos intelectuales que la ciencia puede abordar. En este sentido, el trabajo conecta con una dimensión filosófica profunda: estudiar el origen de la vida a través de las matemáticas es, en cierto modo, estudiar nuestro propio origen como seres humanos.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

El presente trabajo ha abordado el estudio de la existencia de soluciones para el sistema de Navier–Stokes 2D incompresible en régimen estacionario, con el objetivo de modelar el movimiento de espermatozoides en medios fluidos biológicos. Para ello, se ha desarrollado una doble línea de trabajo: por un lado, la modelización físico-biológica del sistema, y por otro, el análisis matemático de su resolución mediante técnicas funcionales.

En la primera parte, se ha conseguido construir un modelo adaptado al entorno biológico real en el que se produce la fecundación, incorporando tanto las propiedades del medio como el comportamiento de los espermatozoides.

En la segunda parte, se ha demostrado la existencia de soluciones débiles para dicho sistema utilizando el método de Faedo–Galerkin. Se ha definido correctamente la formulación débil del problema, se han establecido estimaciones a priori, y se han aplicado técnicas de compacidad para garantizar la convergencia de las aproximaciones. El trabajo realizado ofrece, por tanto, una base teórica rigurosa para la validez del modelo propuesto en el caso estacionario y en un fluido newtoniano.

Este trabajo deja abiertas varias vías de continuación:

- *Ampliar el análisis al caso tridimensional, donde el comportamiento de las soluciones es más complejo y aún menos comprendido desde el punto de vista teórico.*
- *Incorporar condiciones de contorno móviles o geometrías variables, que imiten con mayor realismo los límites del entorno biológico (como paredes del útero o de las trompas de Falopio).*
- *Extender el estudio de la existencia de soluciones a medios no Newtonianos que caracterizan al moco cervical.*
- *Complementar el análisis teórico con simulaciones numéricas que permitan visualizar y validar los resultados obtenidos, e incluso implementar experimentación computacional basada en esquemas Galerkin con elementos finitos.*

Capítulo 4. Conclusiones y trabajo futuro

- *Estudiar el acoplamiento del movimiento espermático con otros factores, como gradientes químicos (quimiotaxis), interacción con otros espermatozoides, o el papel de estructuras celulares internas.*

En definitiva, este trabajo representa un primer paso en la intersección entre el análisis matemático de ecuaciones en derivadas parciales, la dinámica de fluidos y la biología reproductiva. Se espera que los resultados aquí obtenidos puedan ser la base para futuras investigaciones más ambiciosas que combinen teoría, simulación y experimentación en el campo de la microlocomoción en biofluidos.

Bibliografía

- **Carvalho, A. N. (2007).** SMA 5826 - ANÁLISE I. Universidade Estadual de Maringá.
- **Cavalcanti, M. M., & Cavalcanti, V. N. D. (2010).** Introdução às Equações Diferenciais Parciais. UEM/DMA, Maringá. Livro Texto-Universidade Estadual de Maringá, DMA, 460 páginas.
- **Lewis, A. D. (2008).** Should we fly in the Lebesgue-designed airplane?—The correct defence of the Lebesgue integral. Preprint. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/228709758_Should_we_fly_in_the_Lebesgue-designed_airplane_The_correct_defense_of_the_Lebesgue_integral (consultado el 1 de junio de 2023).
- **Guo, B., Guo, C., Liu, Y., & Li, Q. (2018).** Non-Newtonian Fluids: A Dynamical Systems Approach. De Gruyter. ISBN: 978-3-11-054923-2, eISBN: 978-3-11-054961-4. Recuperado de <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110549614/html> (consultado el 1 de junio de 2023).
- **Lemarié-Rieusset, P. G. (2024).** The Navier–Stokes Problem in the 21st Century, Second Edition. CRC Press. ISBN: 978-0-367-48726-3. Recuperado de <https://www.taylorandfrancis.com/books/mono/10.1201/9781003042594/the-navier-stokes-problem-in-the-21st-century-second-edition> (consultado el 1 de junio de 2023).
- **Atabek, H., & Mangelsdorf, C. H. (1973).** Non-Newtonian Fluid Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts. Technical Department Copy, The Chicago Public Library.
- **Darby, R. (2001).** Chemical Engineering Fluid Mechanics, Second Edition, Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc., New York. ISBN: 0-8247-0444-4.

Anexos

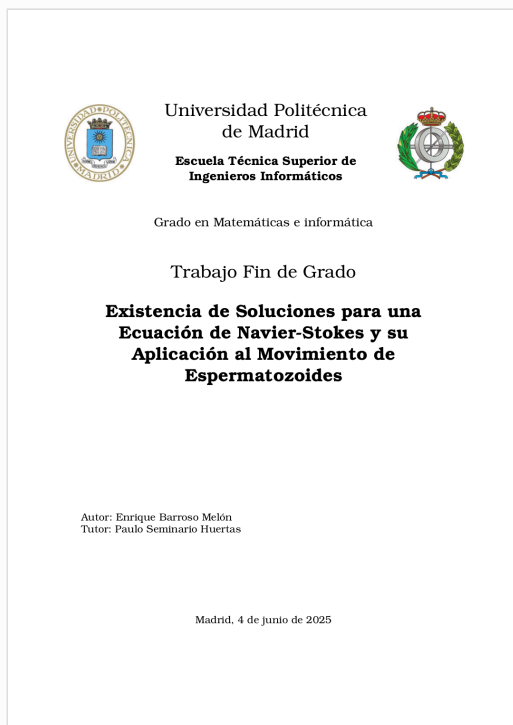


Recibo digital


Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: ENRIQUE BARROSO MELON
Título del ejercicio: Turnitin Memoria Final
Título de la entrega: TFG__Enrique_Barroso__GMI (1).pdf
Nombre del archivo: 30009_ENRIQUE_BARROSO_MELON_TFG__Enrique_Barroso__...
Tamaño del archivo: 900.4K
Total páginas: 86
Total de palabras: 23,645
Total de caracteres: 108,781
Fecha de entrega: 04-jun.-2025 07:35p. m. (UTC+0200)
Identificador de la entrega: 2692155950



Este documento esta firmado por



Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Fecha/Hora	Wed Jun 04 20:14:05 CEST 2025
Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Numero de Serie	561
Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)