



UNIVERSIDAD  
POLITÉCNICA  
DE MADRID



**EPES**  
Escuela Politécnica  
de Enseñanza Superior



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
**ESCUELA POLITÉCNICA DE ENSEÑANZA SUPERIOR (EPES)**  
TRABAJO FIN DE GRADO  
**GRADO EN MATEMÁTICAS**

# **Ecuaciones diferenciales estocásticas: Teoría y Aplicaciones**

**Autor:** Luis Carreras

**Dirigido por:** Andrea Tellini

Juan Carlos Sampedro

Madrid, 5 de julio de 2025



*Ecuaciones diferenciales estocásticas: Teoría y Aplicaciones*

**Autor:** Luis Carreras

**Dirigido por:** Andrea Tellini

Juan Carlos Sampedro

Trabajo Fin de Grado, 5 de julio de 2025

**Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)**

Edificio C, Paseo Juan XXIII, 11. Madrid

---

Si deseas citar este trabajo, la entrada completa en  $\text{BIB}\text{T}\text{E}\text{X}$  es la siguiente:

```
@mastersthesis{citekey,  
title = {Ecuaciones diferenciales estocásticas: Teoría y Aplicaciones},  
author = {Carreras, Luis y Tellini, Andrea y Sampedro, Juan Carlos},  
school = {Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)},  
year = {2025},  
type = {Trabajo Fin de Grado}  
}
```

---

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons «Atribución-  
NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional»](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Plantilla derivada de <https://github.com/blazaid/UPM-Report-Template>.



# Agradecimientos

---

Quiero agradecer a mis tutores Andrea y Juan Carlos, a mi familia y a mis compañeros de universidad por su apoyo a lo largo de esta etapa.



# Resumen

---

En este TFG se estudia en detalle la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas, así como los aspectos preliminares necesarios para definir las. En concreto, se definirá el movimiento Browniano (proceso de Wiener) y la integral estocástica (integral de Itô) y se analizarán sus principales propiedades.

Posteriormente, se estudiará la teoría de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas. Por último, se aplicará dicha teoría a ejemplos y modelos basados en ecuaciones diferenciales estocásticas, analizando las correspondientes propiedades principales.

**Palabras clave:** Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Teorema de Existencia y Unicidad, Movimiento Browniano, Integral de Itô.



# Abstract

---

In this final degree project, we study in detail the theory of stochastic differential equations, as well as the preliminary concepts required to define them. Specifically, we introduce Brownian motion (Wiener process) and the stochastic integral (Itô integral), and analyze their main properties.

Subsequently, we examine the existence and uniqueness theory for stochastic differential equations. Finally, we apply this theory to examples and models based on stochastic differential equations, analyzing their main properties.

**Keywords:** Stochastic Differential Equations, Existence and Uniqueness Theorem, Brownian Motion, Itô Integral.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>2</b>	<b>Conceptos previos</b>	<b>3</b>
2.1	Fundamentos de probabilidad y procesos estocásticos. . . . .	3
2.2	Conceptos de Análisis Real . . . . .	8
2.3	Resultados auxiliares . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Movimiento browniano</b>	<b>21</b>
3.1	Propiedades del movimiento Browniano. . . . .	26
<b>4</b>	<b>Integral de Itô</b>	<b>31</b>
4.1	Construcción de la integral de Itô. . . . .	35
<b>5</b>	<b>Ecuaciones diferenciales estocásticas</b>	<b>61</b>
5.1	EDEs lineales. . . . .	73
5.2	Ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas. . . . .	79
	<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>



# Índice de figuras

---

1.1	Simulación de una trayectoria del proceso de Wiener en $\mathbb{R}^3$ . Imagen extraída de Wikipedia ( <a href="https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_browniano">https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_browniano</a> ). . . . .	I
-----	---	---

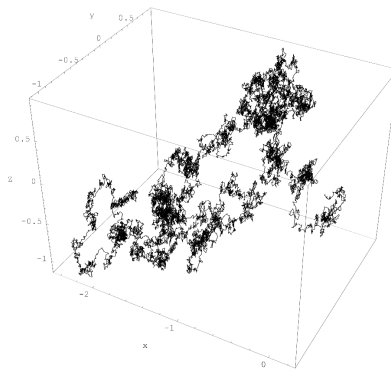


# 1

## Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se utilizan para modelar la evolución de ciertos sistemas dinámicos de forma determinista, es decir, una vez fijado el estado inicial del sistema, su evolución futura queda completamente definida. Sin embargo, en muchos fenómenos reales, esta suposición resulta demasiado idealizada: el entorno está lleno de factores inciertos y errores de medida que hacen insuficiente o imposible una modelización puramente determinista.

Un ejemplo clásico de comportamiento aleatorio en la naturaleza fue observado en 1827 por el botánico escocés Robert Brown, quien notó que los granos de polen suspendidos en agua seguían trayectorias irregulares e impredecibles. Este fenómeno, que hoy conocemos como movimiento browniano, se debe a los choques constantes e irregulares de las moléculas del fluido contra la partícula. Aunque este comportamiento fue explicado desde el punto de vista físico por Einstein en 1905, no fue hasta 1923 cuando el matemático estadounidense Norbert Wiener proporcionó un tratamiento matemático riguroso del fenómeno, a través del llamado proceso estocástico de Wiener, aquí denotado por  $\{B_t\}_{t \geq 0}$ .



**Figura 1.1.** Simulación de una trayectoria del proceso de Wiener en  $\mathbb{R}^3$ . Imagen extraída de Wikipedia ([https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento\\_browniano](https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_browniano)).

En la imagen se muestra una simulación numérica de una trayectoria del proceso de Wiener. Esta visualización permite apreciar cómo el camino seguido por el proceso es irregular e impredecible en cada instante. El primer objetivo del trabajo va a ser estudiar la construcción de este proceso estocástico, la cual veremos en el Capítulo 3. Para ello será necesario utilizar unos conceptos de Probabilidad y Análisis Real que recordamos en el Capítulo 2.

Una vez introducido el proceso de Wiener, se pueden formular las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), que permiten describir sistemas cuya evolución está sujeta tanto a componentes deterministas como a perturbaciones aleatorias. Una EDE típica se expresa como

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t,$$

donde  $dX_t$  representa la evolución infinitesimal del sistema en el instante  $t$ ,  $b(t, X_t) dt$  describe la evolución determinista del sistema, y  $\sigma(t, X_t) dB_t$  representa la perturbación aleatoria. Una solución de la EDE se define como

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}$  es la condición inicial, el segundo término es una integral de Lebesgue y el tercer término es una integral estocástica, conocida como integral de Itô. Nuestro segundo objetivo, que abordaremos en el Capítulo 4, será dar sentido a la integral de Itô. Finalmente, en el Capítulo 5 se definirá formalmente el concepto de solución de una EDE, se explorarán condiciones de existencia y unicidad, y se estudiarán algunos ejemplos relevantes como la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck, ampliamente utilizada en finanzas, y la ecuación logística, que modela el crecimiento poblacional bajo cierta incertidumbre.

La metodología de este trabajo ha sido recopilar, estructurar y demostrar toda la teoría esencial para entender las ecuaciones diferenciales estocásticas y enseñar dónde se aplican para modelar sistemas reales en los cuales la incertidumbre es una componente inevitable. Para ello, se han utilizado múltiples fuentes, ya que ninguna aborda toda la teoría de forma completa y detallada, con el objetivo de reunir en este documento los elementos fundamentales de la misma.

La motivación de este trabajo nace del interés personal por los procesos estocásticos y su enorme potencial para representar fenómenos complejos en campos como las finanzas o la biología. Frente al determinismo clásico, la teoría estocástica ofrece una perspectiva más rica, flexible y cercana a la realidad.

# 2

## Conceptos previos

Antes de entrar en los temas principales de este trabajo, comenzaremos repasando algunas ideas que nos van a ayudar a entender mejor los conceptos que introduciremos en los siguientes capítulos, como el movimiento browniano, la integral de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas.

### 2.1. Fundamentos de probabilidad y procesos estocásticos.

**Definición 2.1** ( $\sigma$ -álgebra). Sea  $\Omega$  un conjunto. Una colección  $F$  de subconjuntos de  $\Omega$  se denomina  $\sigma$ -álgebra si cumple:

- $\emptyset \in F$ ,
- Si  $E \in F$ , entonces también  $E^c \in F$ ,
- Si  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq F$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in F$ .

El par  $(\Omega, F)$  se denomina espacio medible.

Dada una familia  $S$  de subconjuntos de un conjunto  $\Omega$ , denotamos por  $\sigma(S)$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $S$ . Es decir, la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $S$ , o equivalentemente, la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras que contienen a  $S$ .

*Observación 2.2.* En el caso en que  $\Omega = \mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra asociada será la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Esta se define como la  $\sigma$ -álgebra generada por los subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ , es decir, la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los subconjuntos abiertos  $\mathbb{R}$ . Los elementos  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  se denominan conjuntos de Borel.

**Definición 2.3** (Espacio de probabilidad). Dado un espacio medible  $(\Omega, F)$ , una función  $P : F \rightarrow [0, 1]$  se denomina medida de probabilidad, o simplemente probabilidad, si cumple:

- $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1,$
- ( $\sigma$ -aditividad) Si  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq F$  es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$P\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

La notación  $\biguplus$  indica la unión disjunta.

En este caso, la terna  $(\Omega, F, P)$  se denomina espacio de probabilidad.

Definido el concepto de espacio de probabilidad, veamos cómo se pueden relacionar diferentes espacios medibles.

**Definición 2.4.** Si tenemos un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ , una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una variable aleatoria si es  $F$ -medible, es decir, si

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in F \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Asociada a una variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , la  $\sigma$ -álgebra generada por  $X$ , que se denotará como  $H_X$ , es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los conjuntos de la forma  $X^{-1}(U)$ , donde  $U \subseteq \mathbb{R}$  es abierto, la cual se define como

$$H_X := \sigma\left(\{X^{-1}(U) : U \text{ abierto en } \mathbb{R}\}\right). \quad (2.1)$$

**Proposición 2.5.** Se verifica que  $H_X = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ .

*Demostración.* Por definición,  $H_X = \sigma\left(\{X^{-1}(U) : U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto}\}\right)$ . Además, la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , es precisamente la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ .

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{U \subseteq \mathbb{R} : U \text{ abierto}\}\right).$$

La preimagen  $X^{-1}$  conserva la estructura de  $\sigma$ -álgebra, es decir,

- $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$
- $X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c,$
- $X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i).$

Por tanto, se cumple que

$$\sigma(\{X^{-1}(U) : U \text{ abierto}\}) = X^{-1}(\sigma(\{U \subseteq \mathbb{R} : U \text{ abierto}\})) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Finalmente, como  $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ , se tiene que

$$\mathcal{H}_X = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Esto concluye la prueba.  $\square$

**Definición 2.6.** Las variables aleatorias  $X, Y : (\Omega, F) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  son independientes si para cada  $b_X \in H_X$  y  $b_Y \in H_Y$  donde  $H_X$  y  $H_Y$  están definidas en (2.1), se verifica que

$$P(b_X \cap b_Y) = P(b_X) \cdot P(b_Y).$$

**Teorema 2.7.** Sean  $X, Y : (\Omega, F) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  variables aleatorias independientes y  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles. Entonces,  $f(X)$  y  $g(Y)$  son independientes.

*Demostración.* Como las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son independientes, sabemos por la Definición 2.6 que para cada  $b_X \in H_X$  y  $b_Y \in H_Y$ , se verifica que

$$P(b_X \cap b_Y) = P(b_X) \cdot P(b_Y).$$

Las funciones  $f(X), g(Y) : (\Omega, F) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  son variables aleatorias, ya que son funciones medibles al ser  $f$  y  $g$  funciones medibles. Para comprobar que  $f(X)$  y  $g(Y)$  son variables aleatorias independientes, observamos que

$$H_{f(X)} = \sigma(\{(f \circ X)^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = \sigma(\{X^{-1}(f^{-1}(A)) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) \subseteq H_X.$$

Esto se debe a que  $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  porque  $f$  es medible. De manera similar,

$$H_{g(Y)} = \sigma(\{(g \circ Y)^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = \sigma(\{Y^{-1}(g^{-1}(A)) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) \subseteq H_Y.$$

En consecuencia, para  $b_X \in H_{f(X)} \subseteq H_X$  y  $b_Y \in H_{g(Y)} \subseteq H_Y$ , se cumple que

$$P(b_X \cap b_Y) = P(b_X) \cdot P(b_Y).$$

Por tanto,  $f(X)$  y  $g(Y)$  son independientes.  $\square$

**Observación 2.8.** Las funciones continuas son funciones medibles de Borel, por tanto el teorema también se cumple para  $f$  y  $g$  continuas.

Una vez entendido qué es una variable aleatoria, el siguiente paso es considerar colecciones de estas variables indexadas por el tiempo. Esto nos lleva al concepto de proceso estocástico.

**Definición 2.9** (Proceso estocástico). Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  todas ellas definidas sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ .

A continuación estudiaremos la existencia de procesos estocásticos partiendo de sus distribuciones finito-dimensionales. Es decir, dada una familia

$$\{P_{t_1, t_2, \dots, t_n} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1] : t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}\}$$

de medidas de probabilidad, queremos determinar la existencia de un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  definido en cierto espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ , que satisfice

$$P(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n) = P_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n),$$

para cualesquiera conjuntos de Borel  $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y  $n \in \mathbb{N}$ .

La solución a este problema de existencia viene dada por el teorema de extensión de Kolmogorov. La clave de este resultado estará en determinar el espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$  adecuado que garantice la existencia del proceso estocástico en cuestión. Para poder definir este espacio, necesitamos introducir algunos conceptos preliminares.

Introducimos la compactificación de la recta real  $\mathbb{R}$ , como el espacio topológico  $(\mathbb{R}^*, \tau_*)$ , donde  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y una base de abiertos de  $\tau_*$  está dada por todos los subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$  y los subconjuntos de la forma  $\mathbb{R}^* \setminus K$ , donde  $K \subset \mathbb{R}$  es cerrado y acotado (estos últimos se conocen como los entornos del punto  $\infty$ ). La  $\sigma$ -álgebra de Borel asociada a este espacio topológico está dada por

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^*) := \{E \subseteq \mathbb{R}^* : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Introducimos el espacio producto cartesiano

$$(\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)} = \prod_{t \geq 0} \mathbb{R}^*,$$

junto con la topología producto asociada. Observamos que cada elemento  $\mathbf{x} \equiv (x_t)_{t \geq 0} \in (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}$  se puede considerar como la función

$$f_{\mathbf{x}} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad f_{\mathbf{x}}(t) := x_t.$$

Por tanto, podemos considerar  $(\mathbb{R}^*)^{[0,\infty)}$  como el espacio de todas las posibles funciones  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$ . Conviene recordar que una base de la topología producto en  $(\mathbb{R}^*)^{[0,\infty)}$  viene dada por los *conjuntos cilíndricos* abiertos, es decir, los conjuntos de la forma

$$\prod_{t \geq 0} U_t, \quad \text{donde } U_t \in \tau_* \text{ y } U_t = \mathbb{R}^* \text{ salvo para un número finito de índices } t.$$

Naturalmente, la  $\sigma$ -álgebra asociada a este espacio topológico, que denotaremos por  $\mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0,\infty)})$ , es la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos cilíndricos abiertos. Gracias a estos preliminares, podemos enunciar el teorema de extensión de Kolmogorov.

**Teorema 2.10** (Teorema de Extensión de Kolmogorov). *Consideramos una familia de medidas de probabilidad*

$$\{P_{t_1, t_2, \dots, t_n} : \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^n) \rightarrow [0, 1] : t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}\}$$

que satisface las siguientes condiciones de compatibilidad para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

- Para toda permutación  $\sigma$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y para todo  $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se cumple que

$$P_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{t_1, \dots, t_n}(A_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times A_{\sigma^{-1}(n)}). \quad (2.2)$$

- Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , se satisface

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}}(A_1 \times \dots \times A_n \times \mathbb{R}^* \times \dots \times \mathbb{R}^*). \quad (2.3)$$

Entonces, existe una medida de probabilidad  $P$  en el espacio medible

$$\left( (\mathbb{R}^*)^{[0,\infty)}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0,\infty)}) \right)$$

que satisface

$$P \left( \left\{ (x_t)_{t \geq 0} \in (\mathbb{R}^*)^{[0,\infty)} : x_{t_1} \in A_1, \dots, x_{t_n} \in A_n \right\} \right) = P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n), \quad (2.4)$$

para todo  $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$ ,  $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , y  $n \in \mathbb{N}$ .

La demostración detallada puede consultarse en el Capítulo 10, Teorema 10.18, del libro [Fol99]. Gracias a este teorema, podemos probar el teorema de existencia de procesos estocásticos.

**Teorema 2.11** (Existencia de procesos estocásticos). *Consideramos una familia de medidas de probabilidad*

$$\{P_{t_1, t_2, \dots, t_n} : \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^n) \rightarrow [0, 1] : t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}\} \quad (2.5)$$

que satisface las siguientes condiciones de compatibilidad (2.2)–(2.3). Entonces, existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$  y un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ,

$$X_t : (\Omega, F, P) \longrightarrow \mathbb{R}^*,$$

tal que

$$P(\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}) = P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n), \quad (2.6)$$

para todo  $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$ ,  $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$ ,  $1 \leq i \leq n$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Como la familia de medidas (2.5) satisface las condiciones de compatibilidad (2.2)–(2.3), por el teorema de extensión de Kolmogorov, Teorema 2.10, existe una medida de probabilidad  $P$  en el espacio medible

$$\left( (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}) \right)$$

que satisface (2.4). Definimos el proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , como las funciones coordenada en  $(\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}$ , es decir,

$$X_t : (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)} \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad X_t(x_s)_{s \geq 0} := x_t,$$

para cada  $t \geq 0$ . Entonces, (2.6) se cumple, porque, por (2.4),

$$\begin{aligned} P(\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}) &= P\left(\{(x_t)_{t \geq 0} \in (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)} : x_{t_1} \in A_1, \dots, x_{t_n} \in A_n\}\right) \\ &= P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n), \end{aligned}$$

para todo  $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$ ,  $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$ ,  $1 \leq i \leq n$  y  $n \in \mathbb{N}$ . □

## 2.2. Conceptos de Análisis Real

Completada la teoría sobre los procesos estocásticos, es necesario repasar varios conceptos de Análisis Real. Estas ideas y resultados, ayudarán a definir el movimiento browniano, construir la integral de Itô o demostrar el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

### 2.2.1. Construcción abstracta de la integral de Lebesgue

En esta sección fijaremos el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Para la construcción de la integral de Lebesgue para funciones medibles  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se siguen dos etapas. En primer lugar, se comienza con la definición de la integral para funciones simples.

**Definición 2.12 (Funciones simples).** Sea  $\{k_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$  y  $\{\Omega_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$  una partición disjunta del conjunto de medida  $\Omega$ . Las funciones simples  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones medibles de la forma

$$s(x) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot \chi_{\Omega_i}(x),$$

donde  $\chi_{\Omega_i}$  es la función característica del conjunto  $\Omega_i$ .

**Definición 2.13 (Integral de funciones simples).** La integral de Lebesgue de la función simple  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dada en la Definición 2.12, con respecto a la medida  $P$  se define como

$$\int_{\Omega} s dP := \sum_{i=1}^n k_i \cdot P(\Omega_i).$$

A partir de esta definición para funciones simples, se extiende la definición de la integral a funciones medibles no negativas.

**Definición 2.14 (Integral de funciones medibles no negativas).** Sea  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible. Definimos

$$\int_{\Omega} f dP := \sup \left\{ \int_{\Omega} s dP : 0 \leq s \leq f, s \text{ simple} \right\}.$$

Esta definición se justifica por el siguiente resultado clave:

**Teorema 2.15.** Para toda función medible no negativa  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , existe una sucesión monótona no decreciente de funciones simples no negativas  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $s_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ,  $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots \leq f$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

La demostración se encuentra en el Capítulo 2, teorema 2.10 a) de [Fol99].

Uno de los resultados más importantes en Análisis Real es el teorema de la convergencia monótona que enunciamos a continuación.

**Teorema 2.16 (Convergencia monótona).** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , una sucesión de funciones  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , medibles no negativas que verifica  $f_j \leq f_{j+1}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , y sea

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Entonces

$$\int_{\Omega} f \, dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, dP.$$

La demostración se encuentra en el Capítulo 2, teorema 2.14 de [Fol99].

Una vez definido el concepto de integral para funciones no negativas, vamos a extender la definición para funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medibles con signo arbitrario. Dada una función medible  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos su parte positiva y negativa como

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Ambas funciones  $f^+$  y  $f^-$  son medibles y no negativas, por lo tanto están definidas sus integrales y vienen dadas por

$$\int_{\Omega} f^+ \, dP := \sup \left\{ \int_{\Omega} s^+ \, dP : 0 \leq s^+ \leq f, s \text{ simple} \right\},$$

$$\int_{\Omega} f^- \, dP := \sup \left\{ \int_{\Omega} s^- \, dP : 0 \leq s^- \leq f, s \text{ simple} \right\}.$$

Gracias a la descomposición

$$f = f_+ - f_-,$$

se establece la definición de la integral de Lebesgue para funciones medibles.

**Definición 2.17 (Integral de Lebesgue).** Para una función medible  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se define la integral de Lebesgue de  $f$  como

$$\int_{\Omega} f \, dP := \int_{\Omega} f^+ \, dP - \int_{\Omega} f^- \, dP.$$

Esta definición es válida siempre que al menos una de las dos integrales del lado derecho sea finita. Decimos que  $f$  es integrable si  $\int_{\Omega} |f| \, dP < \infty$ , es decir, si tanto  $\int_{\Omega} f^+ \, dP$  como  $\int_{\Omega} f^- \, dP$  son finitas.

### 2.2.2. Conceptos de la teoría de la probabilidad

Dada una variable aleatoria  $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ , se define su esperanza y varianza por

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X dP, \quad \text{Var}[X] := \int_{\Omega} |X - \mathbb{E}[X]|^2 dP,$$

en el caso en que las integrales estén definidas.

En este punto, es importante introducir el concepto de medida imagen. Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad,  $(\Omega', \mathcal{F}')$  un espacio medible, y

$$\varphi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$$

una función medible entre estos espacios. Entonces,  $\varphi$  induce una medida  $P_{\varphi}$  sobre  $(\Omega', \mathcal{F}')$  definida por:

$$P_{\varphi}(E) := P(\varphi^{-1}(E)), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{F}'.$$

Esta medida  $P_{\varphi}$  se interpreta como la distribución inducida de  $P$  bajo  $\varphi$ .

**Proposición 2.18.** *Bajo la notación anterior, dada  $\alpha : (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow \mathbb{R}$  medible, se cumple que*

$$\int_{\Omega'} \alpha dP_{\varphi} = \int_{\Omega} (\alpha \circ \varphi) dP,$$

siempre que uno de los dos lados esté definido.

*Demostración.* Primero, consideramos el caso particular en que  $\alpha = \chi_E$  con  $E \in \mathcal{F}'$ . Entonces

$$\int_{\Omega'} \chi_E dP_{\varphi} = P_{\varphi}(E) = P(\varphi^{-1}(E)).$$

Por otro lado,

$$\int_{\Omega} \chi_E(\varphi(\omega)) dP(\omega) = \int_{\Omega} \chi_{\varphi^{-1}(E)}(\omega) dP(\omega) = P(\varphi^{-1}(E)).$$

Por tanto,

$$\int_{\Omega'} \chi_E dP_{\varphi} = \int_{\Omega} \chi_E \circ \varphi dP.$$

Si  $\alpha$  es una función simple dada por la Definición 2.12, se obtiene por linealidad y la definición para la integral de funciones simples, Definición 2.13, que

$$\int_{\Omega'} \alpha dP_{\varphi} = \sum_{i=1}^n k_i \int_{\Omega'} \chi_{E_i} dP_{\varphi} = \sum_{i=1}^n k_i P_{\varphi}(E_i) = \sum_{i=1}^n k_i P(\varphi^{-1}(E_i))$$

y, a su vez,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \circ \varphi dP &= \sum_{i=1}^n k_i \int_{\Omega} \chi_{E_i}(\varphi(\omega)) dP(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i \int_{\Omega} \chi_{\varphi^{-1}(E_i)}(\omega) dP(\omega) = \sum_{i=1}^n k_i P(\varphi^{-1}(E_i)). \end{aligned}$$

Por tanto, la igualdad se verifica para funciones simples. Si  $\alpha$  es una función medible no negativa, por el Teorema 2.15, se puede aproximar por una sucesión no decreciente de funciones simples  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Aplicando el teorema de convergencia monótona, Teorema 2.16, obtenemos

$$\int_{\Omega'} \alpha dP_{\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} \alpha_n dP_{\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n \circ \varphi dP = \int_{\Omega} \alpha \circ \varphi dP.$$

Finalmente, para cualquier función  $\alpha$  medible por la Definición (2.17) se escribe como  $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$ , donde  $\alpha^+, \alpha^-$  son funciones medibles no negativas, y se aplica la linealidad de la integral para obtener

$$\int_{\Omega'} \alpha dP_{\varphi} = \int_{\Omega} \alpha \circ \varphi dP.$$

Con esto, queda concluida la demostración.  $\square$

Una consecuencia de la Proposición 2.18 es la siguiente.

**Corolario 2.19.** Sea  $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria con esperanza y varianza definidas. Entonces,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x), \quad \text{Var}[X] = \int_{\mathbb{R}} |x - \mathbb{E}[X]|^2 dP_X(x).$$

*Demostración.* Probemos solamente la identidad correspondiente a la esperanza puesto que la de la varianza es análoga. Aplicando la Proposición 2.18 con  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha(x) := x$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$  y  $\varphi = X$ , obtenemos

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} (\alpha \circ \varphi) dP = \int_{\mathbb{R}} \alpha dP_X = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x).$$

Esto concluye la prueba.  $\square$

Ahora vamos enunciar el teorema del cambio de variable en la integral de Lebesgue, pero antes es importante señalar que en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  se puede construir una medida canónica, llamada medida de Lebesgue, que denotaremos como  $\mu$ , la cual generaliza el concepto de longitud, área, volúmen, etc. de rectángulos a conjuntos generales de manera consistente. Para una exposición rigurosa de esta construcción, véase [Fol99]

**Teorema 2.20** (Cambio de variables de la Integral de Lebesgue). Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo de clase  $C^1$ . Si  $f : \phi(E) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible de Lebesgue, entonces  $f \circ \phi$  es medible sobre  $E$ . Además, si  $f \geq 0$  o bien  $f$  es una función integrable sobre  $\phi(E)$ , se verifica que

$$\int_{\phi(E)} f \, d\mu = \int_E (f \circ \phi) |\det J_\phi| \, d\mu.$$

La demostración se encuentra en el Capítulo 2, teorema 2.47 de [Fol99].

Construida la integral de Lebesgue y presentadas algunas de sus propiedades, vamos a ver dos definiciones en las que interviene esta integral que nos serán útiles más adelante.

**Definición 2.21** (Distribución normal o gaussiana). Sean  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ . Una variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , se dice que sigue una distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , si cumple que

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_B e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx,$$

para cada  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . En este caso, se escribe

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Observar que, por el Corolario 2.19, obtenemos

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = \mu,$$

y, además,

$$\text{Var}[X] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 \, dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx = \sigma^2.$$

**Definición 2.22** (Delta de Dirac centrada en  $y$ ). Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  el espacio medible de los números reales. La Delta de Dirac centrada en  $y \in \mathbb{R}$  es la medida de probabilidad

$$\delta_y : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \{0, 1\}, \quad E \longmapsto \delta_y(E) := \begin{cases} 1, & \text{si } y \in E, \\ 0, & \text{si } y \notin E. \end{cases}$$

Para toda función medible  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\delta_y(x) = f(y),$$

### 2.2.3. Espacios $L^p$

Ahora repasaremos algunos resultados que nos serán útiles y que involucran los espacios  $L^p$  con  $1 \leq p < \infty$ . Fijamos el espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ , y definimos

$$L^p(\Omega, F, P) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(\omega)|^p dP(\omega) \right)^{1/p}.$$

Cuando no haya confusión, utilizaremos la notación abreviada  $L^p(P)$ . Además, denotaremos simplemente  $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ , cuando  $\mu$  sea la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

Uno de los resultados fundamentales que utilizaremos de forma recurrente para justificar el intercambio entre límite e integral es el Teorema de la Convergencia Dominada.

**Teorema 2.23 (Convergencia Dominada).** *Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(P)$  tal que:*

- i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Omega$ ,
2.  $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$  para todo  $n$  y casi todo  $\omega \in \Omega$ , donde  $g \in L^1(P)$ .

Entonces,  $f \in L^1(P)$  y se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dP = \int_{\Omega} f dP.$$

La demostración se encuentra en el Capítulo 2, Teorema 2.24 de [Fol99].

A continuación presentamos dos desigualdades en los espacios  $L^p$  que se usarán frecuentemente para acotar expresiones: la desigualdad de Hölder y la de Minkowski.

**Proposición 2.24 (Desigualdad de Hölder).** *Supongamos que  $1 < p < \infty$  y que  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Si  $f$  y  $g$  son funciones medibles en  $\Omega$  tales que  $f \in L^p(P)$  y  $g \in L^q(P)$  entonces*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

En términos integrales, la relación anterior se escribe como

$$\int_{\Omega} |f(\omega)g(\omega)| dP(\omega) \leq \left( \int_{\Omega} |f(\omega)|^p dP(\omega) \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g(\omega)|^q dP(\omega) \right)^{1/q}.$$

La demostración se encuentra en el Capítulo 6, Teorema 6.2 de [Fol99].

**Proposición 2.25** (Desigualdad de Minkowski). Sean  $f, g \in L^p(P)$ , con  $1 \leq p < \infty$ , entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

La demostración se encuentra en el Capítulo 6, teorema 6.5 de [Fol99].

Aparte de las desigualdades anteriores, es importante recordar que en los espacios  $L^p(P)$  podemos trabajar con límites y aproximaciones dentro de estos espacios sin salirnos de ellos.

**Proposición 2.26** (Completitud de  $L^p$ ). Para  $1 \leq p < \infty$  el espacio  $L^p(P)$  es un espacio de Banach; es decir, toda sucesión de Cauchy en la norma  $L^p$  converge en  $L^p$ .

La demostración se encuentra en el Capítulo 6, teorema 6.6 de [Fol99].

Finalmente, incluimos dos resultados sobre convolución de funciones que nos serán de utilidad más adelante.

**Teorema 2.27.** Sean  $f \in L^p(\mathbb{R})$  con  $1 \leq p < \infty$  y  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces, para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ , la función  $y \mapsto f(x - y)\phi(y)$  es integrable y se define la convolución como

$$(f * \phi)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)\phi(y) dy.$$

Además, se cumple que  $f * \phi \in L^p(\mathbb{R})$  y

$$\|f * \phi\|_p \leq \|f\|_1 \|\phi\|_p.$$

La demostración se encuentra en el Capítulo 4, Teorema 4.14 de [Bren].

**Teorema 2.28.** Sea  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$ . Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , con  $1 \leq p < \infty$ , entonces se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f * \phi_t - f\|_{L^p} = 0$$

donde

$$\phi_t(x) := t^{-1}\phi(t^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La demostración se encuentra en el Capítulo 8, teorema 8.14 a) de [Fol99].

## 2.3. Resultados auxiliares

En esta sección recogemos algunas desigualdades e identidad que se utilizarán en los capítulos siguientes para acotar términos que aparecerán en desarrollos y demostraciones.

**Proposición 2.29** (Desigualdad de Gronwall). *Sea  $u : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$  una función continua no negativa que satisface*

$$u(t) \leq C + A \int_0^t u(s) ds, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T,$$

donde  $C, A \geq 0$  son constantes. Entonces,

$$u(t) \leq Ce^{At}, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

*Demostración.* Definimos

$$\omega(t) := \int_0^t u(s) ds.$$

Entonces  $\omega(0) = 0$ . Derivando se tiene  $\omega'(t) = u(t)$ . A partir de la hipótesis, obtenemos

$$\omega'(t) = u(t) \leq C + A\omega(t).$$

Restamos  $A\omega(t)$  en ambos lados

$$\omega'(t) - A\omega(t) \leq C.$$

Multiplicamos ambos lados por  $e^{-At}$

$$(\omega'(t) - A\omega(t)) e^{-At} \leq Ce^{-At}.$$

Que se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt} (\omega(t)e^{-At}) \leq Ce^{-At}.$$

Integramos de 0 a  $t$

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (\omega(s)e^{-As}) ds \leq \int_0^t Ce^{-As} ds.$$

El lado izquierdo es  $\omega(t)e^{-At} - \omega(0) = \omega(t)e^{-At}$ , y el derecho queda

$$\int_0^t Ce^{-As} ds = \frac{C}{A}(1 - e^{-At}).$$

Por tanto,

$$\omega(t) \leq \frac{C}{A}(e^{At} - 1).$$

Sustituyendo en la desigualdad inicial:

$$u(t) \leq C + A\omega(t) \leq C + A \cdot \frac{C}{A}(e^{At} - 1) = Ce^{At}.$$

Esto concluye la prueba. □

A continuación, presentamos un resultado que se empleará cuando trabajemos con esperanza de productos de variables aleatorias.

**Teorema 2.30.** Sean  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dos variables aleatorias independientes y acotadas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ . Entonces se cumple que

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y].$$

*Demostración.* Sabemos que existen constante  $M$  y  $N$  positivas tales que  $|X| \leq M$  y  $|Y| \leq N$ . Aproximamos  $X$  e  $Y$  por funciones simples (2.12):

$$\phi_m(\omega) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{F_i}(\omega), \quad \psi_n(\omega) = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{G_j}(\omega),$$

donde  $F_i = X^{-1}([a_i, a_{i+1}))$ ,  $G_j = Y^{-1}([b_j, b_{j+1}))$ , con particiones tales que

$$-M = a_0 < a_1 < \dots < a_m = M \quad \text{y} \quad -N = b_0 < b_1 < \dots < b_n = N.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m(\omega) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a_i \chi_{F_i}(\omega) = X(\omega), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n b_j \chi_{G_j}(\omega) = Y(\omega). \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\phi_m] = \mathbb{E}[X]$ , para la variable  $Y$  se haría de manera equivalente. Para ello, aplicamos el Teorema de la Convergencia Dominada 2.23. Primero tenemos que ver que  $\phi_m \in L^1(\mu)$ , en efecto

$$|\phi_m(\omega)| \leq M \Rightarrow \int_{\Omega} |\phi_m| dP \leq \int_{\Omega} M dP = MP(\Omega) = M < \infty$$

Luego, comprobamos que se verifican las hipótesis del Teorema de la Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a_i \chi_{F_i}(\omega) &= X(\omega), \\ \left| \sum_{i=1}^m a_i \chi_{F_i}(\omega) \right| &\leq M \in L^1(\mu). \end{aligned}$$

Entonces aplicando el teorema obtenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\phi_m] = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi_m(\omega) dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP = \mathbb{E}[X]$$

donde

$$\int_{\Omega} \phi_m(\omega) d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\Omega} \chi_{F_i}(\omega) d\omega = \sum_{i=1}^m a_i P(F_i),$$

con  $F_i = X^{-1}([a_i, a_{i+1}])$ . De igual manera argumentamos para  $XY$ :

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\phi_m \psi_n] = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi_m(\omega) \psi_n(\omega) dP = \int_{\Omega} X(\omega) Y(\omega) dP = \mathbb{E}[XY].$$

Observamos ahora que  $\phi_m(\omega) \psi_n(\omega) = \sum_{i,j} a_i b_j \chi_{F_i \cap G_j}(\omega)$ . Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[\phi_m \psi_n] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j P(F_i \cap G_j).$$

Al ser  $X$  e  $Y$  independientes, por la Definición 2.6  $P(F_i \cap G_j) = P(F_i) P(G_j)$ , y se deduce que

$$\mathbb{E}[\phi_m \psi_n] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j P(F_i) P(G_j) = \left( \sum_{i=1}^m a_i P(F_i) \right) \left( \sum_{j=1}^n b_j P(G_j) \right) = \mathbb{E}[\phi_m] \mathbb{E}[\psi_n].$$

Al tomar el límite cuando  $m, n \rightarrow \infty$  se concluye que

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y].$$

Esto concluye la prueba. □

Por último, recopilamos dos desigualdades algebraicas básicas pero que nos serán de utilidad.

**Proposición 2.31.** *Para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$ , se tiene:*

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

*Demostración.* Desarrollamos el cuadrado:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Usamos la desigualdad

$$2ab \leq a^2 + b^2, \tag{2.7}$$

la cual es equivalente a  $0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ , que se cumple siempre. Por tanto,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Esto concluye la prueba. □

**Proposición 2.32.** Para cualesquiera  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , se tiene:

$$(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2.$$

*Demostración.* Desarrollamos el cuadrado:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Aplicamos la desigualdad (2.7) a cada producto  $2ab \leq a^2 + b^2$ ,  $2ac \leq a^2 + c^2$ ,  $2bc \leq b^2 + c^2$ .

Por tanto, obtenemos

$$(a + b + c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2.$$

Esto concluye la prueba. □



# 3

## Movimiento browniano

El movimiento browniano es un proceso estocástico que describe el movimiento aleatorio que se observa en las partículas como resultado de los choques contra las moléculas del medio que le rodea. Su nombre proviene del botánico escocés Robert Brown, quien en 1827 observó cómo los granos de polen suspendidos en agua seguían caminos impredecibles. Este movimiento, el cual vamos a construir y ver sus propiedades, es esencial para comprender las ecuaciones diferenciales estocásticas, ya que interviene en ellas aportando el componente aleatorio que se representa como  $dB$ .

**Teorema 3.1 (Existencia del Movimiento Browniano).** *Existe un proceso estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$ , que se denomina movimiento Browniano o Proceso de Wiener, que cumple las siguientes propiedades:*

(i)  $B_0 \equiv 0$  casi seguramente.

(ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$  y tiempos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

son independientes en el sentido de la Definición 2.6.

(iii) Para todos  $t \geq s \geq 0$ , la variable aleatoria  $B_t - B_s$  sigue una distribución normal  $N(0, t - s)$  en el sentido de la Definición 2.21.

**Demostración.** Para construir el proceso estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  aplicamos el Teorema de extensión de Kolmogorov 2.10. Empezamos definiendo los espacios de probabilidad

$$((\mathbb{R}^*)^n, \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^n), P_{t_1, \dots, t_n}),$$

donde la medida de probabilidad  $P_{t_1, \dots, t_n}$  en  $(\mathbb{R}^*)^n$  para  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  se define como

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) = \int_A \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \dots dx_n, \quad A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^n). \quad (3.1)$$

En esta definición, se toma  $x_0 = 0$ , y para  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ ,

$$p(t, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right). \quad (3.2)$$

Además, dada una colección no ordenada de tiempos  $(s_1, \dots, s_n) \in [0, \infty)^n$ , definimos

$$P_{s_1, \dots, s_n} := P_{t_1, \dots, t_n}, \quad (3.3)$$

donde  $(t_1, \dots, t_n)$  es la reordenación creciente de  $(s_1, \dots, s_n)$ , es decir, existe una permutación  $\sigma \in \Sigma_n$  tal que  $t_i = s_{\sigma(i)}$  donde  $t_1 < \dots < t_n$  para  $i = 1, \dots, n$ . Por convenio, se fija  $p(0, 0, y) dy = d\delta_0(y)$ , siendo  $\delta_0$  la Delta de Dirac centrada en 0, acorde a la Definición 2.22.

Comprobamos que cada  $P_{t_1, \dots, t_n}$  es, en efecto, una medida de probabilidad:

- $P_{t_1, \dots, t_n}(\emptyset) = \int_{\emptyset} \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \dots dx_n = 0$ .
- $P_{t_1, \dots, t_n}((\mathbb{R}^*)^n) = \int_{(\mathbb{R}^*)^n} \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \dots dx_n = 1$ . En efecto, dado que

$$\int_{\mathbb{R}^*} p(t, x, y) dy = 1, \quad (3.4)$$

se sigue aplicando inductivamente el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n}((\mathbb{R}^*)^n) &= \int_{(\mathbb{R}^*)^n} \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{(\mathbb{R}^*)^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^*} p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_n \right) \prod_{i=1}^{n-1} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{(\mathbb{R}^*)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \dots dx_{n-1} = \dots = \int_{\mathbb{R}^*} p(t_1, x_0, x_1) dx_1 = 1. \end{aligned}$$

Veamos que, en efecto, la ecuación (3.4) se cumple. Realizando el cambio de variable

$$u = \frac{y-x}{\sqrt{2t}}, \quad du = \frac{dy}{\sqrt{2t}} \implies dy = \sqrt{2t} du,$$

obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^*} p(t, x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{2\pi t}} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^*} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.$$

- Sea  $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^n)$  una colección de conjuntos disjuntos dos a dos. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} P_{t_1, \dots, t_n} \left( \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j \right) &= \int_{\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j} \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{A_j} \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{t_1, \dots, t_n}(A_j). \end{aligned}$$

Por consiguiente, queda demostrado que cada  $P_{t_1, \dots, t_n}$  es una medida de probabilidad. Comprobamos ahora que estas medidas verifican las hipótesis de compatibilidad del Teorema de extensión de Kolmogorov 2.10.

- Para toda permutación  $\sigma$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , se verifica (2.2) por definición de la medida de probabilidad para tiempos desordenados (3.3).
- Definiendo la medida en  $n + m$  tiempos, donde  $A \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^n)$ , comprobamos que se cumple (2.3). Por definición,

$$P_{t_1, \dots, t_{n+m}}(A \times (\mathbb{R}^*)^m) = \int_{A \times (\mathbb{R}^*)^m} \prod_{i=1}^{n+m} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \cdots dx_{n+m}.$$

Utilizando el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración, se puede escribir

$$\begin{aligned} &P_{t_1, \dots, t_{n+m}}(A \times (\mathbb{R}^*)^m) \\ &= \int_A \prod_{i=0}^n p(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) \left( \prod_{j=n+1}^{n+m} \int_{\mathbb{R}^*} p(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j) dx_j \right) dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Por la propiedad (3.4) tenemos, para todo  $j = n + 1, \dots, n + m$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^*} p(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, x_j) dx_j = 1.$$

Por tanto,

$$P_{t_1, \dots, t_{n+m}}(A \times (\mathbb{R}^*)^m) = \int_A \prod_{i=0}^n p(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_1 \dots dx_n = P_{t_1, \dots, t_n}(A).$$

En consecuencia, queda demostrado que

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A) = P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}}(A \times (\mathbb{R}^*)^m).$$

Verificadas ambas propiedades, podemos afirmar que, por el teorema de extensión de Kolmogorov 2.10, existe una medida de probabilidad  $P$  en el espacio medible

$$\left( (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}) \right)$$

tal que

$$P\left(\{(x_t)_{t \in [0, \infty)} \in (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)} : x_{t_1} \in A_1, \dots, x_{t_n} \in A_n\}\right) = P_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n).$$

Definida la medida de probabilidad, según la demostración del Teorema 2.11, el proceso estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  se define como las funciones coordenada

$$B_t : \left( (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}), P \right) \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad B_t((x_s)_{s \in [0, \infty)}) := x_t.$$

Se verifica que  $B_t$  es una función medible para todo  $t \in [0, \infty)$ , ya que por la Definición 2.4, para cualquier conjunto de Borel  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$ ,

$$B_t^{-1}(A) = \{(x_s)_{s \in [0, \infty)} \in (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)} : x_t \in A\} \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}).$$

Por último, vamos a comprobar que el proceso estocástico definido verifica las propiedades indicadas del Teorema 3.1.

- i. La probabilidad de que el proceso  $B_t$  tome ciertos valores en los tiempos  $t_1, \dots, t_k$  está dada por (2.6). En particular, para  $t_0 = 0$ , la probabilidad de que  $B_0 = 0$  es 1 ya que

$$P(B_0 = 0) = P(B_0 \in \{0\}) = P_0(\{0\}) = \int_{\{0\}} p(0, 0, x_1) dx_1 = \int_{\{0\}} d\delta_0(x_1) = 1.$$

Por lo tanto, se cumple que  $B_0 = 0$  casi seguramente.

2. Ahora, vamos a demostrar que las variables aleatorias  $B_1, B_2 - B_1, \dots, B_n - B_{n-1}$ , donde  $B_i := B_{t_i}$  y  $t_i < t_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, n$ , son independientes. Definimos la siguiente aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) := (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}).$$

Por definición de independencia (ver Definición 2.6), si denotamos

$$(W_1, W_2, \dots, W_n) := (B_1, B_2 - B_1, \dots, B_n - B_{n-1}),$$

debemos comprobar que para todo  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  se cumple que

$$P(W_1 \in A_1, \dots, W_n \in A_n) = P(W_1 \in A_1) \cdots P(W_n \in A_n).$$

Sabemos que  $(W_1, W_2, \dots, W_n) = T(B_1, B_2, \dots, B_n)$  para la transformación lineal  $T$ , por lo que

$$\begin{aligned} P(T(B_1, \dots, B_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n) &= P((B_1, \dots, B_n) \in T^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n)) \\ &= \int_{T^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n)} \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{T^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n)} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{|x_i - x_{i-1}|^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Como la aplicación  $T^{-1}$  es lineal y su jacobiano es distinto de cero (de hecho, es una matriz triangular inferior de unos), podemos aplicar el Teorema de cambio de variable 2.20 para obtener

$$\begin{aligned} P(W_1 \in A_1, \dots, W_n \in A_n) &= \int_{A_1 \times \cdots \times A_n} \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{|w_i|^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) \right) dw_1 \cdots dw_n \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{A_i} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{|w_i|^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) \right) dw_i \\ &= \prod_{i=1}^n P(W_i \in A_i). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Quedando demostrado que los incrementos son independientes. Además, la igualdad (3.5) también muestra que

$$P(W_1 \in A_1, \dots, W_n \in A_n) = \left[ \nu_{t_1} \otimes \nu_{t_2 - t_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{t_n - t_{n-1}} \right] (A_1 \times \cdots \times A_n),$$

donde  $\nu_t$  es una medida de probabilidad con distribución normal de media cero y varianza  $t$ . Es decir,  $\nu_t \sim N(0, t)$  (ver Definición 2.21). Por tanto, también queda demostrada la propiedad (iii), para  $i = 1, \dots, n$ , es decir,

$$W_i = B_i - B_{i-1} \sim N(0, t_i - t_{i-1}).$$

Se concluye así la demostración.  $\square$

## 3.1. Propiedades del movimiento Browniano.

Ahora, vamos a ver ciertas propiedades del movimiento Browniano que nos servirán en los capítulos siguientes a la hora de operar y trabajar con ellas.

**Teorema 3.2.** *Sea  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  el movimiento browniano y  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  una sucesión finita de tiempos. Entonces, para cada  $f \in L^1(P_{t_1, \dots, t_n})$  siendo  $P_{t_1, \dots, t_n}$  la medida de probabilidad definida en (3.1), se cumple que*

$$\mathbb{E} [f(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_i.$$

*Demostración.* Definimos las variables  $Y_i := B_i - B_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, n$ , y la función

$$b(y_1, y_2, \dots, y_n) := f(y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n).$$

Entonces, podemos escribir:

$$\mathbb{E} [f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})] = \mathbb{E}[b(Y_1, \dots, Y_n)] = \int_{(\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}} b(Y_1, \dots, Y_n) dP.$$

A esta última integral, se le aplica el resultado de la Proposición 2.18 para

$$\alpha : (\mathbb{R}^*)^n \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad \alpha(y_1, y_2, \dots, y_n) := b(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

y

$$\varphi : (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)} \longrightarrow (\mathbb{R}^*)^n, \quad \varphi := (Y_1, \dots, Y_n),$$

obteniendo

$$\int_{(\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}} b(Y_1, \dots, Y_n) dP = \int_{(\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}} (\alpha \circ \varphi) dP = \int_{(\mathbb{R}^*)^n} \alpha dP_{(Y_1, \dots, Y_n)}. \quad (3.6)$$

Por las propiedades (ii) y (iii) del movimiento Browniano, tenemos que

$$(Y_1, \dots, Y_n) \sim N(0, t_1 - t_0) \otimes \cdots \otimes N(0, t_n - t_{n-1}),$$

y por tanto,

$$dP_{(Y_1, \dots, Y_n)} = \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, 0, y_i) dy_i.$$

Sustituyendo en (3.6) resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[b(Y_1, \dots, Y_n)] &= \int_{(\mathbb{R}^*)^n} b(y_1, \dots, y_n) \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, 0, y_i) dy_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} b(y_1, \dots, y_n) \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, 0, y_i) dy_i, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que  $\{\infty\} \subset \mathbb{R}^*$  tiene medida nula. Finalmente, cambiando las variables  $y_i = x_i - x_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, n$ , y teniendo en cuenta que

$$b(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y que

$$p(t_i - t_{i-1}, 0, x_i - x_{i-1}) = p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i),$$

obtenemos

$$\mathbb{E}[b(Y_1, \dots, Y_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_i.$$

Esto concluye la prueba. □

Una propiedad que vamos a ver en el siguiente teorema y que se empleará más adelante de cara a la medida de probabilidad  $P$ , es que podemos restringir el espacio de funciones  $(\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}$  al espacio de funciones continuas

$$C([0, \infty)) := \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^* \mid f \text{ es continua}\}.$$

**Teorema 3.3.** *Consideramos el espacio de probabilidad*

$$\left( (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}), P \right)$$

*definido en la demostración del Teorema 3.1. Entonces, se cumple que*

$$C([0, \infty)) \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}) \quad y \quad P(C([0, \infty))) = 1.$$

En otras palabras, las trayectorias Brownianas  $t \mapsto B_t(\mathbf{x})$  son continuas para casi todo  $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}$ . La demostración se encuentra en el capítulo 10, Teorema 10.28 de [Fol99]. Terminamos probando algunas propiedades del movimiento browniano que utilizaremos en los capítulos siguientes.

**Lema 3.4.** Sean  $0 < t_1 < t_2$ . Entonces, se cumple que

$$\mathbb{E}[B_{t_2} - B_{t_1}] = 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})^2] = t_2 - t_1.$$

*Demostración.* Como  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es el movimiento browniano, por el Teorema 3.1, se tiene que

$$B_{t_2} - B_{t_1} \sim N(0, t_2 - t_1).$$

Entonces, por las propiedades de la esperanza y la varianza de las variables aleatorias con distribución normal, Definición 2.21, se deduce que

$$\mathbb{E}[B_{t_2} - B_{t_1}] = 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})^2] = \text{Var}(B_{t_2} - B_{t_1}) = t_2 - t_1.$$

Esto concluye la prueba. □

**Lema 3.5.** Sean  $0 < t_1 < t_2$ . Entonces, se satisface la identidad

$$\mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})^4] = 3(t_2 - t_1)^2.$$

*Demostración.* Esta esperanza se calcula empleando el Teorema 3.2 a la función  $f(x, y) = (y - x)^4$ . En efecto,

$$\mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})^4] = \mathbb{E}[f(B_{t_1}, B_{t_2})] = \int_{\mathbb{R}^2} (y - x)^4 p(t_1, x, 0) p(t_2 - t_1, y, x) dx dy$$

donde, por la definición de  $p(t, x, y)$  (ver (3.2)) obtenemos

$$\mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})^4] = \int_{\mathbb{R}^2} (y - x)^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{x^2}{2t_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t_2 - t_1)}} dx dy.$$

Aplicando el cambio de variable  $z = y - x$  y el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})^4] &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t_1}} dx \int_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-\frac{z^2}{2(t_2 - t_1)}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-\frac{z^2}{2(t_2 - t_1)}} dz, \end{aligned}$$

donde, para la segunda igualdad, hemos usado la identidad (3.4). Aplicamos ahora el cambio de variable  $u = \frac{z}{\sqrt{2(t_2-t_1)}}$ , obteniendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-\frac{z^2}{2(t_2-t_1)}} dz = \sqrt{2(t_2-t_1)} 4(t_2-t_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-u^2} du.$$

Esta integral se resuelve haciendo doble integral por partes, resultando

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-u^2} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Así, concluimos que

$$\mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})^4] = 3(t_2 - t_1)^2,$$

lo cual completa la demostración. □



# 4

## Integral de Itô

La integral de Itô es un concepto fundamental en el cálculo estocástico que se utiliza para integrar funciones respecto al movimiento Browniano. La construcción de la integral de Itô es similar a la construcción de la integral de Lebesgue. Sin embargo, veremos que esta integral presenta propiedades distintas.

Comenzaremos introduciendo algunas definiciones que nos ayudarán a construir la integral de Itô. En esta sección, con el fin de simplificar la notación, denotamos el espacio de probabilidad sobre el que se define el movimiento Browniano  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  en el Teorema 3.1 como

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) := ((\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^*)^{[0, \infty)}), P).$$

**Definición 4.1.** Sea  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  el movimiento browniano definido en el Teorema 3.1. Definimos

$$F_t = \sigma(\{\omega \in \Omega : B_{t_i}(\omega) \in A_i, i = 1, \dots, k\}),$$

donde  $t_i \leq t$  y  $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  son conjuntos de Borel,  $i \leq k \in \mathbb{N}$ . Observamos que  $F_t = \sigma(\{B_s^{-1}(A) : s \leq t, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$ .

*Observación 4.2.* Se cumple que  $F_s \subseteq F_t$  cuando  $s < t$ .

**Lema 4.3.** Si  $X : (\Omega, F_t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  es  $F_t$ -medible, entonces  $X$  también es  $F$ -medible.

*Demostración.* Si  $X$  es  $F_t$ -medible, se tiene que para todo conjunto boreliano  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $X^{-1}(A) \in F_t$ . Como  $F_t \subseteq F$ , se deduce inmediatamente que  $X^{-1}(A) \in F$ . Por tanto,  $X$  también es  $F$ -medible.  $\square$

La proposición que sigue formaliza una de las propiedades más características del movimiento browniano. La demostración requiere resultados de teoría de la probabilidad algo más técnicos, que se presentan con detalle en la Sección 2.1 de [Dur19].

**Proposición 4.4.** Sean  $0 < s < t$ . Entonces,  $B_t - B_s$  es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $F_s$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.1 (ii), el proceso de Wiener tiene incrementos independientes. En particular,  $B_s$  y  $B_t - B_s$  son variables aleatorias independientes, es decir,

$$\begin{aligned} H_{B_s} &= \sigma(\{B_s^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = \sigma(\{\omega \in \Omega : B_s(\omega) \in A, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) \\ H_{B_t - B_s} &= \sigma(\{\omega \in \Omega : (B_t - B_s)(\omega) \in A, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) \end{aligned}$$

son independientes. Consideremos ahora una partición arbitraria del intervalo  $[0, s]$ ,  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = s$ . Por el teorema 3.1 (ii), volvemos a tener otra vez que las variables

$$B_{s_1} - B_{s_0}, B_{s_2} - B_{s_1}, \dots, B_s - B_{s_{m-1}}$$

son independientes entre sí, y cada una es también independiente de  $B_t - B_s$ . En el Teorema 2.1.9 de la Sección 2 de [Duri9] se demuestra que la  $\sigma$ -álgebra generada por estos incrementos, es también independiente a  $H_{B_t - B_s}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} &H_{B_{s_1} - B_{s_0}, B_{s_2} - B_{s_1}, \dots, B_s - B_{s_{m-1}}} \\ &= \sigma(\{\omega \in \Omega : (B_{s_j} - B_{s_{j-1}})(\omega) \in A_j : A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), j = 0, \dots, m\}) \\ &= \sigma(\{\omega \in \Omega : B_{s_j}(\omega) \in A_j : A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), j = 0, \dots, m\}) \subset F_s \end{aligned}$$

es independiente de  $H_{B_t - B_s}$ . Sea  $\Pi_s$  el conjunto de todas las particiones finitas de  $[0, s]$  podemos definir

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ \pi_m \in \Pi_s}} \sigma(\{\omega \in \Omega : B_{s_j}(\omega) \in A_j, A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), j = 1 \dots m\}),$$

donde cada  $\pi_m = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = s\}$  es una partición. Estas  $\sigma$ -álgebras son independientes a  $H_{B_t - B_s}$ . Por tanto,  $\sigma(\mathcal{G}) = F_s$  y podemos concluir que  $F_s$  es independiente a  $H_{B_t - B_s}$  (consultar Sección 2, Teorema 2.1.9 de [Duri9]).  $\square$

**Definición 4.5.** Un proceso estocástico  $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se dice  $F_t$ -adaptado si para cada  $t \geq 0$  la función

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(t, \omega)$$

es  $F_t$ -medible.

**Definición 4.6.** Denotamos por  $V = V(S, T)$  la clase de funciones

$$f : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumplen:

- (i) La aplicación  $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$  es  $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes F$ -medible, donde  $\mathcal{B}([0, \infty))$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $[0, \infty)$  y  $F$  es la  $\sigma$ -álgebra del espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ .
- (ii)  $f$  es  $F_t$ -adaptada.
- (iii) Se satisface que

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty.$$

**Definición 4.7 (Función elemental).** Una función  $\phi \in V$  es elemental si existe una partición  $\{t_i\}_{i=0}^n$  del intervalo  $[S, T]$  tal que

$$\phi(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega) \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t), \quad (4.1)$$

donde cada función  $X_i := X_{t_i}$  es  $F_{t_i}$ -medible.

*Observación 4.8.* Observamos que, como  $\phi \in V$ , por la propiedad (iii) de la Definición 4.6,

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T \phi(t, \omega)^2 dt \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} X_i^2 \int_S^T \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) dt \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_i^2] (t_{i+1} - t_i) < \infty.$$

Por tanto, necesariamente,  $X_i \in L^2(P)$  para cada  $i = 0, \dots, n-1$ .

**Definición 4.9 (Integral de Itô para funciones elementales).** Sea  $\phi \in V$  una función elemental conforme a la Definición 4.7, se define la integral de Itô de  $\phi$  como

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) := \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega) [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega). \quad (4.2)$$

*Observación 4.10.* Por esta definición, la integral de Itô (4.2) es una variable aleatoria, ya que resulta de una suma finita de productos de variables aleatorias  $X_i$ , que son  $F_{t_i}$ -medibles, con incrementos del movimiento browniano, los cuales también son variables aleatorias. Por tanto, la integral de Itô permite definir el siguiente proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  donde

$$X_t(\omega) := \int_0^t \phi(s, \omega) dB_s(\omega), \quad t \in [0, T].$$

Ahora presentamos una propiedad clave de la integral de Itô, conocida como isometría de Itô, la cual nos permitirá extender su definición a funciones más generales.

**Lema 4.11** (Isometría de Itô). Si  $\phi \in V(S, T)$  es una función elemental acotada, entonces

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \in L^2(P),$$

y además

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_S^T \phi(t, \omega)^2 dt \right].$$

*Demostración.* Dado que  $\phi$  es elemental, existen una partición  $\{t_i\}_{i=0}^n$  de  $[S, T]$  y ciertas variables aleatorias  $X_i \in L^\infty(P)$  tales que  $\phi$  tiene la representación (4.1). Definimos  $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ . Vamos a comprobar que se cumple la siguiente igualdad

$$\mathbb{E}[X_i X_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \mathbb{E}[X_j^2] (t_{j+1} - t_j) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- Para  $i = j$  tenemos que

$$\mathbb{E}[X_i^2 (\Delta B_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2] \mathbb{E}[(\Delta B_i)^2] = \mathbb{E}[X_i^2] (t_{i+1} - t_i).$$

La segunda igualdad se da por el Lema 3.4, mientras que la primera por el Teorema 2.30. Para aplicar este teorema, comprobamos que  $X_i^2$  y  $(\Delta B_i)^2$  son independientes. En efecto,  $X_i$  es  $F_{t_i}$ -medible por la Definición 4.7. Además,  $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ , por la Proposición 4.4, es independiente de  $F_{t_i}$ . Sea  $Y = \Delta B_i$ , que la variable aleatoria  $Y$  sea independiente a  $F_{t_i}$  significa que para todo  $h_Y \in H_Y$  (véase la Definición 2.6), y para todo  $A \in F_{t_i}$ , se verifica que:

$$P(h_Y \cap A) = P(h_Y) \cdot P(A).$$

En consecuencia,  $Y$  es independiente de la variable  $X_i$ , ya que es una variable  $F_{t_i}$ -medible. En efecto, para todo  $h_Y \in H_Y$  y  $h_X \in H_{X_i} \subset F_{t_i}$ , se cumple que

$$P(h_Y \cap h_X) = P(h_Y) \cdot P(h_X).$$

Por tanto  $\Delta B_i$  y  $X_i$  son independientes.

- Para  $i \neq j$  tomamos  $i < j$ . Vamos a comprobar que  $X_i X_j \Delta B_i$  y  $\Delta B_j$  son independientes, de esta manera podemos volver a aplicar el Teorema 2.30, y obtener

$$\mathbb{E}[X_i X_j \Delta B_i \Delta B_j] = \mathbb{E}[X_i X_j \Delta B_i] \mathbb{E}[\Delta B_j] = 0.$$

El resultado da 0 por el Lema 3.4. Para demostrar que  $X_i X_j \Delta B_i$  y  $\Delta B_j$  son independientes, primero observamos que  $X_i X_j \Delta B_i$  es  $F_{t_j}$ -medible:  $X_i$  es  $F_{t_i}$ -medible y  $X_j$  es  $F_{t_j}$ -medible por la Definición 4.7, y además  $B_{t_i}$  es  $F_{t_i}$ -medible y  $B_{t_{i+1}}$  es  $F_{t_{i+1}}$ -medible por la Definición 4.1. Como  $F_{t_i} \subset F_{t_{i+1}} \subseteq F_{t_j}$  por el Lema 4.3 todas las funciones son  $F_{t_j}$ -medibles y su multiplicación es  $F_{t_j}$ -medible.

Por otro lado, sabemos que  $\Delta B_j$  es independiente de  $F_{t_j}$  por el Teorema 3.1. Como  $X_i X_j \Delta B_i$  es  $F_{t_j}$ -medible se vuelve a concluir que  $\Delta B_j$  y  $X_i X_j \Delta B_i$  son independientes.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T \phi dB_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega) [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i,j=0}^{n-1} X_i X_j \Delta B_i \Delta B_j \right] = \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbb{E} [X_i X_j \Delta B_i \Delta B_j] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [X_j^2] (t_{j+1} - t_j) = \mathbb{E} \left[ \int_S^T \phi^2 dt \right]. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene de la Definición 4.7, expresando  $\phi$  en su forma elemental.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_S^T \phi^2 dt \right] &= \int_{\Omega} \left( \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega) \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) \right)^2 dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{n-1} X_i^2(\omega) \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) dP(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \int_{\Omega} X_i(\omega)^2 dP(\omega) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} [X_i^2] (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

## 4.1. Construcción de la integral de Itô.

A partir de la definición de la integral de Itô para funciones elementales y el estudio de sus propiedades fundamentales, en esta sección desarrollamos la Integral de Itô de manera general. Comenzamos dando su definición.

**Definición 4.12 (Integral de Itô).** Sea  $f \in V(S, T)$ . La integral de Itô desde  $S$  a  $T$  de  $f$  se define como

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t \quad (\text{límite en } L^2(P)) \quad (4.3)$$

donde  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones elementales, presentadas en la Definición 4.7, tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] = 0. \quad (4.4)$$

Veamos que (4.4) implica la existencia del límite (4.3), para ello comprobamos primero

$$\left\{ \int_0^T \phi_n(t) dB_t \right\}_{n \geq 1}$$

es una sucesión de Cauchy en  $L^2(P)$ . Por la isometría de Itô para funciones elementales, enunciada en el Lema 4.11, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T (\phi_n(t, \omega) - \phi_m(t, \omega)) dB_t(\omega) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_S^T (\phi_n(t, \omega) - \phi_m(t, \omega))^2 dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_S^T ((\phi_n(t, \omega) - f(t, \omega)) - (\phi_m(t, \omega) - f(t, \omega)))^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de la Proposición 2.31,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \int_S^T ((\phi_n(t, \omega) - f) - (\phi_m(t, \omega) - f))^2 dt \right] \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left[ \int_S^T |\phi_n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt \right] + 2 \mathbb{E} \left[ \int_S^T |\phi_m(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Dado que por hipótesis tenemos (4.4),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T |\phi_n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt \right] = 0,$$

se concluye que  $\left\{ \int_0^T \phi_n(t) dB_t \right\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(P)$ , por tanto la sucesión es convergente. Por el Teorema 2.26 como estamos en  $L^2$ , el límite también se encuentra en  $L^2$ . De esta manera, queda demostrado que el límite existe como un elemento de  $L^2(P)$ .

Ahora, vamos a ver como podemos obtener una sucesión de funciones elementales  $\phi_n$  que convergan a  $f$  en  $L^2$  (4.4). Para ello, utilizaremos los tres siguientes lemas técnicos:

**Proposición 4.13.** Sea  $g(t, \omega) \in V$  una función acotada tal que  $g(\cdot, \omega)$  es continua para cada  $\omega$ . Entonces, existe una sucesión de funciones elementales  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $\phi_n(t, \omega) \in V$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right] = 0$$

*Demostración.* Tomamos una partición del tiempo  $[S, T]$ ,  $\{\{t_j^n\}_{j=0}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , de manera que  $t_{j+1}^n - t_j^n \leq \frac{1}{n}$ . Definimos  $\phi_n(t, \omega) = \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j, \omega) \cdot \chi_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}(t)$ . Como  $g \in V$ ,  $g$  es  $F_t$ -adaptado y por tanto para cada  $t_j \geq 0$  se tiene  $g(t_j, \omega)$  es  $F_{t_j}$ -medible. En consecuencia,  $\phi_n$  es una función elemental. Además, observamos que, fijado  $\omega$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\tilde{t}) = g(\tilde{t})$  para  $\tilde{t} \in [S, T]$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\tilde{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} g(t_j^n) \cdot \chi_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}(\tilde{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_j^n) = g \left( \lim_{n \rightarrow \infty} t_j^n \right) = g(\tilde{t}).$$

La segunda igualdad se debe a que  $\tilde{t} \in [t_j^n, t_{j+1}^n) \subset [S, T]$ . La tercera igualdad se justifica porque  $g(\cdot, \omega)$  es continua para cada  $\omega$ . Ahora, se comprueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt = 0 \quad \text{para cada } \omega.$$

Para comprobar este límite, aplicaremos el teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.23). En este caso, definimos  $f_n = |g - \phi_n|^2 \in L^1([S, T])$ . Observamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g - \phi_n|^2 = 0.$$

Además, como  $|g| \leq M$  y  $|\phi_n| \leq M$ , entonces

$$|g - \phi_n|^2 \leq (|g| + |\phi_n|)^2 \leq (M + M)^2 = 4M^2,$$

y como  $4M^2$  es constante, se tiene que  $4M^2 \in L^1([S, T])$ .

Por tanto, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para obtener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt = \int_S^T \lim_{n \rightarrow \infty} (g - \phi_n)^2 dt = \int_S^T 0 dt = 0.$$

Conociendo esto, falta comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt dP = 0.$$

Volviendo a aplicar el teorema de la convergencia dominada, ahora consideramos

$$f_n = \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \in L^1(P).$$

Por un lado, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T |g - \phi_n|^2 dt = 0.$$

Por otro, tenemos la desigualdad

$$\left| \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \right| \leq \int_S^T 4M^2 dt = 4M^2(T - S) \in L^1(P).$$

Por lo tanto, se puede aplicar nuevamente el teorema, obteniendo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt dP &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T (g - \phi_n)^2 dt dP \\ &= \int_{\Omega} 0 dP = 0 \cdot P(\Omega) = 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba.  $\square$

**Proposición 4.14.** *Sea  $b \in V$  una función acotada. Entonces existe una sucesión de funciones acotadas  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in V$  tales que  $g_n(\cdot, \omega)$  es continua para todo  $\omega$  y  $n$ , y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (b(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt \right] = 0.$$

*Demostración.* Suponemos que  $|b(t, \omega)| \leq M$  para todo  $(t, \omega) \in [S, T] \times \Omega$ . Para cada  $n$ , definimos una función  $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no negativa y continua tal que:

$$(i) \quad \psi_n(x) = 0 \text{ para } x \leq -\frac{1}{n} \text{ y } x \geq 0, \text{ y}$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) dx = 1.$$

Definimos entonces

$$g_n(t, \omega) := \psi_n * b = \int_0^t \psi_n(s - t) b(s, \omega) ds.$$

Por el Teorema 2.28, se cumple  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - b\|_{L^2([S, T])} = 0$ . Fijado  $\omega$ , la función  $g_n(t, \omega)$  es continua. Además, se cumple que

$$|g_n(t, \omega)| \leq \int_0^t |\psi_n(s - t) b(s, \omega)| ds = \int_0^t |\psi_n(s - t)| |b(s, \omega)| ds \leq M.$$

La primera desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Minkowski, y la última se obtiene utilizando que  $b$  está acotada y aplicando la propiedad (ii) de  $\psi_n$ . Dado que  $b \in V$ ,

se puede demostrar (ver por ejemplo página 133 de [Kar91]) que  $g_n(t, \cdot)$  es  $F_t$ -medible para todo  $t$ . Por el Teorema 2.28 se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T (g_n(s, \omega) - b(s, \omega))^2 ds = 0 \quad \text{para cada } \omega \in \Omega.$$

Para demostrar el límite que queremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (b(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt \right] = 0,$$

aplicaremos el Teorema de la Convergencia Dominada 2.23. Definimos la función

$$f_n(\omega) := \int_S^T (b(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt \in L^1(P)$$

la cual hemos visto que converge a 0 puntualmente para cada  $\omega$ . Además, podemos acotar

$$f_n(\omega) \leq \int_S^T (|b(t, \omega)| + |g_n(t, \omega)|)^2 dt \leq 4M^2(T - S),$$

donde la última desigualdad se deduce del hecho de que tanto  $b(t, \omega)$  como  $g_n(t, \omega)$  están acotadas por  $M$ , y por lo tanto  $f_n$  está acotada por  $4M^2(T - S) \in L^1(P)$ . Por el Teorema de la Convergencia Dominada, se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) dP = \int_{\Omega} 0 dP = 0 \cdot P(\Omega) = 0.$$

Esto concluye la prueba.  $\square$

**Proposición 4.15.** *Sea  $f \in V$ . Entonces existe una sucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  tal que  $b_n$  es acotada para cada  $n$  y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - b_n(t, \omega))^2 dt \right] = 0.$$

*Demostración.* Definimos

$$b_n(t, \omega) := \begin{cases} -n & \text{si } f(t, \omega) < -n \\ f(t, \omega) & \text{si } -n \leq f(t, \omega) \leq n \\ n & \text{si } f(t, \omega) > n. \end{cases}$$

Primero vamos a demostrar, utilizando el teorema de la convergencia dominada 2.23, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T |f(t, \omega) - b_n(t, \omega)|^2 dt = 0.$$

Para ello, definimos  $f_n(t, \omega) := |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2$ . Sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2 = 0, \quad \text{para casi todo } t \in [S, T],$$

ya que por definición de  $h_n$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t, \omega) = f(t, \omega)$ . Además, podemos acotar

$$f_n(t, \omega) = |f - h_n|^2 \leq (|f| + |h_n|)^2 \leq 4|f|^2 \in L^1([S, T] \times \Omega).$$

Esta cota es integrable ya que  $f \in V \subseteq L^2([S, T] \times \Omega)$ , y por tanto  $|f|^2 \in L^1([S, T] \times \Omega)$ . Aplicando el teorema de la convergencia dominada, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2 dt = \int_S^T \lim_{n \rightarrow \infty} |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2 dt = \int_S^T 0 dt = 0.$$

Por último, para demostrar el límite del enunciado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2 dt \right] = 0.$$

Consideramos nuevamente  $g_n(\omega) := \int_S^T |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2 dt$ , para el cual ya hemos probado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega) = 0$ . Además, tenemos

$$g_n(\omega) \leq \int_S^T |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2 dt \leq 4 \int_S^T |f(t, \omega)|^2 dt \in L^1(\Omega)$$

debido a que  $f \in V \subseteq L^2([S, T] \times \Omega)$ . Aplicando nuevamente el teorema de la convergencia dominada, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2 dt \right] &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T |f(t, \omega) - h_n(t, \omega)|^2 dt dP \\ &= \int_{\Omega} 0 dP = 0, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

A partir de estas proposiciones, podemos obtener una sucesión de funciones elementales  $\phi_n$  que converge a  $f$  en  $L^2$  (4.4). Sea  $f \in V$ . Por la Proposición 4.15, existe una sucesión acotada  $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$  tal que  $h_n \rightarrow f$  en  $L^2$ . Para esta  $f$ , tomamos una subsucesión  $\{h_{n_j}\}$ , donde  $n_j > n_{j-1}$  tal que

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t) - h_{n_1}(t))^2 dt \right] < 1,$$

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t) - h_{n_2}(t))^2 dt \right] < \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t) - h_{n_j}(t))^2 dt \right] < \frac{1}{j}, \dots$$

Para cada  $h_{n_j}$ , por la Proposición 4.14 existe una sucesión  $\{g_{n_j, m}\}_{m=1}^\infty$  de funciones acotadas y continuas en  $t$ , tal que  $g_{n_j, m} \rightarrow h_{n_j}$  en  $L^2$ . Para cada  $j$ , elegimos una subsucesión  $\{g_{n_j, m_j}\}$  donde  $m_j > m_{j-1}$  tal que

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T (h_{n_j}(t) - g_{n_j, m_j}(t))^2 dt \right] < \frac{1}{j}.$$

Luego, para cada  $g_{n_j, m_j}$ , por la Proposición 4.13 existe una sucesión de funciones elementales  $\{\varphi_{n_j, m_j, k}\}_{k=1}^\infty$  tal que  $\varphi_{n_j, m_j, k} \rightarrow g_{n_j, m_j}$  en  $L^2$ . Para cada  $j$ , elegimos una subsucesión  $\{\varphi_{n_j, m_j, k_j}\}$ ,  $k_j > k_{j-1}$  tal que

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T (g_{n_j, m_j}(t) - \varphi_{n_j, m_j, k_j}(t))^2 dt \right] < \frac{1}{j}.$$

Definimos las sucesiones

$$h_j := h_{n_j}, \quad g_j := g_{n_j, m_j}, \quad \varphi_j := \varphi_{n_j, m_j, k_j}.$$

Aplicamos la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |f(t) - \varphi_j(t)| &\leq |f(t) - g_j(t)| + |g_j(t) - \varphi_j(t)| \\ &\leq (|f(t) - h_j(t)| + |h_j(t) - g_j(t)|) + |g_j(t) - \varphi_j(t)|. \end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado y utilizamos la desigualdad 2.32, donde obtenemos

$$|f(t) - \varphi_j(t)|^2 \leq 3 (|f(t) - h_j(t)|^2 + |h_j(t) - g_j(t)|^2 + |g_j(t) - \varphi_j(t)|^2).$$

Ahora integramos y tomamos las esperanzas

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_S^T |f(t) - \varphi_j(t)|^2 dt \right] &\leq 3 \left( \mathbb{E} \left[ \int_S^T |f(t) - h_j(t)|^2 dt \right] \right. \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ \int_S^T |h_j(t) - g_j(t)|^2 dt \right] \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left[ \int_S^T |g_j(t) - \varphi_j(t)|^2 dt \right] \right). \end{aligned}$$

Dado que cada uno de los términos del lado derecho es menor que  $1/j$ , se concluye que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T |f(t) - \varphi_j(t)|^2 dt \right] = 0,$$

lo que implica que  $\varphi_j \rightarrow f$  en  $L^2$ , (4.4). Esto permite definir la integral de Itô de  $f$  como el límite en  $L^2$  de las integrales de las funciones elementales

$$\mathcal{I}[f] := \int_0^T f(t) dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n(t) dB_t.$$

Por último, para comprobar que la Definición 4.12 de la integral de Itô está bien dada, suponemos que, dada  $f \in \mathcal{V}(S, T)$ ,  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sean dos sucesiones de funciones elementales tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \psi_n(t, \omega))^2 dt \right] = 0.$$

Queremos probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \psi_n(t, \omega) dB_t \quad (\text{límite en } L^2(P)),$$

es decir que  $\int_S^T (\phi_n(t, \omega) - \psi_n(t, \omega)) dB_t$  converge a cero en  $L^2(P)$ . Para ello, es equivalente a demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T (\phi_n(t, \omega) - \psi_n(t, \omega)) dB_t \right)^2 \right] = 0.$$

Aplicamos la isometría de Itô para funciones elementales, demostrada en el Lema 4.II, la cual nos da

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T (\phi_n(t, \omega) - \psi_n(t, \omega)) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_S^T (\phi_n(t, \omega) - \psi_n(t, \omega))^2 dt \right].$$

Aplicando la Proposición 2.3I, tenemos

$$\begin{aligned} (\phi_n(t, \omega) - \psi_n(t, \omega))^2 &= ((f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega)) - (f(t, \omega) - \psi_n(t, \omega)))^2 \\ &\leq 2(f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 + 2(f(t, \omega) - \psi_n(t, \omega))^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \int_S^T (\phi_n(t, \omega) - \psi_n(t, \omega))^2 dt \right] \\ &\leq 2 \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] + 2 \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \psi_n(t, \omega))^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Como ambos sumandos tienden a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  por hipótesis, se deduce el resultado que queremos. En conclusión, el límite en la definición de la integral de Itô es único, y no depende de la sucesión de funciones elementales escogida.

### 4.1.1. Propiedades y ejemplos.

Una vez definida la Integral de Itô acorde a la Definición 4.12, pasamos a estudiar algunas de sus propiedades fundamentales.

**Corolario 4.16 (Isometría de Itô).** Para toda función  $f \in V(S, T)$ , se cumple

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right].$$

*Demostración.* Por definición de Integral de Itô tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Si aplicamos a esta última igualdad la Isometría de Itô para funciones elementales 4.11 obtenemos

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T \phi_n(t, \omega)^2 dt \right].$$

Ahora, se comprueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \phi_n(t, \omega)^2 dt \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right],$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\phi_n(t, \omega)^2 - f(t, \omega)^2) dt \right] = 0.$$

Sabemos que  $\phi_n^2 - f^2 = (\phi_n - f)(\phi_n + f)$ , y por la desigualdad de Hölder 2.24 aplicada con  $p = q = 2$ , se tiene

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \int_0^T (\phi_n^2(t, \omega) - f^2(t, \omega)) dt \right] \\ &\leq \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\phi_n(t, \omega) - f(t, \omega))^2 dt \right] \right)^{1/2} \cdot \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\phi_n(t, \omega) + f(t, \omega))^2 dt \right] \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

El primer factor tiende a 0 por la definición 4.12, con el segundo factor comprobamos que es finito aplicando la desigualdad de Minkowski (2.25),

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\phi_n(t, \omega) + f(t, \omega))^2 dt \right] \right)^{1/2} &\leq \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^T \phi_n^2(t, \omega) dt \right] \right)^{1/2} \\ &\quad + \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^T f^2(t, \omega) dt \right] \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Esto es finito ya que  $\phi_n, f \in L^2([S, T] \times \Omega)$ . Por tanto,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \phi_n(t, \omega)^2 dt \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right]$$

Esto concluye la demostración □

Como consecuencia directa de la isometría de Itô, obtenemos el siguiente corolario que nos será útil más adelante.

**Corolario 4.17.** Si  $f(t, \omega) \in V(S, T)$ ,  $f_n(t, \omega) \in V(S, T)$  para  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f_n(t, \omega) - f(t, \omega))^2 dt \right] = 0,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T f_n(t, \omega) dB_t = \int_S^T f(t, \omega) dB_t \quad \text{en } L^2(P).$$

*Demostración.* Hay que demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T f_n(t, \omega) - f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = 0.$$

Se tiene que  $(f_n - f)(t, \omega) \in V(S, T)$ , por tanto aplicamos la isometría de Itô 4.16

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T (f_n - f)(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f_n - f)^2(t, \omega) dB_t \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f_n(t, \omega) - f(t, \omega))^2 dt \right] = 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

Otra propiedad fundamental es la continuidad en el tiempo de la integral de Itô. Para ello, recordamos por la Observación 4.10 que la integral de Itô se puede ver como un proceso estocástico.

**Teorema 4.18.** Sea  $f \in V(0, T)$ . Entonces existe una versión continua en  $t$  de

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

es decir, existe un proceso estocástico  $\{J_t\}_{t \in [0, T]}$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  con  $t \mapsto J_t(\omega)$  continua en  $[0, T]$  para casi todo  $\omega \in \Omega$  tal que

$$P\left(J_t = \int_0^t f(s, \omega) dB_s\right) = 1 \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T.$$

La demostración se encuentra en el capítulo 3, Teorema 3.2.5 de [Øks03].

Ahora, vamos a presentar algunas propiedades básicas de la Integral de Itô que serán especialmente útiles a la hora de operar con este tipo de integrales.

**Proposición 4.19.** Sea  $f, g \in V(0, T)$  y sea  $0 \leq S < U < T$ . Entonces:

- (i)  $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$  para casi todo  $\omega$ ,
- (ii)  $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$  ( $c$  constante), para casi todo  $\omega$ ,
- (iii) la integral de Itô tiene esperanza nula,  $\mathbb{E}\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0$ ,
- (iv) la integral de Itô es una función  $\int_S^T f dB_t : (\Omega, \mathcal{F}_T) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$   $\mathcal{F}_T$ -medible.

*Demostración.* Estas propiedades se cumplen para las funciones elementales, ya que sus integrales se definen como sumas finitas donde las propiedades (i)-(iv) son triviales. Luego, tomando límites en  $V(0, T)$ , obtenemos el resultado para  $f, g \in V(0, T)$ .

(i) Por definición de Integral de Itô 4.12 y función elemental 4.7 tenemos

$$\int_S^T f dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n X_j (B_{j+1} - B_j).$$

Partimos la suma en los intervalos,  $[S, U)$  y  $[U, T]$ , de modo que

$$\sum_{j=0}^n X_j (B_{j+1} - B_j) = \sum_{t_j \in [S, U)} X_j (B_{j+1} - B_j) + \sum_{t_j \in [U, T]} X_j (B_{j+1} - B_j),$$

Tomando límites obtenemos

$$\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$$

para casi todo  $\omega$ .

**(ii)** Sea  $c \in \mathbb{R}$  constante. Volvemos a aplicar la definición de Integral de Itô 4.12 y de función elemental 4.7

$$\int_S^T (cf + g) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T (c\phi_n + \psi_n) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (cX_j + Y_j) (B_{j+1} - B_j),$$

donde  $X_j$  y  $Y_j$  son los valores de  $\phi_n$  y  $\psi_n$  respectivamente. Separando los términos obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( c \sum_{j=0}^n X_j (B_{j+1} - B_j) + \sum_{j=0}^n Y_j (B_{j+1} - B_j) \right) = c \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$$

para casi todo  $\omega$ .

**(iii)** Sabemos que

$$\int_S^T f dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n X_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}),$$

Si se aplica la esperanza, al ser lineal, basta ver que

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^n X_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right] = \sum_{j=0}^n \mathbb{E} [X_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = \sum_{j=0}^n \mathbb{E} [X_{t_j}] \mathbb{E} [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] = 0.$$

La segunda igualdad se debe a que  $X_{t_j}$  es  $F_{t_j}$ -medible por 4.7 y  $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$  es independiente de  $F_{t_j}$  por 3.1. Por tanto son independientes y podemos aplicar el teorema 2.7. La última igualdad se debe a que  $\mathbb{E}[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] = 0$  por definición del movimiento browniano 3.1, donde los incrementos se comportan como normales de media 0. Por tanto,

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T f dB_t \right] = 0.$$

**(iv)** Sabemos que

$$\int_S^T f dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n X_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}),$$

$X_{t_j}$  es  $F_{t_j}$ -medible por 4.7, y  $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$  es  $F_{t_{j+1}}$ -medible, como  $F_{t_j} \subseteq F_{t_{j+1}} \subseteq F_T$  por el Lema 4.3 son  $F_T$ -medibles y su producto también es  $F_T$ -medible. Finalmente, como el límite en  $L^2$  de funciones medibles es medible, tenemos que  $\int_S^T f dB_t$  es  $F_T$ -medible.  $\square$

Ahora, vamos a resolver una integral de Itô.

*Ejemplo 4.20.* Teniendo en cuenta que  $B_0 = 0$ . Entonces

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

*Demostración.* Dado  $n \in \mathbb{N}$ , tomando una partición  $\{t_j\}_{j=0}^n$  del intervalo  $[0, t]$  tal que  $t_{j+1} - t_j < \frac{1}{n}$ , definimos  $\phi_n(s, \omega) = \sum_{j=0}^{n-1} B_j(\omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1})}(s)$ , donde  $B_j = B_{t_j}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\phi_n(s, \omega) - B_s(\omega))^2 ds \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\phi_n(s, \omega) - B_s(\omega))^2 ds \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j(\omega) - B_s(\omega))^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Fubini y nos queda

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t (\phi_n(s, \omega) - B_s(\omega))^2 ds \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbb{E} [(B_j(\omega) - B_s(\omega))^2] ds.$$

Por el Lema 3.4, tenemos que  $\mathbb{E}[(B_s - B_j)^2] = s - t_j$ . Además, aplicando el cambio de variable  $u = s - t_j$  obtenemos

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t (\phi_n(s, \omega) - B_s(\omega))^2 ds \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{t_{j+1} - t_j} u du = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2.$$

Observamos que esta esperanza tiende a cero cuando el tamaño de la malla de la partición tiende a cero. Como  $t_{j+1} - t_j < \frac{1}{n}$ , entonces

$$(t_{j+1} - t_j)^2 < \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 = 0.$$

En consecuencia,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\phi_n(s) - B_s)^2 ds \right] = 0$ , por el corolario 4.17 y la definición de la integral de Itô para funciones elementales (4.1) tenemos

$$\int_0^t B_s(\omega) dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^t \phi_n(\omega) dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} B_j(\omega) \Delta B_j(\omega). \quad (4.5)$$

Ahora,

$$\Delta(B_j^2) = B_{j+1}^2 - B_j^2 = (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j) = (\Delta B_j)^2 + 2B_j\Delta B_j$$

y por lo tanto, dado que  $B_0 = 0$ ,

$$B_t^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta(B_j^2) = \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 + 2 \sum_{j=0}^{n-1} B_j \Delta B_j$$

equivalentemente esto es igual a

$$\sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2. \quad (4.6)$$

Falta comprobar que  $\sum_j (\Delta B_j)^2$  converge a  $t$  en  $L^2(P)$  cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 - t \right)^2 \right] = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2 = 0.$$

Esta igualdad se debe al siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 - t \right)^2 dP &= \int_{\Omega} \left( \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \right)^2 + t^2 - 2t \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \right) dP \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \right)^2 dP + \int_{\Omega} t^2 dP - 2t \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Omega} (\Delta B_j)^2 dP. \end{aligned}$$

Para el último sumando se tiene en cuenta que el Lema 3.4, y para el primer sumando se desarrolla el cuadrado

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^4 + 2 \sum_{i < j} (\Delta B_i)^2 (\Delta B_j)^2 \right].$$

donde se tiene que  $\mathbb{E} [(\Delta B_j)^4] = 3(\Delta t_j)^2$  por el Lema 3.5. En el segundo sumando, por el Teorema 2.7, como los incrementos  $\Delta B_i, \Delta B_j$  son independientes para  $i \neq j$ , también lo son sus cuadrados. Al ser independientes, podemos aplicar el teorema 2.30 al segundo sumando donde obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \right)^2 \right] &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [(\Delta B_j)^4] + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E} [(\Delta B_i)^2] \mathbb{E} [(\Delta B_j)^2] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 3(\Delta t_j)^2 + 2 \sum_{i < j} \Delta t_i \Delta t_j. \end{aligned}$$

Para simplificar usamos la igualdad

$$\sum_{i < j} \Delta t_i \Delta t_j = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j \right)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2 \right),$$

donde en este caso  $\sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j = t$ , obtenemos

$$\sum_{i < j} \Delta t_i \Delta t_j = \frac{1}{2} (t^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2).$$

Entonces

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 - t \right)^2 \right] = \sum_{j=0}^{n-1} 3(\Delta t_j)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (t^2 - \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2) + t^2 - 2t^2 = 2 \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2.$$

De esta igualdad concluimos que

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 - t \right)^2 \right] = 0.$$

Ya comprobado que  $\sum_j (\Delta B_j)^2$  converge a  $t$  en  $L^2(P)$  cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ . Si tomamos el límite en (4.6), obtenemos la integral que queríamos calcular

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} B_j \Delta B_j = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \right) = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t,$$

recordando (4.5) se obtiene

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Queda demostrada la solución de la integral.  $\square$

Establecida la definición de la integral de Itô, junto con algunas de sus propiedades fundamentales y un ejemplo ilustrativo, estamos en condiciones de introducir el proceso de Itô.

**Definición 4.21** (Proceso de Itô). Un proceso de Itô es un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  dado por

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s, \quad (4.7)$$

donde las funciones

$$u, v : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

cumplen que  $u(s, \omega) \in L^1([0, t])$ ,  $v(s, \omega) \in V(0, t)$  y  $X_0$  es la variable aleatoria real que se toma como condición inicial. Se denota de manera diferencial como

$$dX_t = u dt + v dB_t. \quad (4.8)$$

El siguiente paso en el desarrollo del cálculo estocástico es introducir la fórmula de Itô, la cual constituye una generalización de la regla de la cadena del cálculo diferencial al contexto estocástico. Esta herramienta será especialmente útil en el siguiente capítulo para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, donde intervienen transformaciones de dichos procesos.

**Teorema 4.22 (Fórmula de Itô unidimensional).** *Sea  $X_t$  un proceso de Itô dado en la Definición 4.21 y  $g = g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ . Entonces*

$$Y_t = g(t, X_t)$$

es nuevamente un proceso de Itô, y se verifica que

$$\begin{aligned} Y_t &= g(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) dX_s^2 \\ &= g(0, X_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) \right) ds + \int_0^t v \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) ds \end{aligned} \quad (4.9)$$

el cual denotamos como

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2, \quad (4.10)$$

donde  $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$  se calcula según las reglas

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt. \quad (4.11)$$

*Demostración.* Nos restringiremos al caso en que  $g$ ,  $\frac{\partial g}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}$  y  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$  están acotadas, y que  $u$  y  $v$  son funciones elementales (conforme a la Definición 4.7). Tal como se expone en [Økso3], una vez demostrados los resultados bajo estas condiciones, el caso general puede obtenerse mediante aproximaciones.

Consideramos la partición  $\{t_j\}_{j=0}^{n-1}$  de  $[0, t]$  y usamos el teorema de Taylor en varias variables para representar  $g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}})$  alrededor del punto  $(t_j, X_{t_j})$

$$\begin{aligned} g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) &= g(t_j, X_{t_j}) + \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j + \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_{t_j})\Delta X_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t_j, X_{t_j})(\Delta t_j)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j \Delta X_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j, X_{t_j})(\Delta X_j)^2 + o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2), \end{aligned}$$

donde  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$  y  $\Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$ . Podemos representar  $g(t, X_t)$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g(t, X_t) &= g(0, X_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \left( g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - g(t_j, X_{t_j}) \right) = g(0, X_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) \Delta t_j \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_{t_j}) \Delta X_j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t_j, X_{t_j}) (\Delta t_j)^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(t_j, X_{t_j}) \Delta t_j \Delta X_j \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j, X_{t_j}) (\Delta X_j)^2 + \sum_{j=0}^{n-1} o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ahora, vamos a demostrar cómo los distintos sumandos convergen en  $L^2$  a las integrales de (4.9) haciendo tender  $\Delta t_j \rightarrow 0$ :

- $\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) \Delta t_j = \int_0^T \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) ds \quad \text{en } L^2(P).$

Es equivalente a demostrar el siguiente límite

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) \Delta t_j - \int_0^T \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) ds \right)^2 \right] = 0. \tag{4.13}$$

Por el Teorema 3.3 podemos restringirnos al espacio de funciones continuas  $C([0, \infty))$ , ya que  $P(C([0, \infty))) = 1$ .

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) \Delta t_j - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) ds \right)^2 \right] \\ &= \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}(\omega)) \Delta t_j - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s(\omega)) ds \right|^2 dP(\omega) \tag{4.14} \\ &= \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_{C([0, \infty))} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}(\omega)) \Delta t_j - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s(\omega)) ds \right|^2 dP(\omega) \end{aligned}$$

Sabemos por hipótesis que las derivadas son continuas y acotadas. Por tanto,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, X_t(\omega)) \in \mathcal{R}([0, t]),$$

donde  $\mathcal{R}([0, t])$  denota las funciones Riemann-integrables. Así, esta función es integrable en el sentido de Riemann, y se cumple que

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}(\omega)) \Delta t_j - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s(\omega)) ds \right|^2 = 0, \text{ para casi todo } \omega \in C([0, \infty)).$$

Podemos demostrar la convergencia en  $L^2$  si pasamos en (4.14) el límite dentro de la integral. Para ello aplicamos el Teorema de la Convergencia Dominada 2.23. Consideramos  $f_n: C([0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f_n(\omega) = \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}(\omega)) \Delta t_j - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s(\omega)) ds \right|^2,$$

el cual cumple que  $f_n \rightarrow 0$  cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ , y además

$$f_n \leq \left( \sum_{j=0}^{n-1} M \Delta t_j + Mt \right)^2 = (2Mt)^2 \in L^1(C([0, \infty))),$$

donde  $M$ , por hipótesis, es una cota uniforme de la derivada. Por tanto, se cumple la convergencia en  $L^2$  de (4.13).

$$\bullet \quad \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) \Delta X_{t_j} = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) dX_s, \quad \text{en } L^2(P)$$

Es equivalente a demostrar el siguiente límite

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) \Delta X_{t_j} - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) dX_s \right)^2 \right] = 0.$$

Por la hipótesis (4.7) y por las propiedades de la integral usual y la de Itô (Proposición 4.19), se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta X_{t_j} &= \int_0^{t_{j+1}} u(t, \omega) dt + \int_0^{t_{j+1}} v(t, \omega) dB_t - \left( \int_0^{t_j} u(t, \omega) dt + \int_0^{t_j} v(t, \omega) dB_t \right) \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(t, \omega) dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} v(t, \omega) dB_t. \end{aligned}$$

Por tanto, como  $u$  y  $v$  son elementales,

$$\Delta X_{t_j} = u_j \Delta t_j + v_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Sustituyendo en el límite y restringiéndose por el Teorema 3.3 al espacio de funciones continuas  $C([0, \infty))$ , tenemos

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_{C([0, \infty))} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) (u_j \Delta t_j + v_j \Delta B_j) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) (u ds + v dB_s) \right)^2 dP. \quad (4.15)$$

El límite (4.15) se obtiene aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada 2.23 y demostrando que se cumplen los siguientes límites en casi todo punto  $\omega \in C([0, \infty))$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{j_k=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_{j_k}, x_{j_k}) u_{j_k} \Delta t_{j_k} &= \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) u ds, \\ \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, x_j) v_j \Delta B_j &= \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, \omega(s)) v dB_s(\omega). \end{aligned}$$

La primera igualdad se debe a la convergencia en  $L^2$  del límite como se ha hecho en (4.13), por tanto existe una subsucesión  $(t_{j_k})$  en la que se garantiza la convergencia en casi todo punto. La segunda igualdad se debe a la definición de la integral de Itô 4.12. Para demostrar que podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada consideramos  $f_n(\omega) : C([0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f_n(\omega) = \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}(\omega)) (u_j \Delta t_j + v_j \Delta B_j(\omega)) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s(\omega)) (u ds + v dB_s(\omega)) \right|^2$$

el cual cumple que  $f_n \rightarrow 0$  cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ . Además, como todos los términos están acotados,  $\frac{\partial g}{\partial t} \leq M$ ,  $u \leq C_u$ ,  $v \leq C_v$  por constantes, se tiene

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) (u_j \Delta t_j + v_j \Delta B_j) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) (u ds + v dB_s) \right)^2 \\ & \leq \left( \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j}) (u_j \Delta t_j + v_j \Delta B_j) \right| + \left| \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) (u ds + v dB_s) \right| \right)^2 \\ & \leq \left( |M(C_u t + 2MC_v B_t)| + |MC_u t + MC_v \sum_{j=0}^{n-1} \Delta B_j| \right)^2 \\ & \leq (2MC_u t + 2MC_v B_t)^2 \in L^1(P). \end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada 2.23 en (4.15), garantizando la convergencia en  $L^2$ .

$$\bullet \quad \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) v^2(s) ds \quad \text{en } L^2(P).$$

Este limite se obtiene debido a que, como  $u$  y  $v$  son elementales, se puede desarrollar  $(\Delta X_j)^2$  de (4.12)

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j^2 (\Delta t_j)^2 + 2 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_j) (\Delta B_j) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} v_j^2 \cdot (\Delta B_j)^2.$$

Calculamos la convergencia de cada una de las series resultantes:

1.

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j^2 (\Delta t_j)^2 \right)^2 \right] = 0 \quad (4.16)$$

Acotando la integral por  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \leq H$ ,  $u \leq C_u$ , tenemos

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j^2 (\Delta t_j)^2 \right)^2 dP \leq H^2 C_u^4 \left( \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2 \right)^2.$$

Esta cota converge a 0 cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ .

2.

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_j) (\Delta B_j) \right)^2 \right] = 0.$$

Desarrollando el cuadrado y aplicando las cotas

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)^2 u_j^2 v_j^2 (\Delta t_j)^2 (\Delta B_j)^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_i v_i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t_i) (\Delta B_i) (\Delta t_j) (\Delta B_j) \right) \right] \\ & \leq H^2 C_u^2 C_v^2 \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2 \mathbb{E}[(\Delta B_j)^2] + 2H^2 C_u^2 C_v^2 \sum_{i < j} \Delta t_i \Delta t_j \mathbb{E}[\Delta B_i] \mathbb{E}[\Delta B_j]. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1  $\Delta B_i \sim N(0, \Delta t_i)$  y los incrementos son independientes, así que podemos separar las esperanzas en el segundo sumando por el Teorema 2.30. Por consiguiente, aplicando el Lema 3.4 se anula el segundo término. Aplicando también el Lema 3.4, la cota resulta

$$H^2 C_u^2 C_v^2 \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^3.$$

Esta cota tiende a 0 cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ .

3.

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j, X_{t_j}) v_j^2 (\Delta B_j)^2 \right) = \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) v^2(s) ds \quad \text{en } L^2(P).$$

Para probar esto, definimos  $a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) v^2(t, \omega)$ ,  $a_j = a(t_j)$ , y consideramos

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j (\Delta B_j)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \Delta t_j \right)^2 \right] \\ &= \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbb{E} [a_i a_j ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) ((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)]. \end{aligned}$$

Si  $i \neq j$ , entonces  $a_i a_j ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)$  y  $(\Delta B_j)^2 - \Delta t_j$  son independientes.  $\Delta B_i$  y  $\Delta B_j$  son independientes, y se les aplican funciones medibles, lo cual sabemos por el Teorema 2.7 que siguen siendo independientes. Al ser independientes, podemos aplicar el Teorema 2.30, donde

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbb{E} [a_i a_j ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) ((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)] \\ &= \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbb{E} [a_i a_j ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)] \mathbb{E} [((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)] \\ &= \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j (\mathbb{E} [(\Delta B_i)^2] - \Delta t_i) (\mathbb{E} [(\Delta B_j)^2] - \Delta t_j) = 0 \end{aligned}$$

La última igualdad resulta 0 al aplicar el Lema 3.4. Así que solo queda el caso  $i = j$ , en el que se tiene

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [a_j^2 ((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)^2] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} [a_j^2 (\Delta B_j)^4] - 2 \mathbb{E} [a_j^2 (\Delta B_j)^2] \Delta t_j + \mathbb{E} [a_j^2] (\Delta t_j)^2$$

Observamos que  $a_j$  es una función  $F_{t_j}$ -medible:  $X_{t_j}$  es  $F_{t_j}$ -medible, la segunda derivada es continua por hipótesis y  $v(t_j, \omega)$  al ser una función elemental por la Definición 4.7 también es  $F_{t_j}$ -medible. Como vimos en el Corolario 4.4,  $\Delta B_j$  es independiente de  $F_{t_j}$ , por lo tanto si tenemos una función  $a_j$ , que es  $F_{t_j}$ -medible, entonces se concluye que  $\Delta B_j$  y  $a_j$  son independientes. Al aplicarle funciones medibles a  $\Delta B_j$  y  $a_j$ , siguen siendo

independientes (Teorema 2.7). Por consiguiente, podemos aplicar el Teorema 2.30 donde se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ a_j^2 (\Delta B_j)^4 \right] - 2 \mathbb{E} \left[ a_j^2 (\Delta B_j)^2 \right] \Delta t_j + \mathbb{E} \left[ a_j^2 \right] (\Delta t_j)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ a_j^2 \right] \mathbb{E} \left[ (\Delta B_j)^4 \right] - 2 \mathbb{E} \left[ a_j^2 \right] \mathbb{E} \left[ (\Delta B_j)^2 \right] \Delta t_j + \mathbb{E} \left[ a_j^2 \right] (\Delta t_j)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ a_j^2 \right] \cdot (3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2) \\
&= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ a_j^2 \right] \cdot (\Delta t_j)^2.
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos empleado el Lema 3.4 y 3.5. El término resultante tiende a cero cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ . Por tanto,

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} a_j (\Delta B_j)^2 = \int_0^t a(s) ds \quad \text{en } L^2(P).$$

Esto se expresa de manera concisa mediante la fórmula  $(dB_t)^2 = dt$ . Por tanto, tenemos que

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_j)^2 = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} a_j (\Delta B_j)^2 = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (s, X_s) v^2(s) ds \quad \text{en } L^2(P).$$

- $\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (t_j, X_{t_j}) (\Delta t_j)^2 = 0 \quad \text{en } L^2(P).$

Esta convergencia en  $L^2$  se demuestra de forma análoga a la de (4.16).

- $\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} (t_j, X_{t_j}) \Delta t_j \Delta X_j = 0 \quad \text{en } L^2(P).$

Para demostrar este límite utilizamos la igualdad

$$\Delta X_j = u_j \Delta t_j + v_j \Delta B_j,$$

donde al multiplicar por  $\Delta t_j$  obtenemos

$$\Delta t_j \Delta X_j = u_j (\Delta t_j)^2 + v_j \Delta t_j \Delta B_j.$$

El primer término converge a cero porque  $u_j$  esta acotado, la función derivada esta acotada y  $\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta t_j)^2 \rightarrow 0$  cuando  $\Delta t_j \rightarrow 0$ . El segundo también lo hace en  $L^2$ , ya que  $\mathbb{E}[(\Delta t_j)(\Delta B_j)^2] = (\Delta t_j)^3$  aplicando el Lema 3.4, donde  $v_j$  y la función derivada está acotada. Por tanto,

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(t_j, X_{t_j}) \Delta t_j \Delta X_j = 0 \text{ en } L^2(P).$$

- $\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2) = 0 \text{ en } L^2(P)$

Finalmente, comprobamos que el término de error del desarrollo de Taylor también converge a cero en  $L^2$ . Por definición del símbolo  $o$ ,  $o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$  para  $\Delta t_j \rightarrow 0$  si y solo si existe un  $\delta > 0$  y  $c$  constante tal que  $o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2) \leq c(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$  para todo  $|\Delta t_j| < \delta$ . Dado que  $\Delta X_j = u_j \Delta t_j + v_j \Delta B_j$ , se tiene por 2.31,

$$|\Delta X_j|^2 \leq 2u_j^2 (\Delta t_j)^2 + 2v_j^2 (\Delta B_j)^2,$$

y por tanto,

$$o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2) \leq c \left( (1 + 2u_j^2) (\Delta t_j)^2 + 2v_j^2 (\Delta B_j)^2 \right).$$

Bajo la hipótesis de que  $u_j$  y  $v_j$  están acotadas por una constante, se obtiene

$$\sum_{j=0}^{n-1} o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2) \leq \sum_{j=0}^{n-1} c \left( (1 + 2C_u^2) (\Delta t_j)^2 + 2C_v^2 (\Delta B_j)^2 \right).$$

Calculamos la esperanza del cuadrado para estudiar la convergencia a cero en  $L^2$

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2) \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} c \left( (1 + 2C_u^2) (\Delta t_j)^2 + 2C_v^2 (\Delta B_j)^2 \right) \right)^2 \right].$$

Tenemos que comprobar que

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} c \left( (1 + 2C_u^2) (\Delta t_j)^2 + 2C_v^2 (\Delta B_j)^2 \right) \right)^2 \right] = 0.$$

Sea

$$a_j := c \left( (1 + 2C_u^2) (\Delta t_j)^2 + 2C_v^2 (\Delta B_j)^2 \right)$$

Entonces

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} a_j^2 + 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n-1} a_j a_k \right].$$

Calculamos  $a_j^2$

$$a_j^2 = c^2 \left( (1 + 2C_u^2)^2 (\Delta t_j)^4 + 4C_v^4 (\Delta B_j)^4 + 2(1 + 2C_u^2) 2C_v^2 (\Delta t_j)^2 (\Delta B_j)^2 \right).$$

Luego, al tomar la esperanza y aplicar el Lema 3.4 y 3.5 se tiene

$$\mathbb{E}[a_j^2] = c^2 \left( (1 + 2C_u^2)^2 3(\Delta t_j)^4 + 4C_v^4 3\Delta t_j^2 + 2(1 + 2C_u^2) 2C_v^2 (\Delta t_j)^2 \Delta t_j \right).$$

Para  $j \neq k$ , como  $\Delta B_j$  y  $\Delta B_k$  son independientes

$$\mathbb{E}[a_j a_k] = \mathbb{E}[a_j] \mathbb{E}[a_k] = c^2 \left( (1 + 2C_u^2) |\Delta t_j|^2 + 2C_v \Delta t_j \right) \left( (1 + 2C_u^2) |\Delta t_k|^2 + 2C_v \Delta t_k \right).$$

Dado que todo depende de  $\Delta t_j$ ,  $\Delta t_k$ , entonces

$$\lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} a_j \right)^2 \right] = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_j^2] + 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n-1} \mathbb{E}[a_j a_k] \right) = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2) \right)^2 \right] \\ & \leq \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=0}^{n-1} c \left( (1 + 2C_u^2) (\Delta t_j)^2 + 2C_v^2 (\Delta B_j^2) \right) \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que el resto también converge a cero en  $L^2$ .

Volviendo al desarrollo de Taylor (4.12) y sustituyendo las series por sus integrales convergentes obtenemos

$$\begin{aligned} g(t, X_t) &= g(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) dX_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) v^2(s) ds. \end{aligned}$$

Por último, si expresamos  $dX_s$  por su definición de proceso de Itô (4.8), se obtiene la fórmula de Itô

$$g(0, X_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) \right) ds \\ + \int_0^t v \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

Esto concluye la prueba. □



# 5

## Ecuaciones diferenciales estocásticas

**Definición 5.1** (Ecuación Diferencial Estocástica). Una ecuación diferencial estocástica (EDE) con condición inicial se expresa como el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

donde

- $b: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\sigma: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones medibles.
- $B_t$  es el movimiento browniano, construido en el Teorema 3.1. La segunda integral corresponde a la integral de Itô, mientras que la primera es la integral de Lebesgue.
- $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es un proceso estocástico, el cual es la solución de la EDE. La condición inicial  $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  se satisface casi seguramente.

Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  es solución de la EDE con condición inicial (5.1) si

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s. \quad (5.2)$$

Una vez planteada la noción de ecuación diferencial estocástica, es natural preguntarse bajo qué condiciones podemos garantizar la existencia y unicidad de su solución.

**Teorema 5.2** (Teorema de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales estocásticas.). Sea  $T > 0$  y sean  $b(\cdot, \cdot): [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones

medibles tales que existen dos constantes positivas  $C, D$  de manera que:

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T] \quad (5.3)$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|; \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]. \quad (5.4)$$

Entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

tiene solución única en el sentido de la Definición 5.1.

Esta solución es un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  que pertenece al conjunto de soluciones  $\mathcal{S}$ , donde

$$\mathcal{S} := \left\{ \{X_t\}_{t \in [0, T]} \left| \begin{array}{l} t \mapsto X_t \text{ es continua,} \\ X_t \text{ es } \mathcal{F}_t\text{-adaptado para todo } t \in [0, T], \\ \mathbb{E} \left[ \int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty, \\ X_t \in (L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F})) \end{array} \right. \right\}. \quad (5.6)$$

*Demostración.* Demostramos primero la existencia de la solución. Definimos  $Y_t^{(0)} = X_0$ , e inductivamente para  $k \geq 0$

$$Y_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)}) dB_s.$$

Entonces, observamos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t (b(s, Y_s^{(k)}) - b(s, Y_s^{(k-1)})) ds + \int_0^t (\sigma(s, Y_s^{(k)}) - \sigma(s, Y_s^{(k-1)})) dB_s \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Hemos empleado la propiedad (ii) de la Proposición 4.19 para operar sobre la integral de Itô. La condición que se tiene que verificar para aplicar la proposición es que  $\sigma(s, Y_s^{(k)})$  y  $\sigma(s, Y_s^{(k-1)})$  pertenezcan a  $V(0, t)$ . En la observación 5.3 demostraremos que se cumple esta pertenencia.

Ahora, denotamos

$$a(s, \omega) = b(s, Y_s^{(k)}(\omega)) - b(s, Y_s^{(k-1)}(\omega)) \quad \text{y} \quad \gamma(s, \omega) = \sigma(s, Y_s^{(k)}(\omega)) - \sigma(s, Y_s^{(k-1)}(\omega)).$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder, probada en la Proposición 2.24, a la integral de Lebesgue y la isometría de Itô, probada en el Corolario 4.16, a la integral de Itô. Si además, aplicamos la desigualdad de la Proposición 2.31 obtenemos

$$\mathbb{E} \left[ |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 \right] \leq 2t \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t a(s, \omega)^2 ds \right| \right] + 2 \mathbb{E} \left[ \int_0^t \gamma(s, \omega)^2 ds \right].$$

Por la desigualdad (5.4), tenemos que

$$|a(s, \omega)| \leq D|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|, \quad |\gamma(s, \omega)| \leq D|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 \right] &\leq 2t \mathbb{E} \left[ \int_0^t D^2 |Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2 ds \right] \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \left[ \int_0^t D^2 |Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2 ds \right] \\ &= 2D^2(t+1) \int_0^t \mathbb{E} \left[ |Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2 \right] ds \\ &\leq 2D^2(T+1) \int_0^t \mathbb{E} \left[ |Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2 \right] ds. \end{aligned} \tag{5.7}$$

La última cota se debe a que  $t \leq T$ . Esta desigualdad es cierta para  $k \geq 1$  y  $t \leq T$ .

Para  $k = 0$ , siguiendo los mismos pasos anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^2 \right] &\leq 2 \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t b(s, x_0) ds \right|^2 \right] + 2 \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \sigma(s, x_0) dB_s \right|^2 \right] \\ &\leq 2t \mathbb{E} \left[ \int_0^t b(s, x_0)^2 ds \right] + 2 \mathbb{E} \left[ \int_0^t \sigma(s, x_0)^2 ds \right], \end{aligned}$$

Aplicamos a  $b$  y  $\sigma$  la hipótesis (5.3) y aplicamos la desigualdad de la Proposición 2.31

$$\mathbb{E} \left[ |Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^2 \right] \leq 2t \mathbb{E} \left[ \int_0^t 2C^2(1 + |x_0|^2) ds \right] + 2 \mathbb{E} \left[ \int_0^t 2C^2(1 + |x_0|^2) ds \right].$$

Resolviendo las integrales, obtenemos

$$\mathbb{E} \left[ |Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^2 \right] \leq 4C^2 t^2 (1 + |x_0|^2) + 4C^2 t (1 + |x_0|^2) \leq tA_1, \tag{5.8}$$

donde

$$A_1 := \max \{1, 4C^2 T(1 + |x_0|^2) + 4C^2(1 + |x_0|^2)\}$$

es una constante que depende de  $C, T$  y  $|x_0|^2$ . Conociendo esto, podemos demostrar por inducción sobre  $k$  la desigualdad

$$\mathbb{E} \left[ |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 \right] \leq \frac{A_1^k t^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \text{para } k \geq 1, t \in [0, T], \tag{5.9}$$

para alguna constante  $A_2$  que depende solo de  $C, D, T$  y  $E[|x_0|^2]$ . En efecto, para  $k = 1$ , se tiene por (5.7) y (5.8) que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ |Y_t^{(2)} - Y_t^{(1)}|^2 \right] &\leq 2D^2(T+1) \int_0^t \mathbb{E} \left[ |Y_s^{(1)} - Y_s^{(0)}|^2 \right] ds \\ &= 2D^2(T+1)A_1 \int_0^t s ds = 2D^2(T+1)A_1 \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Definimos entonces la constante

$$A_2 := 2D^2(T+1)A_1,$$

la cual efectivamente depende de  $C, D, T$  y  $E[|x_0|^2]$ .

Ahora, suponemos que se cumple la hipótesis de inducción para  $k = p - 1$ , es decir

$$\mathbb{E} \left[ |Y_t^{(p)} - Y_t^{(p-1)}|^2 \right] \leq \frac{A_2^{p-1} t^p}{p!}.$$

Entonces, para  $k = p$ , se tiene por (5.7) que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ |Y_t^{(p+1)} - Y_t^{(p)}|^2 \right] &\leq 2D^2(T+1) \int_0^t \mathbb{E} \left[ |Y_s^{(p)} - Y_s^{(p-1)}|^2 \right] ds \\ &\leq 2D^2(T+1) \int_0^t \frac{A_2^{p-1} s^p}{p!} ds = 2D^2(T+1) \frac{A_2^{p-1}}{p!} \cdot \frac{t^{p+1}}{p+1} \\ &= \frac{2D^2(T+1)A_2^{p-1} t^{p+1}}{(p+1)!} \leq \frac{2D^2(T+1)A_1 A_2^{p-1} t^{p+1}}{(p+1)!},\end{aligned}$$

Por hipótesis, sabemos que  $A_2^{p-1} = (2D^2(T+1)A_1)^{p-1}$ , por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ |Y_t^{(p+1)} - Y_t^{(p)}|^2 \right] &\leq \frac{2D^2(T+1)A_1 (2D^2(T+1)A_1)^{p-1} t^{p+1}}{(p+1)!} \\ &= \frac{(2D^2(T+1)A_1)^p t^{p+1}}{(p+1)!} \\ &= \frac{A_2^p t^{p+1}}{(p+1)!}.\end{aligned}$$

Esto concluye el paso inductivo.

Para comprobar la existencia de solución vamos a comprobar que la sucesión  $\{Y_t^{(n)}\}_{t \geq 0}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(\lambda \otimes P)$ , donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue en  $[0, T]$ . Para

ello, tomamos  $m > n \geq 0$ , y vamos a aplicar la desigualdad de triangular en  $L^2(\lambda \otimes P)$

$$\begin{aligned} \|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\|_{L^2(\lambda \otimes P)} &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}) \right\|_{L^2(\lambda \otimes P)} \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\|_{L^2(\lambda \otimes P)} \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^T |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 dt \right] \right)^{1/2} \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} \left( \int_0^T \mathbb{E} |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En el último paso hemos aplicado Fubini. Por (5.9) resulta en

$$\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\|_{L^2(\lambda \otimes P)} \leq \sum_{k=n}^{m-1} \left( \int_0^T \frac{A_2^{(k)} t^{k+1}}{(k+1)!} dt \right)^{1/2} = \sum_{k=n}^{m-1} \left( \frac{A_2^{(k)} T^{k+2}}{(k+2)!} \right)^{1/2} \quad (5.10)$$

Consideramos ahora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \text{donde } a_k := \left( \frac{A_2^{(k)} T^{k+2}}{(k+2)!} \right)^{1/2}.$$

Mostramos que esta serie converge aplicando el criterio del cociente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\left( \frac{A_2^{(k+1)} T^{k+3}}{(k+3)!} \right)^{1/2}}{\left( \frac{A_2^{(k)} T^{k+2}}{(k+2)!} \right)^{1/2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{A_2 T}{k+3}} = 0 < 1.$$

Por el criterio de Cauchy de convergencia de una serie, el último término en (5.10) se puede hacer arbitrariamente pequeño tomando  $m > n$  suficientemente grandes. Por lo tanto, (5.10) muestra que  $\{Y_t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(\lambda \otimes P)$ . Por el Teorema de completitud 2.26,  $\{Y_t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  converge en  $L^2(\lambda \otimes P)$  y por tanto, podemos definir

$$X_t := \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{(n)} \quad \text{en } L^2(\lambda \otimes P). \quad (5.11)$$

Debido a la definición de  $Y_t^{(n+1)}$  dada en (5.10),

$$X_t := \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n-1)}) dB_s \right) \text{ en } L^2(\lambda \otimes P).$$

Para demostrar que  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  es la solución de la EDE (5.5), basta comprobar que tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds = \int_0^t b(s, X_s) ds \text{ en } L^2(\lambda \otimes P) \quad (5.12)$$

como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dB_s = \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \text{ en } L^2(\lambda \otimes P) \quad (5.13)$$

Para demostrar la convergencia de la integral de Lebesgue (5.12) empezamos aplicando la desigualdad de Hölder, enunciada en la Proposición 2.24.

$$\mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t (b(s, Y_s^{(n)}) - b(s, X_s)) ds \right|^2 \right] \leq t \cdot \mathbb{E} \left[ \int_0^t |b(s, Y_s^{(n)}) - b(s, X_s)|^2 ds \right].$$

Aplicando la hipótesis de Lipschitz (5.4) obtenemos

$$|b(s, Y_s^{(n)}) - b(s, X_s)| \leq D |Y_s^{(n)} - X_s|,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^t |b(s, Y_s^{(n)}) - b(s, X_s)|^2 ds \right] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^t D^2 |Y_s^{(n)} - X_s|^2 ds \right] \\ &\leq D^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| Y_s^{(n)} - X_s \right\|_{L^2(\lambda \otimes P)}^2, \end{aligned}$$

El último término converge a 0 para  $n \rightarrow \infty$  por (5.11), lo que concluye la prueba de (5.12). Por otro lado, para demostrar la convergencia de la integral de Itô (5.13) se emplea la isometría de Itô, enunciada en el Corolario 4.16.

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t (\sigma(s, Y_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)) dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t |\sigma(s, Y_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)|^2 ds \right].$$

Aplicando nuevamente la condición de Lipschitz de (5.4)

$$|\sigma(s, Y_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)| \leq D |Y_s^{(n)} - X_s|,$$

se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^t |\sigma(s, Y_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s)|^2 ds \right] \leq D^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| Y_s^{(n)} - X_s \right\|_{L^2(\lambda \otimes P)}^2 ds = 0.$$

Esto concluye la demostración de la convergencia, garantizando la existencia de la solución

$$X_t := \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{(n)} = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Ahora vamos a comprobar que  $\{X_t\}_{t \in [0, T]} \in \mathcal{S}$ , definido en (5.6):

- La aplicación  $t \mapsto X_t$  es continua. En efecto, analizamos cada sumando de la fórmula anterior:  $X_0$  es constante, por tanto es continua. Para justificar la continuidad de la función

$$F(t) := \int_0^t b(s, X_s) ds,$$

observamos que, por la hipótesis (5.3), se cumple que

$$|b(s, X_s(\omega))| \leq C(1 + |X_s(\omega)|).$$

Elevando al cuadrado, aplicando la Proposición 2.31 y 2.31

$$|b(s, X_s)|^2 \leq 2C^2(1 + |X_s|^2).$$

Como  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |X_s|^2 ds \right] < \infty$ , se deduce que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |b(s, X_s)|^2 ds \right] < \infty.$$

Esto implica que  $b(s, X_s) \in L^2(\lambda \otimes P)$  y, por tanto, también pertenece a  $L^1(\lambda \otimes P)$ . La continuidad de la función

$$F(t) = \int_0^t b(s, X_s(\omega)) ds$$

se puede deducir aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada 2.23. En efecto, si  $t_n \rightarrow t$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces la sucesión de funciones características  $\chi_{[0, t_n]}(s)$  converge  $\chi_{[0, t]}(s)$  en casi todo punto. Como  $b(s, X_s) \in L^1(\lambda \otimes P)$ , se aplica el teorema para concluir que  $F(t)$  es continua.

La integral de Itô  $\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$  es continua. Dado que  $\sigma \in V(0, T)$ , la propiedad (iv) de la Proposición 4.18 garantiza la existencia de una versión continua en  $t$  de dicha integral.

- Vamos a comprobar que  $X_t$  es  $F_t$ -adaptado en el sentido de la Definición 4.5 para todo  $t \in [0, T]$ , es decir, que  $X_t$  es  $F_t$ -medible para cada  $t$ , donde

$$F_t = \sigma \left( \{B_s^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), s \leq t\} \right).$$

Sabemos que la sucesión  $\{Y_t^{(k)}\}_{k=0}^\infty$  converge en  $L^2(\lambda \otimes P)$ , por lo que podemos extraer una subsucesión  $\{Y_t^{(k_s)}\}_{s=0}^\infty$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y_t^{(k_s)}(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{para casi todo } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega.$$

Vamos a demostrar que cada  $Y_t^{(k)}$  es  $F_t$ -medible y, como el límite puntual de funciones medibles es medible, se concluye que  $X_t$  es  $F_t$ -medible. Para simplificar la notación escribiremos la subsucesión como  $Y_t^{(k)}$ . Veamos por inducción que cada  $Y_t^{(k)}$  es  $F_t$ -medible:

- Para  $k = 0$ ,  $Y_t^{(0)} = X_0$  es constante, por lo tanto es  $F_t$ -medible.
- Supongamos que  $Y_t^{(k)}$  es  $F_t$ -medible. Entonces:

$$Y_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)}) dB_s.$$

La integral de Lebesgue es  $F_t$ -medible. En efecto,  $b(s, Y_s^{(k)})$  es  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes F_t$ -medible ya que la aplicación

$$f : ([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes F_t) \rightarrow ([0, T] \times \mathbb{R}, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{R}),$$

$$(s, \omega) \mapsto (s, Y_s^{(k)}(\omega))$$

es  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes F_t$ -medible. Como  $b$  es medible por hipótesis, su composición  $b \circ f$  también es  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes F_t$ -medible.

Al considerar ahora  $\int_0^t b(s, Y_s^{(k)}) ds$ , según la construcción de la integral de Lebesgue existe una sucesión de funciones simples  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , las cuales también son medibles respecto a  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes F_t$ , que convergen puntualmente a  $b(s, Y_s^{(k)}(\omega))$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la función

$$\omega \mapsto \int_0^t s_n(s, \omega) ds$$

es  $F_t$ -medible, ya que se obtiene integrando respecto a  $s$  una función medible. Dado que el supremo de funciones  $F_t$ -medibles es también  $F_t$ -medible, se concluye que

$$\omega \mapsto \int_0^t b(s, Y_s^{(k)}(\omega)) ds$$

es  $F_t$ -medible.

Para la integral de Itô, dado que  $\sigma(s, Y_s^{(k)}) \in V(0, T)$ , por la Propiedad (iv) de la Proposición 4.19, se concluye que la integral es  $F_t$ -medible.

Por tanto, por inducción, cada  $Y_t^{(k)}$  es  $F_t$ -medible, y su límite  $X_t$  también lo es.

- Finalmente, probamos que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty,$$

es decir, que  $X_t \in L^2(\lambda \otimes P)$ . Recordemos que hemos demostrado que la sucesión  $\{Y_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $X_t$  en  $L^2(\lambda \otimes P)$ . Por lo tanto,  $X_t \in L^2(\lambda \otimes P)$ , ya que por el teorema 2.26 este espacio es completo.

De modo que, ya hemos demostrado que existe una solución  $X_t \in \mathcal{S}$  que verifica la EDE.

La unicidad se deduce por reducción al absurdo. Supongamos que  $X_t(\omega)$  y  $\widehat{X}_t(\omega)$  son dos soluciones en  $\mathcal{S}$  ambas con la condición inicial  $x_0$ . Definimos

$$a(s, \omega) = b(s, X_s(\omega)) - b(s, \widehat{X}_s(\omega)), \quad \gamma(s, \omega) = \sigma(s, X_s(\omega)) - \sigma(s, \widehat{X}_s(\omega)). \quad (5.14)$$

Entonces se tiene:

$$\mathbb{E}[|X_t - \widehat{X}_t|^2] = \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t \gamma(s, \omega) dB_s \right|^2 \right]$$

Por la desigualdad de la Proposición 2.31

$$\mathbb{E}[|X_t - \widehat{X}_t|^2] \leq 2\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t a(s, \omega) ds \right)^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \gamma(s, \omega) dB_s \right)^2 \right]$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder, enunciada en la Proposición 2.24, a la integral de Lebesgue y la isometría de Itô enunciada en el Corolario 4.16 a la integral de Itô:

$$\mathbb{E}[|X_t - \widehat{X}_t|^2] \leq 2t\mathbb{E} \left[ \int_0^t a^2(s, \omega) ds \right] + 2\mathbb{E} \left[ \int_0^t \gamma^2(s, \omega) ds \right]$$

Aplicamos la condición de Lipschitz (5.4) a las funciones definidas en (5.14):

$$|a(s, \omega)| \leq D|X_s(\omega) - \widehat{X}_s(\omega)|, \quad |\gamma(s, \omega)| \leq D|X_s(\omega) - \widehat{X}_s(\omega)|.$$

Sustituyendo por estas desigualdades, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t(\omega) - \widehat{X}_t|^2] &\leq 2t\mathbb{E} \left[ \int_0^t D^2 |X_s(\omega) - \widehat{X}_s(\omega)|^2 ds \right] + 2\mathbb{E} \left[ \int_0^t D^2 |X_s(\omega) - \widehat{X}_s(\omega)|^2 ds \right] \\ &= 2(1+t)D^2 \int_0^t \mathbb{E}[|X_s(\omega) - \widehat{X}_s(\omega)|^2] ds \leq 2(1+T)D^2 \int_0^t \mathbb{E}[|X_s(\omega) - \widehat{X}_s(\omega)|^2] ds \end{aligned}$$

Por tanto, la función  $v(t) := \mathbb{E}[|X_t(\omega) - \widehat{X}_t(\omega)|^2]$ ,  $0 \leq t \leq T$ , satisface la desigualdad

$$v(t) \leq F + A \int_0^t v(s) ds, \quad \text{donde } F = 0, \quad A = 2(1 + T)D^2.$$

La función  $v(t) = \mathbb{E}[|X_t(\omega) - \widehat{X}_t(\omega)|^2]$  es no negativa y además es continua. Por hipótesis,  $X_t(\omega)$  y  $\widehat{X}_t(\omega)$  pertenecen al conjunto de soluciones  $\mathcal{S}$  dado en (5.6). Por tanto  $X_t(\omega)$  y  $\widehat{X}_t(\omega)$  son continuas en  $t$ . Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada 2.23, se puede demostrar que  $v(t)$  es continua. Al ser continua y no negativa, aplicamos la desigualdad de Gronwall dada en la Proposición 2.29, y obtenemos

$$v(t) \leq 0 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Como  $v(t)$  es no negativa se concluye que

$$\mathbb{E}[|X_t - \widehat{X}_t|^2] = 0.$$

Entonces, por definición de la esperanza

$$\int_{\Omega} |X_t(\omega) - \widehat{X}_t(\omega)|^2 dP(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad |X_t(\omega) - \widehat{X}_t(\omega)| = 0 \text{ c.t.p.}$$

Es decir, existe un conjunto  $A_t \in \mathcal{F}$  tal que  $P(A_t) = 0$  y para todo  $\omega \in \Omega \setminus A_t$ ,  $X_t(\omega) = \widehat{X}_t(\omega)$ . Esto vale para cada  $t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}$ , por lo que podemos definir

$$N = \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]} A_t, \quad \text{donde } P(A_t) = 0.$$

Dado que  $N$  es unión numerable de conjuntos de medida nula,  $N \in \mathcal{F}$  y se sigue que

$$P(N) = P\left(\bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]} A_t\right) \leq \sum_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, T]} P(A_t) = 0.$$

Por tanto

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad X_t(\omega) = \widehat{X}_t(\omega) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Q} \cap [0, T].$$

Ahora, sea  $\bar{t} \in [0, T]$  y sea  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \cap [0, T]$  tal que  $q_n \rightarrow \bar{t}$ . Como  $X_t$  y  $\widehat{X}_t$  son soluciones,  $X_{q_n}$ ,  $\widehat{X}_{q_n}$  pertenecen  $\mathcal{S}$ . Al pertenecer a  $\mathcal{S}$  sabemos que las trayectoria  $t \mapsto X_t(\omega)$  y  $t \mapsto \widehat{X}_t(\omega)$  son continuas. Se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{q_n}(\omega) = X_{\bar{t}}(\omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{X}_{q_n}(\omega) = \widehat{X}_{\bar{t}}(\omega).$$

Pero como  $X_{q_n}(\omega) = \widehat{X}_{q_n}(\omega)$  para todo  $n$ , se deduce que:

$$X_t(\omega) = \widehat{X}_t(\omega).$$

Por tanto

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad X_t(\omega) = \widehat{X}_t(\omega) \quad \forall t \in [0, T],$$

equivalente a

$$P(X_t = \widehat{X}_t \text{ para todo } t \in [0, T]) = 1.$$

lo que contradice la suposición de la existencia de dos soluciones distintas. Queda demostrada la unicidad de la solución.  $\square$

*Observación 5.3.* Queremos verificar que la expresión  $\sigma(t, X_t(\omega))$  que se encuentra en (5.2) está bien definida en el sentido de que la función

$$(t, \omega) \mapsto \sigma(t, X_t(\omega))$$

pertenece al espacio  $V(0, T)$ , es decir, cumple las propiedades de la Definición 4.6:

▪ **Medibilidad:** La función  $f : (t, \omega) \mapsto \sigma(t, X_t(\omega))$  es  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes F$ -medible.

$$f : ([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes F) \xrightarrow{g} ([0, T] \times \mathbb{R}, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \xrightarrow{\sigma} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

donde

$$g(t, \omega) = (t, X_t(\omega)) \quad \text{y} \quad f(t, \omega) = \sigma \circ g = \sigma(t, X_t(\omega)).$$

Queremos ver que  $f = \sigma \circ g$  es  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes F$ -medible. Por definición, tomamos cualquier  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  y calculamos la preimagen  $f^{-1}(B) = (\sigma \circ g)^{-1}(B) = g^{-1}(\sigma^{-1}(B))$ .

Como  $\sigma$  es medible, se tiene que existen  $B_1 \in \mathcal{B}([0, T])$  y  $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tales que  $\sigma^{-1}(B) = B_1 \otimes B_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= g^{-1}(B_1 \otimes B_2) \\ &= \{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega \mid t \in B_1, X_t(\omega) \in B_2\} \\ &= \{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega \mid t \in B_1, \omega \in X_t^{-1}(B_2)\} \\ &= \bigcup_{t \in B_1} \{t\} \times X_t^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}([0, T]) \otimes F. \end{aligned}$$

lo cual prueba que  $f$  es  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes F$ -medible.

- **Adaptación:**  $\sigma(t, X_t(\omega))$  es  $F_t$ -adaptado.

Por la Definición 4.5 de proceso adaptado, hay que demostrar que para cada  $t \geq 0$ , la función  $\phi_t : \omega \mapsto \sigma(t, X_t(\omega))$  es  $F_t$ -medible, donde recordamos que

$$F_t = \sigma(\{X_s^{-1}(B) : s \leq t, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}).$$

Definimos  $\phi_t := \sigma \circ g_t$  tal que

$$\begin{aligned} \phi_t : (\Omega, F_t) &\xrightarrow{g_t} ([0, T] \times \mathbb{R}, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \xrightarrow{\sigma} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \\ \omega &\mapsto (t, X_t(\omega)) \mapsto \sigma(t, X_t(\omega)). \end{aligned}$$

Sabemos que  $\sigma$  es medible. Falta ver que  $g_t$  es  $F_t$ -medible para demostrar que  $\phi_t$  es  $F_t$ -medible. Para todo  $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$  se tiene que

$$g_t^{-1}(B_1 \times B_2) = \{\omega \in \Omega : (t, X_t(\omega)) \in B_1 \times B_2\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \notin B_1, \\ X_t^{-1}(B_2) & \text{si } t \in B_1. \end{cases}$$

Observamos que el conjunto vacío pertenece a  $F_t$  por definición de  $\sigma$ -álgebra y  $X_t^{-1}(B_2) \in F_t$  ya que  $X_t$  es  $F_t$ -medible. Por tanto,  $g_t^{-1}(B_1 \times B_2) \in F_t$ , lo que prueba que  $g_t$  es  $F_t$ -medible.

- **Integrabilidad:**

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\sigma(t, X_t(\omega))|^2 dt \right] < \infty. \quad (5.15)$$

Por la desigualdad (5.3)

$$|\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad \text{para todo } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Entonces, elevando al cuadrado y aplicando la desigualdad de la Proposición 2.31

$$|\sigma(t, X_t(\omega))|^2 \leq C^2(1 + |X_t(\omega)|)^2 \leq 2C^2(1 + |X_t(\omega)|^2).$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\sigma(t, X_t(\omega))|^2 dt \right] \leq 2C^2 T + 2C^2 \mathbb{E} \left[ \int_0^T |X_t(\omega)|^2 dt \right].$$

Como  $X_t \in \mathcal{S}$ ,  $X_t \in L^2(\lambda \otimes P)$ , entonces el segundo término es finito, y por tanto, la integral (5.15) también lo es.

## 5.1. EDEs lineales.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales constituyen una clase especialmente tratable de EDEs, y son fundamentales tanto por su estructura matemática como por su aparición en modelos aplicados. En particular, permiten obtener soluciones explícitas en muchas situaciones de interés, como veremos en la siguiente sección dedicada a ejemplos.

**Definición 5.4.** Una ecuación diferencial estocástica lineal tiene la forma

$$dX_t = (c(t) + k(t)X_t) dt + (e(t) + g(t)X_t) dB_t,$$

con  $c, e, k, g: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . Una EDE lineal es homogénea si  $c(t) = e(t) = 0$  para todo  $0 \leq t \leq T$ .

Antes de analizar la solución explícita de ciertas EDEs lineales, resulta conveniente comprobar que este tipo de ecuaciones cumplen las condiciones necesarias del teorema 5.2 de existencia y unicidad.

*Observación 5.5.* Supongamos que la ecuación diferencial estocástica lineal satisface la condición

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (|c(t)| + |k(t)| + |e(t)| + |g(t)|) < \infty.$$

Entonces, las funciones  $b(t, x) = c(t) + k(t)x$  y  $\sigma(t, x) = e(t) + g(t)x$  verifican las condiciones del Teorema 5.2 de existencia y unicidad para las EDEs. En efecto, primero probamos la desigualdad de crecimiento sublineal(5.3). Sean

$$C_1 := \sup_{0 \leq t \leq T} |c(t)|, \quad C_2 := \sup_{0 \leq t \leq T} |k(t)|, \quad C_3 := \sup_{0 \leq t \leq T} |e(t)|, \quad C_4 := \sup_{0 \leq t \leq T} |g(t)|.$$

Todas estas cantidades son finitas por hipótesis. Entonces, para todo  $t \in [0, T]$  y  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$|b(t, x)| = |c(t) + k(t)x| \leq |c(t)| + |k(t)||x| \leq C_1 + C_2|x| \leq C'(1 + |x|),$$

donde se define  $C' := \max\{C_1, C_2\}$ . De manera análoga,

$$|\sigma(t, x)| = |e(t) + g(t)x| \leq |e(t)| + |g(t)||x| \leq C_3 + C_4|x| \leq C''(1 + |x|),$$

donde  $C'' := \max\{C_3, C_4\}$ . Por tanto,

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C'(1 + |x|) + C''(1 + |x|) = (C' + C'')(1 + |x|) =: C(1 + |x|).$$

donde  $C := C' + C''$ . Esto muestra que se verifica la desigualdad (5.3).

Ahora, verificamos la desigualdad de Lipschitz (5.4). Para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $t \in [0, T]$ , se cumple

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)| &= |(c(t) + k(t)x) - (c(t) + k(t)y)| = |k(t)(x - y)| \leq C_2|x - y|, \\ |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &= |(e(t) + g(t)x) - (e(t) + g(t)y)| = |g(t)(x - y)| \leq C_4|x - y|. \end{aligned}$$

Entonces,

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq (C_2 + C_4)|x - y| =: L|x - y|,$$

donde  $L := C_2 + C_4$ .

Se sigue que, bajo esta condición, la ecuación diferencial estocástica lineal satisface el teorema de existencia y unicidad.

Una vez asegurada la existencia y unicidad de solución para las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, nos interesa encontrar una expresión explícita para dicha solución en algunos casos particulares.

**Teorema 5.6.** *Sea la ecuación diferencial estocástica lineal*

$$\begin{cases} dX_t = (c(t) + k X_t) dt + e(t) dB_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

donde  $k$  es una constante. Entonces, su solución viene dada por:

$$X_t = e^{tk} X_0 + \int_0^t e^{(t-s)k} c(s) ds + \int_0^t e^{(t-s)k} e(s) dB_s, \quad (5.16)$$

*Demostración.* Al ser una EDE lineal ya sabemos que verifica el teorema de existencia y unicidad por la Observación 5.5. Tenemos una candidata a solución dada por la fórmula (5.16), comprobamos que verifica la EDE y, por el Teorema 5.2 de existencia y unicidad, sabemos que es la única solución del problema.

$$X_t = e^{tk} X_0 + \int_0^t e^{(t-s)k} c(s) ds + \int_0^t e^{(t-s)k} e(s) dB_s,$$

Multiplicando por  $e^{-tk}$ , (5.16) se reescribe como

$$e^{-tk} X_t = X_0 + \int_0^t e^{-sk} c(s) ds + \int_0^t e^{-sk} e(s) dB_s.$$

Llamando  $Y_t = e^{-kt} X_t$ , podemos expresar en notación diferencial, como vimos en la Definición (4.21), la relación anterior.

$$\begin{cases} dY_t = e^{-tk} c(t) dt + e^{-tk} e(t) dB_t, \\ Y_0 = x_0. \end{cases}$$

Por otro lado, aplicamos la fórmula de Itô, demostrada en el Teorema 4.22 a  $Y_t = e^{-tk} X_t$ , en este caso  $g(t, x) = e^{-tk} x$  y resulta

$$\begin{cases} dY_t = d(e^{-tk} X_t) = -ke^{-tk} \cdot X_t + e^{-tk} \cdot dX_t, \\ Y_0 = e^{-0 \cdot k} x_0 = x_0. \end{cases}$$

Igualando ambas expresiones  $dY_t$

$$-de^{-tk} X_t dt + e^{-tk} dX_t = e^{-tk} c(t) dt + e^{-tk} e(t) dB_t,$$

Simplificando  $e^{-tk}$  en ambos lados, obtenemos

$$dX_t = (c(t) + kX_t) dt + e(t) dB_t.$$

Finalmente, hemos obtenido que el proceso estocástico  $X_t$  satisface

$$\begin{cases} dX_t = (c(t) + kX_t) dt + e(t) dB_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

□

**Teorema 5.7.** *Sea la ecuación diferencial estocástica lineal*

$$\begin{cases} dX_t = (c(t) + k(t)X_t) dt + e(t) dB_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

*La solución viene dada por*

$$X(t) = \phi(t) \left( x_0 + \int_0^t \phi(s)^{-1} c(s) ds + \int_0^t e(s) dB_s \right) \quad (5.17)$$

*donde  $\phi(t) = e^{\int_0^t k(s) ds}$  es la única solución de la ecuación ordinaria*

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = k(t)\phi(t), \\ \phi(0) = 1. \end{cases}$$

*Demostración.* En este caso tenemos,

$$X_t = \phi(t) \left( x_0 + \int_0^t \phi(s)^{-1} c(s) ds + \int_0^t \phi(s)^{-1} e(s) dB_s \right),$$

Dado que  $\phi(t) > 0$ , multiplicando por  $\phi(t)^{-1}$ , se obtiene

$$\phi(t)^{-1} X_t = x_0 + \int_0^t \phi(s)^{-1} c(s) ds + \int_0^t \phi(s)^{-1} e(s) dB_s.$$

Llamamos  $Y_t = \phi(t)^{-1} X_t$ ; entonces la relación anterior escrita de manera diferencial da

$$\begin{cases} dY_t = \phi(t)^{-1} c(t) dt + \phi(t)^{-1} e(t) dB_t, \\ Y_0 = \phi(0)^{-1} x_0 = 1x_0 = x_0. \end{cases}$$

Por otro lado, aplicamos la fórmula de Itô demostrada en el Teorema (4.22) a  $Y_t = \phi(t)^{-1} X_t$  donde  $g(t, x) = \phi(t)^{-1} x$

$$dY_t = d(\phi(t)^{-1} X_t) = \frac{d}{dt} (\phi(t)^{-1}) X_t dt + \phi(t)^{-1} dX_t. \quad (5.18)$$

Para calcular  $\frac{d}{dt} \phi(t)^{-1}$  partimos de la igualdad

$$\phi(t)^{-1} \cdot \phi(t) = 1,$$

y derivamos ambos lados respecto a  $t$

$$\frac{d}{dt} [\phi^{-1}(t)] \cdot \phi(t) + \phi^{-1}(t) \cdot \frac{d}{dt} [\phi(t)] = 0.$$

Sustituyendo  $\frac{d}{dt} \phi(t) = k(t) \phi(t)$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} [\phi^{-1}(t)] \cdot \phi(t) + \phi^{-1}(t) \cdot k(t) \phi(t) = 0,$$

donde

$$\left( \frac{d}{dt} [\phi^{-1}(t)] + \phi^{-1}(t) k(t) \right) \cdot \phi(t) = 0.$$

Como  $\phi(t) \neq 0$  es invertible, esto implica

$$\frac{d}{dt} [\phi^{-1}(t)] + \phi^{-1}(t) k(t) = 0,$$

y por consiguiente

$$\frac{d}{dt} [\phi^{-1}(t)] = -\phi^{-1}(t) k(t).$$

Sustituyendo  $\frac{d}{dt}[\phi^{-1}(t)]$  en (5.18) se obtiene

$$\begin{cases} dY_t = -\phi(t)^{-1}k(t)X_t dt + \phi(t)^{-1}dX_t, \\ Y_0 = \phi(0)^{-1}x_0 = 1x_0 = x_0. \end{cases}$$

Igualando ambas ecuaciones  $dY_t$ ,

$$\phi(t)^{-1}c(t) dt + \phi(t)^{-1}e(t) dB_t = -\phi(t)^{-1}k(t)X_t dt + \phi(t)^{-1}dX_t.$$

Multiplicando ambos lados por  $\phi(t)$ , se obtiene

$$dX_t = (c(t) + k(t)X_t) dt + e(t) dB_t.$$

Queda demostrado que el proceso estocástico  $X_t$  definido en 2.9 satisface

$$\begin{cases} dX_t = (c(t) + k(t)X_t) dt + e(t) dB_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

Al ser una EDE lineal, por el teorema de existencia y unicidad 5.2 sabemos que esta solución es única.  $\square$

Antes de obtener la solución general de la EDE lineal, presentamos una proposición auxiliar donde obtenemos la fórmula de Itô, análoga a la del Teorema 4.22, cuando hay dos procesos de Itô. Esta fórmula será importante para el desarrollo de la solución.

**Proposición 5.8.** Sean  $X_t$  y  $Y_t$  dos procesos de Itô dados por la Definición 4.21. El producto  $X_t Y_t$  también es un proceso de Itô y satisface

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t,$$

*Demostración.* Se demuestra de manera similar que en la Fórmula de Itô, dada en el Teorema (4.22), aproximando por Taylor en varias variables. Sea  $g(t, x, y) = xy$ , entonces

$$\begin{aligned} g(t, x, y) &= g(t_0, x_0, y_0) + (t - t_0) \frac{\partial g}{\partial t}(t_0, x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(t_0, x_0, y_0) \\ &+ (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(t_0, x_0, y_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t_0, x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_0, x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2}(y - y_0)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t_0, x_0, y_0) + (t - t_0)(x - x_0) \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(t_0, x_0, y_0) \\ &+ (t - t_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial y}(t_0, x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(t_0, x_0, y_0) \\ &+ o(|t - t_0|^2 + |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2). \end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas por las de  $g(t, x, y)$  obtenemos

$$xy = x_0y_0 + x_0(y - y_0) + y_0(x - x_0) + (x - x_0)(y - y_0).$$

Tomando el límite cuando los incrementos tienden a cero como se hace en la demostración de la fórmula de Itô dada en el Teorema 4.22, se obtiene la fórmula diferencial deseada, lo que completa la demostración.  $\square$

**Teorema 5.9 (EDE lineal).** *Sea la EDE*

$$\begin{cases} dX_t = (c(t) + k(t))X_t dt + (e(t) + f(t)X_t) dB_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

la solución es

$$X_t = \phi_t \left( x_0 + \int_0^t \phi_s^{-1} (c(s) - e(s)f(s)) ds + \int_0^t \phi_s^{-1} e(s) dB_s \right), \quad (5.19)$$

donde

$$\phi_t := e^{\int_0^t k(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t f(s)^2 ds + \int_0^t f(s) dB_s}. \quad (5.20)$$

*Demostración.* Comprobamos que la solución planteada verifica la EDE. Llamamos

$$Z(t) := \left( x_0 + \int_0^t \phi_s^{-1} (c(s) - e(s)f(s)) ds + \int_0^t \phi_s^{-1} e(s) dB_s \right)$$

Obtenemos  $X_t = \phi_t Z_t$  y aplicamos la fórmula de Itô obtenida en la Proposición 5.8,

$$dX_t = \phi_t dZ_t + d\phi_t Z_t + d\phi_t dZ_t. \quad (5.21)$$

Tenemos que  $Z_t$  expresado de forma diferencial es

$$dZ_t = \phi_t^{-1} (c(t) - e(t)f(t)) dt + \phi_t^{-1} e(t) dB_t.$$

Por otro lado, vamos a ver que  $\phi_t$  es solución de la ecuación homogénea

$$d\phi_t = \phi_t k(t) dt + \phi_t f(t) dB_t.$$

Dado que

$$\phi_t := e^{Y_t}, \quad \text{donde} \quad Y_t = \int_0^t k(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t f(s)^2 ds + \int_0^t f(s) dB_s,$$

$Y_t$  expresado de forma diferencial es

$$dY_t = \left( k(t) - \frac{1}{2}f(t)^2 \right) dt + f(t) dB_t.$$

Aplicamos la fórmula de Itô del Teorema 4.22 a  $\phi_t = e^{Y_t}$  donde  $g(t, x) = e^x$

$$d\phi_t = e^{Y_t} dY_t + \frac{1}{2}e^{Y_t} (dY_t)^2 = e^{Y_t} \left( k(t) - \frac{1}{2}f(t)^2 \right) dt + e^{Y_t} f(t) dB_t + \frac{1}{2}e^{Y_t} f(t)^2 dt.$$

Por lo tanto,

$$d\phi_t = e^{Y_t} k(t) dt + e^{Y_t} f(t) dB_t.$$

Como  $\phi_t = e^{Y_t}$ , se concluye.

Teniendo ambas diferenciales calculadas,  $dZ_t$  y  $d\phi_t$ , sustituimos en (5.21):

$$\begin{aligned} dX_t &= \phi_t (\phi_t^{-1} (c(t) - e(t)f(t)) dt + \phi_t^{-1} e(t) dB_t) \\ &+ (\phi_t k(t) dt + \phi_t f(t) dB_t) Z_t \\ &+ (\phi_t k(t) dt + \phi_t f(t) dB_t) (\phi_t^{-1} (c(t) - e(t)f(t)) dt + \phi_t^{-1} e(t) dB_t) \\ &= (c(t) - e(t)f(t)) dt + e(t) dB_t + Z_t \phi_t k(t) dt + Z_t \phi_t f(t) dB_t + f(t)e(t) dt. \end{aligned}$$

Para simplificar los productos se han utilizado las relaciones de la Fórmula de Itô (4.11). En resumen, hemos obtenido

$$dX_t = (c(t) - e(t)f(t)) dt + e(t) dB_t + Z_t \phi_t k(t) dt + Z_t \phi_t f(t) dB_t + f(t)e(t) dt.$$

Como  $X_t = \phi_t Z_t$ , tenemos

$$\begin{cases} dX_t = (c(t) + k(t))X_t dt + (e(t) + f(t)X_t) dB_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

□

## 5.2. Ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas.

A continuación presentamos algunos ejemplos concretos de ecuaciones diferenciales estocásticas cuya solución puede obtenerse de forma explícita. Estos ejemplos ilustran cómo aplicar los métodos desarrollados anteriormente y permiten observar el efecto de los términos deterministas y estocásticos sobre la dinámica de las soluciones.

*Ejemplo 5.10.* Consideramos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t \quad \text{con } X_0 = x_0.$$

Es una EDE lineal de la forma (5.9) con coeficientes

$$c(t) = 0, \quad e(t) = 0, \quad k(t) = \frac{1}{2}, \quad f(t) = 1$$

Entonces, la solución viene dada por 5.19. En este caso, como  $c(t) = 0$  y  $e(t) = 0$ , los términos integrales se anulan y la solución es

$$X_t = \phi_t x_0.$$

Calculamos ahora  $\phi_t$ . utilizando 5.20:

$$\phi_t = e^{\int_0^t \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 ds + \int_0^t 1 dB_s} = e^{\int_0^t 1 dB_s} = e^{B_t}.$$

En efecto, por la definición de Integral de Itô para procesos elementales, dada en (4.1),

$$\int_0^t 1 dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = B_t - B_0.$$

Donde  $\{t_i\}_{i=0}^n$  es cualquier partición del intervalo  $[0, t]$ . Dado que  $B_0 = 0$ , concluimos que

$$\int_0^t 1 dB_s = B_t. \quad (5.22)$$

Por tanto,  $\phi_t = e^{B_t}$  y la solución final es

$$X_t = x_0 e^{B_t}.$$

*Ejemplo 5.11.* Consideramos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t} dB_t, \quad X_0 = 0.$$

Es una EDE lineal con coeficientes

$$c(t) = 0, \quad k(t) = -\frac{1}{1+t}, \quad e(t) = \frac{1}{1+t}, \quad f(t) = 0.$$

Entonces, la solución general viene dada por (5.17). Como  $c(t) = 0$ , el primer término integral desaparece. Ahora, calculamos  $\phi(t)$  resolviendo

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{1}{1+t}\phi(t), \\ \phi(0) = 1. \end{cases}$$

Separando variables e integrando en  $(0, t)$

$$\int_0^t \frac{\dot{\phi}(s)}{\phi(s)} ds = - \int_0^t \frac{1}{1+s} ds \quad \Rightarrow \quad \ln \phi(t) = -\ln(1+t),$$

Así que

$$\phi(t) = \frac{1}{1+t}.$$

Sustituimos en la solución (5.17)

$$X_t = \frac{1}{1+t} \left( 0 + \int_0^t (1+s) \cdot \frac{1}{1+s} dB_s \right) = \frac{1}{1+t} \int_0^t 1 dB_s.$$

Como se ha visto en (5.22) la solución final es

$$X_t = \frac{B_t}{1+t}.$$

*Ejemplo 5.12.* Consideramos la ecuación

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2} dB_t, \quad \text{para } t < \tau = \inf\{s > 0 : B_s \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}.$$

Definimos

$$X_0 = 0$$

Esta EDE no es una EDE lineal, observamos que  $\sqrt{1-x^2}$  solo está definida para  $x \in [-1, 1]$ . No se verifican las condiciones del teorema de existencia y unicidad para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Aún en ese intervalo, las condiciones (5.3) y (5.4) siguen sin verificarse.

En efecto vamos a suponer por contradicción que la condición de Lipschitz (5.4) se verifica para  $x, y \in [-1, 1]$ , donde  $\sigma(t, x) = \sigma(x) = \sqrt{1-x^2}$ : Tomemos  $x = 1$  y supongamos que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|\sigma(t, 1) - \sigma(t, y)| = \sqrt{1-y^2} \leq C|1-y|, \quad y \in [-1, 1].$$

Esto es equivalente a

$$\sqrt{(1+y)(1-y)} \leq C(1-y),$$

lo cual implica

$$(1+y) \leq C^2(1-y),$$

Cuando  $y \rightarrow 1$ , se obtiene  $2 \leq 0$ , lo que da la contradicción buscada. De igual manera se comprueba que la condición de Lipschitz no se cumple para  $x = -1$ . Por tanto, no podemos aplicar el Teorema 5.2 de existencia y unicidad para garantizar la existencia de

solución global. Sin embargo, vamos a comprobar que sí se cumplen las hipótesis del teorema si  $X_t$  toma valores en  $(-1, +1)$ . Tenemos en este caso

$$b(t, x) = -\frac{1}{2}x, \quad \sigma(t, x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Comprobamos que se verifica la hipótesis (5.3), para todo  $t < \tau$  y  $x \in (-1, 1)$ ,

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| = \left| -\frac{1}{2}x \right| + \left| \sqrt{1 - x^2} \right| \leq \frac{1}{2}(1 + |x|) + 1 \leq \frac{3}{2}(1 + |x|).$$

Comprobamos ahora la hipótesis de Lipschitz (5.4). Para  $b(t, x)$  se tiene que para todo  $t < \tau$  y  $x \in (-1, 1)$ ,

$$|b(t, x) - b(t, y)| = \left| -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2}|x - y|.$$

Para  $\sigma(x)$ , observamos que esta función es de clase  $C^1$  en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ . Si consideramos un intervalo compacto  $[a, b] \subset (-1, 1)$ , por el teorema de Weierstrass existe una constante  $L > 0$  tal que  $|\sigma'(x)| \leq L$  para todo  $x \in [a, b]$ . Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange, para todo  $x, y \in [a, b]$  con  $x < y$ , existe  $\xi \in (x, y)$  tal que

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = |\sigma'(\xi)| \cdot |x - y| \leq L|x - y|.$$

Por tanto,  $\sigma$  también es Lipschitz en  $[a, b] \subset (-1, 1)$ .

Proponemos la solución  $X_t = \sin(B_t)$  y verificamos que satisface la EDE. Para  $g(t, x) = \sin(x)$ , aplicamos la fórmula de Itô del Teorema 4.22:

$$dX_t = \cos(B_t) dB_t - \frac{1}{2} \sin(B_t) dt = \sqrt{1 - \sin^2(B_t)} dB_t - \frac{1}{2} \sin(B_t) dt.$$

Sustituyendo  $X_t = \sin(B_t)$  obtenemos la EDE  $dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2} dB_t$ . La solución  $X_t = \sin(B_t)$  está bien definida para  $t < \tau$  ya que  $B_t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  y  $\sin(B_t) \in (-1, 1)$ . Para esta solución también se verifica la condición inicial  $X_0 = \sin(B_0) = 0$ .

Por el Teorema 5.2 de existencia y unicidad, podemos afirmar que es la única solución para  $t < \tau$  y  $X_t \in (-1, 1)$ .

*Ejemplo 5.13* (Ecuación de Ornstein-Uhlenbeck). Tomamos la siguiente EDE lineal

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

donde  $\mu < 0$  y  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Aplicamos la solución (5.16). Los coeficientes son  $c(t) = 0$ ,  $k(t) = \mu$ ,  $e(t) = \sigma$ ,  $f(t) = 0$ . Por tanto, la solución es

$$X_t = e^{\mu t} \left( x_0 + \int_0^t e^{-\mu s} \sigma dB_s \right),$$

Analizamos la solución calculando su esperanza. Por la propiedad iii) de la Proposición 4.19 se tiene que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right] = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E} \left[ e^{\mu t} x_0 + \sigma e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right] = x_0 e^{\mu t} + \sigma e^{\mu t} \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right] \\ &= x_0 e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos la varianza,

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - (\mathbb{E}[X_t])^2 = \mathbb{E}[X_t^2] - x_0^2 e^{2\mu t} = \frac{\sigma^2}{2\mu} (e^{2\mu t} - 1).$$

En efecto,  $\mathbb{E}[X_t^2]$  se calcula de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( e^{\mu t} x_0 + \sigma e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{2\mu t} x_0^2 + \sigma^2 e^{2\mu t} \left( \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right)^2 + 2\sigma e^{2\mu t} x_0 \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right] \\ &= e^{2\mu t} x_0^2 + \sigma^2 e^{2\mu t} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right)^2 \right] + 2\sigma x_0 e^{2\mu t} \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right]. \end{aligned}$$

Volvemos a aplicar la propiedad iv) de la Proposición 4.19 y también la Isometría de Itô dado en el Corolario 4.16, donde

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t e^{-\mu s} dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-2\mu s} ds \right]$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}[X_t^2] = e^{2\mu t} x_0^2 + \sigma^2 e^{2\mu t} \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-2\mu s} ds \right] = e^{2\mu t} x_0^2 + \frac{\sigma^2}{2\mu} (e^{2\mu t} - 1).$$

El modelo de Ornstein-Uhlenbeck sirve para modelar tasas de interés, tipos de cambio y precios de materias primas de forma estocástica. En este modelo, se suele interpretar  $\mu < 0$  y  $\sigma \in \mathbb{R}$  de la siguiente manera:

- $\sigma$  es el parámetro que indica el grado de volatilidad que rodea al modelo a causa de *shocks*, es decir, eventos inesperados que impactan en los precios y la economía.
- $\mu$  es la velocidad con la que esta volatilidad se disipa y vuelve a la media.

Observamos que cuando  $t \rightarrow \infty$ , dado que  $\mu < 0$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_t] = x_0 e^{\mu t} \rightarrow 0 \\ \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\mu} (e^{2\mu t} - 1) \rightarrow -\frac{\sigma^2}{2\mu}. \end{cases}$$

Esto indica que, aunque el valor esperado del proceso converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , su varianza se estabiliza en un valor finito. Las oscilaciones alrededor de la media se mantienen a lo largo del tiempo en un rango controlado.

*Ejemplo 5.14 (Ecuación logística estocástica).* Consideramos la siguiente EDE que representa una versión estocástica de la ecuación logística:

$$dX_t = rX_t(k - X_t) dt + \beta X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0.$$

Con la notación de (5.1), tenemos

$$b(t, x) = rx(k - x), \quad \sigma(t, x) = \beta x \quad \text{para } k > 0, r > 0, \beta \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Desde el punto de vista de la modelización, el parámetro  $\beta$  podría ser únicamente positivo.  $\beta$  representa el ruido que afecta al crecimiento de la población, por lo que se puede tomar  $\beta > 0$  ya que solo interesa la magnitud de ese ruido.

Vamos a demostrar que no se verifican las condiciones del teorema de existencia y unicidad 5.2 por reducción al absurdo. Suponemos que sí se cumple la desigualdad de crecimiento lineal (5.3)

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \text{ con } T > 0 \text{ arbitrario.}$$

Dividiendo por  $|x| > 0$

$$|r(k - x)| + |\beta| \leq \frac{C(1 + |x|)}{|x|} = C \left( \frac{1}{|x|} + 1 \right),$$

Cuando  $x \rightarrow \infty$  se obtiene  $\infty \leq C$ , se llega a una contradicción ya que  $C$  tiene que ser una constante finita. Ahora comprobamos por reducción al absurdo que no se cumple la condición de Lipschitz (5.4). Supongamos que existe una constante  $D > 0$  tal que

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq D|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T].$$

Por la expresión de  $b$  tenemos,

$$|b(t, x) - b(t, y)| = (r \cdot |k - (y + x)|) |x - y| \leq D|x - y|,$$

Para  $|x - y| = 0$  se verifica la desigualdad, sin embargo para  $|x - y| > 0$  dividimos entre  $|x - y|$  y obtenemos

$$(r \cdot |k - (y + x)|) \leq D$$

Cuando  $y \rightarrow \infty$ , quedaría  $\infty \leq D$ , se obtiene una contradicción. No se verifican las hipótesis del Teorema (5.2) de existencia y unicidad y por consiguiente no podemos aplicarlo. Sin embargo, para esta EDE no lineal al realizar el cambio  $Y_t = \frac{1}{X_t}$  (el mismo que se realiza para las ecuaciones diferenciales ordinarias de tipo Bernoulli, como la ecuación logística) nos permite transformarla en una EDE lineal que sí sabemos resolver.

Definimos  $Y_t = g(t, X_t) = \frac{1}{X_t}$ , con  $X_t > 0$ , y la función  $g(t, x) = \frac{1}{x} \in C^2([0, \infty) \times (0, \infty))$ . Aplicamos la fórmula de Itô dada en el Teorema 4.22:

$$dY_t = -\frac{1}{X_t^2} dX_t + \frac{1}{X_t^3} (dX_t)^2. \quad (5.23)$$

Como sabemos que

$$dX_t = rX_t(k - X_t) dt + \beta X_t dB_t, \quad (5.24)$$

entonces, teniendo en cuenta (4.11), si elevamos al cuadrado obtenemos

$$(dX_t)^2 = \beta^2 X_t^2 dt. \quad (5.25)$$

Sustituimos (5.24) y (5.25) en la fórmula de Itô (5.23),

$$\begin{aligned} dY_t &= -\frac{1}{X_t^2} (rX_t(k - X_t) dt + \beta X_t dB_t) + \frac{1}{X_t^3} \cdot \beta^2 X_t^2 dt \\ &= \left(-rk \frac{1}{X_t} + r\right) dt - \beta \cdot \frac{1}{X_t} dB_t + \beta^2 \cdot \frac{1}{X_t} dt \\ &= (r - (rk - \beta^2)Y_t) dt - \beta Y_t dB_t. \end{aligned}$$

Se ha obtenido una EDE lineal, cuyos coeficientes son

$$c(t) = r, \quad k(t) = -(rk - \beta^2), \quad e(t) = 0, \quad f(t) = -\beta.$$

Entonces, por (5.19) y dado que la condición inicial resulta  $Y_0 = \frac{1}{X_0} = \frac{1}{x}$ , la solución de la EDE para  $Y_t$  es

$$Y_t = \left( e^{\int_0^t -\beta dB_s + \int_0^t -(rk - \beta^2) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2 ds} \right) \left( \frac{1}{x} + \int_0^t \frac{r}{e^{\int_0^s -\beta dB_u + \int_0^s -(rk - \beta^2) du - \frac{1}{2} \int_0^s \beta^2 du}} ds \right).$$

Observamos que  $Y_t > 0$  para todo  $t > 0$ , por tanto tiene sentido deshacer el cambio de variable  $X_t = \frac{1}{Y_t}$  para todo  $t > 0$ . Deshaciendo el cambio se obtiene

$$X_t = \frac{e^{\int_0^t \beta dB_s + \int_0^t (rk - \beta^2) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2 ds}}{\frac{1}{x} + \int_0^t \frac{r}{e^{\int_0^s -\beta dB_u + \int_0^s -(rk - \beta^2) du - \frac{1}{2} \int_0^s \beta^2 du}} ds}.$$

Agrupando y simplificando, utilizando (5.22), se puede escribir como:

$$X_t = \frac{e^{(rk - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B_t}}{x^{-1} + r \int_0^t e^{(rk - \frac{1}{2}\beta^2)s + \beta B_s} ds}.$$

Este ejemplo pone de manifiesto la importancia de la fórmula de Itô (4.10) como herramienta clave para el estudio y la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas más complejas.

## Bibliografía

---

- [Bre11] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [Dur19] R. DURRETT, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge University Press, Version 5 (January 11, 2019).
- [Eva13] L. C. EVANS, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. American Mathematical Society, 2013.
- [Fol99] G. B. FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Second Edition, John Wiley & Sons, 1999.
- [Kar91] I. KARATZAS y S. E. SHREVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Second Edition, Springer, 1991.
- [Øks03] B. ØKSENDAL, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Fifth Edition, Springer, 2003.





**EPES**

Escuela Politécnica  
de Enseñanza Superior