

# El análisis gráfico de equilibrio de arcos, bóvedas y edificios. Un esquema de su desarrollo histórico

Santiago Huerta  
Universidad Politécnica de Madrid

## Resumen

El análisis gráfico de equilibrio se remonta a los inicios de la teoría de arcos. Visto en retrospectiva, parece obvio pues sólo hay que emplear la ley de composición de las fuerzas, descubierta por Stevin a fines del siglo xvii. Sin embargo, tuvieron que pasar dos siglos y medio hasta que, a mediados del siglo xix, la combinación del concepto de línea de empujes con las herramientas gráficas, permitió a arquitectos e ingenieros analizar, primero arcos, y luego cúpulas, bóvedas espaciales, y edificios complejos. Estos métodos gráficos fueron considerados entonces aproximados o incorrectos por la concentración en el análisis elástico. El profesor Heyman demostró en los años 1960 que el empleo de métodos de equilibrio, con una condición de resistencia del material (la fábrica tiene que trabajar a compresión), conduce a soluciones seguras. Hoy día el análisis de equilibrio es “moderno” y la teoría clásica elástica es “antigua”, aunque se formalice con complicados programas de ordenador. La historia es interesante en sí misma, pero quizá también arroje luz sobre la resistencia que existe hoy día contra el empleo de estos métodos de equilibrio

**Palabras clave:** equilibrio de arcos, bóvedas.

## The graphic analysis of the equilibrium of arches, vaults and buildings. An outline of its historical development

### Abstract

The graphical analysis of equilibrium goes back to the beginnings of the theory of arches. In retrospect, it seems obvious, since one only has to use the law of composition of forces, discovered by Stevin at the end of the 17<sup>th</sup> century. However, it took two and a half centuries before, in the middle of the 19<sup>th</sup> century, the combination of the line of thrust concept with graphical tools enabled architects and engineers to analyse first arches, then domes, spatial vaults, and complex buildings. These graphical methods were then considered approximate or incorrect because of the concentration on elastic analysis. Professor Heyman demonstrated in the 1960s that the use of equilibrium methods, with a material strength condition (masonry must work in compression), leads to safe solutions. Today, equilibrium analysis is ‘modern’ and classical elastic theory is ‘old’, even if it is formalised with complicated computer programs. The story is interesting in itself, but perhaps it also sheds light on the resistance that exists today against the use of these equilibrium methods.

**Keywords:** equilibrium of arches; vaults.

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la teoría científica de arcos y bóvedas de fábrica se conoce bastante bien. La memoria de Poncelet de 1852 sigue siendo una buena referencia y los libros sobre la historia general de la teoría de estructuras de Timoshenko (1953), Heyman (1998), Benvenuto (1991) y Kurrer (2018), permiten seguir esta historia particular dentro del marco general y guiarán al lector a artículos especializados. Las fuentes están recogidas en el libro de Becchi y Foce (2002). La visión general está clara, pero faltan por estudiar enfoques concretos. Este artículo se centra en el origen y evolución de los análisis gráficos de equilibrio

desde sus orígenes hasta la actualidad. El tema es interesante en sí mismo, pero es de gran importancia pues el profesor Heyman demostró en los años 1960 que el Teorema de la Seguridad valida el empleo de métodos de equilibrio que cumplan la condición del material: la fábrica tiene que trabajar a compresión. La seguridad de la estructura depende, pues, de la geometría. Este enfoque del equilibrio fue seguido por los antiguos constructores, que usaron reglas de proporción que llevaban a formas estables (Huerta 2004). En este artículo nos centramos en la búsqueda gráfica de estas soluciones. Se verá que las “herramientas” estuvieron

disponibles desde los inicios, pues para conocer la transmisión de los empujes en un arco basta con aplicar la ley de composición de las fuerzas (descubierta por Stevin a finales del siglo xvi). Que se tardaran más de dos siglos hasta la popularización del análisis gráfico de equilibrio mediante el empleo de técnicas de composición de fuerzas (primero), y después con el empleo combinado de los polígonos funiculares y de fuerzas, es un “fenómeno” que requiere estudio.

### PRIMEROS ANÁLISIS DE EQUILIBRIO: LA CATENARIA Y EL POLÍGONO FUNICULAR

El análisis de equilibrio de arcos, esto es el empleo de las ecuaciones de equilibrio por métodos gráficos, empieza muy pronto. De hecho, se podría considerar que la afirmación de Robert Hooke (1635-1703) estableciendo una analogía del equilibrio de cables con los arcos es el primer análisis de equilibrio y la imagen del cable colgante es un “gráfico” de la transmisión de las fuerzas a lo largo del cable (Hooke 1675). En la Figura 1 se ilustra el principio. Como se verá, esta idea genial de Hooke es la base del análisis de equilibrio de las estructuras de fábrica. La idea fue recogida ya por Gregory (1697) quien, además de repetir la idea de Hooke, “sólo la catenaria es la forma de un verdadero y legítimo arco” añade de forma crucial “Y si arcos de otras formas se sostienen, es porque hay una

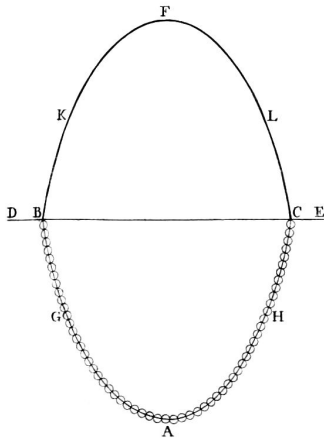


Figura 1. “Como cuelga el hilo pesante, así, pero invertido se sostendrá el arco rígido” (Hooke 1675).

catenaria dentro de su espesor. Y no se sostendrían si fueran muy delgados, y compuestos de partes pulidas” (Heyman 2004).

Un cable ligero que soporta pesos toma una forma poligonal y antes que Hooke diversos autores usaron la imagen de los cables en equilibrio para estudiar la composición de fuerzas. Leonardo de Vinci (1452-1519) ya realizó numerosos ensayos con cables tratando de descubrir la ley de composición de las fuerzas, Figura 2. Leonardo se concentra en el equilibrio de tres fuerzas concurrentes y no dibuja ningún cable con cargas puntuales.

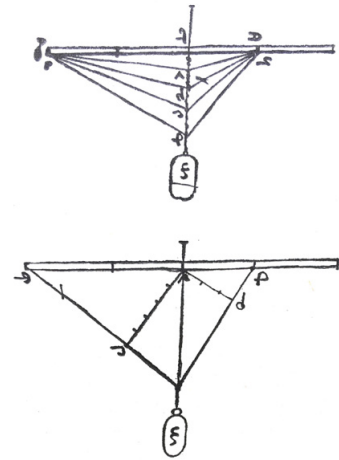


Figura 2. Ensayos de Leonardo da Vinci tratando de descubrir la ley de composición de fuerzas (Straub 1952).

Algunos autores, en especial Duhem (1905) piensan que Leonardo llegó a descubrir la ley de composición de fuerzas, pero en general se atribuye su descubrimiento a Simon Stevin (1548-1620) que lo publica en su obra *De Beghinselen der Weeghconst* (Principios del arte de pesar) de 1586. Stevin usa el plano inclinado en su demostración, así como la imposibilidad del móvil perpetuo (que no demuestra). El dibujo de la “máquina” imaginaria que emplea figura en el frontispicio de su libro y está grabado en su tumba; en vez del paralelogramo Stevin utiliza el triángulo para componer las fuerzas, Figura 3 (a). En esta primera edición, como Leonardo, se limita al equilibrio de tres fuerzas concurrentes. En un apéndice a la edición de

1605 publica los primeros dibujos de la composición de fuerzas en un cable que soporta pesos, que forma el después llamado “polígono funicular” Figura 3 (b).

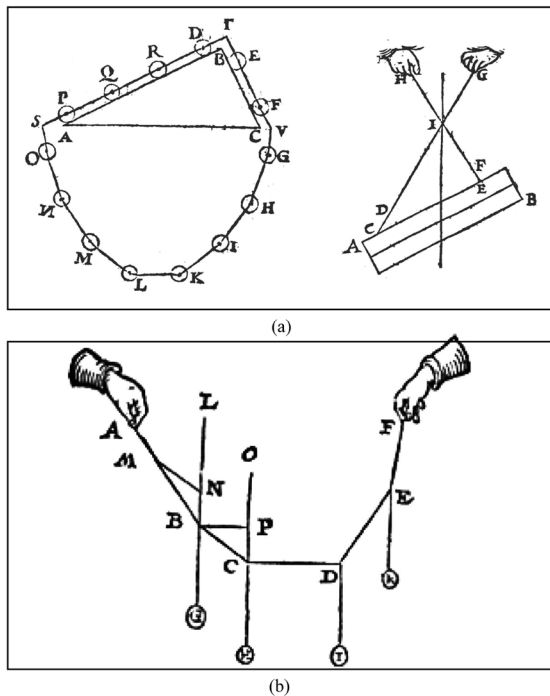


Figura 3. (a) Composición de fuerzas: demostración, y aplicación a un sólido (Stevin 1605). (b) Equilibrio de un cable con cargas verticales (Stevin 1605).

### PRIMEROS ANÁLISIS DEL EQUILIBRIO DE ARCOS EN EL SIGLO XVIII

#### Francia: La Hire, Varignon, Couplet

Tuvieron que pasar casi cien años para que se renovara el interés en el equilibrio de los cables y su analogía con los arcos. Philippe de La Hire (1640-1719) en su *Traité de mécanique* de 1695 se ocupa del equilibrio de los cables y recupera, de manera independiente, la idea de Hooke. Además, por primera vez, aparece el polígono de fuerzas. La Hire plantea dos problemas. El primero es: “Suponiendo que una cuerda no pesa, calcular los pesos que deben aplicarse a todas sus partes para que, al tirar de ellas conjuntamente, adopte la forma curva deseada” (La Hire 1695, 455),

Figura 4 (a). El polígono de fuerzas aparece girado (el polo en C y los radios vectores CA, CF, etc.) y superpuesto al dibujo del funicular.

El segundo problema es: “Calcular la carga que se debe dar a cada piedra o dovela, como las llaman los obreros, con las que se forman arcos o bóvedas, para que todas puedan permanecer en equilibrio, aunque sus lechos, o superficies donde se tocan, estén infinitamente pulidos y puedan deslizarse unas contra otras sin ningún obstáculo” (La Hire 1695, 456).

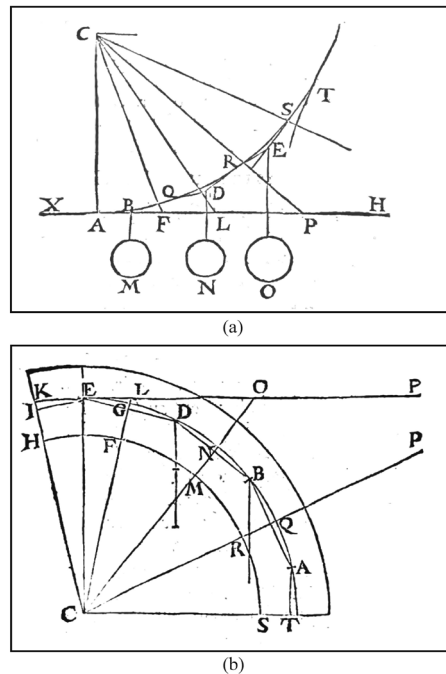


Figura 4. Empleo de polígonos funiculares y de fuerzas para el estudio del equilibrio de cables y arcos (La Hire 1695).

La Hire reconoce que en la realidad este deslizamiento entre las piedras no se produciría, pero estima que la construcción permite tener una idea de qué peso dar a cada piedra en la parte superior del arco. El arranque, con tangente vertical, requeriría una carga infinita. La construcción de La Hire permitió el proyecto de arcos de sección variable y fue recogida, primero por Frézier (1738, II, 166), y después en numerosos tratados de construcción del siglo XVIII y principios del XIX.

Pierre Varignon (1654-1722) también estudió la composición de fuerzas. En un primer libro *Projet d'une nouvelle mécanique* de 1687 se centra, como

Stevin, en la composición de fuerzas concurrentes —cables que tiran de un mismo nudo— usando el paralelogramo de fuerzas. Hasta su muerte en 1722 es evidente que continuó sus investigaciones. En su obra póstuma *Nouvelle Mécanique ou Statique*, publicada en 1725 por sus discípulos, se observa una notable evolución, Figura 5. Por primera vez aparecen dibujados cables en equilibrio con cargas puntuales que toman forma poligonal; es un ejercicio de composición sucesiva de fuerzas, que ya estaba en La Hire, pero que se manifiesta aquí con claridad. De hecho, Varignon fue consciente de la importancia de su enfoque y acuña un nuevo término, la *machine funiculaire*, que sitúa al mismo nivel de las máquinas clásicas (la palanca, el plano inclinado, la cuña y el torno); también acuña la expresión *polygone funiculaire*. En la Figura 5 se recoge parte de una de las láminas de este libro y en ella se puede seguir la evolución de su pensamiento. Las *Figs. 88 y 89* proceden evidentemente de La Hire (Figura 4 más arriba). En las *Figs. 90, 91 y 92*, de manera crucial, se dibuja por separado el polígono de fuerzas como construcción auxiliar para hallar las fuerzas en el cable. Varignon no da un nombre específico a esta construcción que, como veremos, no vuelve a aparecer hasta el siglo XIX.

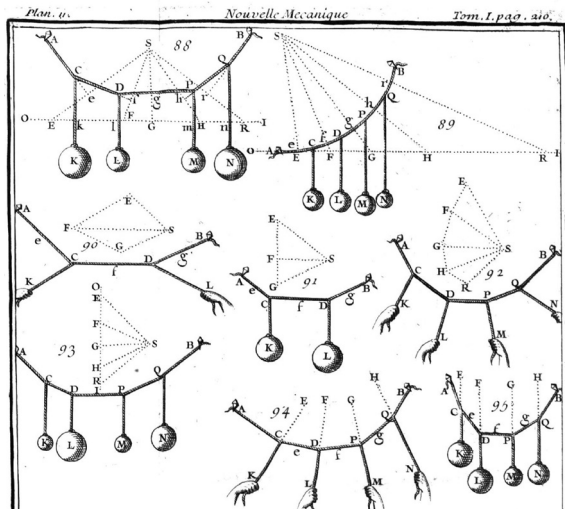


Figura 5. Construcciones de la *machine funiculaire*. Por primera vez aparecen polígonos funiculares y de fuerzas dibujados por separado (Varignon 1725).

Los escritos de Varignon no tuvieron aplicación al cálculo práctico de fuerzas en estructuras, ni de cables, ni en arcos. La siguiente aplicación del polígono funicular siguiendo el enfoque de La Hire se debe a Couplet. En su primera memoria sobre el empuje de las bóvedas de 1729, centrada en el estudio del equilibrio de un sistema de dovelas sin rozamiento, vuelve aplicar el polígono funicular y, superpuesto (y girado para hacer las fuerzas perpendiculares a las juntas) el polígono de fuerzas. Couplet lo aplica a un arco y, por primera vez, al estudio de la platabanda o arco plano (Huerta 2012). Pero quizá lo más significativo es su dibujo de una línea de empujes dentro de un arco, componiendo las fuerzas en cada dovela, que no coincide con la línea media del arco, Figura 6. Dado que no hay rozamiento, los valores de las fuerzas en las juntas, que convergen en el punto R, vienen dados por la intersección de las rectas correspondientes con la línea horizontal  $S\lambda$ , siguiendo el método de La Hire (a quien cita). Es la primera representación de una trayectoria de empujes en un arco, formando un antifunicular. El empuje  $DQ$  sobre la junta del arranque  $S\sigma$  permite calcular el estribo. Couplet no menciona a Varignon ni el término “funicular”.

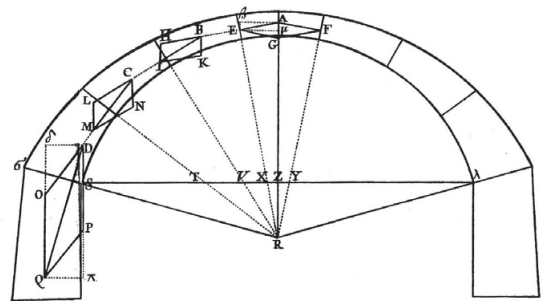


Figura 6. Trayectoria de empujes en un arco con dovelas sin rozamiento (Couplet 1729).

La influencia de Varignon se refleja en el estudio de los polígonos funiculares que aparece en algunas obras de la segunda mitad del siglo. Por ejemplo, Charles-Étienne-Louis Camus (1699-1768) dedica un libro de sus *Eléments de mécanique statique* (tercera parte de su curso de matemáticas) de 1752 a la *machine funiculaire* y dedica un capítulo a los *polygones funiculaires*. Charles Bossut (1730–1814) en su *Traité*

élémentaire de mécanique statique de 1772 (que luego incorpora a su *Cours de mathématiques*) trata también los polígonos funiculares. Ambos autores tuvieron gran influencia posterior. Lo más significativo para el presente artículo es que en ambos casos no aparece la construcción del polígono de fuerzas que propuso Varignon, como tampoco aparece en ninguna otra publicación del siglo XVIII en Francia.

En Francia, el interés por los polígonos funiculares y de fuerzas sólo reaparece a principios del siglo XIX. Dos jóvenes ingenieros franceses, Gabriel Lamé ((1795–1870) y Émile Clapeyron (1799–1864) comenzaron su carrera en los años 1820 en la Escuela de caminos de San Petersburgo, fundada por Agustín de Betancourt. Allí, interesados en el proyecto de puentes colgantes, publican el primer artículo sobre polígonos funiculares (Lamé y Clapeyron 1826) donde exponen de manera general las relaciones gráficas entre los polígonos funiculares y de fuerzas (Bénard 2009). El artículo no tuvo en su momento ninguna influencia. Los ingenieros prefirieron el laborioso enfoque analítico para trazar las cadenas de los puentes colgantes (véase, por ejemplo, Michal (1841)).

### Inglaterra: Stirling, Emerson, Robison

En Inglaterra la idea de Hooke de analizar arcos como cables invertidos persiste a lo largo del siglo XVIII. Pero los análisis se concentran en la resolución de problemas matemáticos aplicando las técnicas del cálculo infinitesimal inventado por Newton el siglo anterior. Así, James Stirling (1692–1770) al final de su libro de 1717 sobre las curvas de tercer grado, *Lineae tertii ordinis Newtonianae*, se plantea el problema de cómo hay que disponer un conjunto de esferas para que estén en equilibrio formando un arco, usando este ejemplo para demostrar la propiedad de la catenaria. Para explicar el problema muestra gráficamente el equilibrio en un dibujo, Figura 7 (a). Esta Figura ejerció una gran influencia posterior: inspiró a Giovanni Poleni para su análisis de la cúpula de San Pedro (Poleni 1748) que realizó mediante un modelo colgante (Heyman 1999). (Lo más original del análisis de Poleni es que la cadena colgante discurre libremente entre el trasdós y el intradós de la cúpula.) También influyó en matemáticos e ingenieros ingleses de la segunda mitad del siglo

XVIII, como William Emerson (1701–1782) quien en su *Doctrine of Fluxions* (1743), libro muy popular con varias ediciones posteriores, se propone el problema de hallar la carga necesaria para equilibrar un arco de forma cualquiera (el “problema de La Hire” que vimos antes, pero a quien Emerson no menciona). Emerson parte del equilibrio de un antifunicular, que explica con detalle mostrando la composición de fuerzas vértice a vértice Figura 7 (b); pero Emerson quiere emplear el cálculo infinitesimal e imagina que el número de lados del polígono se hace infinito y las cargas definidas por una carga repartida variable.

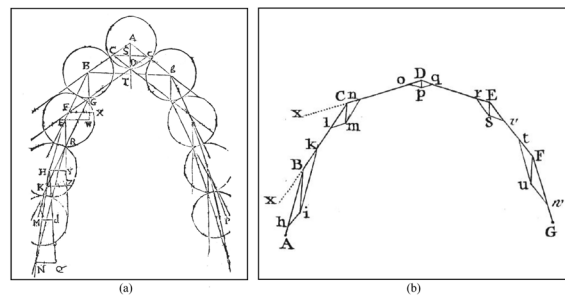


Figura 7. (a) Disposición de un sistema de esferas formando un arco en equilibrio (Stirling 1717); (b) Polígono antifunicular en equilibrio con fuerzas verticales (Emerson 1743).

en 1772 Charles Hutton (1737–1823) publica sus *Principles of Bridges* en el que aplica las ideas y métodos de Emerson a los problemas del proyecto de puentes. Como dice en el subtítulo: “Containing the Mathematical Demonstrations of the Properties of the Arches, the Thickness of the Piers, the Force of the Water against them, etc.” (Contiene las demostraciones matemáticas de las propiedades de los arcos, el espesor de los estribos, la fuerza del agua contra ellos, etc.). Hutton repite la Figura 7 (b) de Emerson con el antifunicular mostrando la descomposición de fuerzas en cada vértice. En realidad, Hutton, como Emerson y el resto de autores ingleses está preocupado por encontrar el *arch of equilibration*, el arco equilibrado o catenaria invertida (Ruddock 1978). Hay dos problemas básicos: 1) dada la curva de intradós, hallar qué carga hay que añadir para que esté en equilibrio formando un arco, Figura 8 (a); 2) definido el trasdós (normalmente una línea horizontal, pero puede ser

cualquier curva) hallar la curva de intradós de manera que la carga, definida por la distancia vertical entre las curvas de intradós y trasdós, equilibra el arco del intradós, Figura 8 (b). En todos los casos las fuerzas tiene que seguir el perfil del intradós (un antifunicular de infinitos lados).

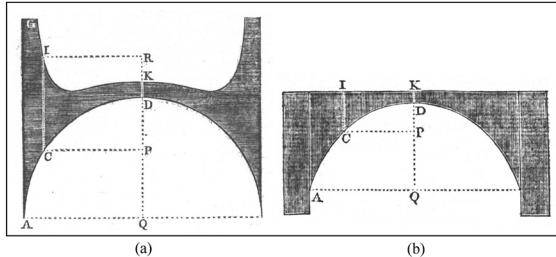


Figura 8. Los dos problemas principales de la *equilibration theory*: (a) Encontrar la curva de trasdós para un intradós dado; y (b) encontrar el intradós para un trasdós dado (Hutton 1772).

En general, podemos decir que los ingenieros ingleses, quizá llevados por el deseo de aplicar el nuevo análisis diferencial e integral inventado por Newton, estaban más preocupados por resolver problemas matemáticos que por solucionar problemas prácticos.

A finales del siglo XVIII John Robison (1739–1805), ingeniero y profesor en la Universidad de Edimburgo, publica una serie de artículos en la tercera edición de la *Encyclopedia Britannica* que constituyeron un gran avance para la teoría de estructuras en Gran Bretaña (Yeo 2001). En particular, en su artículo “Roof”, de 1796, formula por primera vez la hipótesis de articulación para el análisis de entramados de cubierta, que luego aplicaría con toda generalidad en el artículo “Carpentry”, en el suplemento de 1800 (Robison 1800b), en el que realiza el primer análisis de un entramado de nudos articulados (Huerta 2010).

Estudia también el equilibrio de un sistema de vigas en equilibrio formando una cubierta poligonal (mansardas). En el análisis parte de la idea de un sistema de barras colgantes articuladas en sus extremos, *Fig. 8* en la Figura 9. Robison dedica una larga “proposición” en al estudio del caso general de una mansarda asimétrica, *Fig. 10* en Figura 9. Emplea principalmente métodos algebraicos, calculando los ángulos etc. No

obstante, de forma crucial, para obtener las fuerzas en las barras, realiza la construcción del polígono de fuerzas, que superpone a la Figura —redescubre de forma independiente la idea de Varignon casi un siglo más tarde. Robison es consciente de la importancia de su solución que, dice, contiene toda la teoría de la construcción de arcos, pues cada barra puede considerarse como una dovela y en ambos casos todo se mantiene en equilibrio: “This proposition is very fruitful in its practical consequences. It is easy to perceive that it contains the whole theory of the construction of arches, for each stone of an arch may be considered as one of the rafters of this piece of carpentry, since all is kept up by its mere equilibrium.” (Robison 1796, 472)

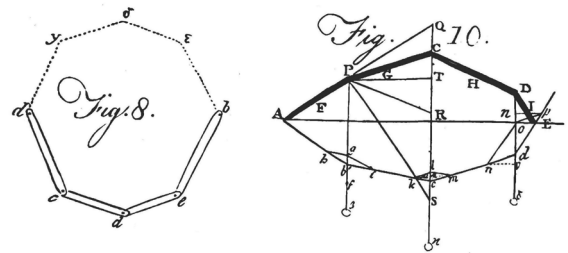


Figura 9. Equilibrio de un conjunto de vigas articuladas en sus extremos formando una mansarda (Robison 1796).

En su artículo “Arch” publicado también en el Suplemento de la Enciclopedia (Robison 1800a), ya expone su descubrimiento de una manera sencilla y directa. Este artículo supuso un gran avance en el entendimiento del funcionamiento de los arcos. Robison es el primero que permite que los empujes se aparten del perfil del intradós del arco. Para analizar el problema utiliza un modelo colgante compuesto por una serie de imanes, *Fig. 6* en la Figura 10. Si los contactos entre las piedras son en puntos, la línea que los une, invertida, formará un arco en equilibrio bajo su propio peso; pero este equilibrio será inestable y el arco sería incapaz de soportar cualquier pequeña carga adicional. Pero, continúa Robison, si en las secciones *de, fg, bi* el contacto, en vez de un punto, tiene un cierto espesor, al añadir una pequeña carga, el arco de equilibrio, que cambia de forma ligeramente, continuará pasando dentro de este espesor. Robison rompe aquí con la presunción, admitida como un dogma hasta entonces, de que la curva de equilibrio coincide con el intradós: el

arco de equilibrio puede moverse dentro del espesor de las juntas del arco real, manteniendo la dirección de las fuerzas normales a la junta (sigue suponiendo que no hay rozamiento). Recupera al cabo de más de un siglo la idea de Gregory (1697) aplicada por Poleni (1748) en el análisis de San Pedro de Roma. (Robison no cita a ninguno de los dos.)

A continuación propone la construcción que había deducido para el proyecto de cubiertas en mansarda (Fig. 8 en la Figura 10) para cálculo de los empujes en los arcos. Para explicarlo, simplifica la Figura y la aplica a un arco poligonal simétrico. Para el arco  $ABCDE$  en equilibrio las cargas verticales en  $B$ ,  $C$  y  $D$ , deben estar en la proporción que se obtiene trazando paralelas a los lados del arco (polígono) por un punto (elige arbitrariamente el punto  $B$  por economía del dibujo; una de las paralelas coincide con la “dovela”  $BC$ ) y trazando una recta vertical cualquiera,  $QS$ , las fuerzas tienen que ser proporcionales a los segmentos  $QC$ ,  $CR$ ,  $RS$ . Se demuestra, además, que la componente horizontal de las fuerzas se mantiene constante a todo lo largo del arco: “the thrust at any angle, if estimated in a horizontal direction, is the same throughout, and may be represented by any horizontal line  $BT$ ” (Robison 1800a, 18). Es la primera vez que se afirma explícitamente la constancia de la componente horizontal de los empujes a lo largo de un arco sometido a cargas verticales.

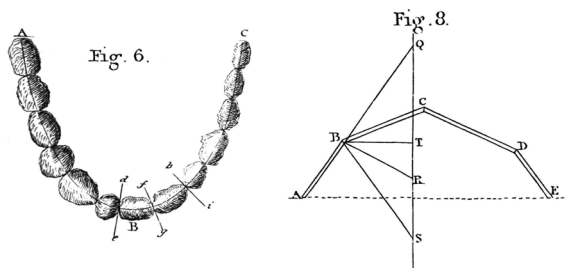


Figura 10. Fig. 6, conjunto de piedras imantadas que cuelgan de sus extremos. Fig. 8, polígono de fuerzas de un arco poligonal (Robison 1800a, Lám. I).

Robison considera luego el caso general cuando el perfil del arco es una curva continua. Dedicaba bastante espacio a deducir las expresiones algebraicas para el equilibrio (sin rozamiento) para un arco definido por dos curvas cualesquiera de trasdós e intradós,

obteniendo la expresión para el caso de trasdós horizontal (ya obtenida por Emerson y Hutton). Afirma que con esto cree haber explicado suficientemente la teoría del equilibrio de arcos (sin rozamiento), una de las partes más delicadas de la ciencia matemática, sobre la que se han escrito libros y que todavía ocupa a los estudiosos. Esta parte del artículo de Robison tiene una influencia en trabajos ingleses posteriores, por ejemplo Hutton en la revisión de su tratado de puentes incluida en sus *Tracts* de 1812, incluye ya dibujos inspirados en Robison y, curiosamente, separa el polígono de fuerzas del antifunicular, Figura 11.

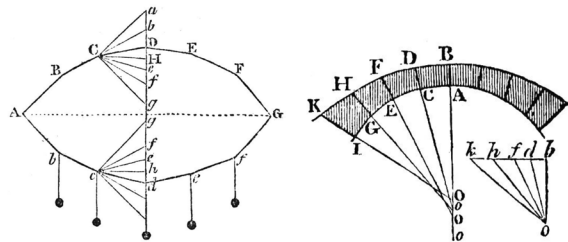


Figura 11. (a) Equilibrio de arcos empleando el polígono funicular. (b) Arco de equilibrio proyectado con la ayuda de un polígono de fuerzas. El intradós A-I es el punto de partida (Hutton 1812).

A continuación, Robison demuestra que esta “delicada parte de la ciencia matemática” está en completa contradicción con los hechos. Cita varias evidencias y contradicciones. Por ejemplo, según esta teoría, cuando un arco tiene arranques con tangente vertical requiere de una carga infinita para mantener el equilibrio (como ya afirmó La Hire en 1695) y sin embargo los puentes de los romanos con arcos semicirculares han resistido el paso de los siglos. Buscando la explicación a esto, examina primero el papel de la “cohesion” (resistencia a tracción), que rechaza si se compara esta resistencia con las enormes fuerzas que se desarrollan en los puentes. Concluye finalmente que la única fuerza que explica estos fenómenos es la fuerza del “rozamiento” entre las piedras. Para confirmar esto se refiere a la forma del colapso de los arcos. Si se carga un arco en la clave con un gran peso el arco colapsa dividiéndose en una serie de segmentos, que agrupan un conjunto de dovelas, cuyo espesor permite trazar una línea recta en su interior (Huerta 2012).

De esta manera, el arco de dovelas se convierte en un arco poligonal, al que pueden aplicarse las consideraciones de equilibrio anteriores (Robison 1800a, 20–21).

Robison tiene noticia detallada del hundimiento de un puente en “arco de considerable tamaño” por un testigo presencial y la emplea para explicar la forma en que se hundió. Tras diversos movimientos y fracturas locales, se observó el descenso de la clave y el ascenso de los riñones, hasta que el arco finalmente se hundió. Robison confirmó la forma de colapso realizando ensayos sobre modelos pequeños de arcos de dovelas de tiza. Por supuesto, esta forma de colapso ya había sido demostrado mucho antes en Francia por Danyzy en 1732. No obstante, lo que importa aquí no es el descubrimiento del efecto del rozamiento en el colapso de los arcos, sino que Robison explica este colapso con la transmisión de las fuerzas dentro del arco. Esto es completamente original y abre el camino al concepto de “línea de empujes”, la curva que no coincide necesariamente con el perfil del arco (esto es imposible en los arcos planos) y que representa la transmisión de las fuerzas dentro del arco.

### LA TRANSMISIÓN DE LAS FUERZAS DENTRO DEL ARCO: EL CONCEPTO DE “LÍNEA DE EMPUJES”

Es ciertamente impresionante ver que costó más de un siglo liberar el *arch of equilibration*, el arco de equilibrio, de la “camisa de fuerza” de la curva de intradós. Robison preparó el camino para que, finalmente, Thomas Young (1773–1829) formulara en 1817 el concepto general de “línea de empujes” (que llama *curve of equilibrium*). El detalle de la invención de este concepto por Young se ha descrito con detalle en otra parte (Huerta 2005). La idea de línea de empujes fue formulada después, independientemente de Young, por Méry ([1729] 1768, 1740) en Francia, Gerstner (1831) en la Austria de los Habsburgo y, con una descripción matemática completa, Moseley (1835, 1838) en Inglaterra (Kurrer 1997, 2018).

Lo que nos importa aquí, en este estudio del análisis gráfico del equilibrio de arcos a lo largo de la historia, es que el dibujo de la “línea de empujes” es una representación gráfica de las ecuaciones de equilibrio y cómo el trazado geométrico de esta curva, que se

desarrolla a lo largo del siglo XIX incrementó exponencialmente la comprensión del funcionamiento de los arcos y bóvedas, y, finalmente, de edificios enteros. En lo que sigue, veremos el desarrollo del trazado gráfico de líneas de empujes.

### Young

Thomas Young calcula las líneas de empujes analíticamente, integrando la ecuación diferencial de equilibrio y calculando después analíticamente las ordenadas de la curva. En su artículo “Bridge” para el Suplemento de la cuarta edición de la Enciclopedia Británica, partiendo de las ideas de Robison, que libera la trayectoria de fuerzas internas de la “tiranía” de la curva de intradós, desarrolla toda la teoría de arcos, obteniendo incluso soluciones para arcos asimétricos, calculando la distribución de tensiones, y teniendo en cuenta las variaciones de temperatura: una teoría completa que se adelanta unos 50 años al resto de autores. Young es, además, el primero en dibujar la línea de empujes para un puente real, el puente de Waterloo en Londres, Figura 12.

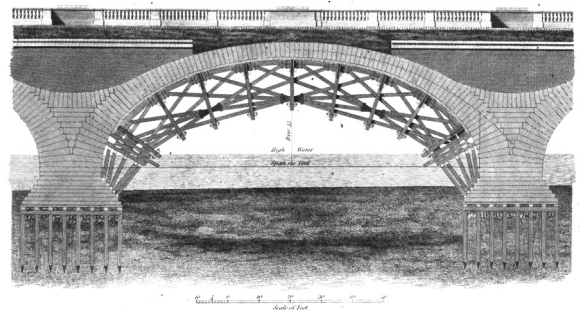


Figura 12. Línea de empujes (dibujada a la derecha) dentro del arco del puente de Waterloo en Londres (Young 1817). Nótese cómo se separa de la línea media del arco.

El artículo de Young, publicado anónimamente en la Enciclopedia, que manejaba ideas completamente nuevas y estaba escrito en un lenguaje de muy difícil comprensión, no ejerció ninguna influencia posterior. Pero eso ni impide que deba recibir el reconocimiento histórico que merece.

## Gerstner

Josef Gerstner (1756–1832), matemático e ingeniero, parte como los autores ingleses del problema del equilibrio de un sistema de vigas que forman una cubierta poligonal. En un primer libro *Einleitung in die statische Baukunst*, (Introducción a la construcción equilibrada) de 1789 realiza cálculos similares a los de Emerson, Hutton o Robison, en la hipótesis del equilibrio sin rozamiento; en este libro ya aparecen el polígono antifunicular y el polígono de fuerzas. Pero es en el primer volumen de su *Handbuch der Mechanik* (1831), al cabo de cuarenta años, cuando extrae las consecuencias de la existencia del rozamiento y dibuja, tímidamente, líneas de empujes, Figura 13. (Kurrer 1990,1991) Con mucha mayor extensión aplica sus ecuaciones al problema del “arco invertido”, el puente colgante, que desde principios del siglo XVIII empezó a sustituir al arco de fábrica para salvar grandes luces.

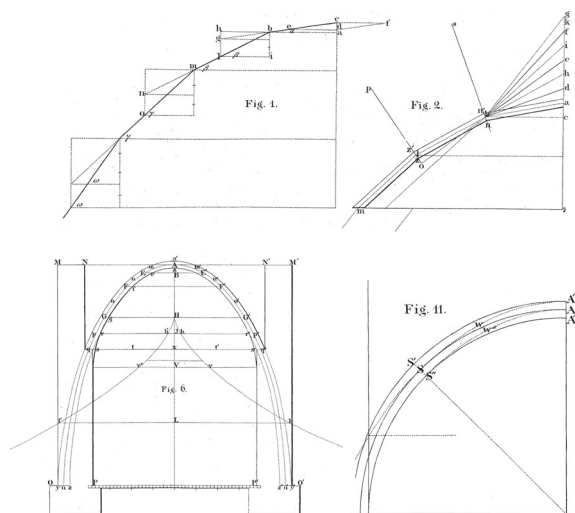


Figura 13. *Fig. 1*, equilibrio de cubierta poligonal con el paralelogramo de fuerzas en cada nudo. *Fig. 2*, análisis de equilibrio empleando el polígono de fuerzas *Fig. 6*, aplicación a una curva continua; proyecto de una bóveda de cañón con estribos. *Fig. 11*, dibujo de líneas de empujes que se separan de la directriz del arco (Gerstner 1831).

## Moseley

Henry Moseley (1801–1872), matemático y astrónomo, profesor de filosofía natural y mecánica aplicada en la Universidad de Cambridge, estudió la línea de

empujes siempre empleando el cálculo infinitesimal, definiéndola de una manera completamente general como la línea de intersección de las resultantes por un sistema de superficies de corte (planas o curvas). El estudio se concreta en el estudio del equilibrio de un sistema de bloques en contacto seco y directo y conduce a largas ecuaciones que con frecuencia ocupan varias líneas. Moseley conocía la teoría de colapso de Coulomb (1773) y demuestra que el empleo de líneas de empujes lleva a los mismos resultados, permitiendo interpretar los mecanismos de colapso. Sus primeros artículos sobre la teoría general de arcos (Moseley, 1835, 1838) se refieren a casos ideales, completamente generales. Sus dibujos de líneas de empujes dentro de arcos y pilares en el espacio son enormemente atractivos, pero de poca utilidad para los ingenieros. Realizó intentos de hacer más accesibles sus métodos, en tratados generales de puentes (Moseley 1838) y de mecánica aplicada (Moseley 1843), pero, al parecer, no tuvieron repercusión en la práctica —aunque inspiraron a los siguientes estudiosos sobre el equilibrio de arcos (Fig. 14).

## Méry

La contribución de Édouard Méry (1805–1871) es mucho más clara y accesible que las anteriores. De nuevo, desarrolla su teoría de líneas de empujes de manera independiente. Ya en 1829 la aplica al estudio de la estabilidad de bóvedas reales en Brest, pero esta memoria manuscrita no se publica hasta 1862. Su artículo de 1840 “Mémoire sur l’équilibre des voûtes en berceau”, memoria sobre el equilibrio de bóvedas de cañón, publicado en los *Annales des ponts et chaussées* tuvo una gran influencia posterior. Méry explica claramente el concepto de línea de empujes e indica un método analítico-gráfico para dibujar estas líneas para arcos simétricos. En la *Fig. 4*, Figura 15, para hallar el punto de paso de la resultante por la junta  $Cc$ , para un empuje horizontal en un punto de la clave  $\beta$ , de un valor dado, se traza una horizontal hasta el punto  $k$  situado en la vertical del centro de gravedad del segmento de bóveda  $Bccb$ . Se forma el paralelogramo  $kspr$ . Tomando segmentos proporcionales al empuje horizontal,  $kp$ , y al peso del segmento  $ks$ , la diagonal  $kr$  es el empuje resultante que corta a la junta  $Cc$  en el punto  $\gamma$ , un punto de la línea de empujes. En la

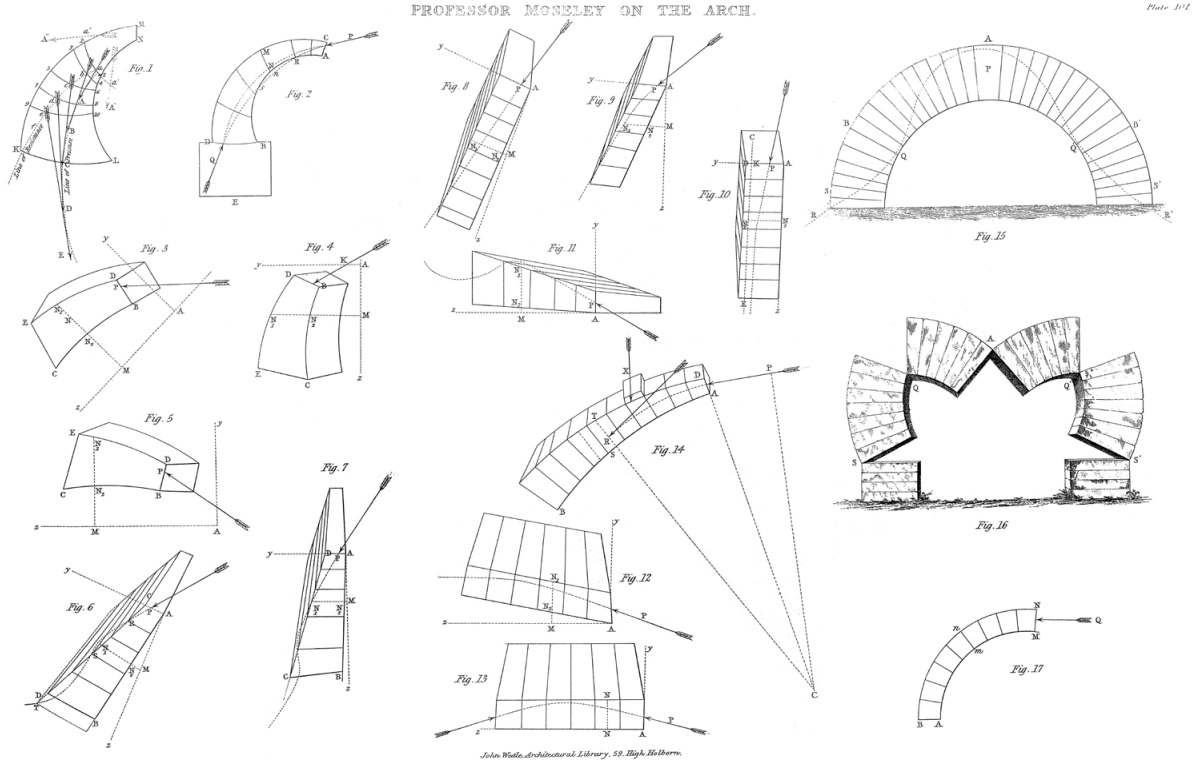


Figura 14. Teoría general de las líneas de empujes (Moseley 1838).

Figura se repite el proceso para la junta *aa*. El procedimiento es muy sencillo y la única dificultad estriba en que hay que ir calculando los centros de gravedad para cada una de las secciones. Méry no da detalles sobre cómo realiza esta operación.

Al dibujar líneas de empujes en un arco de espesor suficiente resulta que es posible dibujar infinitas líneas de empujes. No obstante, hay dos posiciones extremas: la línea de mínimo empuje y la máxima empujes, que aparecen dibujadas en la Fig. 5, Figura 15.

Fig. 4.

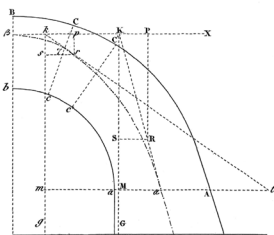


Fig. 5.

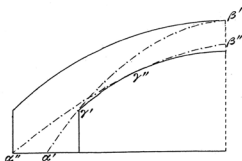


Figura 15. Fig. 4, trazado de líneas de empujes. Fig. 5, líneas de empuje mínimo y empuje máximo (Méry 1840).

Méry demuestra una comprensión completa del análisis de arcos o bóvedas de cañón empleando líneas de empujes. Sabe que cuando la línea de empujes toca el borde de la fábrica se puede formar una grieta de articulación y que cuando su número es suficiente se puede formar un mecanismo de colapso. Como Moseley, relaciona la teoría de equilibrio de líneas de empujes con la de colapso por formación de articulaciones. Entiende, como lo hizo Couplet en 1730, que el arco límite, el arco de mínimo espesor que contiene una línea de empujes, es el punto de partida del proyecto. El espesor de un arco real deberá ser mayor para obtener seguridad. Por otra parte, quiere probar la bondad de su teoría comparando los dibujos de líneas de empuje en arcos límite con los resultados de los

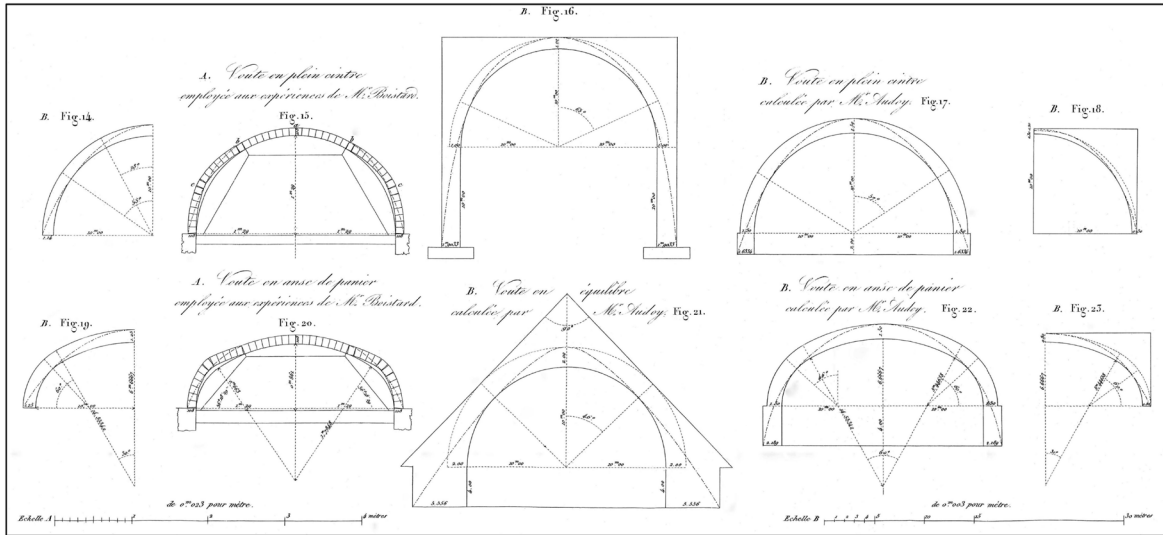


Figura 16. Cálculo de arcos límite mediante líneas de empujes y comparación con los resultados de los ensayos de Boistard y del análisis de colapso de Audoy (Méry 1840).

ensayos realizados por Boistard hacia 1800 sobre modelos grandes, de 2,60 m de luz, Figura 16. Encuentra una concordancia perfecta. También compara sus resultados con los obtenidos analíticamente por Audoy en 1820 usando la teoría de Coulomb.

Finalmente, Méry plantea por primera vez el análisis de la estabilidad de un “edificio”, una bóveda apoyada sobre un pilar y conectada por un arbotante a un estribo. Méry no usa estos términos pero, sin duda, es el análisis de la sección de una iglesia gótica. Es

la primera vez que se intenta este tipo de análisis y Méry emplea las líneas de empujes para entender el proceso a seguir. En la Figura 17 (a) Méry expresa ha dibujado las líneas de empujes en la situación de colapso, que se ha redibujado exagerando el movimiento Figura 17 (b).

**Difusión del concepto de línea de empujes. Primeros trazados gráficos**

La idea de la línea de empujes, el estudio de la transmisión de las cargas dentro del arco supuso un avance extraordinario. Hemos visto que el tratamiento de Young y de Moseley fue eminentemente matemático, pero ambos vieron que la línea de empujes se podía mover libremente dentro del espesor del arco. A Young, no le preocupó en sus análisis sobre el proyecto de Telford de un arco de 600 pies de luz y en su aplicación a puentes reales. Moseley, por el contrario, sí se planteó cuál, entre las infinitas posibles, sería la “verdadera” línea empujes. Aplicando su principio de mínima reacción, afirmó que la línea “real” o “verdadera” sería aquella que produce un empuje mínimo. En Francia, Méry, al mismo tiempo que Moseley, estableció los límites entre los que se podría mover: era

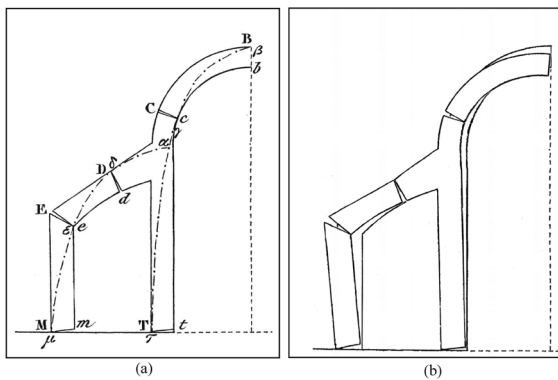


Figura 17. (a) Análisis de colapso de una bóveda con un contrarresto formado por arbotante y estribo (Méry 1840); (b) Mecanismo de colapso.

posible calcular el empuje mínimo, que correspondía a la posición más peraltada, y el empuje máximo con el mínimo. Pero su estudio se concentró después en obtener los espesores límite, valor que podía ser calculado con exactitud.

Los siguientes desarrollos se dedican principalmente al estudio del trazado de la línea de empujes. El método gráfico resultó casi obligado: las ecuaciones diferenciales de equilibrio eran largas (en los artículos de Moseley ocupan con frecuencia varias líneas) y su integración exacta resultaba imposible salvo para casos muy sencillos. Méry propuso una construcción gráfica, pero no dio ejemplos de su aplicación. Se basaba en la constancia de la componente horizontal de empuje en arcos sometidos a cargas verticales. Se suponía un cierto empuje horizontal en la clave y se iban considerando distintas secciones. El punto de paso de la resultante se obtenía componiendo gráficamente el empuje horizontal con el peso aplicado en el centro de gravedad correspondiente. La complicación estribaba en hallar los sucesivos centros de gravedad de los bloques definidos por las secciones.

Esta propiedad de la constancia de la componente horizontal del empuje. Es la base del artículo que el ingeniero inglés William Henry Barlow (1812–1902) publica en 1846 con un título explícito: “On the Existence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction,” sobre la existencia en la práctica de la línea de empuje horizontal constante. Barlow emplea ensayos sobre diversos modelos, muy ingeniosos, para demostrar la existencia de esta línea. Explica su método de trazado basado en la constancia del empuje horizontal, *Figs. 6, 7* en Figura 18. Como Méry traza las líneas de empuje máximo y mínimo, pero también traza líneas intermedias, *Figs. 9, 9<sup>a</sup>*, Figura 18, aunque sin entrar, como Moseley, en cuál es la verdadera línea de empujes. Como Méry aplica su método gráfico para obtener arcos límite, pero a diferencia de éste Barlow explica el trazado que aparece dibujado sobre cada arco, *Figs. 10-12*, Figura 18.

En el mismo año de 1846 otro inglés, George Snell (1820–1893), arquitecto, educado en la Institution of Civil Engineers, publica un largo artículo “On the Stability of Arches”, sobre la estabilidad de los arcos. En él aparece el primer dibujo de una línea de empujes dentro de un arco, en realidad medio arco, mostrando

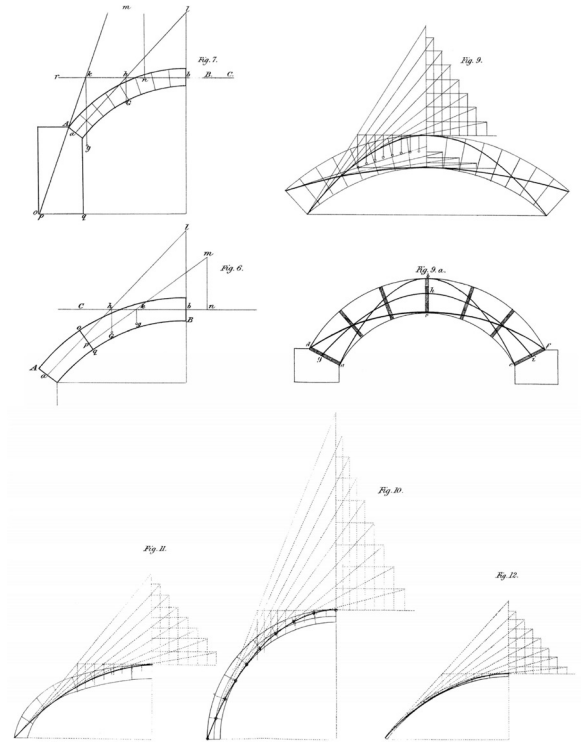


Figura 18. Trazado geométrico de líneas de empujes (Barlow 1846).

claramente la composición de las fuerzas, aplicando la ley del paralelogramo en cada una de las dovelas; se trata de un antifunicular pero Snell no lo menciona, Figura 19.

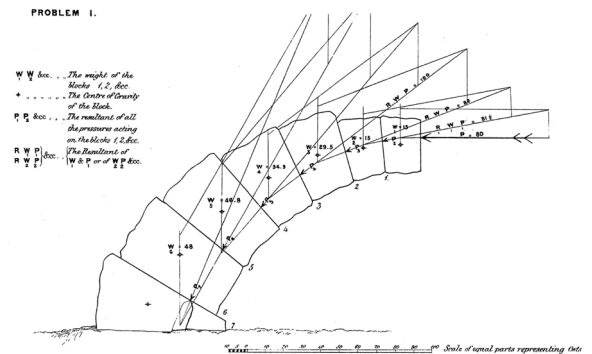


Figura 19. Trazado de la línea de empujes aplicando el paralelogramo de fuerzas en cada dovela (Snell 1846).

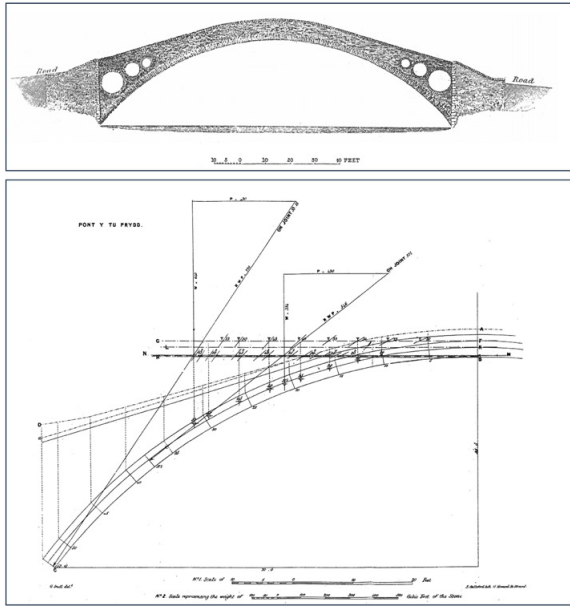


Figura 20. Análisis de equilibrio del puente de Pont-y-Prid de 43 m de luz (Snell 1846).

En el artículo aplica el mismo método a distintos arcos, combinando en la parte superior el enfoque de Barlow y en la parte inferior componiendo las fuerzas en cada novela. Se ocupa también de arcos con carga

asimétrica: la primera vez desde el artículo pionero de Young (1817), que trató el problema analíticamente. Finalmente, hace un análisis gráfico del puente Pont-y-Prid, el de luz más grande en Inglaterra en aquella época (43 m), Figura 20.

### Líneas de empujes y generación de las formas de arcos

La potencia de la idea de línea de empuje se demuestra en la interpretación de la idoneidad de ciertas formas de arcos. Así, Moseley (1839) muestra la mejor adecuación de los arcos apuntados para soportar grandes cargas en su clave, realizando un expresivo dibujo, Figura 21 (a). En 1849 Eduard Hatzel, un oscuro arquitecto-funcionario, dibuja diversas líneas de empujes, Figura 21 (b), que discurren libremente por el espesor de los arcos; discute, además, las ventajas del arco apuntado y de la necesidad del relleno, dibujando la línea de empujes para el caso del arco apuntado sin carga en la clave y con carga en la clave, Figs. 8, 9 en Figura 21 (b).

En el decenio siguiente, en 1857, Hermann Scheffler (1820–1903), ingeniero, matemático y físico alemán, publica su tratado sobre bóvedas y muros de

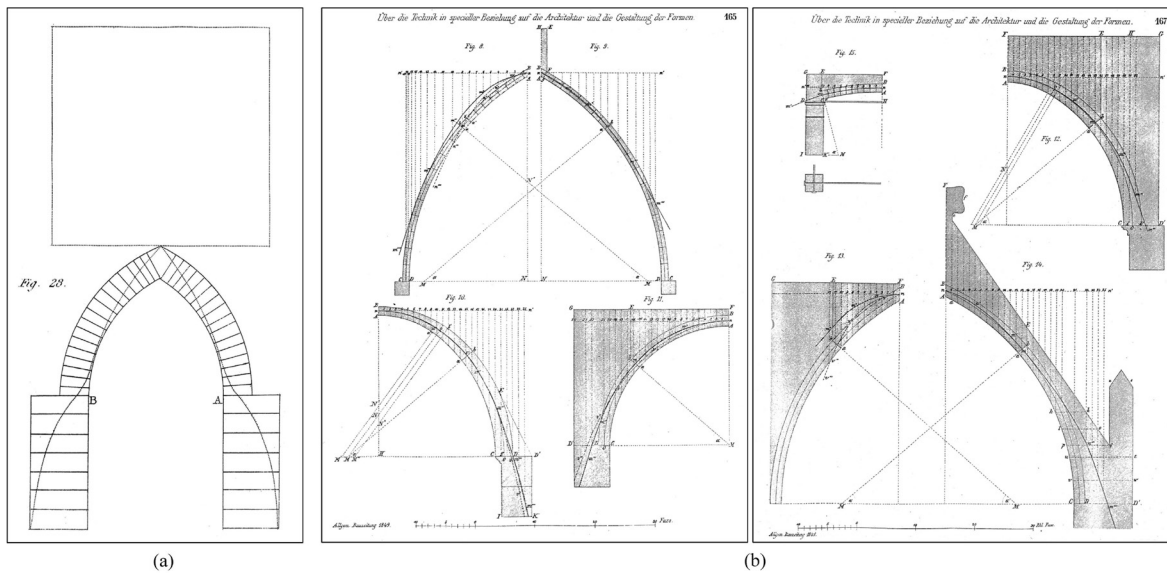


Figura 21. Arcos apuntados y líneas de empujes: (a) Capacidad de carga, Moseley (1839). (b) Adecuación por carga en la clave Hatzel (1847).

contención, *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken*. Respecto a los arcos, sigue la teoría de Moseley (tradujo al alemán su manual de 1843) y la desarrolla con detalle. Emplea principalmente métodos analíticos, pero aplica también métodos semi-gráficos que, como los de Méry y Barlow, basados en la constancia del empuje horizontal en la clave. Sobre la “verdadera” línea de empujes, acepta la teoría de Moseley: es aquella que produce el empuje mínimo. Como Barlow aplica sus construcciones gráficas al cálculo de arcos límite, Figura 22 (a). Quizá por primera vez, considera el empuje oblicuo del terreno al calcular las bóvedas de los túneles, Figura 22 (b). Plantea también el equilibrio de bóvedas de arista y de cúpulas (Fuentes 2021a). Como ejemplo, aplica su teoría a verificar la cúpula de San Pedro de Roma, Figura 22 (c). Su manual se tradujo al francés en 1864 (Scheffler 1864), y es a través de esta traducción por la que se debieron transmitir sus métodos al ámbito francófono (y español).

En el decenio de 1860 se sabía que había infinitas líneas de empujes dentro de un arco de suficiente espesor, y había métodos sencillos para dibujar cualquiera de ellas, imponiendo ciertas condiciones. Como se ha visto, para un arco simétrico bastaba con fijar los

puntos de paso en la clave y en los arranques. Pero trazar la línea de empuje mínimo, de un interés evidente pues se produce de forma natural al ceder ligeramente los apoyos, requería penosos tanteos.

### Transformaciones geométricas de líneas de empujes

En 1861 un ingeniero inglés publica de forma anónima, un artículo sobre la estática de los puentes, *Statics of Bridges* (1861) donde, quizá por primera vez en Inglaterra emplea los polígonos funicular y de fuerzas para dibujar las líneas de empujes. El desconocido autor muestra una comprensión extraordinaria del equilibrio de los arcos, relacionando con claridad los agrietamientos con las líneas de empujes, *Fig. 15* en la Figura 23. Nos interesa aquí, como muestra del interés y utilidad de los métodos gráficos, un ingenioso método de su invención para trazar líneas de empujes dentro de los arcos. El método se basa en la identidad, para cargas verticales, entre el polígono funicular y el diagrama de momentos flectores. El autor demuestra, entonces, lo que después se llamaría propiedades proyectivas de los funiculares en equilibrio con las mismas cargas verticales. No entraremos en el detalle de

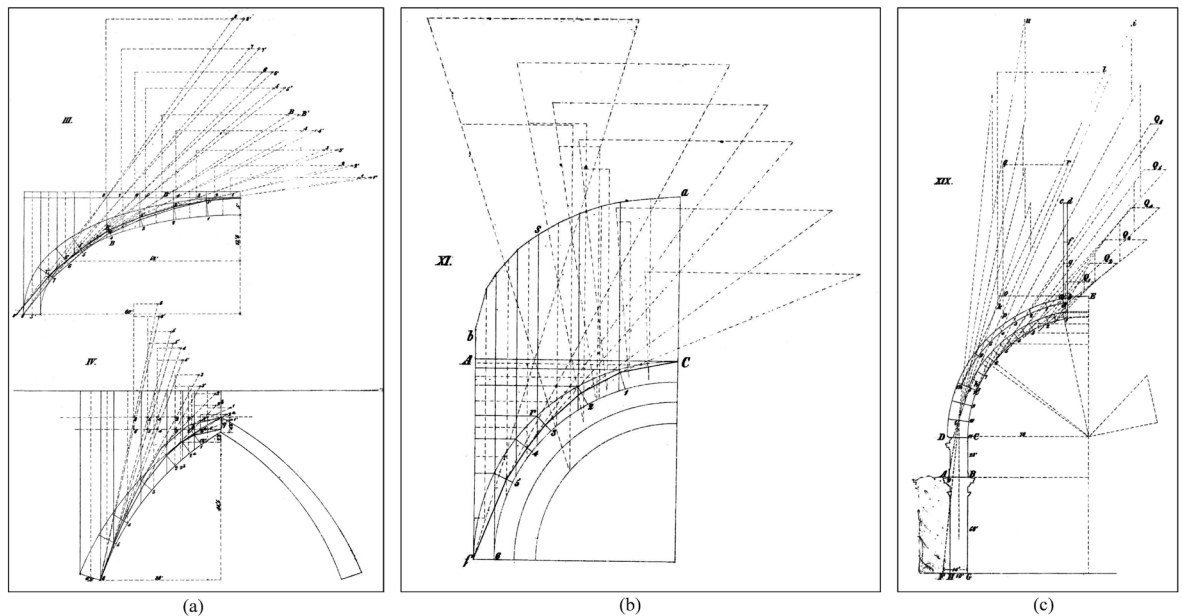


Figura 22. Scheffler (1857): (a) Equilibrio de arcos; (b) Empuje oblicuo del terreno en bóvedas enterradas; (c) Análisis de la cúpula de San Pedro de Roma.

las deducciones que se han discutido en otra parte; nos interesa sólo el método geométrico. Parte de un funicular en equilibrio con la cargas. Después, estirando o contrayendo los espacios entre las líneas verticales de acción de las fuerzas, consigue que el funicular se convierta en una recta, *Fig. 18* en Figura 23. A continuación aplica la misma transformación a las curvas de intradós y de trasdós. Cuando se busca la línea de empuje mínimo se trata de la línea con máxima pendiente, que se hace tangente al trasdós y al intradós, *Figs. 21, 22* en Figura 23. Lo aplica también a arcos con carga asimétrica. Este método, enormemente ingenioso, pasó desapercibido. Fue sacado del olvido por Fuller (1875) para simplificar el cálculo elástico de arcos. Heyman (1982) recuperó su esencia geométrica y la aplicó a la obtención rápida de los espesores límites de arcos. Para un análisis más extenso del método, véase Huerta (2004).

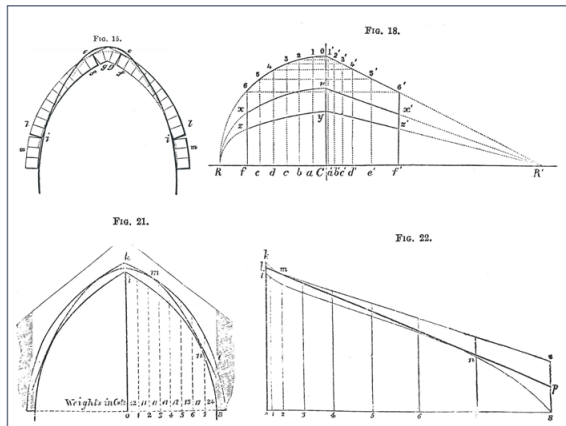


Figura 23. Dibujo de líneas de empujes usando la analogía con el diagrama de momentos flectores (Statics of Bridges 1861).

## LA “ESTÁTICA GRÁFICA”

Diversos autores, principalmente arquitectos, empezaron a usar métodos gráficos de análisis de arcos, repitiendo construcciones similares a las anteriores, combinadas con cálculos algebraicos o no, pero el empleo de método gráfico solo se generalizó gracias al impulso de Karl Culmann (1821–1881) Profesor del Politécnico de Zurich. La publicación en 1866 de su *Graphische Statik*, estática gráfica, marcó un hito en el

análisis de estructuras. Hay que precisar que la palabra “Statik” en alemán significa cálculo de estructuras; las traducciones “estática gráfica”, “statique graphique” o “graphic statics”, tienen un sentido restringido al empleo de sólo las ecuaciones de equilibrio, que no está en el original, que contempla el empleo de las ecuaciones del material y de compatibilidad, por ejemplo, en el análisis elástico de arcos. La traducción correcta sería “Cálculo gráfico de estructuras”.

Culmann planteó un ambicioso programa por el cual prácticamente todo el cálculo de estructuras se podría tratar con métodos gráficos (Maurer 1998). En el caso que nos ocupa maneja con claridad el polígono funicular combinado con el polígono de fuerzas para el trazado de líneas de empujes en arcos y estribos; discute además los posibles planos de corte o de junta (Figura 24). Consciente de la indeterminación de la posición de la línea de empujes afirma, sin demostración, que la “verdadera” línea de empujes es aquella que se aproxima más a la línea media del arco. Lo importante es que Culmann dio carta de validez y popularizó los métodos gráficos, aunque con el tiempo el propio Culmann vio que no todo se podía tratar de forma exclusivamente gráfica y que con frecuencia había que combinar lo analítico y lo gráfico.

Desde el decenio de 1870, y hasta bien entrado el siglo xx, se publicaron innumerables manuales de estática gráfica (Chatzis 2004). En general se centraban en el problema del problema de hallar las fuerzas internas en entramados de barras. Este tipo de estructuras revolucionó la construcción de cubiertas, puentes y torres: la exposición Universal de París de 1889 consagró el dominio de este tipo estructural con dos ejemplos magníficos: la Galería de Máquinas, con una luz de 114 m, y la torre Eiffel con sus más de 312 metros de altura. El análisis de los entramados de barras se basaba en las propiedades recíprocas de la geometría del entramado y de sus polígonos de fuerzas en equilibrio. Estas propiedades ya fueron formuladas por primera vez con toda generalidad por Maxwell (1864), en un largo y difícil artículo. Este aspecto abstracto de la estática gráfica aparece también en el tratado de Culmann, sobre todo en el primer tomo de su segunda edición (Culmann 1875) que su muerte en 1881 le impide completar (Maurer 1998). La tendencia a la abstracción geométrica se incrementa en otros tratados posteriores. Véase por ejemplo el tratado del italiano

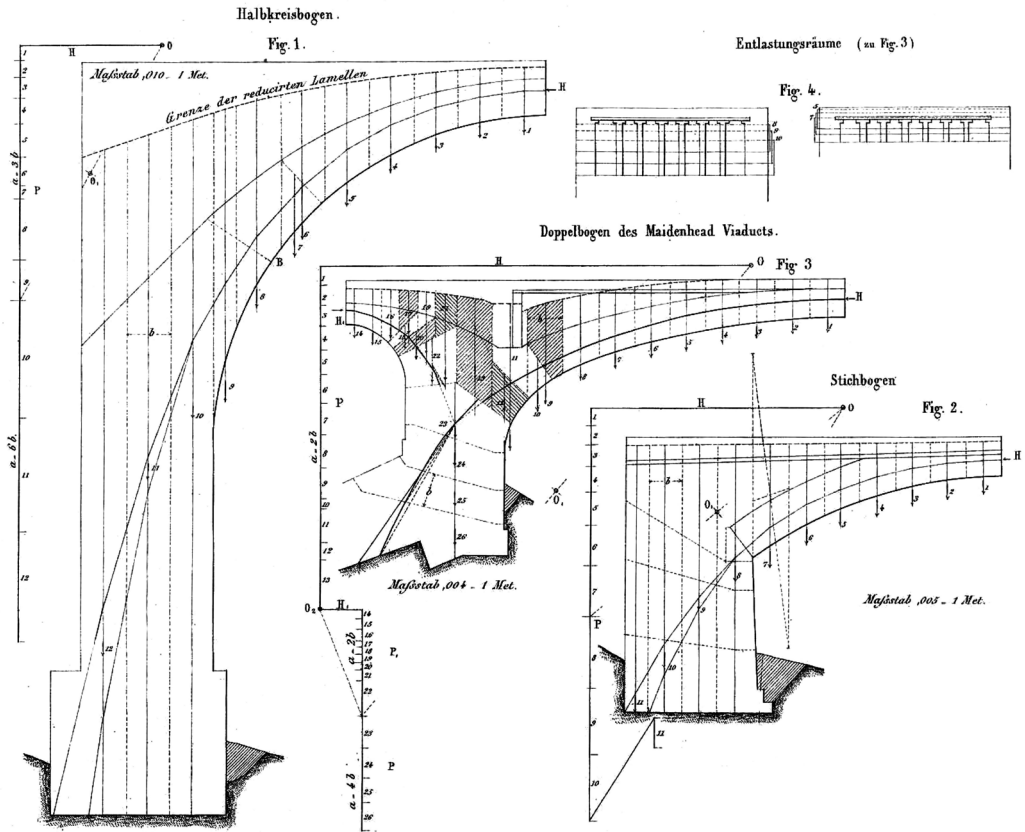


Figura 24. Dibujo de líneas de empujes en arcos y bóvedas de cañón con la ayuda de los polígonos funicular y de fuerzas. Nótese la consideración de distintos planos (hipotéticos) de junta (Culmann 1866).

Cremona (1872) que tuvo gran éxito y se tradujo a varios idiomas. En España el diagrama de Maxwell para obtener la fuerza interna en entramados de barras se conoce popularmente como “el cremona”.

En estos tratados de estática gráfica del último cuarto del siglo XIX el trazado de líneas de empujes en arcos no siempre se exponía, quizá porque se consideraban ya los arcos y bóvedas de fábrica como algo “pasado”, o quizá porque lo consideraban como algo trivial. El único desarrollo fue, quizá, la aplicación de las propiedades proyectivas de los polígonos funiculares y de fuerzas para simplificar trazados básicos, como por ejemplo, métodos para trazar un funicular que pasa por tres puntos. Pero los trazados más primitivos, semi-gráficos, de Méry, Barlow o Scheffler se siguieron usando para el caso de arcos simétricos hasta entrado el siglo XX.

### Primeros análisis de equilibrio de bóvedas y edificios

El siguiente salto cualitativo fue pasar del plano al espacio, de los arcos y las bóvedas de cañón, a las cúpulas y bóvedas de arista. Frézier en 1739 ya había explicado el enfoque: imaginar la bóveda cortada en arcos elementales “planos” y obtener el empuje de la bóveda espacial como la suma de los empujes de cada uno de los arcos elementales. Frézier dio solamente la idea y sacó algunas conclusiones sencillas que tuvieron gran repercusión posterior. Por ejemplo, su idea de que el empuje de una cúpula semiesférica es la mitad del empuje de la bóveda de cañón del mismo perfil, aunque no es exactamente cierta, sí es bastante aproximada, va a favor de seguridad y se mencionó en sucesivos tratados. El gran arquitecto y constructor de

bóvedas, Rafael Guastavino padre utilizó esta simplificación para calcular los empujes de sus grandiosas cúpulas y poder calcular así la tracción en los zunchos de hierro que los anulaban, Guastavino (1883, 2006), Huerta (2006).

En 1748 Poleni aplicó con toda claridad este enfoque de los cortes a la cúpula de San Pedro de Roma, si bien obtuvo la línea de empujes experimentalmente mediante un modelo colgante, sin duda, al darse cuenta de la enorme complejidad del cálculo matemático asociado (López Manzanares 2023). Navier recogió el enfoque en su *Résumé des leçons* (1826 y ediciones sucesivas) y lo popularizó. En el decenio de 1870, varios arquitectos e ingenieros se dieron cuenta de la enorme libertad que daba la posible división de bóvedas y cúpulas espaciales en arcos elementales, y la posibilidad de la obtención de manera puramente gráfica de sus empujes. Como pioneros podemos citar a Paul Planat en Francia, Wittmann en centroeuropa y Eddy en América. Al mismo tiempo se desarrollaron métodos analíticos. En 1858, Rakine en su *Manual of Applied Mechanics* desarrolló el análisis de membrana, algebraicamente, para cúpulas y obtuvo las ecuaciones de las tensiones internas. En 1866, Schwedler hizo un desarrollo similar para calcular analíticamente las fuerzas en sus cúpulas de barras.

### Francia: Planat. Primer estudio global de un edificio

Paul Planat (1839–1911), un ingeniero egresado de la École centrale, es quien por primera vez, en 1877, realiza el análisis de equilibrio de un edificio completo. Curiosamente, el objetivo no era este análisis sino explicar mediante la aplicación de las fórmulas de la flexión compuesta, las deformaciones que se observan habitualmente en las grandes iglesias góticas, Figura 25 (a). Para ello debe obtener los empujes en las secciones más importantes y realizar el análisis de equilibrio. No parece dar importancia a la audacia de su análisis, pero hay que insistir en que es la primera vez que se acomete la tarea de explicar el equilibrio de un edificio completo. Planat imagina las bóvedas de crucería compuestas de arcos elementales que cargan sobre los arcos cruceros, que finalmente transmiten las cargas al sistema de contrarresto, formado por arbotantes y estribos exteriores. No dibuja las líneas de empujes en los arcos elementales y se limita a hallar el empuje horizontal considerando la “junta de rotura” a mitad de distancia entre los arranques y la clave (un residuo de la antigua teoría de La Hire-Bélidor), Figura 25 (b). Aplica el mismo enfoque para hallar los empujes de los arbotantes y dibuja el estado completo de equilibrio para el tramo completo considerado, Figura 25 (c).

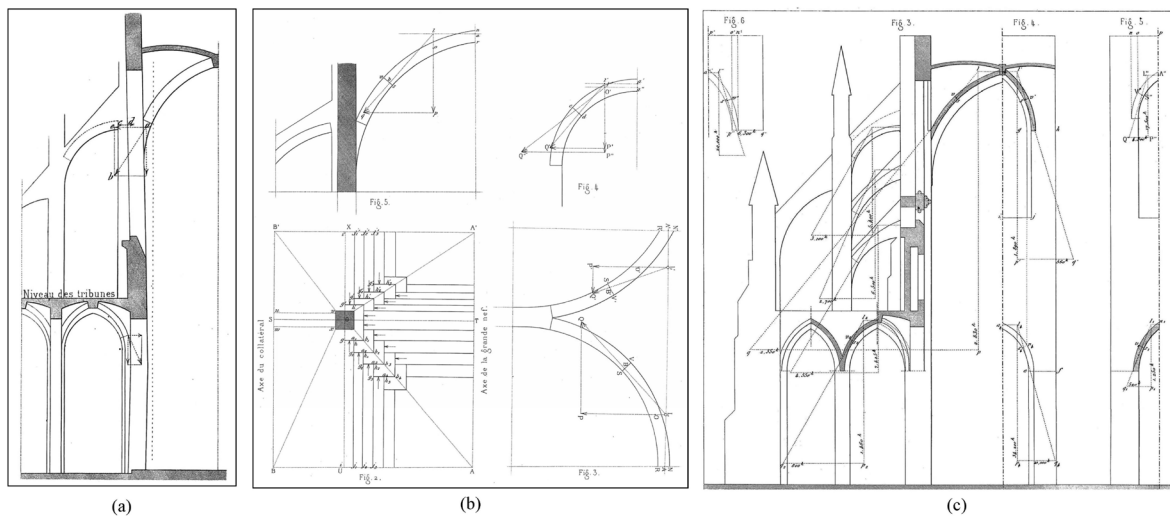


Figura 25. Análisis de equilibrio de una iglesia gótica (Planat 1877): (a) Deformaciones observadas; (b) Cálculo de empujes en las bóvedas de crucería y arcos de la nave; (c) Equilibrio del tramo completo.

### Alemania: Wittmann y Gottgetreu. Análisis de bóvedas y cúpulas

Wilhelm Wittmann (1845–1899), arquitecto y profesor en la Escuela Técnica de Múnich, publicó en 1879 (Wittmann 1879a) en la revista *Zeitschrift für Bauwesen*, de gran difusión en Europa central, un artículo sobre “Theorie der Gewölbe”, teoría de las

bóvedas, que luego incluyó ampliado en su tratado *Statik der Bauconstructionen* (Wittmann 1879b), mecánica de las construcciones. Wittmann explica el trazado gráfico de líneas de empujes, primero en arcos, después en sistemas de arcos con sus estribos, bóvedas de túneles (considerando el empuje del terreno), bóvedas de crucería (con cortes paralelos a los arcos de cabeza o perpendiculares al arco crucero), y, finalmente, cúpulas

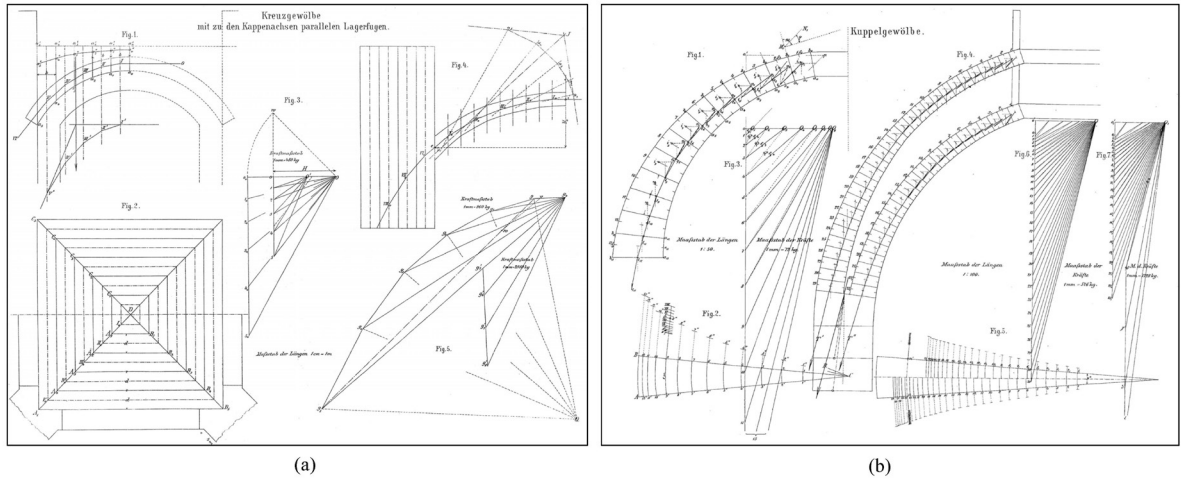


Figura 26. Análisis de equilibrio (Wittmann 1879a): (a) Bóvedas de crucería, cortes paralelos a los arcos de cabeza; (b) Cúpulas simples y dobles.

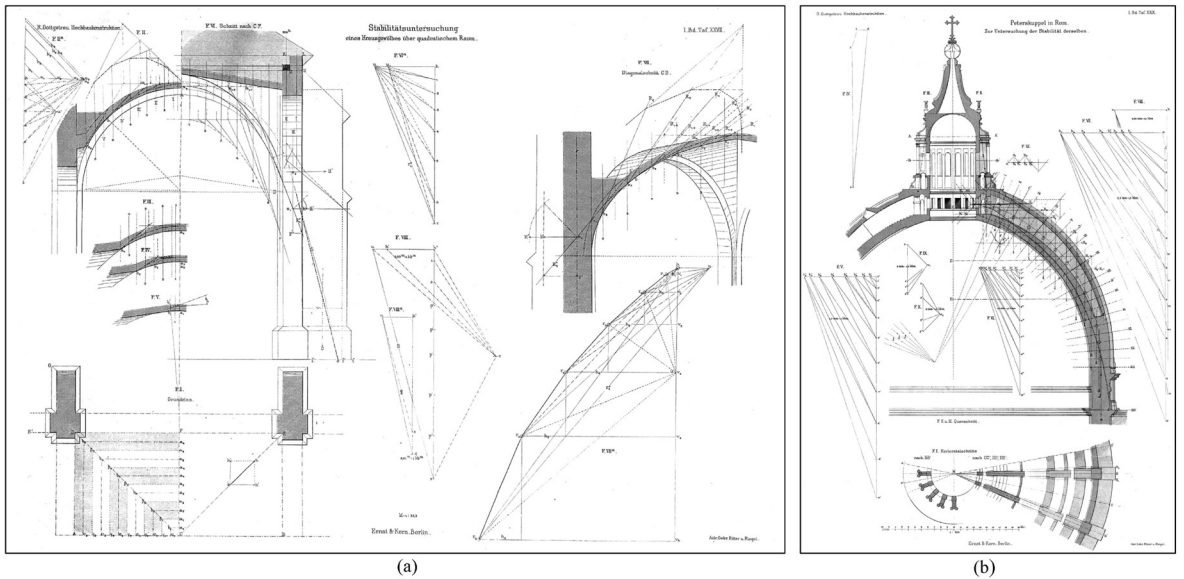


Figura 27. Análisis gráfico de equilibrio (Gottgetreu 1880): (a) Bóveda de crucería sobre estribos; (b) Cúpula de San Pedro de Roma.

simples y dobles. Es la primera vez que se afrontaban estos problemas gráficamente, de manera sistemática y en una forma sencilla aplicable por cualquier arquitecto ingeniero, con un simple conocimiento de las leyes de la estática. Wittmann no parece dar importancia de descubrimiento a esos métodos que parecen haber estado en el aire en aquella época. Cita a autores anteriores (Scheffler, Frauenholz, Heinzerling, von Ott) del ámbito centroeuropeo, pero ninguno de ellos se había ocupado de bóvedas de arista o cúpulas.

Rudolf Gottgetreu (1821–1890), otro arquitecto municipal y profesor de dibujo en el Politécnico, debió llevar ya años estudiando el análisis de equilibrio de arcos y bóvedas cuando publicó en 1880 el primer tomo de su *Lehrbuch der Hochbaukonstruktionen*, Manual de la construcción de edificios, dedicado a las construcciones en piedra (Gottgetreu 1880). En este tomo dedica un largo apartado al análisis de la estabilidad de las bóvedas y sus estribos (*Über die Stabilität der Gewölbe und deren Stützen*) donde expone la construcción de líneas de empujes en arcos y bóvedas y cúpulas, con

la novedad de que las aplica a casos de apariencia real. Así, en el cálculo de la bóveda de crucería dibuja lo que puede ser una bóveda de crucería real con sus contrafuertes de sección variable, etc., Figura 27 (a). En el caso de las cúpulas tras explicar el trazado general lo aplica al trazado de la línea de empujes en la cúpula de San Pedro de Roma, donde hace detallado, análisis gráfico que reproduce en una espléndida lámina, Figura 27 (b).

### Eddy. Análisis de cúpulas: estado de membrana

Desde el siglo XVIII se sabía que en la parte superior de una cúpula se podían formar anillos de compresión que permitían “dirigir” las fuerzas por la superficie media. Bouguer (1734) ya encontró que, en una cúpula semiesférica, a partir de cierto ángulo ( $52^\circ$ ) los anillos se traccionaban. También se realizaron varios intentos de hallar la forma matemática de la cúpula de forma ideal (López Manzanera 2022). Todo ello llevó

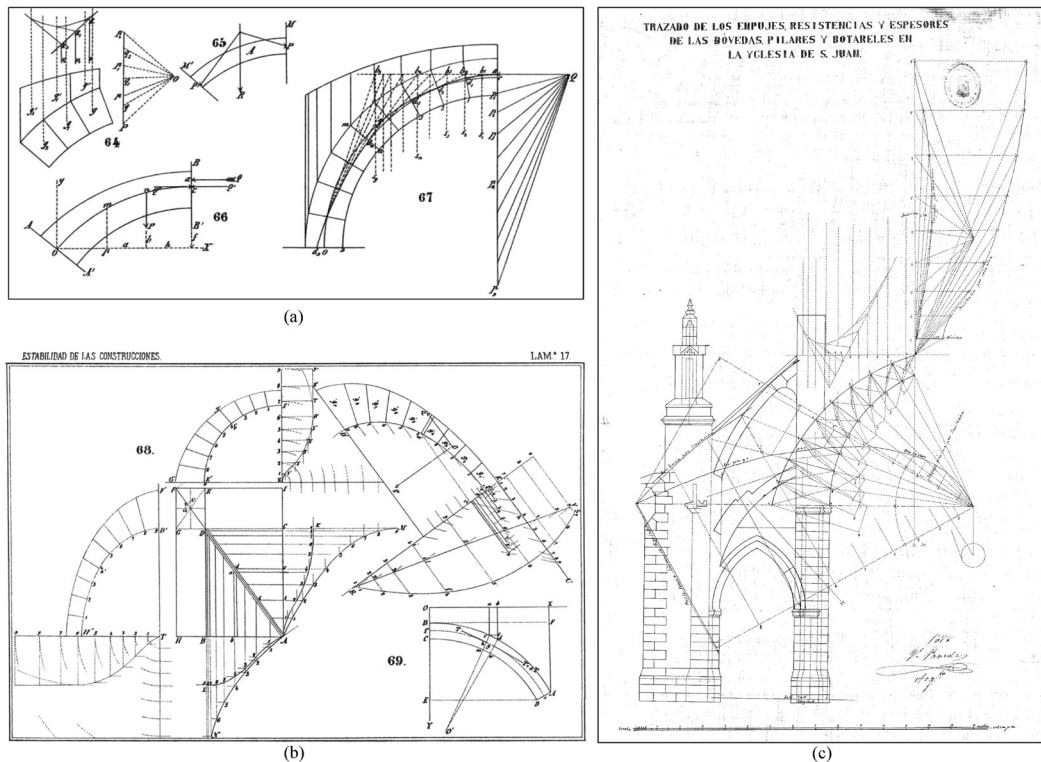


Figura 28. Análisis gráfico de cúpulas: (a) Eddy (1877); (b) Föppl (1881).

a complicaciones matemáticas que impedían su aplicación práctica. Rankine (1958) fue el primero en dar una exposición matemática sencilla para geometrías simples (la esfera, el cono) de las ecuaciones de la membrana, esto es, la solución de equilibrio con todas las fuerzas tangentes a la superficie media. Las fórmulas de Rankine se emplearon en el cálculo de las primeras cúpulas de hormigón armado (Kohnke 1909).

El ingeniero americano Henry T. Eddy (1844–1921) publicó en 1877 sus *New Constructions in Graphical Statics* donde incluye el primer método puramente gráfico para el análisis de cúpulas, ya sean de fábrica o de metal, Figura 28 (a). Eddy señala que en las cúpulas de fábrica se puede tener un estado de membrana en la parte superior, pero que pasado un cierto ángulo la superficie de empujes se tiene que separar de la superficie media. El tratado fue traducido al alemán por August Föppl (Eddy 1880) quien expresa esta

propiedad con un expresivo dibujo en su tratado sobre bóvedas (Föppl 1881), Figura 28 (b). Este método de Eddy fue popularizado en el mundo anglosajón a principios del siglo xx por Dunn (1904). El método se empleó para calcular el armado de las cúpulas de hormigón (Kohnke 1909). A principios del siglo xx se empleó en el cálculo de grandes cúpulas de fábrica (Fuentes 2021b).

### PRIMERAS APLICACIONES AL ESTUDIO DE ESTRUCTURAS HISTÓRICAS: EL CASO DE ESPAÑA

El análisis gráfico del equilibrio se propagó con velocidad por las distintas escuelas de arquitectura e ingeniería en toda Europa. Con sorprendente rapidez se aplicaron al análisis de estructuras históricas. Resulta difícil hacerse una idea del alcance y los medios de esta

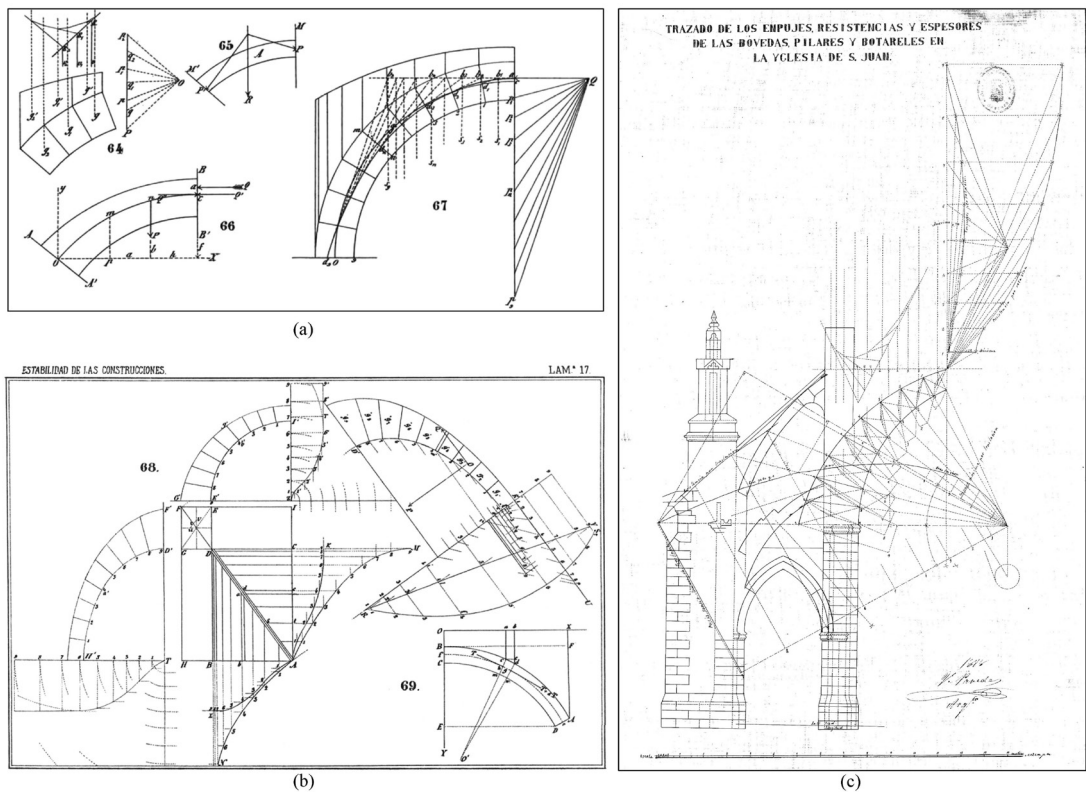


Figura 29. Saavedra (1860): (a) Análisis de arcos. Empleo de polígonos funiculares y de fuerzas; (b) Método gráfico-analítico para el cálculo de empujes de una bóveda de arista. Paredes Guillén (1878): (c) Aplicación del método de Saavedra a la iglesia de San Juan en Don Benito (Archivo Provincial de Cáceres).

difusión, pero hay casos concretos que son muy significativos. Nos limitaremos al caso de España donde están documentados varios casos muy significativos.

El primero de ellos es un intento de análisis de una sección de una iglesia gótica en 1878 por parte del arquitecto extremeño Vicente Paredes Guillén (1840–1916). Paredes intenta aplicar el complicado método gráfico-analítico de Saavedra (incluido en los apéndices a la edición española del tratado de estabilidad de las construcciones de Michon (1860)) a calcular los empujes de las bóvedas de un proyecto para la iglesia de San Juan en Don Benito, Badajoz, Figura 29. (Debo el conocimiento de este trazado a José Sánchez Leal (†) que me lo envió hace ya dos decenios.) No se conservan cálculos y la iglesia construida es distinta, pero es llamativo que un arquitecto, egresado en 1868 de la Escuela de Arquitectura de Madrid, intentara un cálculo de este tipo.

Pero el hecho más relevante es que en 1882 Juan de Madrazo y Kunst (1829-1880), arquitecto egresado de la Escuela de Arquitectura de Madrid en 1852, realizara un análisis estático de las bóvedas de la catedral de León. No hemos conseguido consultar la memoria original pero los trazados gráficos publicados por González Varas (1993, 2001) no dejan lugar a dudas de que Madrazo conocía las técnicas de trazado de Méry, Barlow, o Scheffler, que aprendió posiblemente en la Escuela de Arquitectura, y que también conocía el método de los cortes para el análisis de bóvedas de crucería, Figura 30. Sin duda en la Escuela de Arquitectura había algún profesor o profesores que transmitió en época temprana los últimos avances en el análisis de equilibrio de arcos y bóvedas. Esta suposición no la he podido comprobar por la escasez de publicaciones sobre la enseñanza en la Escuela de Arquitectura; sólo hay descripciones generales que no

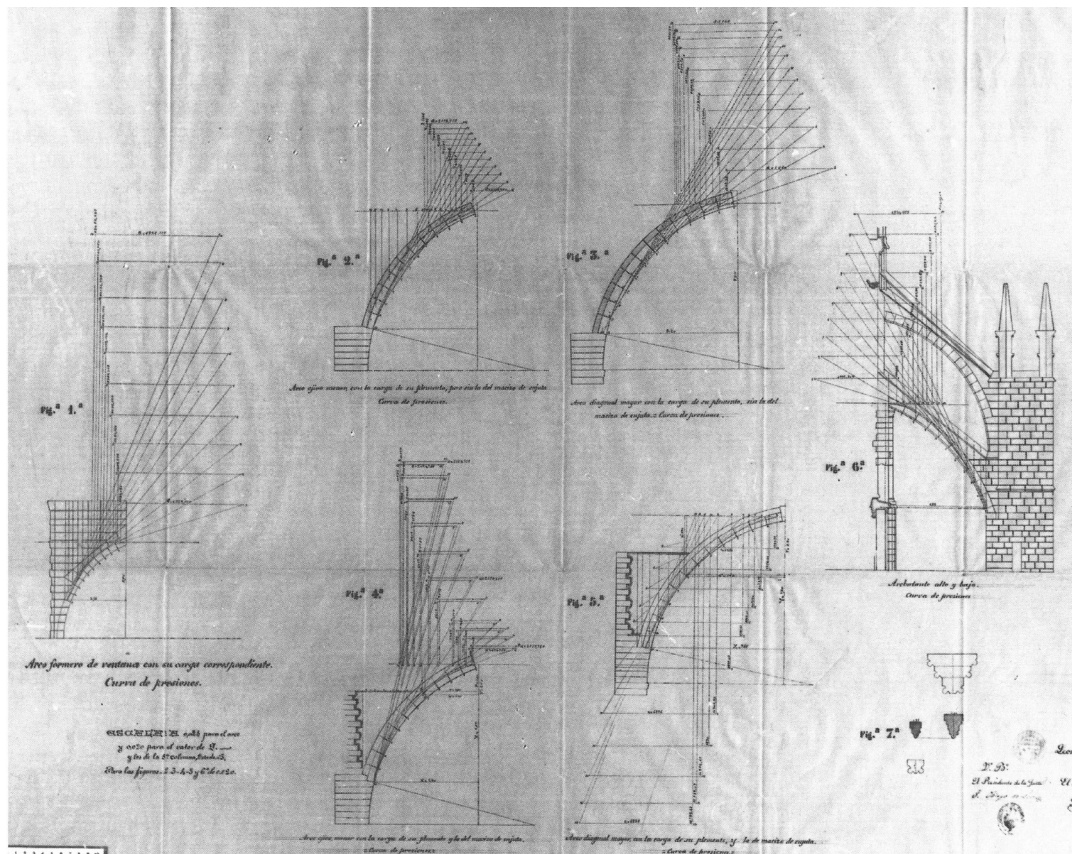


Figura 30. Análisis de equilibrio de los nervios que soportan las bóvedas de la catedral de León (Madrazo y Kunst 1882. Archivo General de la Administración. Tomado de González Varas (1993)).

entran en el detalle de la enseñanza (Navascués 1994, 1996). Madrazo aplicó el método de los cortes para el cálculo de los empujes que se transmitían a través de los nervios. Posiblemente el empleo de esta técnica se ve apoyado por las teorías de Viollet-le-Duc (1854), que consideraba la plementería como un elemento pasivo, mientras que los arcos cruceros eran el elemento activo que transmitía los empujes.

En el mismo decenio, en 1884, Adolfo Fernández Casanova (1843–1915), título de arquitecto en 1871, realiza un estudio completo de la estabilidad uno de los pilares torales de la catedral de Sevilla, dentro de sus amplios trabajos y estudios de este monumento. Como antes no he podido consultar la memoria y dibujos originales. La ilustración que he reproducido en la Figura 31 (a) está tomada de Gómez de Cozar y Gómez Terreros (2000). A pesar de la baja calidad, se distingue claramente el trazado de líneas de empujes, esta vez con la ayuda de polígonos de fuerzas (que estaban ausentes en el análisis de Madrazo).

Finalmente, en 1889, Enrique María Repullés y Vargas (1845-1922), título de arquitecto en 1869, realiza un extenso estudio del equilibrio de la Basílica de Ávila que, al parecer, se encontraba en un estado ruinoso (Álvarez Capra 1890). En la Figura 31 (b)

se reproducen los trazados gráficos. Como Fernández Casanova, Repullés emplea el polígono de fuerzas para trazar las líneas de empujes.

Como se ha dicho el estudio de la aplicación de los métodos gráficos de equilibrio a casos de peritajes reales está por hacer. La dificultad radica en que, como en los citados casos de León y Sevilla en España, este tipo de análisis no hayan sido publicados y se conservan inéditos en los archivos de las iglesias o catedrales, o de diversas instituciones. Sin embargo, estos ejemplos confirman que, hacia 1890, los arquitectos e ingenieros disponían ya de herramientas para el análisis gráfico, no ya de arcos y bóvedas, sino también de edificios completos.

### LA DIFUSIÓN DE LOS MÉTODOS GRÁFICOS DE EQUILIBRIO HACIA 1900

El decenio de 1880 fue de extraordinaria actividad en el desarrollo de análisis gráficos de equilibrio de arcos, bóvedas y edificios. Durante estos años, en toda Europa, arquitectos e ingenieros descubrieron la potencia del enfoque gráfico y lo aplicaron con mayor o menor rigor e ingenio al análisis de

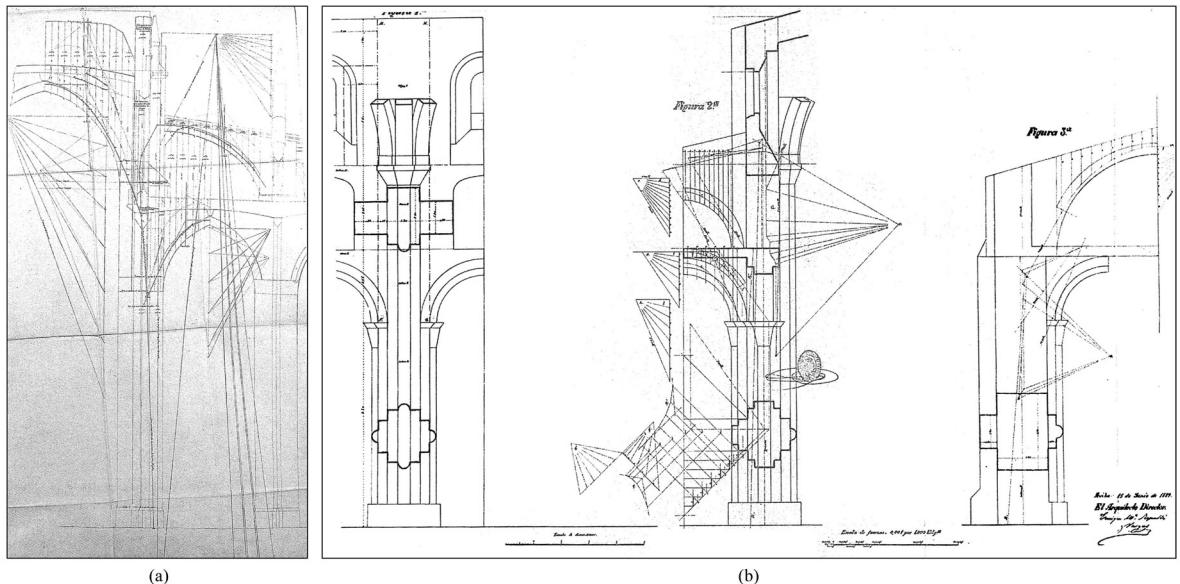


Figura 31. (a) Equilibrio de uno de los pilares torales de la catedral de Sevilla (Fernández Casanova, 1884. Cabildo de la Catedral de Sevilla. Imagen tomada de Gómez Cozar (2000)); (b) Análisis de la estabilidad de la Basílica de Ávila (Repullés y Vargas 1889).

edificios abovedados. En los manuales de estabilidad de las construcciones (lo que hoy llamamos cálculo de estructuras) hay siempre un apartado dedicado al estudio gráfico de arcos y bóvedas. Sin ninguna pretensión de hallar el “estado real” de la estructura —la solución elástica que llevaba a sistemas de ecuaciones imposibles de resolver— los arquitectos, principalmente, y algunos ingenieros, podían realizar estudios de equilibrio basados en un conocimiento profundo de la construcción y aplicando las sencillas técnicas de trazado de líneas de empuje que hemos visto (Huerta 2008).

Por ejemplo, en Francia, el arquitecto Léon Benouville (1860–1903) publicó en 1891, su análisis de equilibrio de la catedral de Beauvais, como parte del trabajo presentado en su concurso para ser arquitecto diocesano (Benouville 1891), Figura 32. Este análisis, comentado ya por Heyman (1968), parte de un valor conocido del empuje de las bóvedas y establece el equilibrio a largo del sistema de

contrafuertes, arbotantes y estribos hasta llegar a la base de los pilares y de los estribos exteriores. Es significativo que Benouville no indique cómo ha calculado el empuje de las bóvedas; esto se debe con toda probabilidad a que se consideraba ya entonces como un método bien conocido. Benouville calcula también las tensiones medias en la base del pilar y se sorprende al hallar un valor de sólo  $13 \text{ kg/cm}^2$  ( $1,3 \text{ N/mm}^2$ ), para unos pilares que soportan las bóvedas más altas del gótico que alcanzan 48 m de altura desde el suelo de la nave.

Pero hay dos personas clave en la difusión de los análisis de equilibrio de arcos y bóvedas: en Francia, Paul Planat, de quien hemos visto su primer trabajo. En Alemania, Karl Mohrmann. De manera diferente, que veremos a continuación, ambos autores, el primero ingeniero, el segundo arquitecto, fueron claves en la difusión y desarrollo de estos métodos.

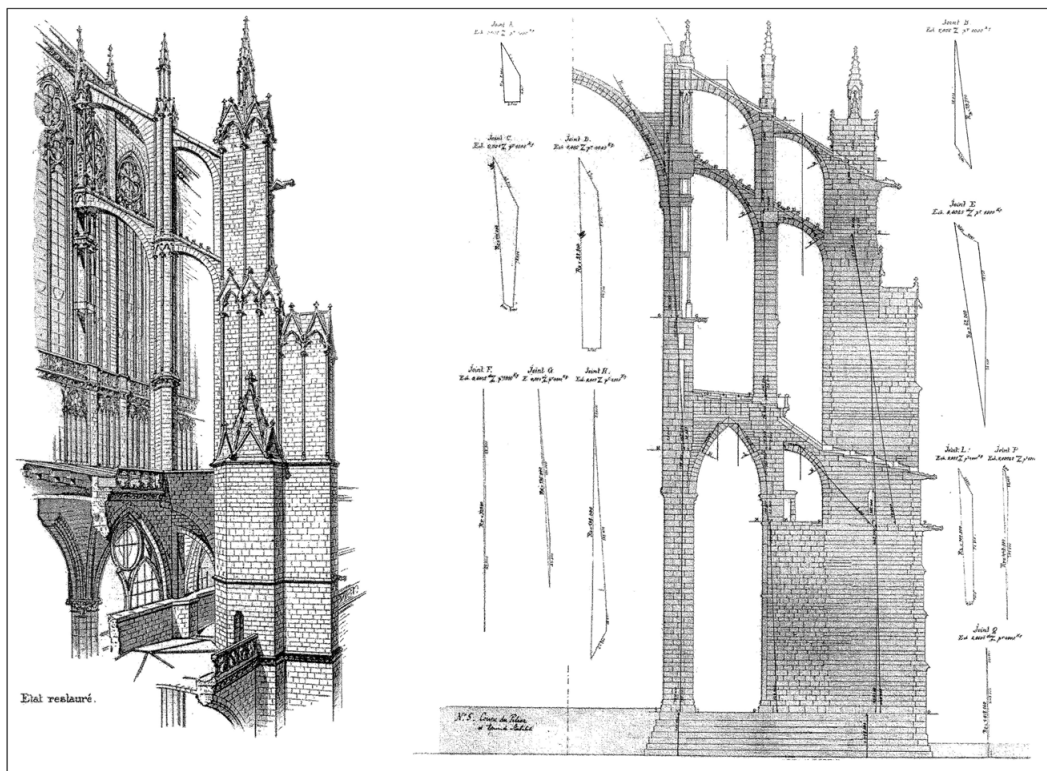


Figura 32. Análisis de equilibrio del sistema de contrarresto de la catedral de Beauvais (Benouville 1891).

### Paul Planat: las consultas técnicas en la *Construction moderne*

Probablemente sea Paul Planat, a quien mencionamos antes por su pionero análisis de equilibrio de una iglesia gótica, quien haya contribuido más a difundir los métodos de análisis gráfico de equilibrio en general, y en particular los de estructuras abovedadas de fábrica. Para ello empleó su revista *La construction moderne*, semanario ilustrado sobre arte, teoría aplicada, práctica, ingeniería civil, industrias de la construcción. Fundada por él en 1885 la dirigió hasta su muerte en 1911 (Rümler 1911). Planat creó una sección sobre “consultas técnicas” —que había empezado antes en *La semaine des constructeurs* coeditada con Cesar Daly, y que abandonó por diferencias de criterio— en la que contestaba a problemas prácticos enviados por los suscriptores de la revista. Estas consultas abordaban todo tipo de problemas prácticos de cálculo y proyecto de estructuras. Aunque la mayoría se refieren a las modernas estructuras de hierro, entramados o vigas continuas, un número significativo se refiere a estructuras abovedadas de fábrica.

En 1887, poco después de iniciar la publicación de *La construction moderne*, Planat publica su *Pratique de la mécanique appliquée à la résistance des matériaux*, manual que gozó de gran difusión y tuvo, al menos, cinco reimpressiones. El último capítulo XV está dedicado las bóvedas en general y hay un apartado específico sobre “Voûtes d’églises et arcs-boutants, coupoles”, bóvedas de iglesias y arbotantes, cúpulas, Figura 33. Su influencia en España fue rápida: Marvá y Mayer en la segunda edición de su *Mecánica aplicada a las construcciones* publicada en 1894 (1ª ed. 1888), ya incluye los análisis gráficos de Planat y copia las ilustraciones en su atlas.

Planat aplica siempre un enfoque de equilibrio ayudado por construcciones gráficas de líneas de empujes. Muestra una preferencia por realizar la composición de fuerzas sobre el propio dibujo, empleando el polígono de fuerzas en raras ocasiones. Resulta fascinante hojear la revista a lo largo de los años (hoy en día los números correspondientes son fácilmente accesibles, por ejemplo, en Internet Archive) y ver la enorme variedad de problemas que afronta. El análisis

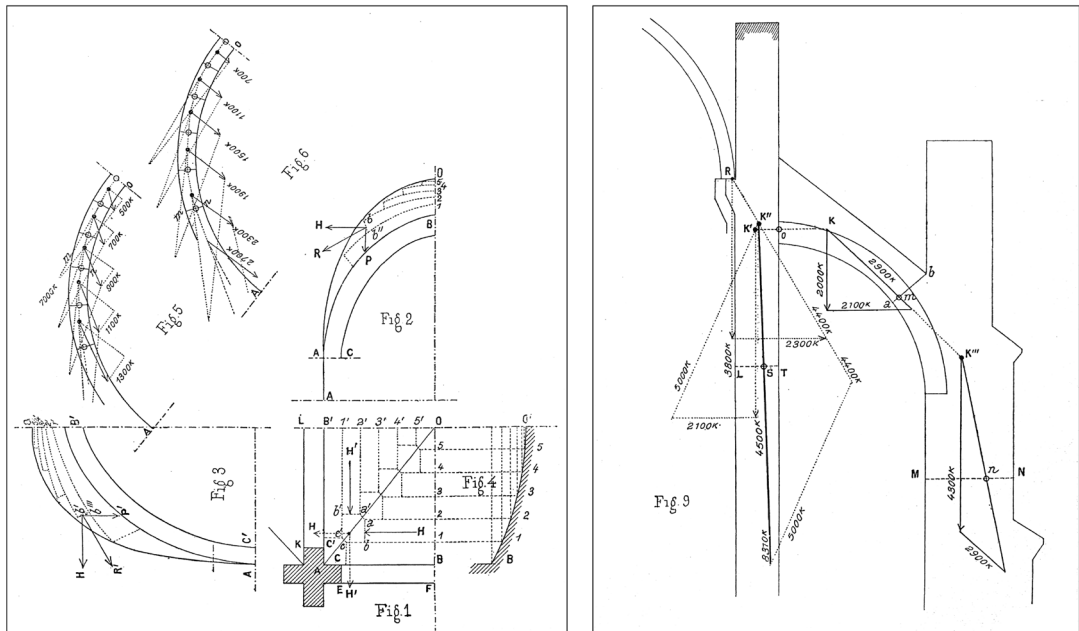


Figura 33. Casos de la *Mécanique pratique* (Planat 1887): (a) Empuje de una bóveda de crucería; (b). Equilibrio de bóveda y arbotante.

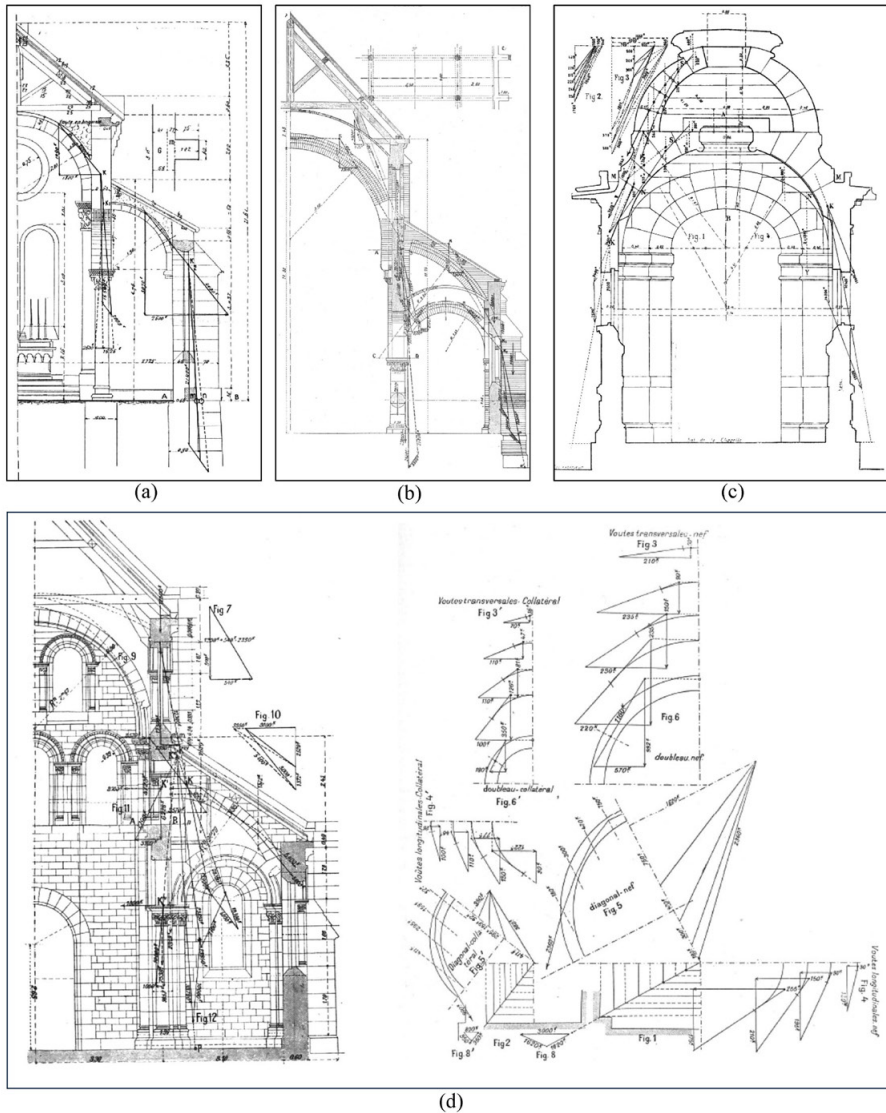


Figura 34. Diversos ejemplos de “consultas técnicas” de Planat en *La construction moderne*. (a) Febrero de 1899; (b) Enero de 1908; (c) Mayo de 1896; (d) Agosto de 1904.

se acompaña siempre de expresivos dibujos. En la Figura 34 se muestra una selección de ejemplos tomados casi al azar.

Planat incluyó después estas consultas en sus libros publicados en su colección “Bibliothèque de la Construction Moderne”. Además del ya citado sobre la práctica de la mecánica aplicada, Planat publica una *Encyclopédie de l'architecture et de la construction* en seis volúmenes (1888-1892) con ediciones posteriores sin datar. Además, publica una nueva edición

en tres volúmenes de la *Pratique de la mécanique appliquée*; en el tercer volumen amplía considerablemente la sección sobre “Voûtes, arcs-boutants et contreforts”, incluyendo ejemplos extraídos de sus consultas técnicas; son estos ejemplos los que permiten fechar las ediciones que se publican sin indicar el año de edición. Finalmente, publica otro manual titulado *L'art de bâtir*, también en tres volúmenes, esta vez dentro de un “Cours de constructions civiles”, publicado por la Librairie de la construction moderne.

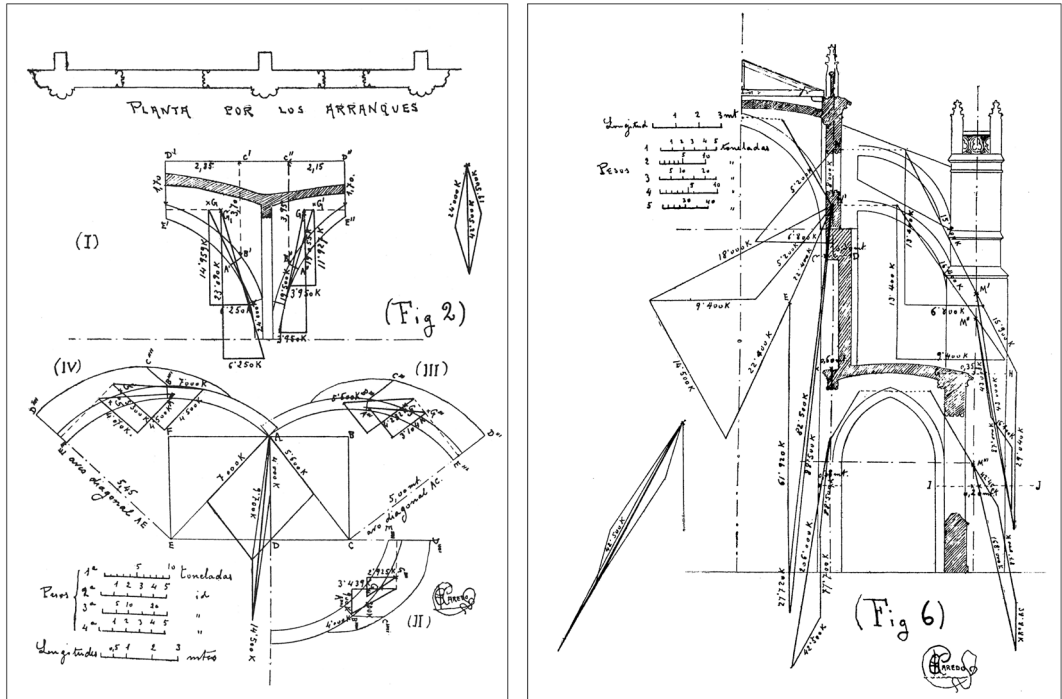


Figura 35. Análisis de equilibrio de la iglesia de Castro Urdiales (Laredo 1908).

De nuevo va sin año pero el catálogo de la Biblioteca Nacional Francesa lo fecha entre 1905 y 1921. En el tercer volumen la parte correspondiente a las bóvedas se ha ampliado considerablemente en relación con la *Pratique* y se incorporan numerosos casos extraídos de las “consultas técnicas”. Es desesperante manejar los libros de Planat producidos febrilmente durante dos décadas. Pero es incuestionable que tuvieron una importancia capital a la hora de divulgar los análisis gráficos de equilibrio.

En España, por ejemplo, el análisis realizado por Eladio Laredo (1864–1941) de la iglesia de Castro Urdiales (Laredo 1908) está claramente inspirado en las obras de Planat, Figura 35.

### Karl Mohrmann: las adiciones al manual de Ungewitter

El estudio más completo del equilibrio de estructuras góticas está contenido en las más de 200 páginas que Karl Mohrmann (1857–1927) añade sobre este tema a la tercera edición del manual de construcción gótica

de G. G. Ungewitter (1ª edición 1859, 2ª con pocas variaciones 1875). Mohrmann, arquitecto y profesor de arquitectura en la escuela técnica de Hannover, después catedrático en Riga y Hannover, convierte el oscuro tratado de Ungewitter en un manual útil, reordenando su contenido, reescribiendo y añadiendo apartados completos. Las adiciones de Mohrmann constituyen un tratado completo sobre la construcción y el equilibrio de las estructuras góticas.

En cuanto al análisis de arcos y bóvedas explica de manera sucinta el empleo de líneas de empuje y expone su trazado con la ayuda del polígono de fuerzas. Considera la bóveda de crucería dividida en arcos elementales y muestra la composición de sus empujes sobre el arco crucero. Discute también la elección de los planos de corte, proponiendo una “regla”: los arcos elementales deben coincidir aproximadamente con la trayectoria que seguiría una bola rodando sobre el trasdós de la plementería, Figura 36. Todo esto de manera clara y sucinta lo que sugiere de nuevo que para 1890 estas técnicas eran un conocimiento común entre los arquitectos e ingenieros interesados en estructuras góticas.

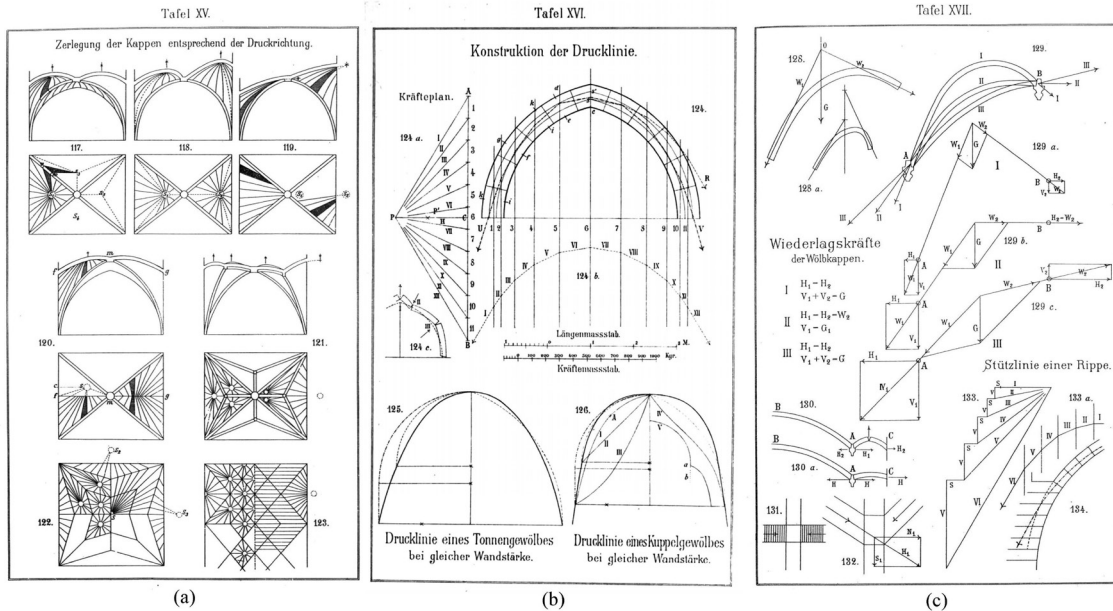


Figura 36. Mohrmann (Ungewitter 1890): (a) Posibles cortes para el estudio de bóvedas de crucería; (b) Trazado de líneas de empujes; (c) Empuje de los arcos elementales y de los arcos cruceros.

Pero el análisis de Mohrmann va mucho más allá. No es posible en este espacio estudiar sus numerosas aportaciones, sus certeros comentarios, prueba de un profundo conocimiento teórico y práctico. Señalaremos sólo sus principales contribuciones en el contexto de este artículo. Analiza de forma general el equilibrio de la sección típica de una catedral Gótica, explicando técnicas sencillas para obtener soluciones de equilibrio (Heyman 1967), Figura 37 (a). Examina la variedad de empujes en el arbotante y luego discute las posibles formas de transmisión de estos empujes a través del pilar de la nave hasta llegar al suelo, mostrando claramente la composición de las fuerzas a lo largo del pilar, Figura 37 (b). Estudia el efecto del viento en una catedral y la influencia de la construcción de muros sobre arcos perpiñaños en la transmisión de estas fuerzas, Figura 37 (c).

También analiza el equilibrio de iglesias de tres naves a la misma altura, tipo salón, realizando interesantes comentarios sobre la necesidad y altura de los rellenos. Otros elementos son también objeto de su estudio detallado: los rosetones y ventanales sometidos a la acción del viento, así como los pináculos y las agujas góticas. Mohrmann también

explica la forma de aplicar las fórmulas de las resistencia de materiales a la fábrica, un material que no resiste tracciones, para los elementos sometidos a compresión excéntrica: los pilares o contrafuertes en su base. Elabora además completas tablas para el cálculo de los empujes de las bóvedas. Estas tablas fueron resumidas e incluidas por el profesor Heyman en su libro *El esqueleto de piedra* (1999) y son de gran utilidad. También elabora tablas para el cálculo rápido de estribos.

Mohrmann no da muchos detalles sobre los cálculos realizados, pero es evidente que, detrás de cada uno de sus esquemas de equilibrio, hay cálculos previos detallados y todos sus desarrollos demuestran una extensa experiencia en el trazado de líneas de empujes y el estudio del equilibrio global de la estructura gótica. No obstante, resulta sorprendente que Mohrmann no hubiera publicado antes nada sobre el equilibrio de arcos y bóvedas; tampoco lo hace tras la publicación de la cuarta edición de Ungewitter en 1901 (una mera revisión, con pocas adiciones, de la tercera). El resto de su trabajo profesional es el de un reputado profesor y arquitecto de la escuela de Hannover con marcadas preferencias por el estilo neo-románico.

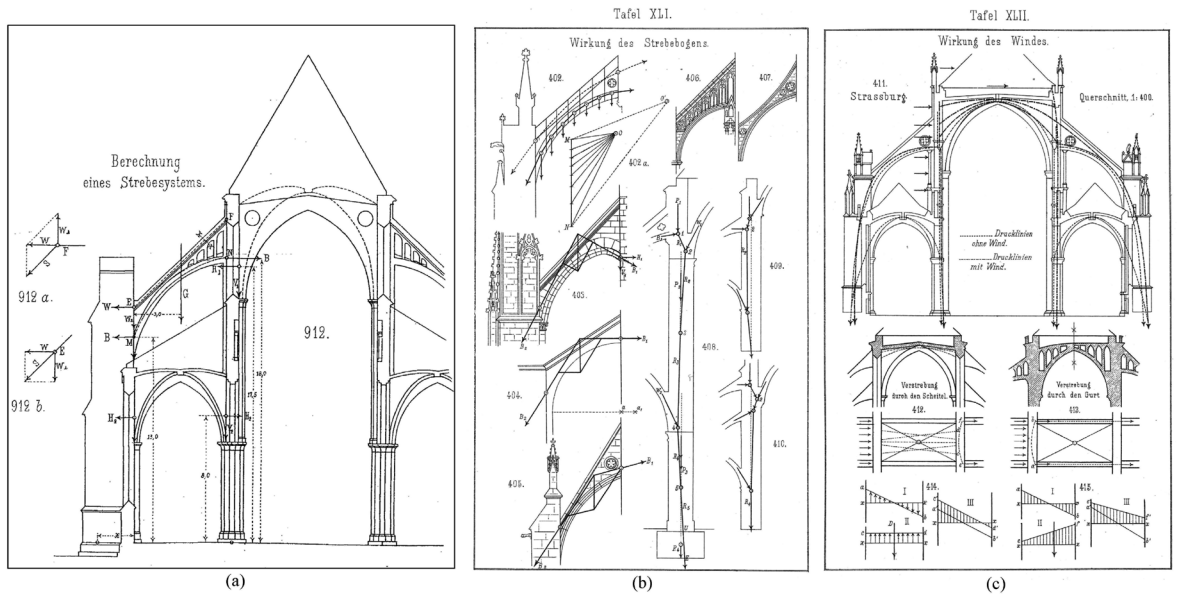


Figura 37. Mohrmann (Ungewitter 1890): (a) Análisis de equilibrio simple de una iglesia gótica; (b) Empujes en arbotantes. Transmisión de empujes por el pilar; (c) Análisis de la catedral de Estrasburgo.

### La difusión de los análisis de equilibrio en los manuales

En otros tratados de fines del siglo XIX se publican extensos análisis gráficos de equilibrio, principalmente en Alemania. Resulta imposible en este espacio dar citar siquiera una lista de las distintas contribuciones. Mencionaremos algunas. Quizá el más exhaustivo sea el de Carl Körner (1838–1907), arquitecto y profesor en la Escuela Técnica de Braunschweig, primera edición en 1895, publicado dentro del monumental *Handbuch der Architektur* (una suerte de enciclopedia de la arquitectura y la técnica de la construcción de edificios con más de 100 volúmenes). Körner estudia el equilibrio de todo tipo de bóvedas, pero lo que en Mohrmann es claridad y concisión, en Koerner se convierte en un texto farragoso excesivamente prolijo, difícil de seguir y aplicar. No obstante, contiene numerosos análisis que todavía hoy pueden ser muy útiles: por ejemplo, su aplicación del métodos de los cortes a una bóveda de crucería destaca por su claridad, Figura 38 (a). Dentro del mismo *Handbuch der Architektur* Landsberg ya había incluido en 1883 en su *Statik der Hochbaukonstruktionen* (Estabilidad

de los edificios) un capítulo sobre “Gewölbe”, bóvedas donde expone de manera concisa el enfoque del equilibrio y el empleo del método de los cortes. Combina análisis gráficos y analíticos. El libro tuvo varias revisiones en las sucesivas ediciones del *Handbuch*. Merece mención la nueva edición del tratado de Breyman por Otto Warth (1903), que contiene un útil compendio de la aplicación de los trazados de líneas de empujes de arcos, bóvedas, cúpulas y edificios, junto a una descripción detallada de su construcción, Figura 38 (b). Hoy sigue siendo un texto útil.

En Francia, aparte de los ya citados trabajos de Planat, en general, en los tratados se incluyen breves descripciones del trazado de líneas de empujes en arcos, a veces usando el primitivo método de Méry (que obliga a calcular sucesivamente los centros de gravedad), otras usando las propiedades de los polígonos funiculares y de fuerzas —en todo caso, en los manuales franceses el empleo de líneas de empujes se denomina siempre “el método de Méry”. Podemos citar como ejemplo el tratado de J. Dubosque (1920) (1ª edición 1880, 6ª 1920).

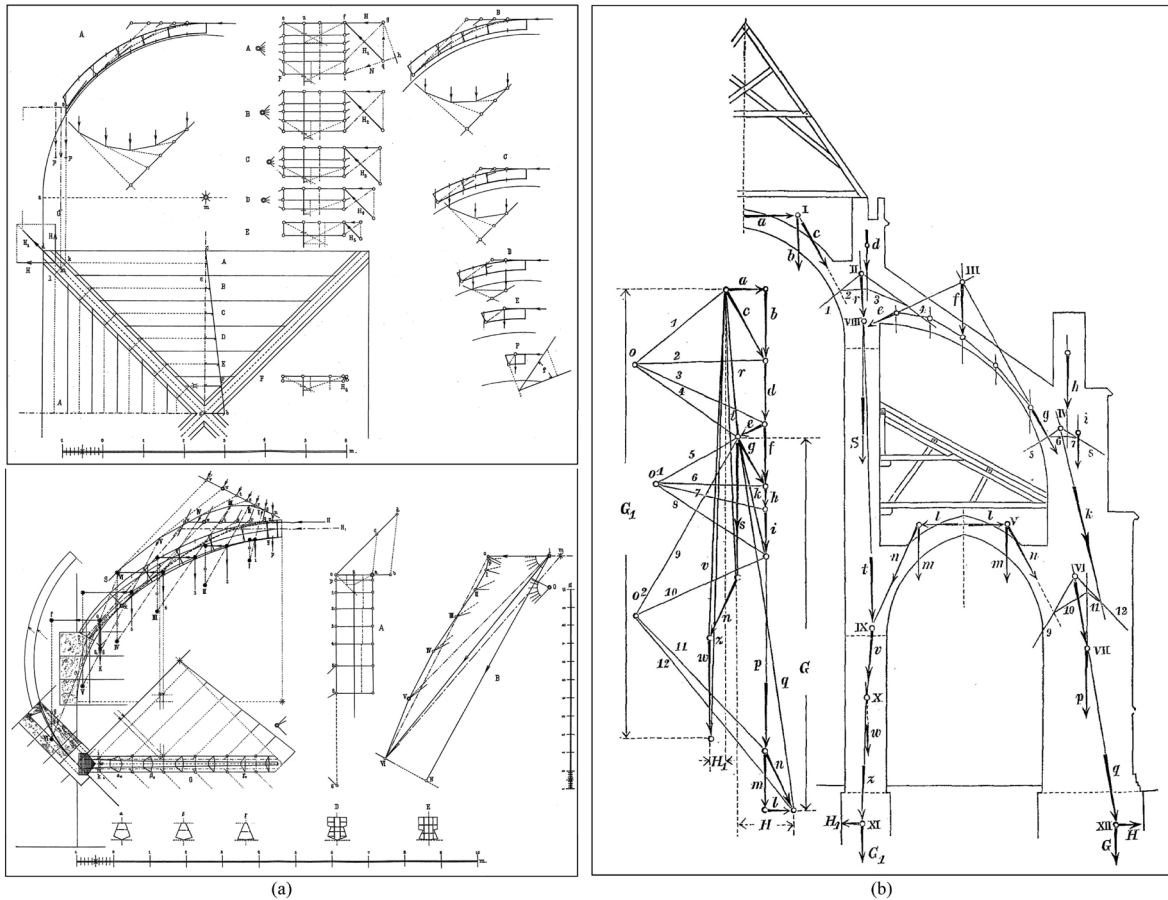


Figura 38. Análisis de bóvedas y edificios ahacia 1900: (a) Análisis de una bóveda de crucería (Körner 1895); (b) Equilibrio de una iglesia gótica (Warth 1903).

### EL ANÁLISIS GRÁFICO DE EQUILIBRIO EN LA PRIMERA MITAD DEL SIGLO XX

Es un hecho que hacia 1900, en toda Europa (y también en América del norte, donde llegan los tratados europeos y se publican otros), arquitectos e ingenieros disponían de una teoría y unas herramientas gráficas para el estudio del equilibrio de las estructuras abovedadas de fábrica y que las aplicaban en el estudio de estructuras históricas y también para el proyecto de nuevas estructuras. Pero todos estos trabajos, como toda la tradición de la construcción abovedada, fueron barridos por la llegada de la “arquitectura moderna”. Esta nueva arquitectura no sólo se basaba en el empleo de otros materiales (acero, hormigón armado) y tipos estructurales (entramados de barras, pórticos)

completamente diferentes de la fábrica; la arquitectura moderna fue también en sus inicios “anti-histórica”. Por motivos que no podemos desarrollar aquí, es evidente que tras la Primera Guerra Mundial, hubo una determinación de cortar con el pasado. Nunca antes se había producido un cambio como este. A lo largo de milenios los cambios fueron formales, las técnicas cambiaron, pero el material, la fábrica y las leyes que lo rigen no cambiaron. No hay diferencia entre la estructura de una pequeña iglesia pre-románica una gran iglesia tardo-barroca. El profesor Salvador Tarragó lo resume en una frase: “Hay una ley no escrita de la arquitectura moderna: está prohibido construir arcos y bóvedas”. Con muy pocas excepciones (Le Corbusier en unos pocos edificios) esta ley se siguió a rajatabla. Sin embargo, hubo que seguir manteniendo el

patrimonio histórico y algunos arquitectos siguieron el camino equivocado y se empeñaron en seguir construyendo arcos y bóvedas.

Lo que nos interesa aquí es el empleo de los métodos de análisis gráfico de equilibrio. Por supuesto, las herramientas de equilibrio desarrolladas en la segunda mitad del siglo XIX se siguieron aplicando, a veces con un alto grado de refinamiento, en el siglo XX. Los teóricos de las estructuras despreciaron este enfoque como burdo o aproximado, lejos del ideal del análisis elástico, de la búsqueda sin término del estado “real” o “verdadero” de la estructura.

Esta etapa de transición/desaparición de la construcción abovedada está por estudiar. Citaremos algunos ejemplos para mostrar cómo se siguieron calculando y construyendo arcos, bóvedas y cúpulas. Por ejemplo, el ingeniero W. H. Goodyear (1906) realizó un análisis gráfico completo para la capilla de la Universidad de Columbia construida por Rafael Guastavino padre con delgadas cúpulas y bóvedas tabicadas. Todos los cálculos se resumen en una sola lámina, Figura 39.

El máximo dominio del enfoque del equilibrio lo encontramos en Gaudí y su discípulo Rubio y Bellver. En el proyecto de los pórticos de contrarresto del

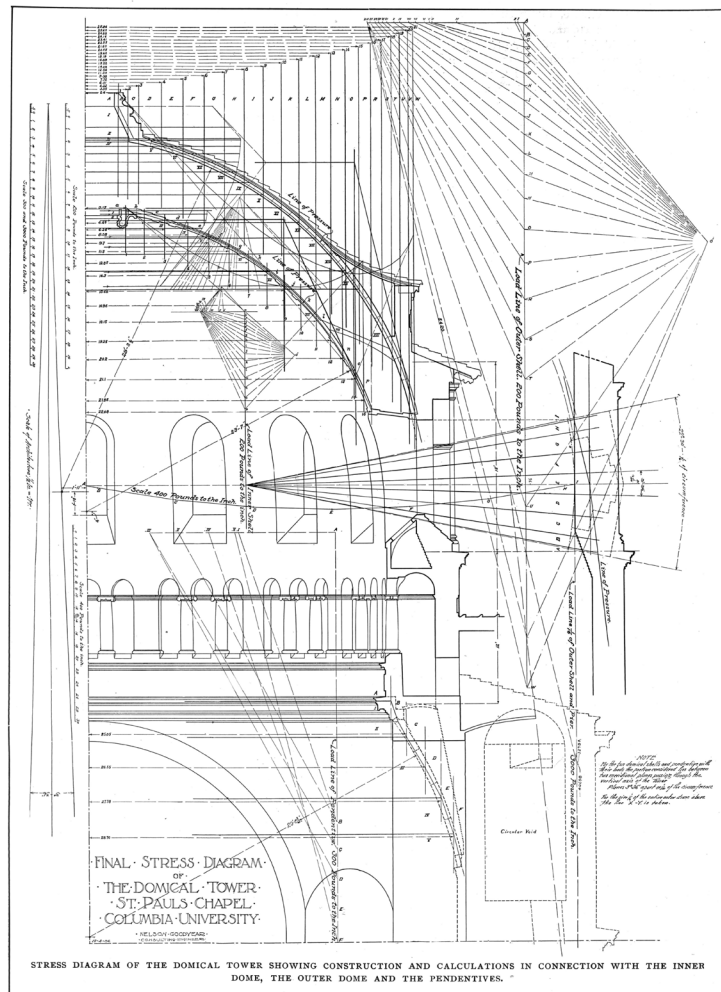


Figura 39. Análisis de equilibrio de la St. Paul's Chapel en la Universidad de Columbia, construida con bóvedas tabicadas por Rafael Guastavino padre (Goodyear 1906).

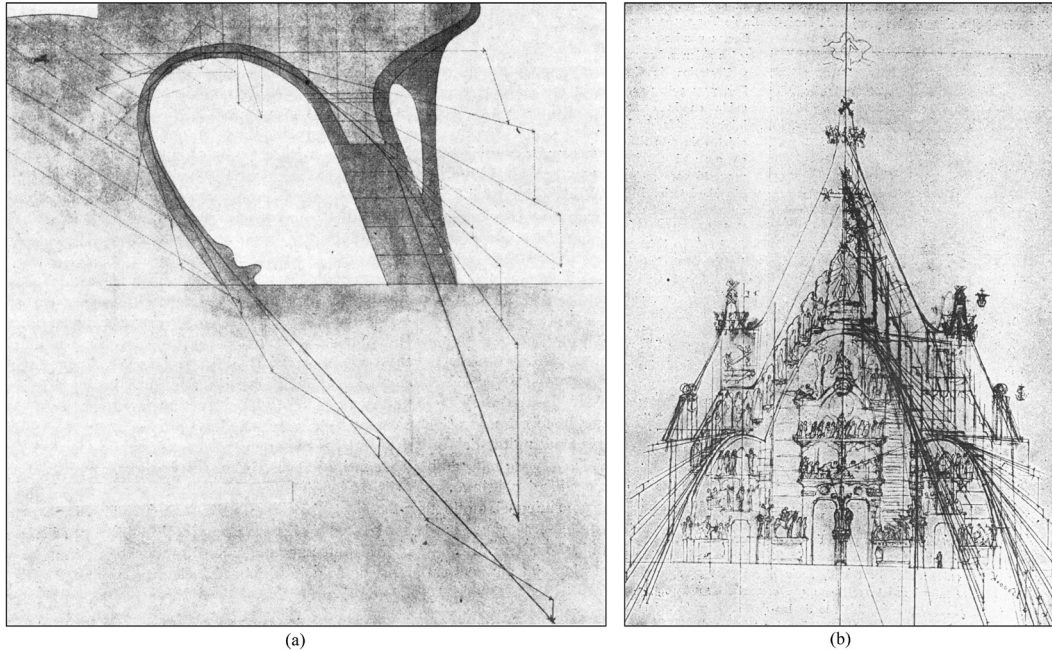


Figura 40. (a) Pórtico de contención de tierras del Parque Güell. Análisis de equilibrio ca.1900 (Rubió y Bellver 1813). (b) Análisis de equilibrio de la fachada poniente de la Sagrada Familia (Rafols 1929).

parque Güell, 1900–1914, Gaudí ya emplea el trazado gráfico (componiendo las fuerzas sobre el propio dibujo lo que muestra claramente la influencia de Planat), Figura 40 (a), no solo para verificar una forma establecida, como se había hecho hasta entonces, sino para proyectar nuevas formas; en este sentido, se puede decir que Gaudí es el fundador del moderno proyecto de estructuras. El mismo método gráfico se aprecia en un análisis de la fachada poniente de la Sagrada Familia, Figura 40 (b). Para la estructura espacial de la nave de la Sagrada Familia, una compleja estructura con bóvedas y pilares inclinados en el espacio, la simetría le permitió usar también métodos gráficos, Figura 41 (a), (b). También ejecutó modelos físicos de bloques con tamaño suficiente para fiables al verificar la estabilidad del conjunto, Figura 41 (c). Pero para otros casos, las catenarias compuestas de los desvanes de la Pedrera o para la planta irregular de la iglesia de la colonia Güell, Gaudí se vio obligado a emplear modelos colgantes a escala (Huerta 2003). En el de la iglesia Güell el modelo es a escala 1:20, escala sugerida ya en el tratado de Mohrmann sobre modelos colgantes de arcos y bóvedas ver Graefe (2021).

Gaudí trabajó en la restauración de la catedral de Palma de Mallorca, y su ayudante Rubió y Bellver realizó un estudio completo sobre el equilibrio de esta compleja estructura. El artículo publicado en 1912 constituyó el análisis más exhaustivo sobre una catedral gótica publicado hasta entonces (Rubió y Bellver 1912). El análisis gráfico de Rubió se ha estudiado en detalle en otra parte (Huerta 2019).

### Los análisis gráficos de equilibrio y “la academia”

En el siglo XIX los estudiosos del gótico eran arquitectos o ingenieros con una amplia experiencia sobre los edificios abovedados. El caso de E.-E. Viollet-le-Duc (1814–1879) es quizá el más notable pues no sólo analizó y dibujó, también restauró y reconstruyó partes abovedadas de edificios, midió sus deformaciones y agrietamientos, y formuló una teoría racional que incluía una interpretación del funcionamiento estructural. Cuando Viollet-le-Duc, escribe su *Dictionnaire* (1854-1868) el análisis gráfico no se había desarrollado suficientemente para ser aplicado a las complejas

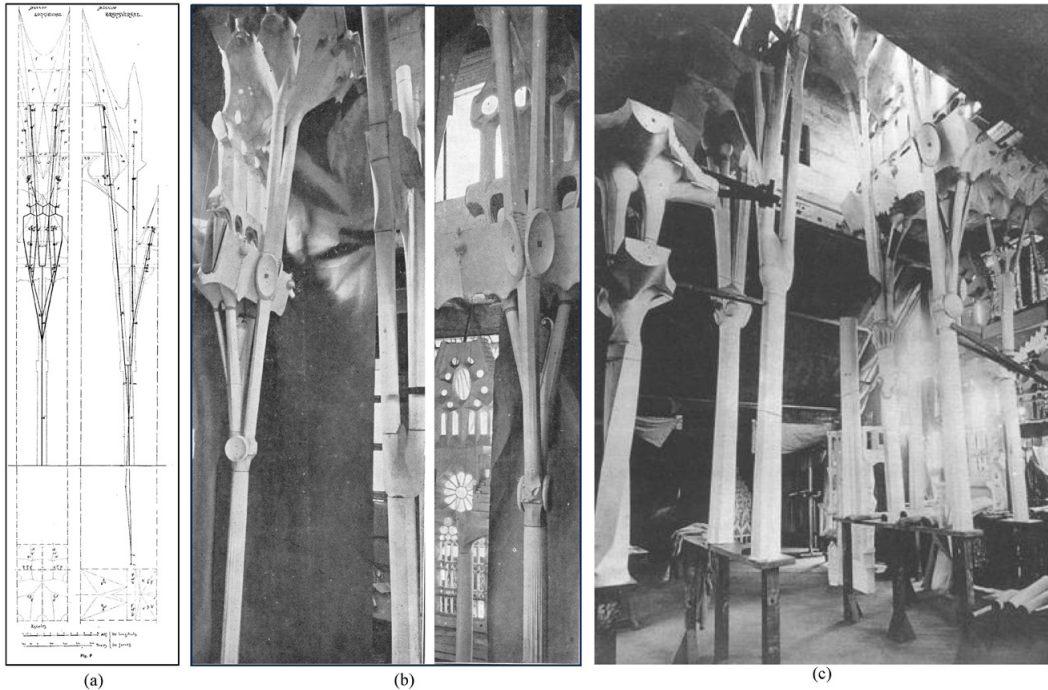


Figura 41. Bóvedas de la nave de la Sagrada Familia: (a) y (b) Análisis de equilibrio; detalle de los pilares. (Sugrañes 1923). (c) Foto del modelo (Puig Boada 1929).

estructuras góticas; él, arquitecto, tampoco tenía la formación suficiente para aplicar siquiera el método de Méry. No obstante, hemos visto que sus intuiciones sobre el funcionamiento de las bóvedas (nervios activos transmitiendo las cargas, plementería como carga pasiva) influyeron en análisis posteriores.

Auguste Choisy (1841–1909), ingeniero civil, el gran continuador de las teorías racionales de Viollet-le-Duc, aunque en su *Histoire de l'architecture* (1899) evidencia un sólido conocimiento de las estructuras góticas sólo hace afirmaciones cualitativas. Pero la semilla estaba sembrada. En 1902, Julien Guadet (1834–1908), en sus *Eléments et théorie de l'Architecture*, dedica un capítulo a las iglesias abovedadas (Guadet 1902) y en él, calcula y dibuja la forma óptima de un arbotante. Esta idea ya estaba en Mohrmann y, por supuesto, era muy querida por Gaudí quien pensaba que los elementos debían seguir la dirección de las fuerzas. El pensar en las formas posibles de equilibrio liberó las mentes de algunos arquitectos y les ayudó a considerar nuevas formas, Figura 42.

La crítica contra las teorías de Viollet-le-Duc fue iniciada por el ingeniero Victor Sabouret (1851–1937) precisamente basada en argumentos estructurales (los nervios góticos son decorativos y la plementería soporta su propio peso y el de los nervios que “cuelgan” de ellas). Más tarde, el arquitecto, Pol Abraham (1891–1966) montó un ataque feroz a las teorías de Viollet-le-Duc en su tesis doctoral, empezada en 1923, y leída en 1934 (Abraham 1934) usando, entre otros, argumentos estructurales. Cita a Paul Planat, y realiza algunos cálculos gráficos de equilibrio, más o menos correctos, algo sesgados en sus conclusiones. (El debate sobre la función de los nervios, aunque estructural, excede de los límites de este artículo; véase Frankl (1960) y Huerta (2009)). Finalmente, dentro del limitado número de académicos interesados en los análisis gráficos de la estructura gótica es preciso citar a Gerhard Rosenberg (1912–1995), arquitecto judío-alemán que estudió en la Universidad Técnica de Berlín y en 1933 emigró al Reino Unido con la subida de Hitler al poder (Mackenzie-Hooson 2014). En 1935 terminó su tesis doctoral “Function in Gothic

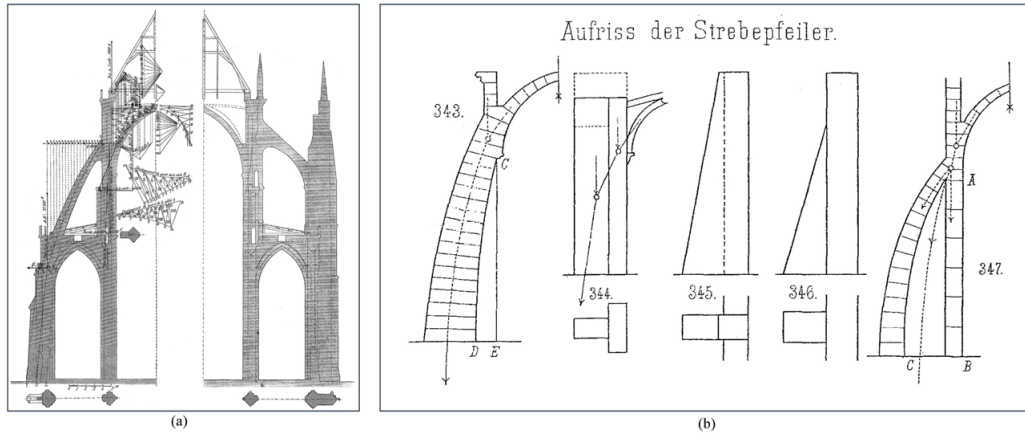


Figura 42. Proyecto de arbotantes y estribos: (a) St. Ouen en Rouen, Guadet (1902); (b) Mohrmann (1890).

Architecture” que se publicó resumida al año siguiente en el *RIBA Journal* (Rosenberg 1936). Rosenberg cita extensamente a Mohrmann (1890), que debió estudiar en Berlín, y hace cálculos de equilibrio sobre

las bóvedas de St. Ouen en Rouen basándose en datos tomados de Guadet (1902), discute la forma de los arbotantes, y realiza un análisis de equilibrio de la catedral de Reims, Figura 43. Esto era inusual en los

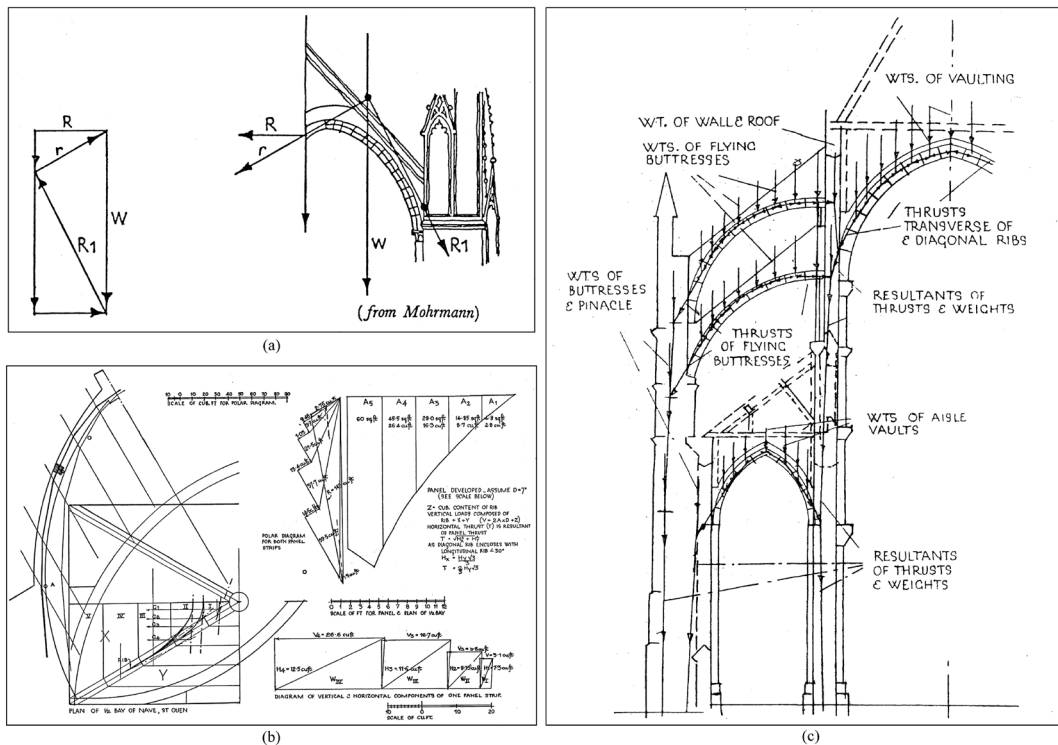


Figura 43. Análisis de equilibrio sobre la estructura gótica realizados por Rosenberg (1936): (a) Funcionamiento de un arbotante; (b) Calculo del empuje en los nervios cruceros; (c) Diagrama de equilibrio de la catedral de Amiens.

estudios del gótico hacia 1930. Lo más importante es que “descubre” la obra de Mohrmann al mundo académico anglosajón. Frankl (1960) lo cita y recomienda su lectura por el análisis mecánico de bóvedas.

### Análisis de equilibrio en edificios históricos

Hemos visto que ya en el último cuarto del siglo XIX se realizan algunos análisis de equilibrio de catedrales góticas. A lo largo de la primera mitad del siglo XX se suceden los análisis de equilibrio. Resulta difícil, dada la dispersión de las fuentes, muchas de ellas inéditas, tener una idea de la difusión real que alcanzaron en los distintos países. Pero podemos citar brevemente algunos ejemplos conocidos.

En España, en 1926 el arquitecto Ricardo García Guereta (1861–1936) publica un extenso estudio de las torres de Teruel, incluyendo el análisis gráfico de sus bóvedas y de la estabilidad de la torre, Figura 44.

En Alemania, el ingeniero de la construcción George Rùth (1880–1945) utilizó análisis gráficos de equilibrio para dirigir sus intervenciones

de refuerzo en la catedral de Mainz (Rùth 1928). En Francia, el arquitecto Louis Barbier realizó en 1930 un análisis de equilibrio de los ábsides de las iglesias de Noyon y de Sait-Germain des Prés. En Alemania, en 1933 el ingeniero Eberhard Zorn dedica su tesis doctoral (Zorn 1933) al análisis de equilibrio de la iglesia de Sankt Martin en Landshut en el que no se limita al estudio de las cargas verticales; también estudia el efecto del viento, Figura 45 (a). La catedral de Xanten, en Alemania, fue también destruida por los bombardeos durante la Segunda Guerra Mundial. El ingeniero Martin Grassnick participó en la reconstrucción de la catedral inmediatamente después de terminar la guerra y escribió una tesis doctoral, publicada como libro, en 1963, con un detallado estudio sobre sus bóvedas que incluye aspectos constructivos e históricos junto a un exhaustivo análisis de equilibrio de la estabilidad de un tramo completo de la catedral, incluyendo los pilares, arbotantes y estribos, Figura 45 (b).

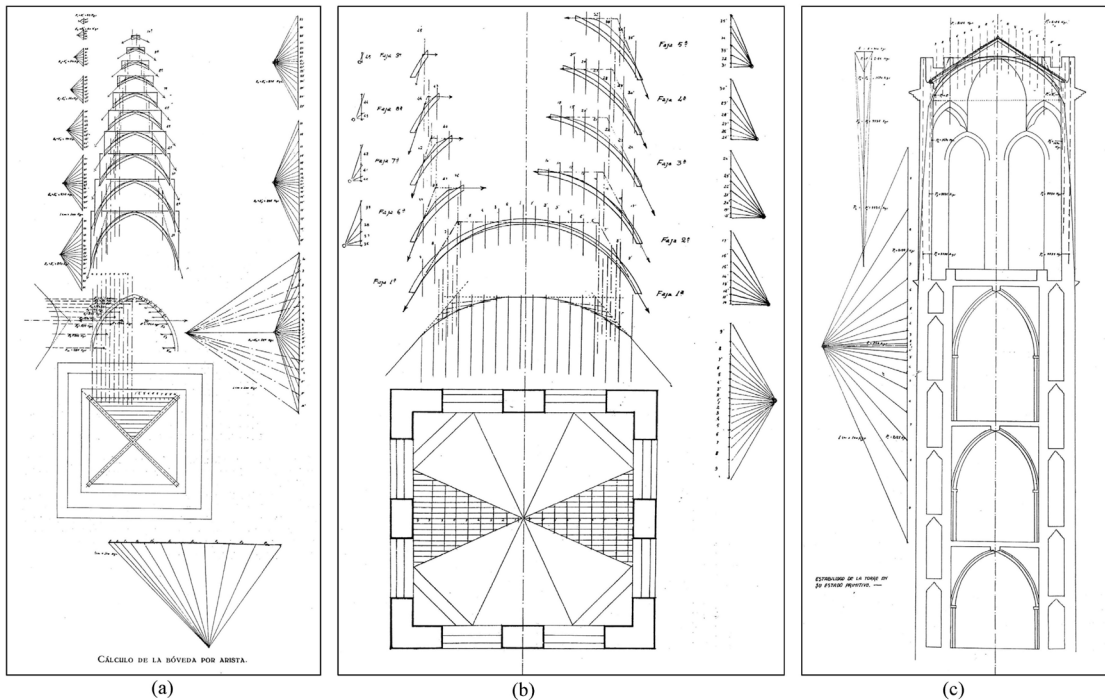


Figura 44. Análisis de bóvedas y estabilidad de una torre (García Guereta 1926): (a) Bóveda de arista; (b) Bóveda octogonal de paños; (c) Torre.

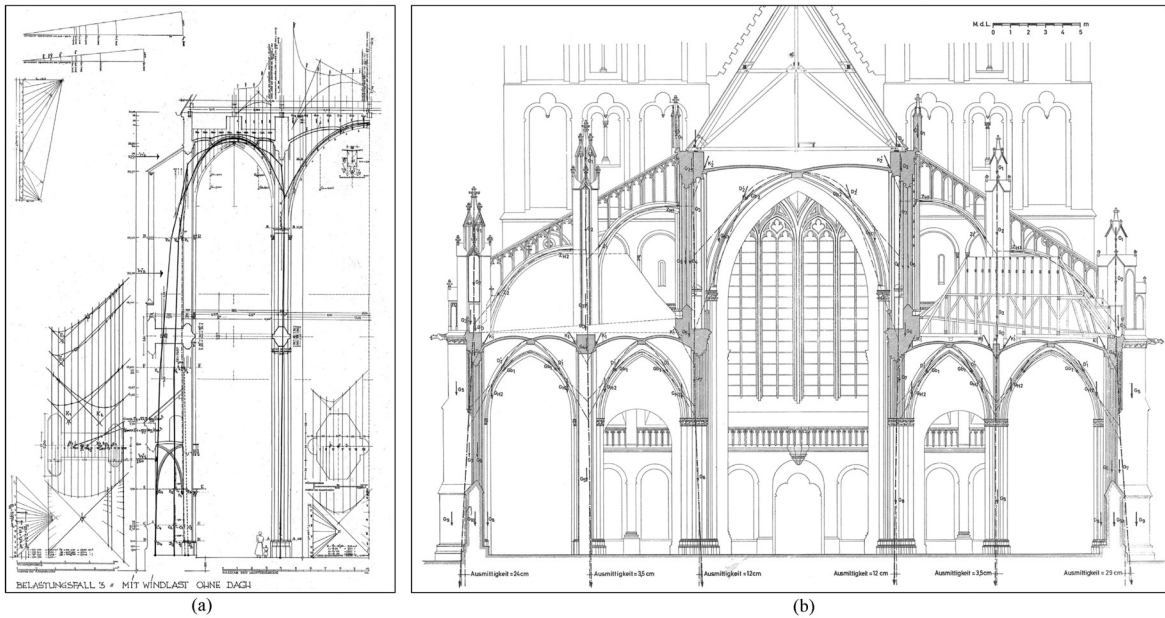


Figura 45. Análisis de equilibrio de grandes iglesias alemanas: (a) St. Martin, Landshut (Zorn 1933); (b) Catedral de Xanten (Grassnick 1963).

El ingeniero alemán Klaus Pieper realiza también análisis gráficos de equilibrio para estudiar la reconstrucción y el eventual refuerzo de las bóvedas de la Iglesia de María (Marienkirche) y de la Catedral de Lübeck, destruidas por los bombardeos (Pieper 1950), Figura 46. En la Marienkirche, la estructura, gravemente dañada, presentaba desplomes en los pilares de la nave de 0,52 m. Pieper acepta la geometría deformada, incluyendo las pérdidas de material, y realiza estudios gráficos de equilibrio que le permiten estudiar la estabilidad, calcular las tensiones de trabajo de la fábrica y calcular los tirantes necesarios para mejorar la estabilidad. Lo mismo hace en su análisis de la catedral de Lübeck. En 1969 el ingeniero alemán Jürgen Segger presenta su tesis doctoral sobre “La estática de las catedrales góticas”. En un largo apéndice realiza un análisis detallado de las bóvedas y arbotantes de la catedral de Colonia.

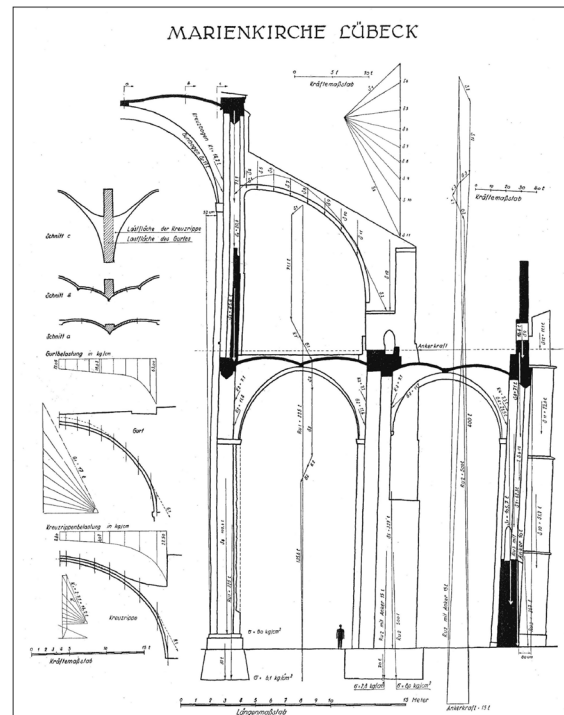


Figura 46. Análisis de equilibrio de la nave de la Marienkirche en Lübeck (Pieper 1950).

### VALIDEZ DEL ANÁLISIS GRÁFICO DE EQUILIBRIO: EL TEOREMA DE LA SEGURIDAD Y EL “ENFOQUE DEL EQUILIBRIO” DE HEYMAN

Podríamos seguir, como se ha dicho es un campo abierto de investigación. Quizá lo más notable es que estos análisis gráficos de equilibrio fueran ignorados o despreciados por los teóricos de las estructuras que no desistían en su intención de aplicar el cálculo elástico a las estructuras de fábrica. El empleo de métodos fotoelásticos primero (años 1970-1980), y sobre todo la llegada del método de los elementos finitos al campo de la edificación, reavivó la fantasía de encontrar el estado “real” o “verdadero” de la estructuras. El principal difusor de estos enfoques fue el ingeniero estadounidense Robert Mark (1930–2019) que publicó numerosos artículos y dos libros sobre la estructura gótica.

Desde, digamos, finales de los años 1980, el abatamiento de los cálculos por ordenador, condujo a un empleo casi indiscriminado de estos programas de elementos finitos, completamente inadecuados para el análisis de estructuras de fábrica. Como consecuencia de este empleo inadecuado de programas de elementos finitos desde el decenio de 1990, estructuras que habían sobrevivido durante siglos o milenios se consideraron en peligro. Se pueden citar numerosos casos (los mercados de Trajano, la catedral de Beauvais, el acueducto de Segovia), que el lector puede seguir en Internet, pero el espacio de este artículo no permite proseguir con un tema que requiere un artículo específico, bastante técnico, que se sale del ámbito de esta revista.

De forma crucial, en los años 1960 el profesor Jacques Heyman de Cambridge (1925– ) demostró que la moderna teoría plástica o análisis límite, desarrollada inicialmente para pórticos de acero, se podía traducir para las fábricas, siempre y cuando el material cumpla con ciertas condiciones de resistencia: buena (infinita) resistencia a compresión, nula resistencia a tracción y fallo por deslizamiento imposible. (Heyman 1966) Si esto es así, el Teorema de la Seguridad del análisis límite afirma que si es posible encontrar entre las infinitas soluciones de equilibrio, una para que la que la estructura transmite las cargas de forma confortable, la estructura es, al menos tan segura como esa solución encontrada por el analista.

Véanse las numerosas publicaciones de Heyman; sobre todo Heyman (1995, 2008). El Teorema de la Seguridad corta el nudo gordiano de la búsqueda del estado “real” o “verdadero” de la estructura: no existe un estado real, sino infinitos posibles que cambian según pequeñas, inevitables y esencialmente imprevisibles, variaciones de las condiciones de contorno, pero si es posible encontrar un estado de equilibrio satisfactorio, la estructura real también lo encontrará.

El principal corolario del Teorema de la Seguridad es lo que ha llamado el profesor Heyman “el enfoque del equilibrio”. El análisis de una estructura se puede realizar usando sólo dos de los tipos de ecuaciones fundamentales de la Teoría de Estructuras: las ecuaciones de equilibrio y las del material. No es necesario hacer dudosas afirmaciones de compatibilidad, en particular sobre las condiciones de contorno.

El Teorema de la Seguridad valida todos los métodos de análisis gráfico de equilibrio que hemos estudiado en este artículo. Es más, el análisis de equilibrio a compresión, conduce a afirmaciones geométricas (las fuerzas internas tiene que transmitirse por el interior de la fábrica): si la estructura tiene una forma correcta es tiene una seguridad suficiente. Las estructuras históricas han sobrevivido porque los maestros antiguos las construyeron con una forma correcta. De hecho, el ejercicio de dibujar líneas de empujes en estructuras históricas (o cualquier otro tipo de análisis) es redundante. La mera supervivencia de la estructura a largo de siglos o milenios es una prueba definitiva de que será posible encontrar soluciones de equilibrio de suficiente seguridad, que podremos dibujar (si tenemos la habilidad y experiencia necesarias) las correspondientes líneas de empuje dentro del espesor de los elementos.

### LISTA DE REFERENCIAS

- Abraham, Pol. 1934. *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval*. Paris: Vicent, Fréal et Cie. <https://doi.org/10.3406/bulmo.1934.10100>
- Álvarez Capra, Lorenzo. 1890. Proyecto de restauración de la Nave y fachada norte de la Basílica de Ávila de Repullés y Vargas. *Boletín de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando*: 146–153.

- Barbier, Louis. 1930. Étude sur la stabilité des absides de Noyon et de Sait-Germain des Prés. *Bulletin Monumental* 89: 515–529. <https://doi.org/10.3406/bulmo.1930.9886>
- Barlow, William Henry. 1846. On the Existence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction. *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 5: 162–182, láms. 1-6. <https://doi.org/10.1680/imotp.1846.24301>
- Becchi, Antonio y Federico Foce. 2002. *Degli Archi e delle volte. Arte del costruire tra meccanica e stereotomia*. Venezia: Marsilio.
- Bélibidor, Bernard Forest de. 1729. *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile*. Paris: Claude Jombert.
- Bénard, Dominique. 2009. Gabriel Lamé et le polygone funiculaire. *Bulletin de la Sabix* 44: 113–118. <https://doi.org/10.4000/sabix.645>
- Benouville, L. 1891-1892. Étude sur la cathédrale de Beauvais. *Encyclopédie d'Architecture*, 4, 1891-92, 52-52, 60-62, 68-70, Pl. 159-161.
- Benvenuto, Edoardo. 1991. *An Introduction to the History of Structural Mechanics*. New York/Berlin: Springer Verlag. 2 vols. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2994-0>
- Bossut, Charles. 1772. *Traité élémentaire de mécanique statique*. Paris: Claude-Antoine Jombert.
- Bouguer, Pierre. 1734. Sur les Lignes Courbes propres a former les Voûtes en Dome. *Mémoires de l'Académie Royale de Sciences de Paris*: 149–166.
- Brix, Adolph Ferd. Wencesl. 1831. *Elementar Lehrbuch der Satik fesser Körper. Erste Abtheilung*. Berlin: Dunder und Humboldt.
- Camus, François-Joseph de. 1752. *Elémens de mécanique statique (Cours de mathématique. Troisième Partie. Tome Second)*. Paris: Imprimerie royale.
- Chatzis, Konstantinos. 2004. La réception de la statique graphique en France durant le derniers tiers du XIXe siècle. *Revue d'histoire des mathématiques* 10: 7–43.
- Choisy, Auguste. 1899. *Histoire de l'Architecture*. Paris: G. Béranger. (Trad. esp: *Historia de la arquitectura*. Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2023).
- Couplet, Pierre. 1729. De la poussée des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*: 79–117, láms. 4–7.
- Couplet, Pierre. 1730. Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris*: 117–141, láms. 6–7.
- Couplet, Pierre. 1731. Recherches sur la construction des combles de charpente. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*: 69–84, láms. 3–4.
- Culmann, K. *Die graphische Statik*. Zürich: Meyer & Zeller. (2ª ed. 1875. Trad. Francesa, 1880).
- Danyzy, A. A. H. 1732 Montpellier: Jean Martel, 1778. Sur la poussée des voûtes. Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier. Vol. 2, 1718-1745: pp. 203-5.X-1453
- Dubosque, J. 1920 [1ª ed. 1880]. *Etudes théoriques et pratiques sur les murs de soutènement et les ponts et viaducs en maçonnerie*. 6ª ed. Paris/Liège: Ch. Béranger.
- Dunn, William. 1904. Notes on the Stresses in Framed Spires and Domes. *Journal of the Royal Institute of British Architects, Third series* 11 (Nov. 1903 - Oct. 1904): 401–412.
- Eddy, Henry T. 1877. *New Constructions in Graphical Statics*. New York: D. Van Nostrand.
- Emerson, William. 1743. *The Doctrine of Fluxions: Not only explaining the elements thereof, but also its Applications and Use*. London: Bettenham.
- Fernández Casanova, A. 1991. *El Espíritu de las Antiguas Fábricas. Escritos de Adolfo Fernández Casanova sobre la Catedral de Sevilla (1888–1901)*. Sevilla: Fundación para la Investigación y Difusión de la Arquitectura (FIDAS).
- Föppl, August. 1881. *Theorie der Gewölbe*. Leipzig: Felix.
- Frankl, Paul. 1960. *The Gothic: Literary Sources and Interpretations Through Eight Centuries*. Princeton: Princeton University Press.
- Frézier, A. F. 1737–39. *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*. Strasbourg/Paris: Charles-Antoine Jombert.
- Fuentes González, Paula. 2021a. Graphical analysis of masonry domes. Historical approaches (1850–1920). En: *History of Construction Cultures (Proceedings of the 7th International Congress on Construction History, Lisbon, 12-16 July 2021)*, J. Mascarenhas-Mateus y P. Pires, eds. London: CRC Press, Portuguese Foundation for Science & Technology, 2: 394–401. <https://doi.org/10.1201/9781003173434-163>

- Fuentes González, Paula. 2021b. The Congo Museum in Tervuren. The Birth of Tile Vaulting in Belgium. En: *Brick Vaults and Beyond. The Transformation of a Historical Structural System from 1750 to 1970*, P. Fuentes e I. Wouters, eds. Madrid: Instituto Juan de Herrera, Vrije Universiteit Brussel: 167–230.
- García Guereta, Ricardo. 1926. Las torres de Teruel. *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*: 27–74.
- Gerstner, Franz Josef von. 1789. *Einleitung in die statische Baukunst*. Prag: Normalschul-Buchdruckerei.
- Gerstner, Franz Josef von. 1831–34. *Handbuch der Mechanik*. Prag: Spurny. 3 vols.
- Gómez de Cózar, Juan Carlos y Pedro Gómez de Terreros. 2000. El Proyecto de Restauración de Varios Pilares, Bóvedas y Ventanages de la Catedral de Sevilla de Adolfo Fernández Casanova de 1884. En: *Actas del Tercer Congreso Nacional de Historia de la Construcción. Sevilla, 26-28 de octubre de 2000*. Madrid: Universidad de Sevilla, Instituto Juan de Herrera, CEHOPU, SedHC, 389–396.
- González-Varas Ibáñez, Ignacio. 1993. *La catedral de León: Historia y restauración (1859-1901)*. León: Universidad de León.
- González-Varas Ibáñez, Ignacio. 2001. *La catedral de León. El sueño de la razón*. León: Cabildo de la Santa Iglesia Catedral de León.
- Goodyear, William H. 1906. The Columbia University Chapel. (Howell and Stokes, Architects.). *Brickbuilder* 15: 261–269, láms. 162–168.
- Gottgetreu, Rudolph. 1880–88. *Lehrbuch der Hochbaukonstruktionen. Erster Teil: Stein-Konstruktionen*. Berlin: Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.
- Graefe, Rainer. 2021. The Catenary and the line of thrust as a means for shaping arches and vaults. En: *Physical Models. Their historical and current use in civil and building engineering*, B. Addis (ed.). Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn. <https://doi.org/10.1002/9783433609613.ch3>
- Grassnick, Martin. 1963. *Die Gotischen Wölbungen des Domes zu Xanten und ihre Wiederherstellung nach 1945*. Xanten: Verein zur Erhaltung des Xantener Domes.
- Gregory, David. 1697. Catenaria. *Philosophical Transactions of the Royal Society* 19, n° 231: 637–652. <https://doi.org/10.1098/rstl.1695.0114>
- Guadet, Julien. 1901–1904. *Éléments et théorie de l'architecture : cours professé à l'École nationale et spéciale des beaux-arts*. Paris: Librairie de la Construction Moderne. 4 vols.
- Guastavino, Rafael. 2006. *Escritos sobre la construcción cohesiva y su función en la arquitectura*. Madrid: Instituto Juan de Herrera,
- Hatzel, E. 1849. Über die Technik in spezieller Beziehung auf die Architektur und die Gestaltung der Formen. *Allgemeine Bauzeitung*: 132–169.
- Heyman, J. 1966. The Stone Skeleton. *International Journal of Solids and Structures* 2: 249–279. (Trad. esp. en: Heyman 2016: 1–34). [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(66\)90018-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(66)90018-7)
- Heyman, Jacques. 1967–68. Beauvais Cathedral. *Transactions of the Newcomen Society* 40: 15–35. (Trad. esp. en: Heyman 2016: 113–128). <https://doi.org/10.1179/tns.1967.002>
- Heyman, Jacques. 1982. *The Masonry Arch*. Chichester: Ellis Horwood (trad. esp.: *El arco de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2021).
- Heyman, J. 1995. *The Stone Skeleton. Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge: Cambridge University Press. (Trad. esp: El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica. Madrid: Instituto Juan de Herrera / CEHOPU, 1999.)
- Heyman, Jacques. 1998. *Structural analysis: a historical approach*. Cambridge: Cambridge University Press. (Trad. esp.: Análisis de estructuras. Un estudio histórico. Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2004.)
- Heyman, Jacques. 2008. *Basic Structural Theory*. Cambridge: Cambridge University Press (Trad. esp.: Teoría básica de estructuras. Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2011.)
- Heyman, Jacques. 2016. *Teoría, historia y restauración de Estructuras de Fábrica* [Colección de ensayos 1966–2014]. Madrid: Instituto Juan de Herrera. 2 vols.
- Hooke, Robert. 1675. *A description of helioscopes, and some other instruments*. London: Royal Society.
- Huerta, Santiago. 2003. El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí. *Ingeniería Civil* 130: pp. 121–133.

- Huerta, Santiago. 2004. *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- Huerta, Santiago. 2005. Thomas Young's theory of the arch: His analysis of Telford's design for an iron arch of 600 feet span. En: *Essays in the history of the theory of structures, in honour of Jacques Heyman*. ed. por S. Huerta. Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU: 189–233.
- Huerta, S. 2008. The Analysis of Masonry Architecture: A Historical Approach. *Architectural Science Review* 51: 297–328. <https://doi.org/10.3763/asre.2008.5136>
- Huerta, Santiago. 2009. The Debate about the Structural Behaviour of Gothic Vaults: From Viollet-le-Duc to Heyman. *Proceedings of the Third International Congress on Construction History, Cottbus, 20-24 May 2009*. Cottbus: Chair of Construction History and Historical Preservation of the Brandenburg University of Technology: 837–844.
- Huerta, Santiago. 2012. Wedges and plate-bandes: mechanical theories after De la Hire. En: *L'architrave, le plancher, la plate-forme. ouvelle Histoire de la construction*, R. Gargiani ed. Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes: 405–435.
- Huerta, Santiago. 2019. The Cathedral of Palma de Mallorca, a Wonder of Equilibrium. Rubió i Bellver's Equilibrium Analysis of 1912. En: *The Art of Vaulting. Design and Construction in the Mediterranean Gothic*, P. Fuentes, A. Wunderwald, eds. Basel: Birkhäuser: 165–202. <https://doi.org/10.1515/9783035618358-009>
- Hutton, Charles. 1772. *The Principles of Bridges: containing the Mathematical Demonstrations of the Properties of the Arches, the Thickness of Piers, the Force of Water against them, etc. Together with Practical Observations and Directions drawn from the whole*. Newcastle: Kincaird and Creech.
- Hutton, Charles. 1812. *Tracts on mathematical and philosophical subjects comprising, among numerous important articles, the Theory of Bridges*. London: Wilkie and Robinson.
- Koechlin, Maurice. 1889. *Applications de la statique graphique*. Paris: Baudry et Cie.
- Kohnke, R. 1909. Die Kuppelgewölbe. En: *Handbuch der Eisenbetonbau. IV Band, Erster Teil*, F. von Emperger, ed. Berlin: Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn: 546–647.
- Körner, Carl. 1895. *Gewölbte Decken. Handbuch der Architektur. (Dritter Theil, 2. Band: Raumbegrenzenden Constructionen)*. Darmstadt: Arnold Bergsträsser: pp. 141-553.PDF
- Kurrer, Karl-Eugen. 1990. 200 Jahre 'Einleitung in die statische Baukunst'. *Bauingenieur* 65: 3–10.
- Kurrer, Karl-Eugen. 1991. Zur Entstehung der Stützlinientheorie. *Bautechnik* 68: 109–117.
- Kurrer, Karl-Eugen. 1997. Zur Entwicklungsgeschichte der Gewölbetheorien von Leonardo da Vinci bis ins 20. Jahrhundert. *Architectura* 27: 87–114.
- Kurrer, Karl-Eugen. 2018. *The History of the Theory of Structures: Searching for Equilibrium*. Berlin: John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9783433609163>
- La Hire, Philippe. 1695. *Traité de mécanique, ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des Arts, et les propriétés des corps pesants lesquelles ont eu plus grand usage dans la Physique*. Paris: Imprimerie Royal.
- La Hire, Philippe. 1712. Sur la construction des voûtes dans les édifices. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*: 69–77.
- Lamé, M.G. y E. Clapeyron. 1826, 1827. Mémoire sur la construction des polygones funiculaires. *Journal des Voies de Communications* 6, 7: 35–47 (vol. 6), 43–55 (vol. 7).
- Landsberg, Theodor. 1883. *Die Statik der Hochbaukonstruktionen. (Handbuch der Architektur. Erster Teil, Band.1)*. Darmstadt: Verlag von Joh. Ph. Diehl Kröner.
- Laredo y Carranza, E. 1908. Iglesia de Santa María de Castro-Urdiales. *Pequeñas Monografías de Arte*, pp. 1-28.
- López-Manzanares, Gema. 2023. Technical reports and theoretical studies about the structural behaviour of masonry domes in the 18th century. *Frontiers of Architectural Research* 12: 42-66. <https://doi.org/10.1016/j.foar.2022.06.012>
- Mackenzie-Hooson, Margaret. 2014. Translating Architecture & Planning from Berlin and Britain to New Zealand: the Work and life of Gerhard Rosenberg. *Proceedings of the Society of Architectural Historians, Australia and New Zealand* 31: 735–747.

- Marv y Mayer, José. 1894. *Mecnica aplicada a las construcciones*. 2 Ed. Madrid: Imprenta y Litografa de Julin Palacios.
- Maurer, Bertram. 1998. *Karl Culmann und die graphische Statik*. Diepholz: Verlag für Geschichte der Naturwissenschaft und der Technik.
- Méry, E. 1862 [1829]. Mémoire sur l'équilibre des diverses votes projetes pour l'hôpital Clermont-Tonnerre,  Brest. *Mémorial des Travaux Hydrauliques de la Marine*: 73–116, lms. 10–14.
- Méry, E. 1840. Mémoire sur l'équilibre des voûtes en berceau. *Annales des Ponts et Chaussées 1re série, 1*: 50–70, lms. 183–184.
- Méry, E. 1862 [1828]. Mémoire sur l'équilibre des diverses voûtes projetées pour l'hôpital Clermont-Tonnerre,  Brest. *Mémorial des Travaux Hydrauliques de la Marine*: 73–116, lms. 10–14.
- Michal, A. 1841. Sur les polygones funiculaires en équilibre sous l'action du poids de leurs cotés et de charges additionnelles quelconques. *Annales des Ponts et Chaussées, 2me série*: 1–19.
- Michon, Félix. 1843. *Instruction sur la stabilité des constructions. Stabilité des voûtes et des murs de revêtement*. Metz: lithographie de l'cole de Metz.
- Michon, Félix y Eduardo Saavedra (trad. y apndices). 1860. *Introducción sobre la estabilidad de las construcciones*. Madrid: Imprenta Nacional.
- Monge, Gaspard. 1788. *Traité élémentaire de statique, a l'usage de colleges de la marine*. Paris: J. B. G. Musier.
- Moseley, Henry. 1835. On the equilibrium of the arch. (Read Dec. 9, 1833). *Cambridge Philosophical Transactions* 5: 293–313.
- Moseley, Henry. 1838. On the theory of the equilibrium of bodies in contact. (Read May, 15, 1837) *Cambridge Philosophical Transactions* 6: 463–491.
- Moseley, Henry. 1839. On the Theory of the Arch. En: *The Theory, Practice and Architecture of Bridges*. London: John Weale: Vol.I, pp. 1–72, lms. 101–3.
- Moseley, Henry. 1843. *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. London: Longman, Brown, Green and Longmans.
- Navascus Palacio, Pedro. 1994. La Escuela de Arquitectura de Madrid (1844-1914). *Memoria 1991-1993. Escuela Técnica Superior de Arquitectura*: 10–17.
- Navascués Palacio, Pedro. 1996. La creación de la Escuela de Arquitectura de MADRID. *Madrid y sus arquitectos: 150 años de la Escuela de Arquitectura*: 23–34.
- Navier, L. M. H. 1826. *Resum des Leçons données  l'cole des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'Etablissement des Constructions et des Machines*. Paris: Firmin Didot (y ediciones posteriores).
- Pieper, Klaus. 1950. Von der Statik mittelalterlicher Kirchenbauten. *Baumeister*: 600–604.
- Planat, Paul. 1877. Flexion des piliers d'glise. *Revue Générale de l'Architecture et des Travaux Publics* 34: 146-155, 204-212, 245-253; plates 33-35.
- Planat, Paul. 1887. *Pratique de la mécanique appliquée a la resistance des matériaux*. Paris: La Construction Moderne (y ediciones posteriores).
- Planat, Paul (dir.). 1888-1892. *Encyclopédie de l'architecture et de la construction (Bibliothèque de la construction moderne)*. Paris: Aulanier. 6 vols. (y ediciones posteriores. La edición de 1895 con 13 vols.).
- Planat, Paul. 1905-1921. *L'art de bâtir*. Paris: Librairie de la Construction Moderne.
- Poleni, Giovanni. 1748. *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova: Nella Stamperia del Seminario.
- Poncelet, Jean Victor. 1852. Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (Paris)* 35, n 17: 494–502, 531–540, 577–587.
- Puig Boada, Isidre. 1929. *El Temple de la Sagrada Familia*. Barcelona: Editorial Barcino.
- Rafols, J. F. 1929. *Gaudí*. Barcelona: Editorial Canosa.
- Repullés y Vargas, Enrique María. 1900. *Proyecto de Basílica a Santa Teresa de Jesús en Alba de Tormes*. Salamanca: Imprenta de Calatrava.
- Robison, John. 1796. Roof. *Encyclopaedia Britannica, 3rd ed, Vol. 16*. Dublin: James Moore: 462–480.
- Robison, John. 1800a. Arch. *Encyclopaedia Britannica, Supplement to the 3rd ed, Vol. 1*. Dublin: James Moore: 14–31.
- Robison, John. 1800b. Carpentry. *Encyclopaedia Britannica, Supplement to the 3rd ed, Vol. 1*. Dublin: James Moore: 159–175.

- Rosenberg, G. 1936. The Functional Aspect of the Gothic Style. *Journal of the Royal Institute of British Architects* 43: 273–90, 364–371.
- Rubió y Bellver, J. 1912. Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca. *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, p. 87-140.
- Rubió y Bellver, J. 1913. Dificultats per arribar a la síntesi arquitectònica. *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, 1913, p. 63-79. (Trad. esp. en S. Tarragó ed. *Antoni Gaudí*, Barcelona, Ediciones del Serbal, 1991. p. 13–27.)
- Ruddock, Ted. 1979. *Arch Bridges and Their Builders, 1735-1835*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rüth, Georg. 1928. *Sicherungsarbeiten am Mainzer Dom*. Amöneburg bei Biebrich a. Rhein: Selbstverlag der Portland-Cement-Fabrik Dyckerhoff und Söhne.
- Rümler, E. 1911. Paul Planat [obituario]. *La construction moderne* (17 juin 1911): 445–448.
- Scheffers, August. 1865. *Handbuch der bürgerlichen und ländlichen Hochbauwesens mit besonderer Berücksichtigung der Bau-Constructionslehre*. Leipzig: E. A. Seemann.
- Scheffler, Hermann. 1857. *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken*. Braunschweig: Verlag der Schulbuchhandlung.
- Scheffler, Hermann. 1864. *Traité de la stabilité des constructions. (ouvrage traduit de l'allemand et annoté par M. Victor Fournié)*. Paris: Dunod Editeur.
- Segger, Jürgen. 1969. *Zur Statik gotischer Kathedralen: Dargestellt am Kölner Dom und statisch verwandten Kathedralen*. Dissertation. Aachen.
- Snell, George. 1846. On the Stability of Arches, with practical methods for determining, according to the pressures to which they will be subjected, the best form of section, or variable depth of voussoir, for any given extrados or intrados. *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 5: 439–476, láms. 27–40. <https://doi.org/10.1680/imotp.1846.24330>
- Statics of Bridges. 1861. The Statics of Bridges. *The Civil Engineer and Architect's Journal*: 1–2, 60–65, 163–166, 223–226, 317–320 y 347–349.
- Stevin, Simon. 1586. *De Beghinselen der weeghconst*. Leyden: Druckerye van Christoffel Plantijn.
- Stevin, Simon. 1605. *Eerste Deel des Byvoughs der Weeghconst, van het Tavwicht. (Byvough der Weeghconst)*. Leyden: Ian Bouwenfz.
- Stevin, Simon. 1955. *The Principal Works of Simon Stevin. Vol. I. General Introduction. Mechanics*, E. J. Dijksterhuis, ed. Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger.
- Stirling, J. 1717. *Lineae Tertii Ordinis Neutoniana, sive, Illustratio tractatus d. Neutoni de Enumeratione linearum tertii ordinis. Cui subjungitur, solutio trium problematum*. Oxford: E. Whistler (impensis).
- Sugrañes, Domingo. 1923. Disposició estàtica del Temple de la Sagrada Familia. *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*: 17–36.
- Timoshenko, Stephen P. 1953. *History of Stregnth of Materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. New York: McGraw-Hill.
- Ungewitter, G. 1859–1864. *Lehrbuch der gotischen Constructionen*. Leipzig: T. O. Weigel.
- Ungewitter, G. 1875. *Lehrbuch der gotischen Constructionen*. Leipzig: T. O. Weigel.
- Ungewitter, G. 1890–1892. *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. III Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann*. Leipzig: T.O. Weigel Nachfolger.
- Ungewitter, G. 1901–1903. *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. Vierte Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann*. Leipzig: Chr. Herm. Tauchnitz. 2vols.
- Varignon, P. 1687. *Projet d'une nouvelle Mécanique*. Paris: Veuve d'Edme Martin, Jean Boudot, & Estienne Martin.
- Varignon, P. 1725. *Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné en 1687*. Paris, Jombert.
- Viollet-le-Duc, E. 1854-1868. *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI<sup>e</sup> au XVI<sup>e</sup> siècle*. Paris: A. Morel.
- Warth, O. 1903. *Allgemeine Baukonstruktionslehre . . . von G. A. Breymann. Vol. I. Die Konstruktionen in Stein*. 7<sup>th</sup> ed. Leipzig: J. M. Gebhardt's Verlag.
- Wittmann, Wilhelm. 1879a. Zur Theorie der Gewölbe. *Zeitschrift für Bauwesen* 29: 61–74.
- Wittmann, Wilhelm. 1879b. *Statik der Baukonstruktionen. Erster Theil: Steinconstructionen*. Berlin: Ernst und Korn.
- Yeo, Richard. 2001. *Encyclopaedic Visions. Scientific Dictionaries and Enlightenment Culture*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Young, Thomas. 1807. *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. London: Joseph Johnson.  
<https://doi.org/10.5962/bhl.title.22458>
- Young, Thomas. 1817. Bridge. En: *Supplement to the fourth, fifth and sixth editions of the Encyclopaedia Britannica*. Edinburgh: Archibald Constable, Vol. 2: 497–520, láms. 42–44.
- Zorn, Eberhard. 1933. *Statische Untersuchung der St Martinskirche in Landshut*.  
Dissertation: Technischen Hochschule Universität München.

Santiago Huerta es profesor titular de cálculo de estructuras en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid y presidente de la Sociedad Española de Historia de la Construcción.

---

**Citar como:** Huerta, Santiago. 2024. Centro Administrativo Gubernamental de la provincia de Santa Fe, un acercamiento a la arquitectura moderna en Argentina a finales de la década de 1960. *Revista de Historia de la Construcción* 4: 1-42.  
<https://doi.org/10.4995/rdhc.2024.23120>.

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-6068-6460>

**Copyright:** 2024 SEdHC. Este artículo es de acceso abierto y se distribuye bajo los términos de la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.