



UNIVERSIDAD  
POLITÉCNICA  
DE MADRID



**EPES**  
Escuela Politécnica  
de Enseñanza Superior



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**ESCUELA POLITÉCNICA DE ENSEÑANZA SUPERIOR (EPES)**

TRABAJO FIN DE GRADO

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

# Superficies Weingarten

**Autora:** Lucía Gil Ruiz.

**Dirigido por:** María Barbero Liñán.

Madrid, 4 de julio de 2025



*Superficies Weingarten*

**Autora:** Lucía Gil Ruiz.

**Dirigido por:** María Barbero Liñán.

Trabajo Fin de Grado, 4 de julio de 2025

**Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)**

Edificio C, Paseo Juan XXIII, 11. Madrid

---

Si deseas citar este trabajo, la entrada completa en  $\text{BIB}\text{T}\text{E}\text{X}$  es la siguiente:

```
@mastersthesis{citekey,  
title = {Superficies Weingarten},  
author = {Gil Ruiz, Lucía.},  
school = {Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)},  
year = {2025},  
type = {Trabajo Fin de Grado}  
}
```

---

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons «Atribución-  
NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional»](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Plantilla derivada de <https://github.com/blazaid/UPM-Report-Template>.



# Agradecimientos

---

A mi familia, por el amor y apoyo incondicional que me han brindado siempre en cada etapa de mi vida.

A mis amigos, por todos sus consejos, su ayuda, su presencia, los buenos momentos que hemos pasado juntos estos años y por animarme y confiar en mí incluso cuando yo no lo hacía. Ha sido un camino muy bonito a su lado y sin su ayuda, muchos de mis logros no habrían sido posibles.

Finalmente, a mi tutora María, por su paciencia, implicación y comprensión en todo momento.



# Resumen

---

Las superficies Weingarten están caracterizadas por una relación funcional entre sus curvaturas principales o, alternativamente, entre la curvatura de Gauss y la curvatura media. Una familia importante de superficies Weingarten son las de curvatura media constante, que incluyen a su vez a las superficies mínimas.

Habitualmente, se utiliza la noción de curvatura de Gauss para clasificar los puntos de una superficie. Sin embargo, dicha clasificación se puede realizar también a partir de la indicatriz de Dupin, una cónica resultante de la intersección de ciertos planos paralelos al plano tangente con el paraboloides oscultriz. Este paraboloides es una aproximación local de segundo orden de la superficie en un punto y es un objeto geométrico que aparece en libros clásicos de geometría diferencial. A pesar de ello, no se ha encontrado ninguna referencia donde se describa con precisión y claridad el paraboloides oscultriz indicando el sistema de referencia afín utilizado. En este escrito se ha realizado dicha descripción, además de construirlo explícitamente en una serie de ejemplos.

Los ejemplos estudiados ilustran una clasificación, no excluyente, que se ha establecido para el desarrollo de este trabajo en cuatro tipos de superficies Weingarten. Se ha dado un especial énfasis a los diagramas de curvatura y a las aproximaciones hasta orden dos de las superficies Weingarten.

**Palabras clave:** Superficie Weingarten, diagrama de curvatura, indicatriz de Dupin, paraboloides oscultriz, líneas de curvatura.



# Abstract

---

Weingarten surfaces are characterized by a functional relationship between their principal curvatures or, alternatively, between Gaussian curvature and mean curvature. An important family of Weingarten surfaces are those of constant mean curvature, which include minimal surfaces.

Usually, the notion of Gaussian curvature is used to classify the points of a surface. However, this classification can also be performed using the Dupin indicatrix, a conic section resulting from the intersection of certain planes parallel to the tangent plane with the osculating paraboloid. This paraboloid is a second-order local approximation of the surface at a point and it is a geometric object that appears in classical differential geometry books. Despite this, no reference has been found that precisely and clearly describes the osculating paraboloid specifying the affine reference system used. In this work, such a description has been provided, along with the explicit construction in a series of examples.

The studied examples illustrate a non-exclusive classification, established for the development of this work, into four types of Weingarten surfaces. Special emphasis has been placed on curvature diagrams and second-order approximations of Weingarten surfaces.

**Keywords:** Weingarten surface, curvature diagram, Dupin indicatrix, osculating paraboloid, curvature lines.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>2</b>	<b>Nociones básicas de geometría diferencial</b>	<b>5</b>
2.1	Curvas y triedro de Frenet . . . . .	5
2.2	Superficies regulares y curvatura . . . . .	6
2.3	Curvatura normal y geodésica . . . . .	11
2.4	Curvas coordenadas y líneas de curvatura . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Paraboloide oscultriz</b>	<b>21</b>
3.1	Indicatriz de Dupin . . . . .	21
3.1.1	Ejemplo: Paraboloide hiperbólico . . . . .	25
3.2	Circunferencia y paraboloide oscultriz . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Superficies Weingarten</b>	<b>41</b>
4.1	Definición y clasificación . . . . .	41
4.2	Superficies de revolución . . . . .	44
4.2.1	Catenoide . . . . .	46
4.3	Superficie tubería con una curvatura principal constante . . . . .	51
4.3.1	Superficie tubería a lo largo de una catenaria . . . . .	53
4.4	Superficies regladas . . . . .	60
4.4.1	Desarrollables: cilindro . . . . .	62
4.4.2	No desarrollables: helicoide . . . . .	66
4.5	Superficies con curvatura de Gauss o curvatura media constante . . . . .	75
4.5.1	Esfera . . . . .	77
4.5.2	Pseudoesfera . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Apéndice: Implementación</b>	<b>93</b>
A.1	Códigos de Matlab . . . . .	93
A.2	Códigos de Grasshopper . . . . .	94

**Bibliografía**

**97**

# 1

## Introducción

Este trabajo se enmarca en el campo de la geometría diferencial, y se centra en el estudio de las superficies Weingarten con el objetivo principal de analizar sus propiedades geométricas.

Las superficies Weingarten se caracterizan por la existencia de al menos una relación funcional entre sus curvaturas principales. Estas superficies fueron introducidas por el matemático alemán Julius Weingarten (1836-1910) en el año 1861 ([JW61]). Sus estudios fueron motivados principalmente por las ideas de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), especialmente su *Teorema Egregium de Gauss* (1827,[CG27]). Weingarten buscó profundizar en las ideas de Gauss, estudiando como las curvaturas principales de una superficie determinan su geometría local y global. Posteriormente, otros autores como Heinz Hopf extendieron los estudios de Weingarten a superficies analíticas (1947,[HH47]).

Algunos de los resultados más destacables que se conocen actualmente sobre superficies Weingarten son:

- Condición del Jacobiano: Una superficie es Weingarten si y solo si el determinante jacobiano de las curvaturas principales (o respectivamente de la curvatura de Gauss y curvatura media) es cero [BG96]:

$$\frac{\partial k_1}{\partial u} \frac{\partial k_2}{\partial v} - \frac{\partial k_1}{\partial v} \frac{\partial k_2}{\partial u} = 0.$$

- Las superficies Weingarten de revolución que satisfacen una relación funcional del tipo  $k_1 = ak_2$  con  $a \neq 0$  son los planos, ovaloides (incluyendo esferas) y catenoides. [LP20].

Una de las principales aplicaciones de las superficies Weingarten está relacionada con el ámbito arquitectónico. Estas superficies presentan un gran potencial para el diseño de

superficies de forma libre <sup>1</sup> con cierta simplicidad de fabricación. Al construir diseños arquitectónicos de doble curvatura <sup>2</sup>, las superficies de forma libre deben fragmentarse en paneles prefabricados, requiriendo la construcción de moldes adaptados.

Los algoritmos de panelización tienen un doble objetivo: preservar al máximo la geometría original del diseño y minimizar el número de moldes, reduciendo así los costes de producción. Toda superficie se puede aproximar en cada punto por un paraboloides llamado osculatriz. El paraboloides osculatriz es la aproximación local de una superficie en un punto mediante una cuádrica que pasa por dicho punto y cuyo plano tangente y curvatura normal en el punto coincide con el de la superficie. En un sistema de referencia afín adaptado, su ecuación reducida es:

$$z = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2,$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  denotan las curvaturas principales.

En una superficie cualquiera, las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  varían de manera independiente, lo que exige un molde distinto para cada panel con pares de curvaturas principales distintos. Sin embargo, en una superficie Weingarten, existe una relación  $f(k_1, k_2) = 0$  entre sus curvaturas principales. Por este motivo, el paraboloides osculatriz en cada punto depende de un solo parámetro. Basta fijar el valor de  $k_1$  para que  $k_2$  quede terminado y viceversa. De esta manera, paneles distintos pueden fabricarse con el mismo molde aplicando rotaciones y escalados de los mismos.

Es consecuencia, Davide Pellis, Martin Kilian, Helmut Pottmann y Mark Pauly (2021, [HP21]) presentaron un método para encontrar la superficie Weingarten, más cercana a la superficie de forma libre de estudio, alineando las isolíneas de curvatura <sup>3</sup> de la superficie para reducir el diagrama de curvatura a una curva. De esta manera, se puede construir computacionalmente una panelización optimizada de las superficies de forma libre.

Para realizar este trabajo, la metodología empleada ha sido la habitual en un trabajo de investigación teórico. Se ha comenzado con una primera búsqueda de la literatura existente sobre superficies Weingarten. Con ello, se ha realizado una recopilación inicial de conceptos y estructurado el Capítulo 4 con una clasificación no excluyente de las superficies Weingarten. Dicha clasificación surge de [KS05] y organiza las superficies en

<sup>1</sup>Las superficies de forma libre son superficies definidas mediante una malla de puntos de control que determinan su forma. Se caracterizan por poder ser modificadas localmente mediante el reajuste de sus puntos de control.

<sup>2</sup>En el ámbito arquitectónico, una superficie de doble curvatura es aquella cuyas curvaturas principales son ambas distintas de cero.

<sup>3</sup>Las isolíneas de curvatura son aquellas curvas en la superficie donde la curvatura de la superficie permanece constante.

función de la naturaleza de su diagrama de curvaturas.

Para cada una de estas clases, se ha comenzado trabajando con una parametrización genérica de la superficie y estudiado las relaciones de Weingarten asociadas. En algunas de estas categorías se han obtenido además las propiedades que deben verificarse para que la superficie de ese tipo sea Weingarten. También, se ha escogido un ejemplo representativo de cada clase y se ha analizado en profundidad.

Los diagramas de curvatura asociados a las superficies estudiadas muestran la naturaleza de sus puntos. La clasificación de los puntos también se ha analizado mediante la indicatriz de Dupin y el paraboloides oscultriz en los puntos de la superficie. La descripción de estos dos objetos geométricos y la relación entre ellos se recoge en el Capítulo 3.

Los ejemplos presentes en cada una de las clases de superficies Weingarten se han escogido con el fin de reflejar una gran variedad de diagramas de curvatura, tipos de indicatrices de Dupin y paraboloides oscultrices. Además, se incluye un ejemplo en la Subsección 4.4.2 de una superficie no parametrizada por líneas de curvatura asociadas a las direcciones principales, y con ello, una implementación numérica de cómo serían las líneas de curvatura en esta superficie. De hecho, la reparametrización de una superficie por líneas de curvatura no es un problema de fácil solución y depende de cada caso de estudio. El obtener dicha reparametrización permite que las curvas coordenadas coincidan con las líneas de curvatura. Como consecuencia, el operador de Weingarten tiene asociada una matriz diagonal.

Las implementaciones gráficas se han realizado principalmente con dos programas: *Matlab* y *Grasshopper*. Los ficheros y material elaborados están disponibles en [este enlace](#). Para más detalle sobre la construcción gráfica se recomienda consultar el Apéndice A.

Finalmente, la estructura del documento es la siguiente: En el segundo capítulo se introducen algunas nociones básicas de geometría diferencial de curvas y superficies claves para el desarrollo del trabajo extraídas principalmente de [CP10]. El tercer capítulo expone los conceptos de indicatriz de Dupin y paraboloides oscultriz, además de la relación entre ambos ([MS79],[CD13], [BG88], [Co69], [ZH95], [ER06]). El cuarto capítulo desarrolla e implementa los resultados asociados a las superficies Weingarten ([BG96], [KS05], [LP20], [BO22], [CH20], [JO07]). Por último, el quinto capítulo contiene las conclusiones del trabajo además de las dificultades encontradas durante la realización del mismo y líneas futuras de trabajo.



# 2

## Nociones básicas de geometría diferencial

En este capítulo se presentan algunos conceptos fundamentales de geometría diferencial de curvas y superficies necesarios para el desarrollo de este trabajo [CP10]. Entre ellos, se encuentran conceptos claves como la primera y segunda forma fundamental, el operador de Weingarten y las curvaturas principales. En concreto, las direcciones principales, construidas a partir de las curvaturas principales, juegan un papel importante en la definición de la indicatriz de Dupin y el paraboloides osculatrix que aparecerá en el capítulo posterior.

### 2.1. Curvas y triedro de Frenet

Una curva puede parametrizarse de distintas formas, pero una especialmente útil es la parametrización por arco, donde el parámetro coincide con la longitud de la curva recorrida desde un punto inicial. Esta propiedad de las curvas resulta especialmente útil, pues simplifica notablemente los cálculos. Por otro lado, para caracterizar el comportamiento local de una curva, se introduce el triedro de Frenet, un sistema de referencia móvil formado por el vector tangente, el normal y el binormal. Durante esta sección, y salvo que se indique lo contrario, se considera  $M$  una variedad euclídea de dimensión  $n$ .

**Definición 2.1.1.** Una *curva parametrizada* es una aplicación diferenciable  $\gamma : I \rightarrow M$  siendo  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ . Se dice además que  $\gamma$  es una *curva parametrizada regular* si  $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I$ .

**Definición 2.1.2.** Una curva parametrizada regular  $\gamma : I \rightarrow M$  se dice que está *parametrizada por longitud de arco* (PPA) si la norma del vector tangente es igual a 1 para todo  $t \in I$ , es decir  $\|\gamma'(t)\| = 1 \forall t \in I$ .

**Definición 2.1.3.** Una curva parametrizada regular  $\gamma : I \rightarrow M$  se denomina *curva de Frenet* si está parametrizada por arco para todo  $t \in I$  y los vectores  $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$  son linealmente independientes.

En el caso de curvas espaciales  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si  $\gamma$  es una curva de Frenet se define el *triedro de Frenet* como la base  $\{\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}}\}$  formada por:

- $\bar{\mathbf{t}}$  es el vector tangente a la curva  $\bar{\mathbf{t}} = \gamma'$ .
- $\bar{\mathbf{n}}$  es el vector normal a la curva  $\bar{\mathbf{n}} = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|}$ .
- $\bar{\mathbf{b}}$  es el vector binormal a la curva  $\bar{\mathbf{b}} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}$ .

**Observación 2.1.4.** El triedro de Frenet  $\{\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}}\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  positivamente orientada.

**Definición 2.1.5.** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva de Frenet en el espacio. Se define la *curvatura de  $\gamma$*  como  $k_\gamma(t) := \|\gamma''(t)\|$ .

## 2.2. Superficies regulares y curvatura

La descripción local de una superficie regular requiere la introducción de los conceptos de la primera y segunda forma fundamental. Se aborda también la noción de curvaturas principal, media y de Gauss, necesarios para describir las superficies Weingarten.

**Definición 2.2.1.** Una *superficie regular* es un subconjunto no vacío  $M \subset \mathbb{R}^3$  de manera que para todo punto  $p \in M$  existe un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $M$  y una aplicación diferenciable  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  que verifica:

1.  $X(U) = V$ ,
2.  $X : U \rightarrow V$  es un homeomorfismo,
3. La diferencial  $DX(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p M$  es inyectiva para todo  $(u, v) \in U$  con  $X(u, v) = p$ .

**Notación 2.2.2.** La aplicación  $DX(u, v)$  denota la diferencial de  $X$ . La acción de la diferencial aplicada a un vector  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  es:

$$DX_{(u_0, v_0)}(a_1, a_2) = a_1 \left. \frac{\partial X}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} + a_2 \left. \frac{\partial X}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)},$$

donde  $\left[ \frac{\partial X}{\partial u} \quad \frac{\partial X}{\partial v} \right]$  es la matriz jacobiana de  $X$  de tamaño  $3 \times 2$ .

**Notación 2.2.3.** La aplicación  $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  determina una *parametrización* de la superficie que se denota por  $(U, X)$ .

El plano tangente a la superficie en un punto se define con los vectores tangentes de todas las curvas contenidas en la superficie y que pasan por dicho punto. Dado que la curva está contenida en la superficie, su vector tangente también lo será a la superficie. Su definición formal es la siguiente:

**Definición 2.2.4.** Sea  $M$  una superficie regular y  $p$  un punto en la superficie. Se define el *plano tangente a la superficie  $M$  en el punto  $p \in M$*  como el espacio vectorial:

$$T_p M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \text{ diferenciable con } \gamma(0) = p \text{ y } \gamma'(0) = \bar{\mathbf{v}}\}.$$

**Definición 2.2.5.** Se define el *subespacio ortogonal complementario a  $T_p M$* , denotado por  $(T_p M)^\perp$ , como el conjunto de todos los vectores en  $\mathbb{R}^3$  que son ortogonales a todos los vectores tangentes a  $M$  en  $T_p M$ , respecto al producto escalar usual.

**Observación 2.2.6.** En el caso de superficies,  $(T_p M)^\perp$  es un subespacio vectorial unidimensional generado por un vector normal a la superficie en  $p$ . De este modo, cualquier vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  puede descomponerse de manera única en su parte tangencial,  $(\mathbf{v})^\top \in T_p M$ , y su parte ortogonal,  $(\mathbf{v})^\perp \in (T_p M)^\perp$  de modo que  $\mathbf{v} = (\mathbf{v})^\top + (\mathbf{v})^\perp$ .

Para poder medir distancias y ángulos en una superficie es necesario definir la primera forma fundamental.

**Definición 2.2.7.** Sea  $M$  una superficie regular y  $p$  un punto en la superficie. La *primera forma fundamental  $I_p$  de  $M$  en  $p$*  es la restricción del producto escalar usual en  $\mathbb{R}^3$  al plano tangente a  $M$  en el punto  $p$ :

$$\begin{aligned} I_p : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Si  $(U, X)$  es una parametrización de  $M$ , los *coeficientes de la primera forma fundamental* son las funciones diferenciables  $E, F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

- $E(u, v) := I_p(X_u(u, v), X_u(u, v)) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle,$
- $F(u, v) := I_p(X_u(u, v), X_v(u, v)) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle,$
- $G(u, v) := I_p(X_v(u, v), X_v(u, v)) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle,$

donde  $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$  es la base de  $T_p M$  asociada a la parametrización  $(U, X)$  y  $p = X(u, v)$ .

**Observación 2.2.8.** La primera forma fundamental es una aplicación bilineal, simétrica y definida positiva. Además, podemos escribirla matricialmente en el punto  $p = X(u, v)$  en la base  $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$  como:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

**Observación 2.2.9.** La primera forma fundamental, evaluada dos veces el mismo vector  $\bar{\mathbf{v}}$ , da como resultado el cuadrado de su norma, ya que  $I_p(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) = \langle \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = \|\bar{\mathbf{v}}\|^2$ .

En geometría diferencial, el concepto de orientación de una superficie busca distinguir de manera consistente la parte exterior e interior de una superficie y depende de la existencia de un vector normal unitario a la superficie en cada punto. Para que la superficie sea orientable el campo vectorial que se define a partir del vector normal debe ser una aplicación diferenciable sobre la superficie.

**Definición 2.2.10.** Sea  $M$  una superficie regular. Un *campo vectorial con soporte en la superficie  $M$*  es una aplicación diferenciable  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.2.11.** Sea  $M$  una superficie regular. Se dice que el campo vectorial,  $F$ , con soporte en  $M$  es un *campo vectorial normal a  $M$*  si  $F(p) \in (T_p M)^\perp$  para todo punto  $p$  en  $M$ .

**Definición 2.2.12.** Sea  $M$  una superficie regular. Decimos que  $M$  es *orientable* si existe un campo vectorial diferenciable  $N$  con soporte en  $M$ , normal a  $M$  y unitario. Es decir, si existe una aplicación diferenciable  $N$  tal que:

$$\begin{aligned} N : M &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\mapsto N(p) \in (T_p M)^\perp \text{ con } \|N(p)\| = 1. \end{aligned}$$

**Observación 2.2.13.** Una superficie regular conexa y orientable admite exactamente dos orientaciones: una y su opuesta.

**Definición 2.2.14.** Sea  $M$  una superficie regular y  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una orientación en  $M$ . Dado que  $N(p) \in \mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , el campo vectorial normal y unitario  $N$  puede verse como una aplicación diferenciable entre las superficies  $M$  y  $\mathbb{S}^2$ . Dicha aplicación recibe el nombre de *aplicación de Gauss*:

$$\begin{aligned} N : M &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ p &\mapsto N(p). \end{aligned}$$

La diferencial de una aplicación entre dos superficies regulares describe cómo los vectores tangentes se transforman a través de dicha aplicación. En particular, cuando se

trata de la aplicación de Gauss, se obtiene el operador de Weingarten. Este operador estudia la variación del campo normal a lo largo de curvas contenidas en la superficie.

**Definición 2.2.15.** Sea  $f : M_1 \rightarrow M_2$  una aplicación diferenciable entre dos superficies regulares  $M_1$  y  $M_2$ . Sea  $p$  un punto en la superficie  $M_1$ . Definimos la *diferencial de  $f$  en  $p$*  como la aplicación:

$$\begin{aligned} df_p : T_p M_1 &\longrightarrow T_{f(p)} M_2 \\ \gamma'(0) &\longmapsto df_p(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0). \end{aligned}$$

**Definición 2.2.16.** Sea  $M$  una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss  $N$  y  $p$  un punto en la superficie. El *operador de Weingarten* o forma  $L_p$  es la diferencial de  $N$  en  $p$  cambiada de signo y entendida como endomorfismo de  $T_p M$ :

$$\begin{aligned} L_p : T_p M &\longrightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2 \equiv T_p M \\ \mathbf{v} = \gamma'(0) &\longmapsto -dN_p(\gamma'(0)) = -(N \circ \gamma)'(0). \end{aligned}$$

El operador de Weingarten es autoadjunto con respecto a la primera forma fundamental, es decir,  $\langle L_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, L_p \mathbf{w} \rangle$  para todo par de vectores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$ . Esto garantiza la existencia de una base ortonormal de autovectores. Además, al ser simétrico, es diagonalizable. Los autovalores del operador de Weingarten reciben el nombre de curvaturas principales.

**Definición 2.2.17.** Sea  $M$  una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss  $N$  y  $p$  un punto en la superficie. Las *curvaturas principales de  $M$  en  $p$*  son los autovalores  $k_1 = k_1(p)$  y  $k_2 = k_2(p)$  que diagonalizan el operador de Weingarten. Sus correspondientes autovectores  $\mathbf{v}_{k_1}$  y  $\mathbf{v}_{k_2}$  reciben el nombre de *direcciones principales de  $M$  en  $p$* .

**Observación 2.2.18.** Las curvaturas principales están determinadas salvo signo, pues este depende de la orientación escogida en la superficie.

**Definición 2.2.19.** La curvatura de Gauss de  $M$  en  $p$ ,  $K = K(p)$ , es el determinante del operador de Weingarten, es decir,  $K = k_1 \cdot k_2$ .

**Definición 2.2.20.** La curvatura media de  $M$  en  $p$ ,  $H = H(p)$ , es la mitad de la traza del operador de Weingarten:  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ .

**Observación 2.2.21.** La curvatura de Gauss,  $K(p)$ , no depende de la orientación tomada en la superficie, mientras que la curvatura media,  $H(p)$ , cambia de signo si se varía la orientación.

**Definición 2.2.22.** Una *superficie minimal* es una superficie cuya curvatura media  $H$  es nula en todos sus puntos.

Por último introducimos el concepto de la segunda forma fundamental de una superficie. Esta mide cómo se curva una superficie en el espacio en relación con la variación de su vector normal, pues se define a partir del operador de Weingarten. La segunda forma fundamental nos permite a su vez definir el concepto de curvatura normal a la superficie en un punto o viceversa.

**Definición 2.2.23.** Sea  $M$  una superficie regular y orientada con la aplicación de Gauss  $N$ . Definimos la *segunda forma fundamental de  $M$  en  $p$*  como la aplicación bilineal y simétrica definida por:

$$\begin{aligned} II_p: T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \langle L_p \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Si  $(U, X)$  es una parametrización de  $M$ , los *coeficientes de la segunda forma fundamental* son las funciones diferenciables  $e, f, g: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

- $e(u, v) := II_p(X_u(u, v), X_u(u, v)) = \langle L_p X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle = \langle N(u, v), X_{uu}(u, v) \rangle$ ,
- $f(u, v) := II_p(X_u(u, v), X_v(u, v)) = \langle L_p X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle = \langle N(u, v), X_{uv}(u, v) \rangle$ ,
- $g(u, v) := II_p(X_v(u, v), X_v(u, v)) = \langle L_p X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle = \langle N(u, v), X_{vv}(u, v) \rangle$ .

**Observación 2.2.24.** La segunda forma fundamental admite una representación matricial, que en la base  $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$  y para el punto  $p = X(u, v)$  es la siguiente:

$$II_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

**Observación 2.2.25.** Las matrices asociadas a la primera y segunda forma fundamental y el operador de Weingarten cumplen la siguiente igualdad:  $II_p = I_p L_p$ .

Sea  $M$  una superficie parametrizada por  $X(u, v)$ . En la base  $\mathcal{B} = \{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$  con  $p = X(u, v)$  se tiene que la matriz de la segunda forma fundamental,  $II_p$ , en el punto  $p$  tiene la forma (2.1).

Veamos ahora la expresión de la segunda forma fundamental respecto a otra base  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  de  $T_pM$  tal que  $\mathbf{v}_1 = a_{11}X_u + a_{21}X_v$  y  $\mathbf{v}_2 = a_{12}X_u + a_{22}X_v$ . Definimos  $A \in GL(2, \mathbb{R})$  como la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Independientemente de la base utilizada, el valor de la segunda forma fundamental es invariante, es decir,  $(v'_{\mathcal{B}'})^t II'_p v'_{\mathcal{B}'} = (v_{\mathcal{B}})^t II_p v_{\mathcal{B}}$  donde  $v_{\mathcal{B}} = Av'_{\mathcal{B}'}$ , siendo  $II_p, II'_p$  las matrices de la segunda forma fundamental asociadas a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$ , respectivamente. Mientras la orientación de ambas bases coincide para que el determinante del cambio de base sea positivo, se tiene que:

$$v_{\mathcal{B}}^t II_p v_{\mathcal{B}} = (Av'_{\mathcal{B}'})^t II_p Av'_{\mathcal{B}'} = (v'_{\mathcal{B}'})^t II'_p v'_{\mathcal{B}'} \iff II'_p = A^t II_p A. \quad (2.2)$$

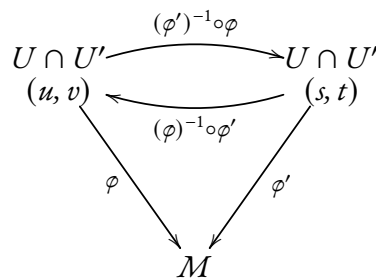
Por tanto, cuando se realiza un cambio de base en  $T_p M$ , la matriz de la segunda forma fundamental varía según la expresión (2.2). En el caso de la matriz de la primera forma fundamental, el procedimiento es el mismo.

Si en un entorno del punto  $p$  en  $M$  hay dos parametrizaciones  $(U, X)$  y  $(U', X')$  tales que  $X(u, v) = X'(s, t) = p$  entonces, para adaptar la Expresión (2.2), es necesario aplicar el cambio de cartas correspondiente. Es decir, si  $\mathcal{B} = \{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$  depende de las variables  $u$  y  $v$  y  $\mathcal{B}' = \{X'_s(s, t), X'_t(s, t)\}$  depende de las variables  $s$  y  $t$ , siendo  $\varphi : U \cap U' \rightarrow M$  y  $\varphi' : U \cap U' \rightarrow M$  unas cartas locales para cada una de las parametrizaciones, para cada  $(u, v) \in U \cap U'$  se cumple que:

$$X'_s(((\varphi')^{-1} \circ \varphi)(u, v)) = a_{11}(u, v)X_u(u, v) + a_{21}(u, v)X_v(u, v),$$

$$X'_t(((\varphi')^{-1} \circ \varphi)(u, v)) = a_{12}(u, v)X_u(u, v) + a_{22}(u, v)X_v(u, v).$$

Para expresar la matriz de la segunda forma fundamental en función de las variables  $s$  y  $t$  hay que deshacer el cambio de cartas mediante  $(u, v) = (\varphi^{-1} \circ \varphi')(s, t)$  para todo  $(s, t) \in U \cap U'$ . Esto se verá con más detalle en un ejemplo en la Subsección 3.1.1.



## 2.3. Curvatura normal y geodésica

En esta sección definimos el concepto de curvatura normal de una superficie regular en un punto dado y veremos la caracterización de las curvaturas principales como valores

máximos y mínimos de la curvatura normal. Se introduce también una clasificación de puntos en la superficie. Además, se enuncia el *Teorema de Meusnier*, que nos permite enlazar con la noción de curvatura geodésica.

La curvatura normal en dirección  $\mathbf{v}$  se define a partir de la curvatura de una curva en la superficie obtenida como intersección de la superficie y el plano generado por  $\mathbf{v}$  y el vector normal a la superficie. Análíticamente, la curvatura normal se define como sigue:

**Definición 2.3.1.** Sea  $M$  una superficie regular,  $p$  un punto en  $M$  y  $\mathbf{v}$  un vector en  $T_pM$ . Definimos la *curvatura normal de  $M$  en  $p$  en la dirección de  $\mathbf{v}$*  como  $k_n(\mathbf{v}, p) := \frac{II_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{I_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \frac{II_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2}$ .

**Observación 2.3.2.** Las curvaturas principales  $k_1(p)$ ,  $k_2(p)$ , introducidas en la Definición 2.2.17, son valores concretos de la curvatura normal  $k_n(\mathbf{v}, p)$  tales que  $k_1(p) \leq k_n(\mathbf{v}, p) \leq k_2(p)$ , para todo  $\mathbf{v} \in T_pM$  con  $\|\mathbf{v}\| = 1$ .

Al evaluar la curvatura normal sobre vectores unitarios, se puede expresar como una función de variable real si se toma una base ortonormal de  $T_pM$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k_n : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto k_n((\cos \theta, \sin \theta), p). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como es una función continua definida en un compacto, el *Teorema de Bolzano* nos garantiza la existencia de máximos y mínimos de  $k_n$ , que son las curvaturas principales.

**Observación 2.3.3.** Las curvaturas principales  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$  coinciden con la curvatura normal en  $p$  en las direcciones principales  $\mathbf{v}_{k_1}$  y  $\mathbf{v}_{k_2}$ , respectivamente.

Las nociones de curvatura de Gauss y curvatura media permiten clasificar los diferentes tipos de puntos en una superficie según su comportamiento local. Sea  $p$  un punto en la superficie, entonces se trata de un:

- Punto elíptico, si la curvatura de Gauss es positiva. En este caso, la superficie es convexa o cóncava en un entorno del punto, es decir, en un entorno del punto la superficie está a un lado del plano tangente.
- Punto hiperbólico, si la curvatura de Gauss es negativa. Esto significa que la superficie tiene curvaturas principales de signo opuesto y en un entorno del punto la superficie se encuentra a ambos lados del plano tangente.
- Punto parabólico, si la curvatura de Gauss es nula, pero la curvatura media es distinta de cero. Esto sucede cuando una curvatura principal se anula, como es el caso de un cilindro, que contiene rectas por ser una superficie reglada (ver Definición 4.4.1).

- Punto umbilical propio, si las dos curvaturas principales son iguales, pero distintas de cero. En este caso, la superficie se comporta localmente como una esfera puesto que la curvatura normal (2.3) es una función constante.
- Punto umbilical plano, si las dos curvaturas principales son nulas. Como consecuencia, tanto la curvatura de Gauss como la curvatura media se anulan porque la curvatura normal (2.3) es la función cero. En estos puntos, la superficie es localmente plana.

Los nombres en esta clasificación no son arbitrarios, sino que reflejan una interpretación geométrica de los distintos tipos de puntos en la superficie. Todo ello cobrará más sentido con la introducción del concepto de la *indicatriz de Dupin* en el capítulo 3.

**Teorema 2.3.4 (Teorema de Meusnier).** *Sea  $M$  una superficie regular orientada por el vector normal  $N$  y  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva diferenciable parametrizada regular en la superficie. Sea  $\gamma''(t)^\perp$  la componente normal de  $\gamma''(t)$  en  $(T_{\gamma(t)}M)^\perp$ . Entonces,*

$$\gamma''(t)^\perp = \langle \gamma''(t), N(\gamma(t)) \rangle N(\gamma(t)) = II_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))N(\gamma(t)).$$

*Demostración.* Al ser  $\gamma$  una curva en la superficie  $M$ , se cumple que  $\langle \gamma'(t), N(\gamma(t)) \rangle = 0$ . Derivando la expresión anterior respecto al tiempo se tiene que  $\langle \gamma''(t), N(\gamma(t)) \rangle + \langle \gamma'(t), \frac{d}{dt}N(\gamma(t)) \rangle = 0$ . La componente normal de  $\gamma''$  se obtiene con:

$$\begin{aligned} \gamma''(t)^\perp &= \langle \gamma''(t), N(\gamma(t)) \rangle = \left\langle -\frac{d}{dt}N(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle = \langle -dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \langle L_{\gamma(t)}\gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = II_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)). \end{aligned}$$

**Proposición 2.3.5.** *Sea  $M$  una superficie regular orientada por el vector normal  $N$  y sea  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva diferenciable parametrizada regular contenida en la superficie  $M$ . Si la curva  $\gamma$  está parametrizada por longitud de arco, entonces la componente tangencial de  $\gamma''(t)$ , denotada como  $\gamma''(t)^\top$ , es ortogonal a  $\gamma'(t)$ .* □

*Demostración.* Dado que  $\gamma(t)$  está parametrizada por longitud de arco se tiene que

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 1.$$

Derivando la expresión con respecto al tiempo se obtiene que:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle.$$

Por tanto,  $\gamma'(t)$  y  $\gamma''(t)$  son vectores ortogonales. A partir de la descomposición  $\gamma''(t) = \gamma''(t)^\top + \gamma''(t)^\perp$  se tiene que:

$$\langle \gamma''(t)^\top, \gamma'(t) \rangle = \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle - \langle \gamma''(t)^\perp, \gamma'(t) \rangle = -\langle \gamma''(t)^\perp, \gamma'(t) \rangle = 0.$$

**Corolario 2.3.6.** Con las hipótesis de la Proposición 2.3.5,  $\{\gamma'(t), J_{\gamma'(t)}, N(\gamma(t))\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  orientada positivamente, siendo  $J_{\gamma'(t)}$  la rotación de  $\gamma'(t)$  un ángulo  $\frac{\pi}{2}$  en el sentido antihorario en el plano tangente  $T_{\gamma(t)}M$ , es decir,  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . □

**Observación 2.3.7.** De la Proposición 2.3.5 se deduce que  $J_{\gamma'(t)}$  y  $\gamma''(t)^\top$  son vectores proporcionales.

**Definición 2.3.8.** Sea  $M$  una superficie regular y  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva parametrizada por arco. La *curvatura geodésica* de  $\gamma$  en  $M$  es el escalar  $k_g(t)$  tal que  $\gamma''(t)^\top = k_g(t)J_{\gamma'(t)}$ .

Del Teorema de Meusnier 2.3.4 y la Proposición 2.3.5 se deduce que si  $\gamma : I \rightarrow M$  está parametrizada por longitud de arco entonces:

$$\gamma''(t) = \gamma''(t)^\top + \gamma''(t)^\perp = k_g(t)J_{\gamma'(t)} + k_n(\gamma'(t), \gamma(t))N(\gamma(t)).$$

Es importante que  $\gamma$  esté parametrizada por longitud de arco para que  $k_n(\gamma'(t), \gamma(t)) = \frac{II_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|^2} = II_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))$ .

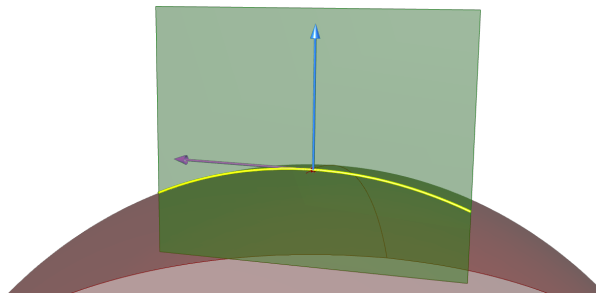
Además, al ser  $\{\gamma'(t), J_{\gamma'(t)}, N(\gamma(t))\}$  una base ortonormal, la curvatura de la curva  $\gamma(t)$ ,  $k_\gamma(t)$ , verifica  $k_\gamma(t) = \|\gamma''(t)\| = \sqrt{k_g(t)^2 + k_n(t)^2}$  y por tanto,  $k_\gamma(t)^2 = k_g(t)^2 + k_n(\gamma'(t), \gamma(t))^2$ . Es importante recordar que tanto la curvatura normal,  $k_n(\gamma'(t), \gamma(t))$ , como la curvatura geodésica,  $k_g(t)$ , dependen de la curva  $\gamma$ , no solo del punto  $\gamma(t)$ .

**Observación 2.3.9.** Sea  $M$  una superficie regular. Si  $p$  es un punto regular no umbilical, se puede construir un sistema de referencia afín ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  con las direcciones principales normalizadas y el vector normal a la superficie  $\mathcal{R} = \{p; \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, N\}\}$ .

**Observación 2.3.10.** Si para una superficie regular  $M$  con parametrización  $(U, X)$  se cumple que la primera forma fundamental en un punto  $p = X(u, v)$  de la superficie es diagonal, se puede construir un sistema de referencia afín ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  con los vectores tangentes de las curvas coordenadas (ver Definición 2.4.1),  $X_u(u, v)$  y  $X_v(u, v)$ , junto con el vector normal a la superficie:

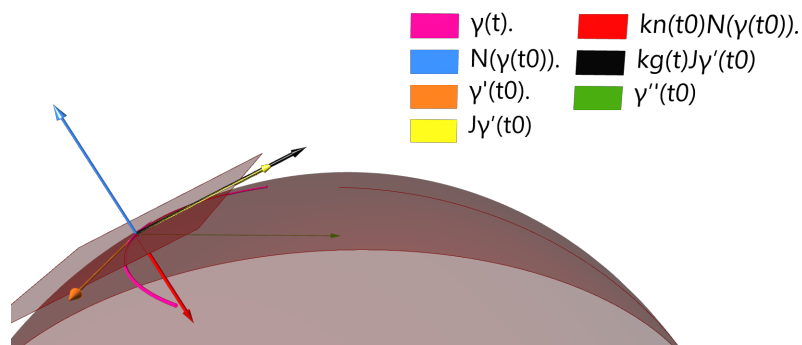
$$\mathcal{R} = \{p = X(u, v); \{X_u(u, v), X_v(u, v), N(p)\}\}.$$

Construimos ahora una curva concreta sobre la superficie obtenida a partir de la intersección de la superficie con el plano generado por el vector normal a la superficie y un vector del plano tangente.



**Figura 2.1.** Representación gráfica de una superficie, el vector normal en un punto (color azul), un vector del plano tangente en dicho punto (color morado), el plano normal generado por ambos vectores (color verde) y la curva intersección del plano normal y la superficie (color amarillo). Imagen realizada en *Grasshopper*.

La curva resultante,  $\gamma$ , verifica que su vector de curvatura es proporcional al vector normal de la superficie. La constante de proporcionalidad es la curvatura normal en  $\gamma(t)$  en la dirección  $\gamma'(t)$ .



**Figura 2.2.** Representación de una curva  $\gamma(t)$  (en color rosa) en una superficie, el vector normal de la superficie (en azul) en un punto  $\gamma(t_0)$ ,  $\gamma'(t_0)$  (en color naranja) y el vector  $J_{\gamma'}(t_0)$  (en color amarillo). El vector en color rojo representa la proyección de  $\gamma''(t_0)$  sobre el vector normal, es decir,  $k_n(t_0)N(\gamma(t_0))$ . El vector en color negro la proyección sobre  $J_{\gamma'}(t_0)$ , luego  $k_g(t)J_{\gamma'}(t_0)$ . Imagen realizada en *Grasshopper*.

## 2.4. Curvas coordenadas y líneas de curvatura

En esta sección se abordan los conceptos de curvas coordenadas y líneas de curvatura. Las curvas coordenadas son aquellas curvas que se obtienen fijando uno de los parámetros de la parametrización de la superficie y variando el otro. Estas curvas permiten estudiar cómo la superficie se comporta a lo largo de las direcciones coordenadas. Por otro lado, las líneas de curvatura son curvas sobre la superficie cuyo vector tangente coincide con las direcciones principales en todo el dominio de definición.

**Definición 2.4.1.** Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular y  $(U, X)$  una parametrización de  $\mathcal{M}$ . Las *curvas coordenadas* de  $\mathcal{M}$  de la parametrización  $X$  en un punto  $p = X(u_0, v_0)$  son las curvas  $X(u_0, v)$  y  $X(u, v_0)$  sobre la superficie donde  $(u_0, v_0)$  está fijado en  $U$ .

**Definición 2.4.2.** Sea  $\gamma(t)$  una curva regular contenida en una superficie  $\mathcal{M}$ . Se dice que  $\gamma(t)$  es una *línea de curvatura* si la dirección del vector tangente  $\gamma'(t)$  en cada punto coincide con una dirección principal de la superficie en ese punto.

Para obtener las líneas de curvatura en un punto se debe resolver una ecuación diferencial. Sin embargo, construir una parametrización de la superficie en un entorno de un punto cuyas curvas coordenadas sean líneas de curvatura, no es un problema del cual siempre se tenga solución. Esto se mostrará en las superficies estudiadas en el Capítulo 4.

Tal y como se ha mencionado en la Sección 2.2, las matrices de la primera y segunda forma fundamental y del operador de Weingarten en un punto  $p$  está dadas por:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad II_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \quad L_p = I_p^{-1} II_p = \begin{pmatrix} \frac{Ge - Ff}{EG - F^2} & \frac{Gf - Fg}{EG - F^2} \\ \frac{-Fe + Ef}{EG - F^2} & \frac{-Ff + Eg}{EG - F^2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Sea  $\mathcal{M}$  una superficie con parametrización  $X(u, v)$ . Cualquier curva definida por  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  está en la superficie  $\mathcal{M}$ . El vector tangente de la curva  $\gamma(t)$  es  $\gamma'(t) = u'(t) \cdot X_u(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot X_v(u(t), v(t))$ . Las coordenadas de este vector del espacio tangente en la base  $\{X_u(u(t), v(t)), X_v(u(t), v(t))\}$  del plano tangente,  $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ , son  $(u'(t), v'(t))$ .

Teniendo en cuenta la Definición 2.4.1,  $\gamma(t)$  es una línea de curvatura si el vector  $(u'(t), v'(t))$  es un vector propio del operador de Weingarten  $L_p$ . Es decir:

$$L_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

donde hemos denotado  $u'(t)$  como  $u'$  y  $v'(t)$  como  $v'$  por simplificar la notación. Para hallar  $u$  y  $v$  se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} au' + bv' = ku', \\ cu' + dv' = kv'. \end{cases}$$

Multiplicando las ecuaciones del sistema por  $v'$  y  $u'$  respectivamente y reorganizando los términos tenemos que:

$$\begin{cases} au'v' + b(v')^2 = ku'v', \\ c(u')^2 + du'v' = kv'v'. \end{cases}$$

En consecuencia, se deduce que  $au'v' + b(v')^2 = c(u')^2 + du'v'$ , o lo que es lo mismo,  $b(v')^2 + (a - d)u'v' - c(u')^2 = 0$ . Reemplazando ahora los términos  $a, b, c$  y  $d$  por su expresión en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental y multiplicando la ecuación por  $-1$  se llega a:

$$(Fg - Gf)(v')^2 + (Eg - Ge)u'v' + (Ef - Fe)(u')^2 = 0. \quad (2.5)$$

Esta ecuación puede escribirse de forma matricial siendo equivalente a que el siguiente determinante sea nulo:

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

**Proposición 2.4.3.** *Sea  $M$  una superficie regular con parametrización  $X(u, v)$ . Las curvas coordenadas de  $M$  bajo la parametrización  $X(u, v)$  son líneas de curvatura si y solo si el operador de Weingarten es diagonal.*

*Demostración.*  $\implies$  Sean  $\gamma_1(u) = X(u, v_0)$  y  $\gamma_2(v) = X(u_0, v)$  las curvas coordenadas en  $M$  para la parametrización  $X(u, v)$ . Se verifica por definición que  $\gamma_1'(u) = X_u(u, v_0)$  y  $\gamma_2'(v) = X_v(u_0, v)$ .

Las coordenadas de  $\gamma_1'(u_0)$  y  $\gamma_2'(v_0)$  son  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  respectivamente en la base  $\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$  de  $T_pM$  con  $p = X(u_0, v_0)$ . Además, ambas curvas verifican la ecuación (2.5) por ser líneas de curvaturas. Se verifica entonces que en el punto  $p$ :

$$\begin{cases} Ef - Fe = 0, \\ Fg - Gf = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Por tanto, teniendo en cuenta la Expresión (2.4), se concluye que el operador de Weingarten es diagonal.

$\Leftarrow$  Asumimos que el operador de Weingarten es diagonal. Entonces  $Gf - Fg = Ef - Fe = 0$ . Por tanto, la ecuación diferencial (2.5) que define las líneas de curvatura en un punto  $p \in M$  para la parametrización  $X(u, v)$  con  $p = X(u_0, v_0)$  se reduce a:

$$-(Ge - Eg)u'v' = 0. \quad (2.7)$$

De esta manera, si asumimos que  $(Ge - Eg) \neq 0$  se tiene que o bien  $u' = 0$  o bien  $v' = 0$ . Luego, las líneas de curvatura resultarían en  $u(t) = C_1$  o  $v(t) = C_2$  siendo  $C_1, C_2$  constantes. Por consiguiente, en el punto  $p = X(u_0, v_0)$  las líneas de curvatura son  $X(u_0, v)$  y  $X(u, v_0)$ , es decir, las curvas coordenadas de la parametrización.

Distinguimos dos casos. Si  $Ge - Eg = 0$  pero  $F \neq 0$ , entonces:

$$\frac{e}{E} = \frac{g}{G} = \frac{f}{F} = \lambda.$$

Esta condición implica que  $p$  es un punto umbilical porque:

$$II_p = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \lambda I_p \implies L_p = I_p^{-1} II_p = \lambda I_d,$$

siendo  $I_d$  la matriz identidad  $2 \times 2$ .

Por lo tanto, los dos valores propios del operador de Weingarten son iguales y en consecuencia, cualquier vector no nulo es una dirección principal. En particular, lo son las curvas coordenadas  $X_u(u_0, v_0)$  y  $X_v(u_0, v_0)$ .

Por otro lado, si  $Ge - Eg = 0$  y  $F = 0$ , se tiene que  $Gf = 0$  y  $Ef = 0$ . Como  $E, G > 0^1$  al tratarse de una superficie regular, entonces  $f = 0$ , obteniendo que:

$$L_p = \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & 0 \\ 0 & \frac{g}{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & 0 \\ 0 & \frac{e}{E} \end{pmatrix}.$$

De nuevo, en este caso los autovalores de la matriz son iguales y el razonamiento sigue como en el caso anterior.

□

**Proposición 2.4.4.** *Sea  $(U, X)$  una parametrización de  $M$ . Si la superficie  $M$  está parametrizada por líneas de curvatura, entonces  $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$  es una base de  $T_{X(u,v)}M$  ortogonal si  $X(u, v)$  no es un punto umbilical.*

<sup>1</sup> $E = \langle X_u, X_u \rangle = \|X_u\|^2 > 0$  y  $G = \|X_v\|^2 > 0$  ya que si son nulos entonces serían el vector cero. Esto no puede verificarse al tratarse de una superficie regular, pues no se cumple entonces la propiedad 3 de la Definición 2.2.1.

*Demostración.* Si una superficie está parametrizada por líneas de curvatura, entonces las curvas coordenadas son líneas de curvatura. Esto implica que los vectores tangentes  $X_u$  y  $X_v$  son autovectores del operador de Weingarten.

Como dicho operador es simétrico (autoadjunto) respecto al producto escalar inducido por la primera forma fundamental, sus autovectores asociados a valores propios distintos (las curvaturas principales) son ortogonales. Por lo tanto, se cumple que  $\langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle = 0$  y con ello se garantiza su ortogonalidad.  $\square$

**Observación 2.4.5.** El recíproco no es cierto. Un ejemplo de ello es el paraboloides hiperbólico con la parametrización (3.7).

**Observación 2.4.6.** Si los autovalores del operador de Weingarten son iguales, la base  $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$  de  $T_{X(u,v)}\mathcal{M}$  no se puede garantizar que sea ortogonal. La curvatura normal,  $k_n(\theta)$ , en este punto es una función constante. Luego cualquier vector unitario de  $T_{X(u,v)}\mathcal{M}$  maximiza y minimiza la curvatura normal y por tanto, es una dirección principal, no existiendo dos direcciones principales distinguidas.

Para este trabajo, en las regiones umbilicales consideraremos por definición que las líneas de curvatura son ortogonales. Con este ajuste, se tiene que en una región umbilical de una superficie  $\mathcal{M}$ , si sus curvas coordenadas son líneas de curvatura, entonces  $F = 0$  por definición. Como  $F = 0$ , el operador de Weingarten,  $L_p$ , es de la forma:

$$L_p = \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & \frac{f}{E} \\ \frac{f}{G} & \frac{g}{G} \end{pmatrix}.$$

Imponer que los autovalores de  $L_p$  sean iguales es equivalente a imponer que el discriminante del polinomio característico de  $L_p$  sea nulo. Como  $P_{L_p}(\lambda) = \det(L_p - \lambda I_d)$ , la condición del discriminante es:

$$\left(\frac{e}{E} - \lambda\right) \left(\frac{g}{G} - \lambda\right) - \frac{f^2}{EG} = 0 \iff \lambda^2 - \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)\lambda + \frac{eg}{EG} - \frac{f^2}{EG} = 0.$$

Imponemos que el discriminante del polinomio sea nulo:

$$\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)^2 + \frac{4f^2}{EG} - \frac{4eg}{EG} = \left(\frac{e}{E} - \frac{g}{G}\right)^2 + \frac{4f^2}{EG} = 0 \iff f = 0 \text{ y } \frac{e}{E} = \frac{g}{G},$$

Por tanto, en regiones umbilicales y bajo las hipótesis consideradas, puesto que  $E$  y  $G$  son positivos, el operador de Weingarten es diagonal y los elementos de su diagonal son iguales.



# 3

## Paraboloide osculatriz

La clasificación de puntos de una superficie también se puede realizar a partir de la indicatriz de Dupin ([CD13],[ER06]) o del paraboloide osculatriz ([Co69],[ZH95]), que es una superficie cuádrica que aproxima a la superficie original en un entorno del punto hasta orden 2.

Estos dos objetos geométricos se relacionan porque la indicatriz de Dupin es una cónica del mismo tipo que las que se obtienen al cortar el paraboloide osculatriz con planos paralelos al plano tangente de la superficie en dicho punto ([MS79]). El tipo de cónica que es la indicatriz de Dupin determina la naturaleza del punto de estudio. Por ese motivo, decimos que el paraboloide osculatriz recoge la información de la indicatriz de Dupin ([BG88]).

### 3.1. Indicatriz de Dupin

La indicatriz de Dupin es una herramienta empleada en el análisis local de una superficie. Esta queda definida a partir de la segunda forma fundamental y su estudio proporciona una caracterización geométrica de los distintos tipos de puntos en la superficie.

A lo largo del documento se comprueba como, en puntos elípticos, la indicatriz de Dupin es una elipse, en puntos hiperbólicos la indicatriz es una hipérbola y en puntos parabólicos es un par de rectas paralelas. Veamos cómo construir la indicatriz de Dupin.

Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular parametrizada por líneas de curvatura y  $p$  un punto en la superficie. Tomamos como sistema de referencia afín ortonormal  $\mathcal{R} = \{p; \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, N\}\}$ , donde  $N$  es el campo normal a la superficie  $\mathcal{M}$  en  $p$  y  $\mathbf{v}_{k_1}$  y  $\mathbf{v}_{k_2}$  son las direcciones principales en  $p$  y por tanto direcciones ortogonales en el plano tangente. Sin pérdida de generalidad se toman  $\mathbf{v}_{k_1}$  y  $\mathbf{v}_{k_2}$  como vectores unitarios.

**Observación 3.1.1.** En los puntos umbilicales cualquier vector del plano tangente es una dirección principal y por tanto las direcciones principales no están biunívocamente determinadas. Dos vectores cualesquiera ortogonales del plano tangente  $T_p\mathcal{M}$  determinan un sistema de referencia afín ortonormal junto con el vector normal,  $N$ .

Sean  $k_1$  y  $k_2$  las curvaturas principales de la superficie  $\mathcal{M}$  en  $p$ . En el sistema de referencia afín ortonormal considerado,  $\mathcal{R} = \{p; \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, N\}\}$ , el operador de Weingarten es diagonal con las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  como elementos de la diagonal. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = L_p = I_p^{-1}II_p = II_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

pues al haber tomado como base de  $T_p\mathcal{M}$  una base ortonormal, la matriz de la primera forma fundamental es la identidad.

**Observación 3.1.2.** Como la superficie está parametrizada por líneas de curvatura, se verifica que  $\{p; \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, N\}\} = \{p; \{X_u, X_v, N\}\}$ .

Tomamos un vector  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$  unitario con coordenadas  $(v_1, v_2)$  en la base ortonormal  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$  de  $T_p\mathcal{M}$ . La curvatura normal en  $p$  en la dirección  $\mathbf{v}$  es:

$$k_n(\mathbf{v}, p) = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k_1 v_1^2 + k_2 v_2^2.$$

Por otro lado, como hemos tomado  $\bar{\mathbf{v}}$  unitario en una base ortonormal de  $T_p\mathcal{M}$ , podemos expresar  $v_1$  y  $v_2$  como  $v_1 = \cos \theta$  y  $v_2 = \sin \theta$  con  $\theta \in [0, 2\pi)$ . La curvatura normal se expresa como una función de variable real  $\theta$ :

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Suponemos ahora que  $|k_n(\theta)| = \frac{1}{\mu^2}$  y realizamos el cambio de variable  $x_1 = \mu \cos \theta$  y  $x_2 = \mu \sin \theta$  con  $\mu > 0$ . La ecuación resulta en:

$$\pm 1 = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2. \quad (3.2)$$

**Observación 3.1.3.** Estos cambios de variable son únicamente posibles si la matriz de la primera forma fundamental,  $I_p$ , es la identidad y el sistema de referencia tomado es ortonormal. En caso contrario, habría que tener en cuenta en el cambio de variable el producto escalar interno que define la primera forma fundamental. Veremos este caso en la Sección 3.1.1 mediante un ejemplo.

La suposición de tomar  $|k_n(\theta)| = \frac{1}{\rho^2}$  se relacionará con secciones planas del paraboloides osculatríz mediante planos paralelos al plano tangente debido al sistema de referencia afín utilizado. Estas secciones son cónicas del mismo tipo que la indicatríz de Dupin en el punto (ver Sección 3.2).

Trabajamos ahora en un caso más general. Sea  $M$  una superficie regular con parametrización  $X(u, v)$ . Suponemos que  $M$  no está parametrizada por líneas de curvatura. De esta manera, por lo visto en la Proposición 2.4.3, sabemos que en la base natural de la parametrización el operador de Weingarten no es diagonal. Definimos  $\mathcal{R}$  como la referencia  $\mathcal{R} = \{p; \{X_u, X_v, N\}\}$ , no necesariamente ortogonal.

Si en la base natural de la parametrización la matriz de la primera forma fundamental es diagonal, mantenemos dicha referencia. En caso contrario, construimos un sistema de referencia afín ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  utilizando las direcciones principales y el vector normal unitario a la superficie. Es decir,  $\bar{\mathcal{R}} = \{p; \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, N\}\}$ .

**Observación 3.1.4.** Si el punto de estudio,  $p$ , es umbilical, podemos considerar como base del subespacio vectorial  $T_pM$  en la referencia cualquier par de vectores ortogonales que lo generen.

Llamamos  $\bar{I}_p$  e  $\bar{II}_p$  a las matrices de la primera y segunda forma fundamental asociadas a esta nueva referencia. Denotamos por  $A$  a la matriz de cambio de base de  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$  a  $\{X_u, X_v\}$ . Se verifica entonces por (2.2) que:

$$\begin{cases} \bar{I}_p = A^t I_p A = \begin{pmatrix} \bar{E} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{pmatrix}, \\ \bar{II}_p = A^t II_p A = \begin{pmatrix} \bar{e} & \bar{f} \\ \bar{f} & \bar{g} \end{pmatrix}, \end{cases}$$

donde la matriz  $\bar{I}_p$  es diagonal puesto que la base  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$  es ortogonal.

Tomamos un vector unitario  $\bar{\mathbf{v}} \in T_pM$  de modo que, al ser la base  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$  ortogonal, podemos escribir  $\bar{\mathbf{v}} = (\lambda \cos \bar{\theta}, \lambda \sin \bar{\theta})$  para un cierto ángulo  $\bar{\theta} \in [0, 2\pi]$  y  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\bar{E} \cos^2 \bar{\theta} + \bar{G} \sin^2 \bar{\theta}}}$ .

**Observación 3.1.5.** El valor de  $\lambda$  depende de la métrica inducida por la primera forma fundamental. Es decir, si imponemos que el vector  $\bar{\mathbf{v}}$  es unitario, debe verificarse que:

$$1 = \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\theta} & \lambda \sin \bar{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\theta} \\ \lambda \sin \bar{\theta} \end{pmatrix} \iff \lambda = \frac{1}{\sqrt{\bar{E} \cos^2 \bar{\theta} + \bar{G} \sin^2 \bar{\theta}}}. \quad (3.3)$$

**Observación 3.1.6.** En caso de que ambas bases sean ortogonales, los ángulos  $\bar{\theta}$  y  $\theta$  guardan una relación. Denotamos  $\mathcal{B} = \{X_u, X_v\}$  y  $\bar{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$ . De esta manera, si ambas bases tienen la misma orientación, definimos  $\phi = \angle_{\mathbf{v}_{k_1}} X_u = \angle_{\mathbf{v}_{k_2}} X_v$  que verifica:

$$\cos \phi = \frac{(X_u)_{\bar{\mathcal{B}}}^t \bar{II}_p (\mathbf{v}_{k_2})_{\bar{\mathcal{B}}}}{\sqrt{(X_u)_{\bar{\mathcal{B}}}^t \bar{II}_p (X_u)_{\bar{\mathcal{B}}} \sqrt{(\mathbf{v}_{k_2})_{\bar{\mathcal{B}}}^t \bar{II}_p (\mathbf{v}_{k_2})_{\bar{\mathcal{B}}}}}}.$$

De esta manera, la curvatura normal de  $\mathcal{M}$  en  $p$  en la dirección de  $\bar{\mathbf{v}}$ , vector unitario, es:

$$\begin{aligned} k_n(\bar{\theta}) &= \frac{(\bar{\mathbf{v}})^t \bar{II}_p \bar{\mathbf{v}}}{(\bar{\mathbf{v}})^t \bar{I}_p \bar{\mathbf{v}}} = (\bar{\mathbf{v}})^t \bar{II}_p \bar{\mathbf{v}} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\theta} & \lambda \sin \bar{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e} & \bar{f} \\ \bar{f} & \bar{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\theta} \\ \lambda \sin \bar{\theta} \end{pmatrix} = \bar{e} \lambda^2 \cos^2 \bar{\theta} + 2\bar{f} \lambda^2 \cos \bar{\theta} \sin \bar{\theta} + \bar{g} \lambda^2 \sin^2 \bar{\theta}. \end{aligned}$$

Suponiendo de nuevo que  $|k_n(\bar{\theta})| = \frac{1}{\mu^2}$ , realizamos el cambio de variable  $\bar{x}_1 = \lambda \mu \cos \bar{\theta}$  y  $\bar{x}_2 = \lambda \mu \sin \bar{\theta}$ , reescalando por el factor proveniente de la primera forma fundamental. Por tanto, la indicatriz de Dupin en este caso es:

$$\pm 1 = \bar{e} \bar{x}_1^2 + 2\bar{f} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{g} \bar{x}_2^2. \quad (3.4)$$

Puesto que la matriz de la cónica (3.4) es:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{e} & \bar{f} \\ 0 & \bar{f} & \bar{g} \end{pmatrix},$$

la clasificación depende del signo de  $\bar{e} \bar{g} - \bar{f}^2$ , es decir, el determinante de la segunda forma fundamental.

- Si el punto  $p$  es elíptico o umbilical propio,  $\bar{e} \bar{g} - \bar{f}^2 > 0$ , la indicatriz de Dupin es una elipse y por tanto, una cónica regular.
- Si  $p$  es hiperbólico,  $\bar{e} \bar{g} - \bar{f}^2 < 0$ , entonces la indicatriz de Dupin resulta en un par de hipérbolas conjugadas, tratándose así también de una cónica regular.
- Si  $p$  es un punto parabólico,  $\bar{e} \bar{g} - \bar{f}^2 = 0$ , y además se verifica que  $\bar{e}^2 + \bar{g}^2 + \bar{f}^2 \neq 0$ , entonces la indicatriz de Dupin es una cónica degenerada y se trata de dos rectas paralelas, que es una cónica degenerada.
- Si  $p$  es un punto umbilical plano, verifica que  $\bar{e} \bar{g} - \bar{f}^2 = 0$  y  $\bar{e}^2 + \bar{g}^2 + \bar{f}^2 = 0$ . Entonces no existe indicatriz de Dupin real.

Con todo ello, se presenta a continuación la definición formal de la indicatriz de Dupin [BG88].

**Definición 3.1.7.** Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular y  $p \in \mathcal{M}$  un punto en la superficie. Se define la *indicatriz de Dupin* en el punto  $p$  como el conjunto de puntos  $\mathbf{x}$  en el subespacio afín  $p + T_p\mathcal{M}$  tales que  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \pm 1$ , siendo  $II_p$  la matriz de la segunda forma fundamental de  $\mathcal{M}$  en  $p$ .

Estas cónicas reciben el nombre de indicatriz de Dupin en honor al matemático francés Charles Dupin, pues fueron estudiadas por primera vez en 1813 en su libro *Développements de géométrie* [CD13].

**Observación 3.1.8.** No es necesario que la base del plano tangente sea ortogonal para definir la indicatriz de Dupin desde un punto de vista teórico, pero facilita la interpretación y simplifica la expresión.

**Observación 3.1.9.** La ecuación reducida de la cónica (3.4) que representa la indicatriz de Dupin se obtiene con la base de direcciones principales normalizadas. De esta manera, y tal y como se ha mencionado anteriormente, la matriz de la primera forma fundamental es la matriz identidad, y la de la segunda forma fundamental coincide con el operador de Weingarten (3.1).

### 3.1.1. Ejemplo: Paraboloide hiperbólico

Con el objetivo de aclarar estos conceptos se presenta un ejemplo de la indicatriz de Dupin para un paraboloide hiperbólico empleando dos parametrizaciones distintas, una que viene de la construcción de la cuádrica como una superficie traslacional a partir de dos parábolas con convexidad opuesta colocadas en planos ortogonales, y otra que muestra la propiedad del paraboloide hiperbólico de ser una superficie doblemente reglada<sup>1</sup>.

Para cada una de ellas, calcularemos la indicatriz de Dupin asociada y veremos como son equivalentes aplicando un cambio de coordenadas.

Consideramos pues la parametrización  $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$  con  $u \in [a, b]$  y  $v \in [c, d]$  siendo  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  constantes. Tomamos como punto de estudio el origen de coordenadas, al que denotaremos como  $p = X(0, 0) = (0, 0, 0)$ . De esta manera,

<sup>1</sup>A diferencia de las superficies regladas (ver Definición 4.4.1), donde cada punto solo pertenece a una recta, en las superficies doblemente regladas, cada punto pertenece a dos rectas distintas.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_u(u, v) = (1, 0, 2u) \implies X_u(0, 0) = (1, 0, 0); \\ X_v(u, v) = (0, 1, -2v) \implies X_v(0, 0) = (0, 1, 0); \\ X_{uu}(u, v) = (0, 0, 2); \\ X_{uv}(u, v) = (0, 0, 0); \\ X_{vv}(u, v) = (0, 0, -2); \\ N(u, v) = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \implies N(0, 0) = (0, 0, 1). \end{array} \right.$$

Se obtiene entonces que las matrices de la primera y segunda forma fundamental son:

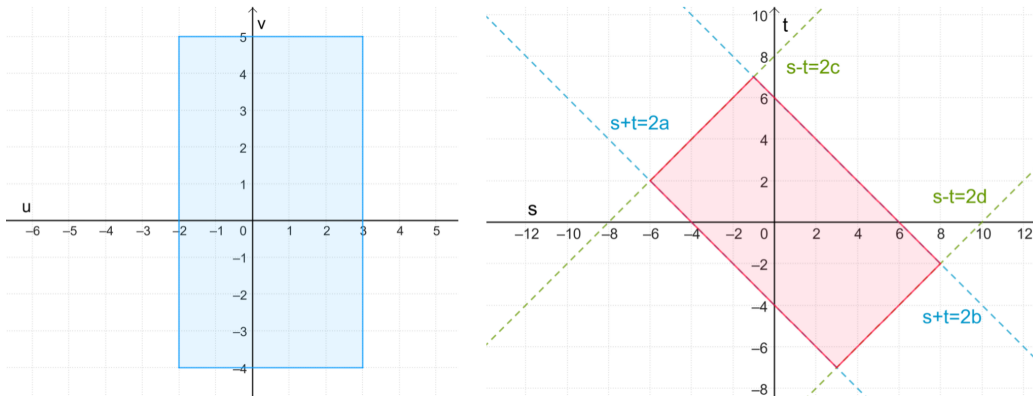
$$I_{X(u,v)}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}; \quad II_{X(u,v)}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Consideramos ahora una reparametrización del paraboloides hiperbólico con:

$$\left. \begin{array}{l} t = u - v, \\ s = u + v, \end{array} \right\} \iff^2 \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{s+t}{2}, \\ v = \frac{s-t}{2}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

De este modo, la parametrización obtenida es:

$$\bar{X}(t, s) = X(u - v, u + v) = \left( \frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}, st \right): \quad 2a < s+t < 2b \text{ y } 2c < s-t < 2d. \quad (3.7)$$



**Figura 3.1.** Representación gráfica de los dominios de las parametrizaciones  $X(u, v)$  y  $\bar{X}(t, s)$  respectivamente con  $a = -2$ ,  $b = 3$ ,  $c = -4$  y  $d = 5$ . Elaborada en *Geogebra*.

<sup>2</sup>Se toma el orden  $(t, s)$  en lugar del natural  $(s, t)$  para que la orientación de los vectores del plano tangente sea positiva, como en la primera parametrización (ver Figura 3.2).

Observamos como, para esta segunda parametrización,  $p = \bar{X}(0, 0) = (0, 0, 0)$  y se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_t(t, s) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, s) \implies \bar{X}_t(0, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0); \\ \bar{X}_s(t, s) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t) \implies \bar{X}_s(0, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0); \\ \bar{X}_{tt}(t, s) = (0, 0, 0); \\ \bar{X}_{ts}(t, s) = (0, 0, 1); \\ \bar{X}_{ss}(t, s) = (0, 0, 0); \\ \bar{N}(t, s) = \frac{2}{\sqrt{2t^2+2s^2+1}} \left( \frac{-t-s}{2}, \frac{s-t}{2}, \frac{1}{2} \right) \implies \bar{N}(0, 0) = (0, 0, 1). \end{array} \right.$$

Además, las matrices asociadas a la primera y segunda forma fundamental en un punto cualquiera  $\bar{X}(t, s)$  son:

$$\bar{I}_{\bar{X}(t,s)}(t, s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + s^2 & st \\ st & \frac{1}{2} + t^2 \end{pmatrix}; \quad \bar{II}_{\bar{X}(t,s)}(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2t^2+2s^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{2t^2+2s^2+1}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Por otro lado,  $\bar{X}_t(t, s) = \frac{1}{2}X_u(u, v) - \frac{1}{2}X_v(u, v)$  y  $\bar{X}_s(t, s) = \frac{1}{2}X_u(u, v) + \frac{1}{2}X_v(u, v)$ . En este caso, las matrices de cambio de base son independientes de las variables de la parametrización porque el cambio de coordenadas (3.6) es lineal. Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

donde  $A$  es la matriz de cambio de base de  $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{X}_t, \bar{X}_s\}$  a  $\mathcal{B} = \{X_u, X_v\}$  y  $A^{-1}$  es la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\bar{\mathcal{B}}$ . Destacar que el determinante de ambas matrices es positivo, coincidiendo sus orientaciones.

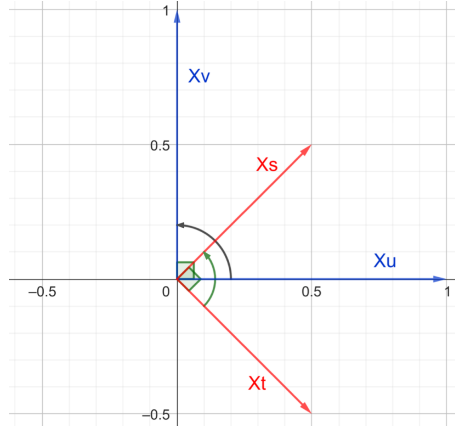
Podemos observar como las matrices de la segunda forma fundamental verifican (2.2). Es decir, para un punto  $p = X(u, v) = \bar{X}(t, s)$ :

$$A^T II_p A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, realizando el cambio de variable (3.6) se llega a la expresión siguiente, coincidente con la matriz definida en (3.8):

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2t^2+2s^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{2t^2+2s^2+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, si se representan los vectores que el plano tangente en  $\{X_u(0, 0), X_v(0, 0)\}$  y  $\{\bar{X}_t(0, 0), \bar{X}_s(0, 0)\}$  respectivamente, obtenemos que los vectores de la parametrización están rotados un ángulo  $\frac{\pi}{4}$  con respecto a los de la reparametrización. Gráficamente:



**Figura 3.2.** Representación gráfica de los vectores tangentes de las parametrizaciones  $X(u, v)$  y  $\bar{X}(t, s)$  en  $p = (0, 0, 0) = X(0, 0) = \bar{X}(0, 0)$  respectivamente. Se puede observar como el ángulo  $\angle O\bar{X}_t X_u = \frac{\pi}{4}$  al igual que  $\angle O\bar{X}_s X_v = \frac{\pi}{4}$ . Elaborada en *Geogebra*.

Este ángulo puede obtenerse teniendo en cuenta las matrices de cambio de base en (3.9). En particular, trabajando en la base  $\bar{B}$  tenemos que  $\bar{X}_t(t, s) = (1, 0)_{\bar{B}}$  y  $X_u(u, v) = (1, 1)_{\bar{B}}$ . De esta manera, si llamamos  $\phi = \angle O\bar{X}_t X_u$  se verifica que:

$$\cos \phi = \frac{(1 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(1 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \sqrt{(1 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \phi = \frac{\pi}{4},$$

donde la matriz  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  es la matriz del producto escalar dado por la primera forma fundamental de la reparametrización  $\bar{X}(t, s)$  en el punto de estudio  $p$ . Es decir, la matriz  $\bar{I}_p$  en  $(0, 0)$ .

Por tanto, si aplicamos coordenadas polares en la primera parametrización con un ángulo  $\theta$  y en la segunda parametrización con un ángulo  $\bar{\theta}$ , entonces:

$$\bar{\theta} = \theta + \frac{\pi}{4}. \quad (3.10)$$

Construimos ahora la indicatriz de Dupin asociada a la primera parametrización. En el punto  $p = X(0, 0)$  tenemos que, partiendo de las matrices (3.5) evaluadas en  $p$ :

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad II_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

De esta manera, si tomamos un vector unitario  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  en el plano tangente y calculamos su curvatura normal obtenemos que:

$$k_n(\theta) = \frac{II_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{I_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \frac{2 \cos^2(\theta) - 2 \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 2 \cos^2(\theta) - 2 \sin^2(\theta).$$

Suponemos  $|k_n(\theta)| = \frac{1}{\mu^2}$  y realizamos el cambio de variable  $x_1 = \mu \cos(\theta)$  y  $x_2 = \mu \sin(\theta)$ . Luego, la indicatriz de Dupin para la primera parametrización, y considerando  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , resulta en:

$$\pm 1 = 2x_1^2 - 2x_2^2 \iff II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \pm 1. \quad (3.12)$$

Con respecto a la reparametrización, las matrices de la primera y segunda forma fundamental son:

$$\bar{I}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \bar{II}_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la expresión de la primera forma fundamental, un vector  $\bar{\mathbf{v}} = (\lambda \cos(\bar{\theta}), \lambda \sin(\bar{\theta}))$  es unitario si  $\frac{1}{2}\lambda^2 = 1$ , o lo que es lo mismo, si  $\lambda = \sqrt{2}$ . Luego, de manera análoga tomamos un vector unitario  $\bar{\mathbf{v}} = (\sqrt{2} \cos(\bar{\theta}), \sqrt{2} \sin(\bar{\theta}))$  en el plano tangente y calculamos su curvatura normal:

$$k_n(\bar{\theta}) = \frac{4 \cos(\bar{\theta}) \sin(\bar{\theta})}{\cos^2(\bar{\theta}) + \sin^2(\bar{\theta})} = 4 \cos(\bar{\theta}) \sin(\bar{\theta}).$$

Suponemos de nuevo que  $|k_n(\bar{\theta})| = \frac{1}{\mu^2}$ . Realizamos el siguiente cambio de variable reescalando por el módulo de un vector unitario en esta base:  $\bar{x}_1 = \sqrt{2}\mu \cos(\bar{\theta})$  y  $\bar{x}_2 = \sqrt{2}\mu \sin(\bar{\theta})$ . Por tanto, la indicatriz de Dupin obtenida para la reparametrización, y considerando  $\mathbf{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , es:

$$\pm 1 = 2\bar{x}_1\bar{x}_2 \iff \bar{II}_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \pm 1. \quad (3.13)$$

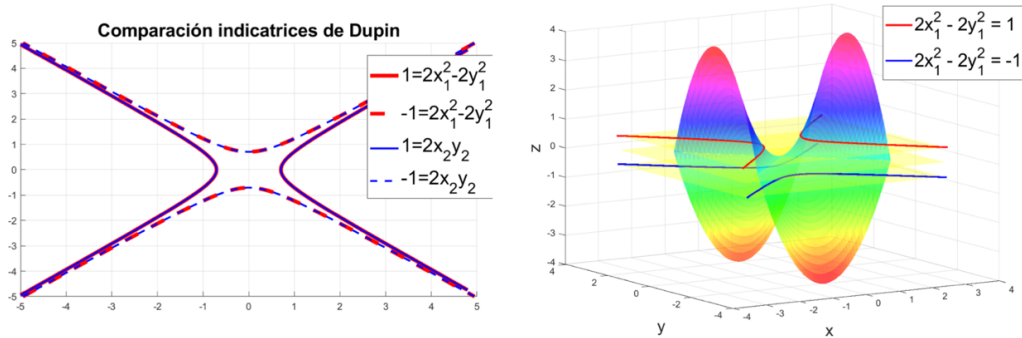
Podemos además verificar como, al cambiar de base, la indicatriz de Dupin de la parametrización original (3.12) y la de la reparametrización (3.13) coinciden.

La matriz de la cónica de la indicatriz de Dupin de la parametrización (3.12) es:

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mp 1 + 2x_1^2 - 2x_2^2.$$

Realizando un cambio en el sistema de referencia afín acorde con (2.2) obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= \mp 1 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2. \end{aligned}$$



**Figura 3.3.** Representación gráfica de la comparación de las indicatrices de Dupin obtenidas para ambas parametrizaciones en sus respectivas bases y el paraboloides hiperbólico. Se incluye además el plano tangente en el punto  $p = X(0, 0)$  y sus correspondientes indicatrices de Dupin sobre los planos paralelos desviados a alturas  $\pm \frac{1}{2}$  sobre el vector normal. Se ha tomado  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\bar{\theta} = \theta + \frac{\pi}{4}$ ,  $(x_1, x_2) = (x_1, y_1)$ ,  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (x_2, y_2)$ ,  $a = c = -2$  y  $b = d = 2$ . Elaborada en *Matlab*.

## 3.2. Circunferencia y paraboloides osculatrizes

En esta sección se describe la aproximación local de segundo orden de una superficie a partir de la circunferencia osculatriz, que es la aproximación local de segundo orden de una curva ([Co69],[ZH95]). Estas construcciones permiten estudiar, describir y aproximar una curva o una superficie mediante otra con misma curvatura. Mientras que la circunferencia osculatriz presenta una curvatura igual a la curva dada, el paraboloides osculatriz captura la curvatura de la superficie en todas las direcciones del plano tangente ([MS79], [BG88]).

**Definición 3.2.1.** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular y  $p \in \gamma(I)$  un punto sobre la curva. Definimos la *circunferencia osculatriz* de  $\gamma$  en el punto  $p$  como la circunferencia  $C$  que verifica:

1. Su centro, llamado *centro de curvatura*, está sobre la recta normal a  $\gamma$  en el punto  $p$ .
2. La circunferencia  $C$  es tangente a  $\gamma$  en el punto  $p$ .
3. Las curvaturas de la circunferencia  $C$  y de la curva  $\gamma$  coinciden en el punto  $p$ .

**Observación 3.2.2.** Si la curvatura de  $\gamma$  en  $p$  es  $k_p$ , entonces la circunferencia osculatriz tiene radio  $\frac{1}{|k_p|}$ .

Luego, la circunferencia osculatriz de una curva en un punto  $p$  es una circunferencia tangente a la curva dada y cuya curvatura en  $p$  coincide. Sin embargo, si queremos abordar una construcción análoga para superficies, resulta más complicado.

Generalmente, una superficie cuenta con dos curvaturas principales diferentes y sus dos correspondientes direcciones principales. Es por ello que, una circunferencia osculatriz no admite una generalización a dimensiones superiores (salvo en regiones umbilicales) pues las curvaturas principales de una esfera son siempre iguales (ver Ejemplo 4.5.1).

De este modo, para capturar estas curvaturas, se debe emplear una superficie que pueda contar con dos curvaturas principales distintas. Esta será el *paraboloides osculatriz*, una generalización de la *parábola osculatriz* a una curva.

**Definición 3.2.3.** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular diferenciable y  $p \in \gamma(I)$  un punto en la curva. Se define la *parábola osculatriz* de la curva  $\gamma$  en  $p$  como una parábola que verifica:

1. Pasa por el punto  $p$  y es tangente a la curva  $\gamma$  en el punto  $p$ .
2. Su curvatura coincide con la de  $\gamma$  en el punto  $p$ .

**Observación 3.2.4.** Sea  $p = \gamma(t_0)$ . Dado que la parábola osculatriz pasa por  $\gamma(t_0)$ , su dirección tangente en  $p$  es  $\gamma'(t_0)$  y su curvatura viene dada por  $\gamma''(t_0)$ , entonces coincide con el desarrollo de Taylor de orden 2 de  $\gamma$  alrededor de  $t_0$ . Es decir:

$$\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + \frac{\gamma''(t_0)}{2}(t - t_0)^2.$$

Para estudiar y definir localmente la forma de una superficie regular  $M$  en un punto  $p$ , fijamos una parametrización que describe la superficie en términos de la distancia de  $p$  al plano tangente  $T_p M$  en  $p$ .

Suponemos sin pérdida de generalidad que en un entorno del punto  $p$ , la superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  admite una parametrización de tipo Monge o parametrización como gráfica de una función de la forma  $X(u, v) = (u, v, b(u, v))$  con  $b : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que  $(0, 0) \in M$ . Fijamos un punto  $p = X(0, 0)$ .

**Observación 3.2.5.** Como  $M$  es una superficie regular, esta siempre admite localmente una parametrización como gráfica de una función sobre alguno de los planos coordenados (ver Proposición 2.1.6. de [CP10]).

Suponemos además que  $b_u(0, 0) = b_v(0, 0) = 0$ . De esta manera, en el punto  $p$ , se tiene que  $X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$ ,  $X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$  y  $N = (0, 0, 1)$ . Como consecuencia, la ecuación del plano tangente es  $z = p_z$ . Si además suponemos que  $b(0, 0) = 0$ , la ecuación del plano tangente sería  $z = 0$ .

De este modo, la fórmula de Taylor centrada en el  $(0, 0)$  para la función  $b$  en dos variables es:

$$b(u, v) = \frac{1}{2}b_{uu}(0, 0)u^2 + b_{uv}(0, 0)uv + \frac{1}{2}b_{vv}(0, 0)v^2 + R(u, v),$$

donde  $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{R(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = 0$  y suponiendo que  $b(0, 0) = 0$ ,  $b_u(0, 0) = 0$  y  $b_v(0, 0) = 0$ . Luego, la superficie  $M_1$  que aproxima  $M$  hasta orden 2 en un entorno de  $p$  admite la siguiente parametrización:

$$M_1 := \left\{ \left( u, v, \frac{1}{2}b_{uu}(0, 0)u^2 + b_{uv}(0, 0)uv + \frac{1}{2}b_{vv}(0, 0)v^2 \right), u, v \in [-\varepsilon, \varepsilon], \varepsilon > 0 \right\}, \quad (3.14)$$

Esta construcción de la superficie  $M_1$  no depende de la base de  $\mathbb{R}^2$ , identificada como una base del plano tangente de  $M$  en  $p$  ([MS79]). Definimos entonces un nuevo sistema de referencia afín  $\{p; \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, N\}\}$  donde  $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, 0)$  y  $\mathbf{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, 0)$  son vectores del plano tangente a  $M$  en  $p$ .

Definimos una nueva función  $\bar{h} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\bar{h}(u, v)$  la altura de un punto en  $\mathcal{M}$  sobre el plano  $z = 0$  y cuya proyección sobre el plano  $z = 0$  es  $u\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_2$ . Por tanto,

$$\bar{h}(u, v) = h(u\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_2) = h(v_{11}u + v_{12}v, v_{21}u + v_{22}v).$$

Con el objetivo de agrupar términos en las expresiones, denotamos  $(u^1, u^2) := (u, v)$ . De este modo:

$$\bar{h}(u^1, u^2) = h\left(\sum_{i=1}^2 v_{1i}u^i, \sum_{i=1}^2 v_{2i}u^i\right). \quad (3.15)$$

Las derivadas parciales de  $h^B(u^1, u^2)$  respecto de  $u^1$  y  $u^2$  aplicando la regla de la cadena resultan en:

$$\bar{h}_{u^1}(u^1, u^2) = \sum_{j=1}^2 v_{j1}h_{u^j}\left(\sum_{i=1}^2 v_{1i}u^i, \sum_{i=1}^2 v_{2i}u^i\right) \implies \bar{h}_{u^1}(0, 0) = 0 \text{ pues } h_{u^j}(0, 0) = 0.$$

$$\bar{h}_{u^2}(u^1, u^2) = \sum_{j=1}^2 v_{j2}h_{u^j}\left(\sum_{i=1}^2 v_{1i}u^i, \sum_{i=1}^2 v_{2i}u^i\right) \implies \bar{h}_{u^2}(0, 0) = 0 \text{ pues } h_{u^j}(0, 0) = 0.$$

$$\bar{h}_{u^1u^2}(u^1, u^2) = \sum_{j,k=1}^2 v_{j1}v_{k2}h_{u^ju^k}\left(\sum_{i=1}^2 v_{1i}u^i, \sum_{i=1}^2 v_{2i}u^i\right) \implies \bar{h}_{u^1u^2}(0, 0) = \sum_{j,k=1}^2 v_{j1}v_{k2}h_{u^ju^k}(0, 0).$$

De esta manera, la superficie  $\mathcal{M}_2$  definida como:

$$\mathcal{M}_2 := \left\{ \left( u, v, \frac{1}{2}\bar{h}_{uu}(0, 0)u^2 + \bar{h}_{uv}(0, 0)uv + \frac{1}{2}\bar{h}_{vv}(0, 0)v^2 \right), u, v \in [-\varepsilon, \varepsilon], \varepsilon > 0 \right\} \quad (3.16)$$

aproxima también a la superficie original  $\mathcal{M}$  hasta orden 2 cerca del punto  $p$ .

Para ahondar en la clasificación del paraboloides osculatríz, consideramos de nuevo el caso de una superficie regular  $\mathcal{M}$  que admite una parametrización de Monge en un entorno cercano al punto  $p$  de la forma  $X(u, v) = (u, v, h(u, v))$  con  $p = X(0, 0)$  y que, además, verifica que  $h(0, 0) = 0$ ,  $h_u(0, 0) = 0$  y  $h_v(0, 0) = 0$ , siendo así el plano  $z = 0$  el plano tangente en  $p$ ,  $T_p\mathcal{M}$ .

Como consecuencia:

$$\begin{cases} N(0, 0) = (0, 0, 1), \\ e = II_p(X_u(0, 0), X_u(0, 0)) = \langle (0, 0, 1), (0, 0, h_{uu}(0, 0)) \rangle = h_{uu}(0, 0), \\ f = II_p(X_u(0, 0), X_v(0, 0)) = \langle (0, 0, 1), (0, 0, h_{uv}(0, 0)) \rangle = h_{uv}(0, 0), \\ g = II_p(X_v(0, 0), X_v(0, 0)) = \langle (0, 0, 1), (0, 0, h_{vv}(0, 0)) \rangle = h_{vv}(0, 0). \end{cases}$$

Una ecuación explícita de la cuádrica  $M_1$  es:

$$z = b(u, v) = \frac{1}{2}eu^2 + fuv + \frac{1}{2}gv^2 = \frac{1}{2} \left( (u, v) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} II_p((u, v), (u, v)). \quad (3.17)$$

La parametrización de tipo Monge asociada es:

$$X(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{2}eu^2 + fuv + \frac{1}{2}gv^2 \right). \quad (3.18)$$

Si tomamos como sistema de referencia afín  $\mathcal{R} = \{p; \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, N\}\}$  donde  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$  es una base ortonormal de  $T_pM$  formada por las direcciones principales de  $M$ , la matriz de la segunda forma fundamental y la del operador de Weingarten coinciden. Véase Ecuación (3.1):

$$L_p = II_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

Por tanto, se tiene que  $k_1 = e$  y  $k_2 = g$ .

En este caso, la superficie  $M_1$  en  $p$  se define explícitamente por:

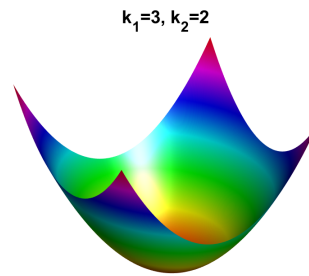
$$z = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2. \quad (3.19)$$

La noción de paraboloides osculatrizes que aparece habitualmente en la literatura ([BG88], [Co69]) es directamente (3.18) o (3.19).

A partir de la ecuación reducida (3.19) se puede discutir la forma del paraboloides osculatrizes que depende del signo de  $k_1k_2 = |II_p| = eg - f^2$ .

- Si  $k_1k_2 > 0$ , entonces  $p$  es un punto elíptico y ambas curvaturas principales tienen el mismo signo. Además, el paraboloides osculatrizes es un paraboloides elíptico pues su expresión se reduce a:

$$z = \frac{x^2}{2(k_1)^{-1}} + \frac{y^2}{2(k_2)^{-1}}.$$

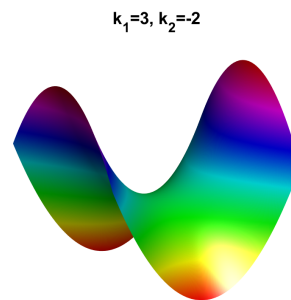


**Figura 3.4** Representación gráfica del paraboloides elíptico con  $k_1 = 3$  y  $k_2 = 2$ . Elaborada en *Matlab*.

En este caso, los cortes con planos paralelos al plano  $z = 0$  resultan elipses y las curvas resultantes de cortes con planos perpendiculares al plano  $z = 0$  son parábolas.

- Si  $k_1 k_2 < 0$  entonces  $p$  es un punto hiperbólico y las curvaturas principales tienen distinto signo. El paraboloides osculatríz en este caso es un paraboloides hiperbólico y su expresión se reduce a:

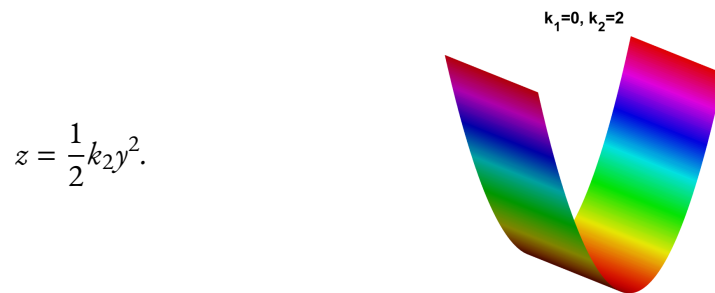
$$z = \frac{x^2}{2(k_1)^{-1}} - \frac{y^2}{-2(k_2)^{-1}}.$$



**Figura 3.5** Representación gráfica del paraboloides hiperbólico con  $k_1 = 3$  y  $k_2 = -2$ . Elaborada en *Matlab*.

Los cortes con planos paralelos al plano  $z = 0$  son hipérbolas. El corte con el plano  $z = 0$  se corresponde con dos rectas que pasan por el origen de ecuación  $y = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} x$ . Los cortes con planos perpendiculares al plano  $z = 0$  se corresponden con parábolas con ramas hacia ambos lados.

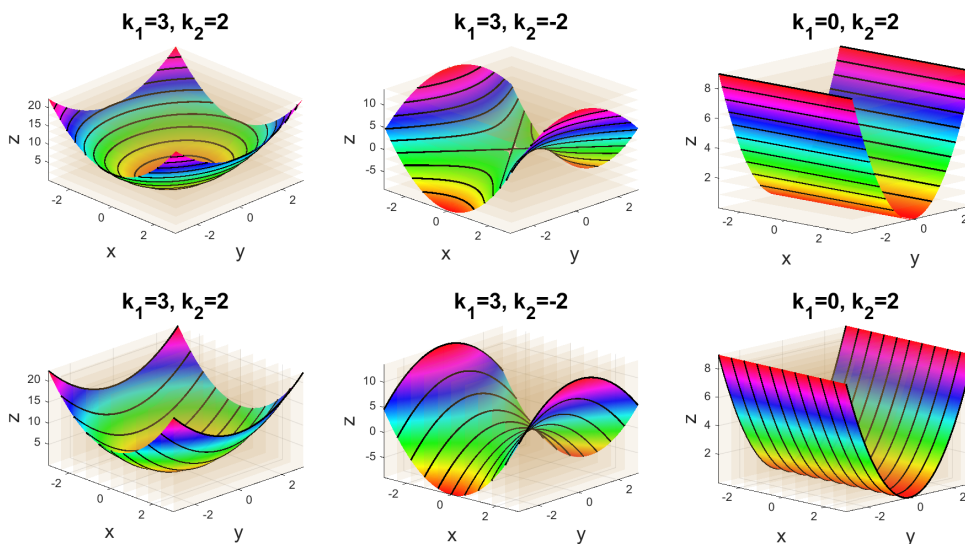
- Si  $k_1 k_2 = 0$ , pero  $e^2 + f^2 + g^2 \neq 0$ , entonces el punto  $p$  es parabólico. Solo una de las curvaturas principales es nula. Asumimos sin pérdida de generalidad que  $k_1 = 0$ . En este caso, el paraboloides osculatríz es un paraboloides cilíndrico y su expresión se reduce a:



**Figura 3.6** Representación gráfica del paraboloides cilíndrico con  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 2$ . Elaborada en *Matlab*.

Las curvas resultantes de cortes del paraboloides cilindro con planos paralelos al plano  $z = 0$  son dos rectas paralelas. Los cortes con planos perpendiculares al  $z = 0$  son parábolas si los planos son de la forma  $x = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  y es una recta con planos de la forma  $y = k$  con  $k \in \mathbb{R}$  en caso de que  $k_2 \neq 0$ . De manera análoga sucede si  $k_1 \neq 0$  y  $k_2 = 0$ .

- Si  $k_1k_2 = 0$  y  $e^2 + f^2 + g^2 = 0$ , entonces  $p$  es un punto plano y su aproximación de orden 2 es el propio plano tangente  $z = 0$ .



**Figura 3.7.** Representación gráfica del paraboloides osculatrizes de ecuación  $z = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2$  con (de izquierda a derecha) **1.**  $k_1 = 3$  y  $k_2 = 2$ , **2.**  $k_1 = 3$  y  $k_2 = -2$  y **3.**  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 2$ . La primera fila muestra distintos cortes con planos de la forma  $z = k$  paralelos a  $z = 0$  con  $k \in \mathbb{R}$ . La segunda fila con planos de la forma  $x = k$  perpendiculares a  $z = 0$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Realizados en el software *Matlab*.

La circunferencia osculatriz para curvas es sustituida por un paraboloides osculatriz para superficies, el cual tiene que tener la misma curvatura que la superficie en el punto. Con esta idea de medir cuánto se curva la superficie en un entorno del punto respecto al plano tangente, damos una definición geométrica del paraboloides osculatriz. Para más información y detalle sobre la construcción se recomienda consultar [MS79].

**Definición 3.2.6.** Sea  $M$  una superficie regular y  $p \in M$  un punto en la superficie. El *paraboloides osculatriz de  $M$  en  $p$*  es una cuádrica que verifica que:

1. Pasa por el punto  $p$ .
2. El plano tangente al paraboloides osculatriz por el punto  $p$  coincide con el de la superficie.
3. Presenta la misma curvatura normal que  $M$  en  $p$ .

**Proposición 3.2.7.** Dada una parametrización  $X(u, v)$  de una superficie regular  $M$  y un punto  $p$  en la superficie, entonces la aproximación de orden 2 de la superficie dada por el desarrollo de Taylor y la aproximación de tipo Monge (3.18) hasta orden 2 de la superficie tienen la misma primera y segunda forma fundamental en el punto  $p$ .

*Demostración.* Tomamos  $\mathcal{R} = \{p; \{X_u, X_v, N\}\}$  como sistema de referencia afín de  $\mathbb{R}^3$  donde  $N$  denota el vector normal y unitario a la superficie en el punto  $p$  de estudio. El desarrollo de Taylor de la parametrización hasta orden 2 cerca del punto  $p = X(u_0, v_0)$  es:

$$X(u, v) \approx X(u_0, v_0) + X_u(u - u_0) + X_v(v - v_0) + \frac{1}{2} (X_{uu}(u - u_0)^2 + 2X_{uv}(u - u_0)(v - v_0) + X_{vv}(v - v_0)^2),$$

donde por simplificar la notación hemos tomado  $X_u := \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)}$ ,  $X_v := \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)}$ ,  $X_{uu} := \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial u^2} \Big|_{(u_0, v_0)}$ ,  $X_{uv} := \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{(u_0, v_0)}$  y  $X_{vv} := \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial v^2} \Big|_{(u_0, v_0)}$ , puesto que todas las derivadas parciales están evaluadas en  $(u_0, v_0)$ .

Asumiendo que  $\mathcal{R}$  es una referencia ortogonal se puede descomponer el vector  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$  y  $X_{vv}$  en su componente tangencial y normal. La Proposición 2.4.4 nos garantiza la existencia de un sistema de referencia afín ortogonal. La descomposición de  $X_{uu}$  es:

$$X_{uu} = (X_{uu})^\top + (X_{uu})^\perp = \frac{\langle X_{uu}, X_u \rangle}{\|X_u\|^2} X_u + \frac{\langle X_{uu}, X_v \rangle}{\|X_v\|^2} X_v + \langle X_{uu}, N \rangle N = A_{uu} X_u + B_{uu} X_v + eN,$$

donde  $e$  es el primer coeficiente de la segunda forma fundamental. Análogamente, se procede para  $X_{uv}$  y  $X_{vv}$ . Con ello, la expresión paramétrica del desarrollo de Taylor hasta orden 2 alrededor del punto  $p$  queda como:

$$\begin{aligned}
X(u, v) &\approx X(u_0, v_0) + X_u(u - u_0) + X_v(v - v_0) \\
&+ \frac{1}{2} ((A_{uu}X_u + B_{uu}X_v)(u - u_0)^2 + 2(A_{uv}X_u + B_{uv}X_v)(u - u_0)(v - v_0) + (A_{vv}X_u + B_{vv}X_v)(v - v_0)^2) \\
&+ \frac{1}{2} (e(u - u_0)^2 + 2f(u - u_0)(v - v_0) + g(v - v_0)^2) N =: X^1(u, v).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Por otro lado, definimos la aproximación de tipo Monge hasta orden 2 de la superficie como:

$$\begin{aligned}
X(u, v) &\approx X(u_0, v_0) + X_u(u - u_0) + X_v(v - v_0) \\
&+ \frac{1}{2} (e(u - u_0)^2 + 2f(u - u_0)(v - v_0) + g(v - v_0)^2) N =: X^2(u, v).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

La primera forma fundamental en  $X(u_0, v_0)$  está determinada por los productos escalares  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$  y  $G = \langle X_v, X_v \rangle$ . Las dos parametrizaciones  $X^1$  y  $X^2$  de aproximación tienen los mismos términos lineales. Por lo tanto, tienen la misma primera forma fundamental y es además coincidente con la de  $M$ .

La segunda forma fundamental en el punto  $p$  está dada por  $e = \langle X_{uu}, N \rangle$ ,  $f = \langle X_{uv}, N \rangle$  y  $g = \langle X_{vv}, N \rangle$ . En la aproximación de Taylor (3.20), los coeficientes de la segunda forma fundamental son las componentes normales de  $X_{uu}^1$ ,  $X_{uv}^1$  y  $X_{vv}^1$  pues  $\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0$ . Estos coeficientes son  $e, f$  y  $g$ , respectivamente.

En la aproximación  $X^2$  (3.21), las derivadas parciales de orden dos solo cuentan con componente normal. Por ello, los coeficientes de la segunda forma fundamental son también  $e, f$  y  $g$ . Se concluye entonces que ambas parametrizaciones mantienen la misma primera y segunda forma fundamental que  $M$  en el punto  $p$ .

□

Una consecuencia directa de la Proposición 3.2.7 se enuncia en el siguiente resultado.

**Corolario 3.2.8.** *Las dos parametrizaciones  $X^1$  y  $X^2$  presentan la misma curvatura normal, direcciones principales y plano tangente en el punto  $p$ .*

**Observación 3.2.9.** Las segundas derivadas parciales de  $X^1$  y  $X^2$  no coinciden. Esto es así porque para la aproximación de Taylor:

$$X_{uu}^1 = \overbrace{(A_{uu}X_u + B_{uu}X_v)}^{\text{Componente tangencial}} + eN, \quad (\text{y análogamente para } X_{uv}^1 \text{ y } X_{vv}^1)$$

mientras que para la aproximación de tipo Monge  $X_{uu}^2 = eN$ , descartándose los términos tangenciales.

Una consecuencia directa de la Proposición 3.2.7 es que el paraboloides osculatríz no es necesariamente único según la Definición geométrica 3.2.6. En consecuencia, a pesar de que ambas construcciones presentan segundas derivadas parciales distintas, recogen la misma información sobre las curvaturas de  $\mathcal{M}$ . Sin embargo, en la literatura el paraboloides osculatríz viene dado exclusivamente por la parametrización de tipo Monge de la Ecuación (3.18).

En el sistema de referencia afín  $\mathcal{R}$  considerado en la demostración de la Proposición 3.2.7 las dos parametrizaciones  $X^1$  y  $X^2$  se escriben:

$$X^1(u, v) = \left( u + \frac{1}{2}A_{uu}u^2 + A_{uv}uv + \frac{1}{2}A_{vv}v^2, v + \frac{1}{2}B_{uu}u^2 + B_{uv}uv + \frac{1}{2}B_{vv}v^2, \frac{1}{2}eu^2 + fuv + \frac{1}{2}gv^2 \right),$$

$$X^2(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{2}eu^2 + fuv + \frac{1}{2}gv^2 \right).$$

La componente normal es la misma, solo cambia la parte tangencial.

Geoméricamente, la curvatura normal de una superficie en un punto, dada una dirección, mide cuánto se curva la superficie en esa dirección. Con la construcción del paraboloides osculatríz, a cada punto del plano tangente se le corresponde biunívocamente un punto en el paraboloides osculatríz a partir de una función altura. Sin embargo, en la construcción con el desarrollo de Taylor, esa correspondencia no es tan clara pues intervienen las componentes tangenciales.

Recapitulando, en un caso general en que la superficie está parametrizada por  $X(u, v)$ , que no necesariamente sea una parametrización de tipo Monge, entonces la parametrización del paraboloides osculatríz en un punto  $p = X(u_0, v_0)$  es:

$$X(u, v) \approx X(u_0, v_0) + X_u(u - u_0) + X_v(v - v_0) + \frac{1}{2} (e(u - u_0)^2 + 2f(u - u_0)(v - v_0) + g(v - v_0)^2) N. \quad (3.22)$$

En el sistema de referencia afín  $\mathcal{R} = \{X(u_0, v_0); \{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0), N(u_0, v_0)\}\}$  la ecuación explícita del paraboloides osculatríz en  $\mathcal{R}$  es:

$$z = \frac{1}{2} (ex^2 + 2fxy + gy^2) \quad \text{con } (x, y) \in p + T_p\mathcal{M}. \quad (3.23)$$

**Observación 3.2.10.** Si  $\mathcal{M}$  admite una parametrización de Monge en un entorno cercano a  $p$ , de tal manera que el plano tangente a  $\mathcal{M}$  en  $p$  tiene ecuación  $z = p_z$ , entonces la expresión del paraboloides osculatríz dada por (3.23) coincide con (3.19).

El paraboloides osculatrizes y la indicatriz de Dupin de una superficie regular  $M$  guardan una estrecha relación. Para una mejor interpretación, consideramos sin pérdida de generalidad que en un entorno del punto  $p$  la superficie  $M$  admite una parametrización como gráfica de una función del tipo  $X(u, v) = (u, v, b(u, v))$ , con  $p = X(0, 0) = (0, 0, 0)$  y  $b_u(0, 0) = b_v(0, 0) = 0$ .

Tomando como sistema de referencia afín  $\mathcal{R} = \{p; \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, N\}\}$  con  $\mathbf{v}_{k_1}$  y  $\mathbf{v}_{k_2}$ , formado por las direcciones principales normalizadas y el vector normal, se tiene que el paraboloides osculatrizes de  $M$  en  $p$  es:

$$z = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2.$$

Por otro lado, en esta referencia, la indicatriz de Dupin es la cónica definida por:

$$\pm 1 = II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = k_1x^2 + k_2y^2, \quad \mathbf{x} \in p + T_pM, \quad \text{donde } \mathbf{x} = (x, y)_{\mathcal{R}}.$$

Por tanto, la indicatriz de Dupin se puede interpretar como las curvas resultantes de la intersección del paraboloides osculatrizes con planos de la forma  $z = \pm \frac{1}{2}$ , que son paralelos al plano tangente a  $M$  en  $p$ .

Tal y como se observa en la Figura 3.3, cuando la superficie de estudio es un paraboloides, el paraboloides osculatrizes es él mismo. Además, las indicatrices de Dupin están situadas en los planos  $z = \pm \frac{1}{2}$ .

Como se anticipaba en la Sección 3.1, los cortes con planos paralelos al plano tangente con el paraboloides osculatrizes producen cónicas del mismo tipo que la indicatriz de Dupin.

**Observación 3.2.ii.** Geométricamente, si el punto de estudio es regular, entonces el paraboloides osculatrizes es muy similar a la superficie cerca del punto. Por lo tanto, las curvas resultantes de la intersección entre la superficie y planos paralelos al plano tangente (lo suficientemente cercanos) son cónicas del mismo tipo que la indicatriz de Dupin. Si el punto es parabólico no se cumple la misma relación con la indicatriz de Dupin (4.2.22, [BG88]), tal y como se verá en la Sección 4.3.

# 4

## Superficies Weingarten

En esta sección se introducen los conceptos de *superficie Weingarten* y de *diagrama de curvatura* ([BG96],[KS05]). A partir de ello, se exploran las distintas clases de superficies Weingarten y ejemplos representativos como el catenoide, el helicoido o la pseudoesfera, entre otros ([CB10],[CH20]).

Una familia de superficies Weingarten que han sido ampliamente estudiadas son las superficies mínimas puesto que su curvatura media es cero, siendo esta una relación de Weingarten ([JO07], [RO69]).

### 4.1. Definición y clasificación

**Definición 4.1.1.** Una superficie  $M$  es una *superficie Weingarten* si sus dos curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  son dependientes entre sí. Equivalentemente, si existen unas ciertas funciones  $f(k_1, k_2) = 0$ ,  $\Phi(k_1) = k_2$  o  $\Theta(k_2) = k_1$  que relacionan implícita o explícitamente las curvaturas principales de la superficie en todos los puntos, independientemente de las variables de la parametrización.

Las superficies Weingarten reciben este nombre en honor al matemático alemán Julius Weingarten, quien estudió por primera vez este tipo de superficies en 1861 [JW61].

A raíz de esta definición, han surgido diversos estudios posteriores en los que se busca realizar una clasificación de este tipo de superficies. Aquí, se realizará una clasificación similar a la citada por Wolfgang Kühnel y Michael Steller en [KS05], que nos permite distinguir cuatro tipos principales de superficies Weingarten:

- Superficies de revolución.
- Superficie tubería con una curvatura principal constante: Superficies generadas por circunferencias de radio fijo centradas en los planos normales de una curva dada.
- Superficies regladas: Se construyen a partir de rectas llamadas generatrices, una por cada punto de la curva directriz.
- Superficies con curvatura de Gauss o curvatura media constante. Estas últimas también son llamadas *superficies CMC*.

Esta última categoría podría considerarse como dos clases distintas. Sin embargo, tal y como se muestra en la Sección 4.5, el desarrollo teórico en estos casos no da lugar a grandes simplificaciones como en las otras categorías. Por este motivo, se han agrupado en una misma sección.

**Observación 4.1.2.** Esta clasificación no es excluyente puesto que hay superficies que pertenecen a varias categorías, tal y como se muestra en la Tabla 4.1.

Superficie	Revolución	Tubería	Helicoidal	Curvatura de Gauss cte.	CMC
Esfera	✓			✓	✓
Plano	✓		✓	✓	✓
Cilindro circular	✓	✓		✓	✓
Cilindro				✓	
Toro	✓	✓			
Catenoide	✓				✓
Helicoide			✓		✓

**Tabla 4.1.** Tabla de superficies y su correspondiente clasificación.

**Proposición 4.1.3.** *La existencia de una relación entre las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  implica una relación entre la curvatura de Gauss,  $K$ , y la curvatura media,  $H$ , de la superficie y viceversa.*

*Demostración.* Suponemos que tenemos una relación  $f(k_1, k_2) = 0$  entre las curvaturas principales. Como las curvaturas principales son los autovalores del operador de Weingarten,  $k_1$  y  $k_2$  son las raíces del polinomio mónico de segundo grado  $x^2 - (k_1 + k_2)x + k_1k_2 = 0$ , que cumple que la suma de sus raíces es  $k_1 + k_2 = -2H$  y el producto de sus raíces es  $k_1k_2 = K$ .

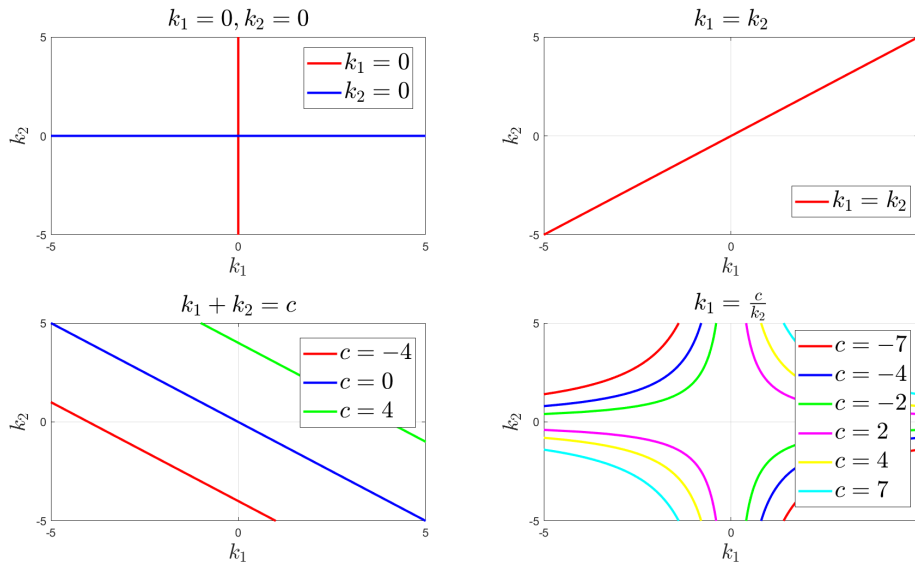
Reescribimos el polinomio como  $x^2 - 2Hx + K = 0$ , con soluciones  $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$  y  $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ . Definiendo  $\Psi(H, K) = f(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K})$  se obtiene una relación entre  $K$  y  $H$ .

Análogamente, si tenemos una relación  $\Psi(H, K) = 0$  entre la curvatura de Gauss y la media, dado que  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  y  $K = k_1 k_2$ , definimos  $f(k_1, k_2) = \Psi\left(\frac{k_1 + k_2}{2}, k_1 k_2\right)$ .  $\square$

Para distinguir las distintas relaciones Weingarten implícitas y explícitas entre la curvatura de Gauss y la curvatura media, emplearemos distinta notación. Para una relación implícita usaremos  $\Psi(H, K) = 0$ , mientras que para una relación explícita  $\Xi(H) = K$  y  $\Gamma(K) = H$ .

**Definición 4.1.4.** Sea  $W$  una superficie Weingarten con relación  $f(k_1, k_2) = 0$  entre sus curvaturas principales. El *diagrama de curvatura* es el conjunto de soluciones de dicha ecuación.

Los diagramas de curvatura de las superficies Weingarten pueden presentar distintos tipos de gráficas. Sin embargo, se distinguen algunas configuraciones relevantes.



**Figura 4.1.** Representación gráfica de las distintas configuraciones destacadas de diagramas de curvaturas asociados a superficies Weingarten realizadas en el software *Matlab*.

La primera de estas configuraciones son las rectas contenidas en alguno de los ejes coordenados, es decir, cuando  $k_1 = 0$  y/o  $k_2 = 0$ . Esta configuración es propia de las superficies planas o regladas desarrollables (ver Definición 4.4.2) pues su curvatura de Gauss es nula.

La segunda configuración destacada es el caso en que el diagrama de curvaturas corresponde a la diagonal principal. Por tanto, cuando estamos en el caso  $k_1 = k_2$ . Este diagrama se corresponde al de la esfera (Sección 4.5.1), pues sus curvaturas principales son iguales y todos sus puntos son umbilicales propios. También incluye las superficies planas al pasar por el origen.

Otra configuración destacada es cuando la superficie tiene curvatura media constante. En este caso el diagrama de curvaturas será de la forma  $k_1 + k_2 = c$  con  $c$  un valor constante, dando lugar a rectas paralelas a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante. Un ejemplo de ello son el catenoide (Sección 4.2.1) o el helicoide (Sección 4.4.2).

La última configuración destacada se trata del caso en que el diagrama de curvaturas se corresponde con una hipérbola estándar de la forma  $k_1 = \frac{c}{k_2}$ . Este diagrama es característico de las superficies con curvatura de Gauss constante.

## 4.2. Superficies de revolución

**Definición 4.2.1.** Una *superficie de revolución* es una superficie generada mediante la rotación de una curva plana llamada generatriz con respecto a un eje de rotación situado en el mismo plano que la curva.

Sea  $M$  una superficie de revolución. Elegimos una parametrización del tipo:

$$X(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, b(r)), \quad (4.1)$$

con  $r > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  y donde  $b$  es una función que depende únicamente del parámetro  $r$ . Se ha tomado sin pérdida de generalidad, el eje  $z$  como eje de rotación. Estudiamos entonces qué debe verificar la función  $b(r)$  para que  $M$  sea una superficie Weingarten.

Calculamos entonces las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  de dicha superficie a partir de las derivadas parciales de la parametrización  $X(r, \theta)$ :

$$\begin{cases} X_r = (\cos \theta, \sin \theta, b'(r)), \\ X_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0), \\ X_{rr} = (0, 0, b''(r)), \\ X_{\theta\theta} = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, 0), \\ X_{r\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0). \end{cases}$$

donde  $()'$  denota la derivada respecto a  $r$ . Por otro lado, el vector normal  $N$  a la superficie será igual al producto vectorial de  $X_r$  y  $X_\theta$  normalizado:

$$N = \frac{X_r \times X_\theta}{\|X_r \times X_\theta\|} = \frac{(-rb'(r) \cos \theta, -rb'(r) \sin \theta, r)}{r\sqrt{(b'(r))^2 + 1}} \stackrel{r \neq 0}{=} \frac{(-b'(r) \cos \theta, -b'(r) \sin \theta, 1)}{\sqrt{(b'(r))^2 + 1}}.$$

Las matrices de la primera y segunda forma fundamental en un punto  $p = X(r, \theta)$  de la superficie son:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (b'(r))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad II_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b''(r)}{\sqrt{(b'(r))^2 + 1}} & 0 \\ 0 & \frac{rb'(r)}{\sqrt{(b'(r))^2 + 1}} \end{pmatrix}.$$

**Observación 4.2.2.** Notar como, con la parametrización (4.1), el operador de Weingarten  $L_p$  es diagonal pues las matrices  $I_p$  e  $II_p$  lo son. Por tanto,  $X_r$  y  $X_\theta$  son las direcciones principales de curvatura, pero no están normalizadas ya que la primera forma fundamental no es la identidad. Afirmamos que la superficie está parametrizada por líneas de curvatura.

En particular, el operador de Weingarten resulta en:

$$L_p = \begin{pmatrix} \frac{b''(r)}{(1+(b'(r))^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{b'(r)}{r\sqrt{1+(b'(r))^2}} \end{pmatrix}.$$

De modo que las curvaturas principales de la superficie en el punto  $p$  son:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{b''(r)}{(1+(b'(r))^2)^{3/2}}, \\ k_2 = \frac{b'(r)}{r\sqrt{1+(b'(r))^2}}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Se puede comprobar fácilmente como  $k_1 = (rk_2)'$ . En consecuencia, si buscamos que exista una relación explícita  $k_1 = \Theta(k_2)$  entre las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  de la superficie de revolución con la que estamos trabajando, debe existir una solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO)  $(rk_2)' = \Theta(k_2)$ , o lo que es lo mismo:

$$k_2'(r) = \frac{\Theta(k_2) - k_2}{r}. \quad (4.3)$$

Nuestro objetivo es calcular la función  $\Theta(k_2)$ . Para ello, hay que despejar  $\Theta(k_2)$  de (4.3) y expresar el resultado en términos de  $k_2$ . Este último paso no siempre es sencillo. En la Sección 4.2.1 estudiamos un caso donde resulta sencillo despejar explícitamente la función  $\Theta(k_2)$  en términos de la curvatura principal  $k_2$ .

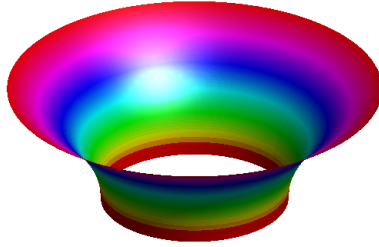
En conclusión, para que la superficie de revolución sea Weingarten, el parámetro  $r$  no puede aparecer explícitamente en la expresión  $k_1 = \Theta(k_2)$ . Veamos a continuación un ejemplo de una superficie Weingarten de revolución.

### 4.2.1. Catenoide

Sea  $\gamma(r) = (r, 0, \operatorname{arccosh}(r))$  una curva *catenaria* en el plano  $y = 0$ . El resultado de rotar dicha curva  $\gamma(r)$  con respecto al eje de revolución  $z$  da lugar a la superficie conocida como *catenoide*. Para este ejemplo, adoptamos la siguiente parametrización del catenoide:

$$X(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \operatorname{arccosh}(r)), \quad (4.4)$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$  es la distancia al eje  $z$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Esta parametrización es del mismo tipo que (4.1). A continuación se muestra una representación gráfica de dicho catenoide.



**Figura 4.2.** Representación gráfica de la parte superior del catenoide con  $r \in [1, 2]$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$  elaborada con el software *Matlab*.

Siguiendo la notación empleada anteriormente, la función  $b(r)$  en este caso es  $b(r) = \operatorname{arccosh}(r)$ . Con ello, podemos calcular las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  de la superficie mediante las expresiones obtenidas en (4.2), teniendo en cuenta además que  $b'(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2-1}}$  y  $b''(r) = -\frac{r}{(r^2-1)^{3/2}}$ :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{b''(r)}{(1+(b'(r))^2)^{3/2}} = -\frac{r}{(r^2-1)^{3/2} \left(1+\frac{1}{r^2-1}\right)^{3/2}} = -\frac{1}{r^2}, \\ k_2 = \frac{b'(r)}{r\sqrt{1+(b'(r))^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{r^2-1}}}{r\sqrt{1+\frac{1}{r^2-1}}} = \frac{1}{r^2}. \end{cases}$$

Se puede observar como  $k_1 + k_2 = 0$ , luego la superficie tiene curvatura media constante  $H = 0$ , tratándose así de una superficie minimal. Luego, la relación Weingarten buscada es  $k_1 = \Theta(k_2) = -k_2$ .

Veamos ahora cómo recuperar la relación  $k_1 = \Theta(k_2)$  a partir de la EDO (4.3). Como

$$k_2'(r) = -\frac{2}{r^3},$$

sustituyendo en la ecuación (4.3) tenemos:

$$-\frac{2}{r^3} = \frac{\Theta(k_2) - k_2}{r}.$$

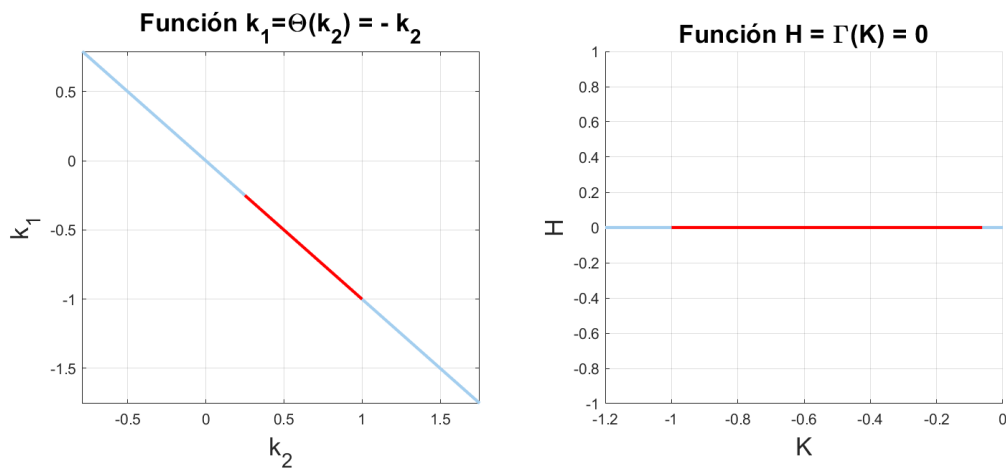
Despejando  $\Theta(k_2)$  y reemplazando la expresión de  $k_2(r) = \frac{1}{r^2}$  se llega a que:

$$\Theta(k_2) = k_2 - \frac{2}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^2} = -\frac{1}{r^2}.$$

Por lo tanto, la función  $\Theta(k_2)$  está dada por  $\Theta(k_2) = -k_2$ , que es independiente de las variables de parametrización y que verifica toda superficie minimal, en particular el catenoide.

Hay que destacar que al tratarse de una superficie con curvatura media nula, el diagrama de curvatura para las variables  $H$  y  $K$  se corresponde con  $H = \Gamma(K) = 0$ .

Como resultado, la Figura 4.3 muestra los diagramas de curvatura que se obtienen en este caso, tanto en las variables  $k_2$  y  $k_1$ , como en  $K$  y  $H$ .



**Figura 4.3.** Representación gráfica en azul del diagrama de curvatura en las variables  $k_2$  y  $k_1$  (imagen de la izquierda) y en  $K$  y  $H$  (imagen de la derecha). En rojo se muestran los valores particulares del catenoide escogido con  $r \in [1, 2]$ . Ambas gráficas han sido realizadas con el software *Matlab*.

Como se observa, ambos diagramas de curvatura representan una relación lineal.

El valor de las curvaturas principales solo depende del radio. Si en el dominio de la parametrización  $r \in [1, 2]$ , entonces el dominio de  $\Theta$  es  $[0.25, 1]$  y la imagen de  $\Theta$  es

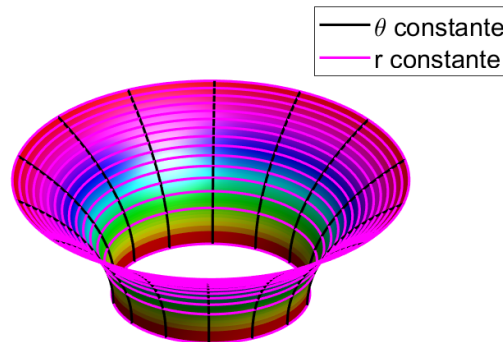
$[-1, -0.25]$ . El segmento correspondiente a esta superficie en el diagrama de curvaturas de la izquierda es el representado en color rojo. Este segmento representa a toda superficie minimal, pues está sobre la línea recta con pendiente  $-1$  que pasa por el origen.

El diagrama de curvatura es independiente del punto de la superficie pues la condición de Weingarten se verifica en todo punto.

En la imagen de la derecha de la Figura 4.3 con las variables  $K$  y  $H$ , la recta resultante es horizontal porque la curvatura media es cero.

De nuevo, si nos restringimos al caso  $r \in [1, 2]$ , representado en color rojo, observamos como la curvatura de Gauss es siempre negativa. En consecuencia, las curvaturas principales de la superficie mantienen siempre signos opuestos y no nulos. Luego, todos los puntos del catenoide son hiperbólicos.

Teniendo en cuenta lo mencionado en la Observación 4.2.2, resulta de interés representar las curvas coordenadas de la parametrización (4.4), pues el catenoide está parametrizado por líneas de curvatura.



**Figura 4.4.** Representación gráfica de las líneas de curvatura del catenoide con  $r \in [1, 2]$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ . En negro se muestran las curvas coordenadas de la forma  $X(r, \theta_0)$  y en rosa las de la forma  $X(r_0, \theta)$ . Imagen elaborada con el software *Matlab*.

Podemos observar como, con las curvas coordenadas de la forma  $X(r, \theta_0)$ , obtenemos la curva generatriz de la superficie de revolución, es decir, la catenaria. Por otro lado, con las curvas coordenadas  $X(r_0, \theta)$ , obtenemos circunferencias correspondientes a la rotación que se realiza alrededor del eje  $z$ .

A continuación, describimos los objetos geométricos estudiados en el Capítulo 3 para el catenoide empezando por la expresión del paraboloides oscultriz. Dado que todos los puntos del catenoide son hiperbólicos, observaremos que el paraboloides oscultriz

resultante es siempre un paraboloides hiperbólico.

Tomamos  $p = X(r_0, \theta_0)$  un punto cualquiera del catenoide tal que  $r_0 > 1$ . Teniendo en cuenta la expresión (3.2.2) y que la matriz de la segunda forma fundamental en  $p$  es:

$$II_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_0^2-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se concluye entonces que la expresión del paraboloides oscultriz en  $p$  para el catenoide resulta en:

$$\begin{aligned} X(r, \theta) \approx X(r_0, \theta_0) &+ \overbrace{\left( \cos \theta_0, \sin \theta_0, \frac{1}{\sqrt{r_0^2-1}} \right)}^{X_r(r_0, \theta_0)} (r - r_0) + \overbrace{(-r_0 \sin \theta_0, r_0 \cos \theta_0, 0)}^{X_\theta(r_0, \theta_0)} (\theta - \theta_0) \\ &+ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r_0^2-1} (r - r_0)^2 + (\theta - \theta_0)^2 \right) \overbrace{\left( -\frac{\cos \theta_0}{r_0}, -\frac{\sin \theta_0}{r_0}, \frac{\sqrt{r_0^2-1}}{r_0} \right)}^{N(r_0, \theta_0)}. \end{aligned}$$

Podemos observar como la ecuación del paraboloides oscultriz se descompone en dos partes. Una primera parte que se corresponde con una aproximación lineal que representa el plano tangente en  $X(u_0, v_0)$  y último sumando cuadrático en la dirección del vector normal de la superficie. Este último sumando mide la distancia entre el plano tangente y el paraboloides oscultriz.

En el sistema de referencia afín

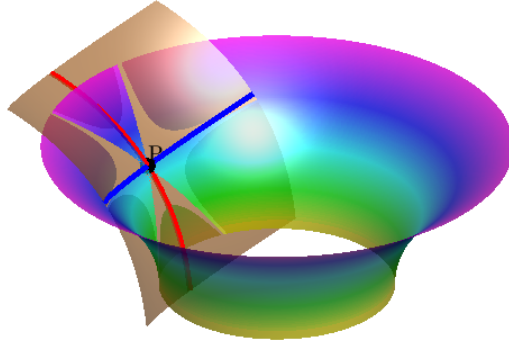
$$\mathcal{R} = \left\{ X(r_0, \theta_0); \left\{ \frac{X_r(r_0, \theta_0)}{\|X_r(r_0, \theta_0)\|}, \frac{X_\theta(r_0, \theta_0)}{\|X_\theta(r_0, \theta_0)\|}, N(r_0, \theta_0) \right\} \right\},$$

el paraboloides oscultriz tiene la siguiente parametrización:

$$X_{\mathcal{R}}(s, t) = \left( \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2-1}}s, r_0t, -\frac{1}{2(r_0^2-1)}s^2 + \frac{t^2}{2} \right),$$

y su ecuación explícita es:

$$z = \frac{y^2 - x^2}{2r_0^2}. \quad (4.5)$$



**Figura 4.5.** Representación gráfica del catenoide con  $r \in [1, 2]$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$  y su paraboloid oscultriz en  $p = X(1.3, \frac{3\pi}{4})$ . En rojo se muestra la curva coordenada de la forma  $X(r, \theta)$  y en azul la de la forma  $X(r_0, \theta)$ . Elaborada en *Matlab*.

En último lugar, calculamos y representamos la indicatriz de Dupin.

Tomamos un punto cualquiera en el catenoide  $p = X(r_0, \theta_0)$ , y como base del plano tangente,  $T_p\mathcal{M}$ , la dada por las direcciones principales normalizadas, que en este caso, coinciden con las derivadas parciales de la parametrización normalizadas, ya que el operador de Weingarten es diagonal. Es decir,  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\} = \left\{ \frac{X_r}{\|X_r\|}, \frac{X_\theta}{\|X_\theta\|} \right\}$ .

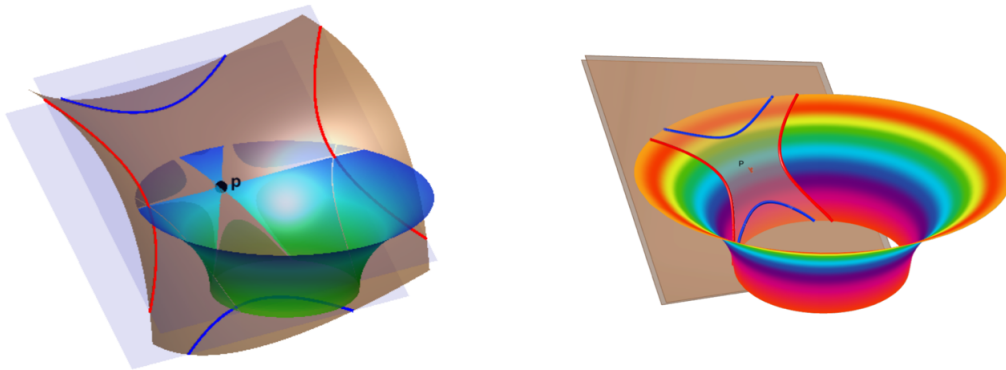
En el sistema de referencia afín  $\{p; \{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}\}$ , la expresión de la indicatriz de Dupin de la Ecuación (3.2) es:

$$\pm 1 = -\frac{1}{r_0^2}x_1^2 + \frac{1}{r_0}x_2^2, \quad (4.6)$$

para el catenoide.

Esta es la ecuación de una hipérbola en el plano tangente, lo que indica que todos los puntos del catenoide son hiperbólicos.

**Observación 4.2.3.** Se observa en la expresión (4.5) como imponiendo que  $z = \pm \frac{1}{2}$  se obtiene la indicatriz de Dupin (4.6) en los puntos de la forma  $X(r_0, \phi)$ . Luego la indicatriz de Dupin es igual en todos los puntos con el mismo valor de  $r$ .



**Figura 4.6.** La imagen de la derecha muestra la representación gráfica del catenoide con  $r \in [1, 2]$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$  y su indicatriz de Dupin asociada en  $p = X(1.5, \frac{3\pi}{4})$ . En rojo se muestra la condición  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$  y en azul  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$ . Elaborado en *Matlab*. La imagen de la derecha representa los cortes del catenoide con planos desplazados  $\frac{1}{4^2}$  en dirección del normal hacia el interior (color rojo) y hacia el exterior (color azul). Imagen elaborada en *Grasshopper*.

### 4.3. Superficie tubería con una curvatura principal constante

En esta subsección buscamos estudiar bajo qué condiciones existe una relación entre las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  de una superficie tubería  $M$ .

**Definición 4.3.1.** Sea  $\gamma(t)$  una curva regular y  $r > 0$ . Una *superficie tubería* se obtiene al considerar las circunferencias de radio  $r$  en el plano normal a la curva en cada punto  $\gamma(t)$ , es decir, el plano cuyo vector normal es  $\gamma'(t)$ .

Un ejemplo de superficie tubería es el toro. Como consecuencia de la definición, una de las curvaturas principales es constante. Esta propiedad es independiente de la curva  $\gamma(t)$  y es heredada por la propia construcción de la superficie tubería, pues las circunferencias de radio  $r$  tiene curvatura  $\frac{1}{r}$  constante.

Sea  $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$  una curva regular parametrizada por longitud de arco (PPA) en el plano  $XY$ . Podemos asumir que dicha curva está parametrizada por arco pues toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por longitud de arco que conserva la orientación. (Ver Teorema 1.1.7 de [CP10]).

Sea  $r > 0$  un valor positivo fijado. Definimos ahora la superficie  $M$  como la superficie tubería generada por circunferencias de radio  $r$ . El plano normal o perpendicular a la curva

en cada instante de tiempo queda definido por los vectores normal  $\bar{\mathbf{n}}(t)$  y binormal  $\bar{\mathbf{b}}(t)$ . En este caso, tenemos que:

- Vector tangente a la curva unitario:  $\bar{\mathbf{t}}(t) = \frac{(x'(t), y'(t), 0)}{\|\gamma'(t)\|} = (x'(t), y'(t), 0)$  donde la última igualdad se tiene dado que  $\gamma(t)$  está parametrizada por longitud de arco.
- Vector normal a la curva unitario:  $\bar{\mathbf{n}}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t), 0)}{\|\gamma'(t)\|} \stackrel{\text{PPA}}{=} (-y'(t), x'(t), 0)$ .
- Vector binormal a la curva unitario:  $\bar{\mathbf{b}}(t) = (0, 0, 1)$ , puesto que es una curva plana contenida en el plano  $z = 0$ .

Una parametrización de  $M$  es  $X(t, \phi) = \gamma(t) + r \cos \phi \bar{\mathbf{n}}(t) + r \sin \phi \bar{\mathbf{b}}(t)$ , siendo  $t \in I \subset \mathbb{R}$  el parámetro de la curva y  $\phi$  el ángulo de rotación en el plano normal a la curva en cada punto. De este modo, desarrollando la expresión se tiene que:

$$X(t, \phi) = (x(t) - r \cos \phi y'(t), y(t) + r \cos \phi x'(t), r \sin \phi), \quad \text{con } r > 0, t \in I, \phi \in [0, 2\pi].$$

Calculamos entonces las derivadas parciales de la parametrización:

$$\begin{cases} X_t(t, \phi) = (x'(t) - r \cos \phi y''(t), y'(t) + r \cos \phi x''(t), 0), \\ X_\phi(t, \phi) = (r \sin \phi y'(t), -r \sin \phi x'(t), r \cos \phi), \\ X_{tt}(t, \phi) = (x''(t) - r \cos \phi y'''(t), y''(t) + r \cos \phi x'''(t), 0), \\ X_{\phi\phi}(t, \phi) = (r \cos \phi y'(t), -r \cos \phi x'(t), -r \sin \phi), \\ X_{t\phi}(t, \phi) = (r \sin \phi y''(t), -r \sin \phi x''(t), 0). \end{cases}$$

Ahora bien, al tratarse  $M$  de una superficie tubería, el vector normal en cada punto,  $N(p)$ , se obtiene como  $N(p) := X(t, \phi) - \gamma(t) = r \cos \phi \bar{\mathbf{n}}(t) + r \sin \phi \bar{\mathbf{b}}(t)$ , es decir:

$$N(t, \phi) = \frac{(-r \cos \phi y'(t), r \cos \phi x'(t), r \sin \phi)}{\|(-r \cos \phi y'(t), r \cos \phi x'(t), r \sin \phi)\|} = (-\cos \phi y'(t), \cos \phi x'(t), \sin \phi).$$

**Observación 4.3.2.** Notar como, en efecto,  $X_t(t, \phi) N(t, \phi) = r \cos \phi (y' y'' + x' x'') = 0$  puesto que por hipótesis la curva está parametrizada por longitud de arco. Por tanto,  $(x')^2 + (y')^2 = 1$  y derivando la expresión se deduce que  $2x' x'' + 2y' y'' = 0$ . Por otro lado, se verifica que  $X_{\phi\phi}(t, \phi) N(t, \phi) = 0$ .

Con ello tenemos que las matrices de la primera y de la segunda forma fundamental en un punto  $p \in M$  son:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x'(t) - r \cos \phi y''(t))^2 + (y'(t) + r \cos \phi x''(t))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

$$II_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)) + r \cos^2 \phi (y'(t)y'''(t) + x'(t)x'''(t)) & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}.$$

**Observación 4.3.3.** Hay que destacar que, al igual que en la Sección 4.2, con la parametrización tomada el operador de Weingarten  $L_p$  es diagonal dado que  $I_p$  e  $II_p$  lo son. Luego,  $X_t$  y  $X_\phi$  son las direcciones principales de curvatura y la superficie  $\mathcal{M}$  está parametrizada por líneas de curvatura.

De esta manera, las curvaturas principales de la superficie  $\mathcal{M}$  son:

$$L_p = I_p^{-1} II_p = \begin{pmatrix} \frac{\cos \phi (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)) + r \cos^2 \phi (y'(t)y'''(t) + x'(t)x'''(t))}{(x'(t) - r \cos \phi y''(t))^2 + (y'(t) + r \cos \phi x''(t))^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Tal y como habíamos adelantado, podemos observar como  $k_2 = -\frac{1}{r}$  con  $k_2$  constante. Sin embargo, la otra curvatura principal depende del punto de la superficie. En este caso, la función  $\Phi$  que relaciona las curvaturas principales es la función constante:

$$k_2 = \Phi(k_1) = -\frac{1}{r}.$$

Por otro lado, se puede conseguir una relación explícita entre la curvatura de Gauss,  $K$ , la curvatura media,  $H$ , y el parámetro  $r$ . Por un lado  $K = k_1 k_2 = -\frac{k_1}{r}$ , y por otro lado,  $H = \frac{1}{2} (k_1 - \frac{1}{r})$ , de lo que podemos extraer que  $k_1 = 2H + \frac{1}{r}$ . Por tanto, sustituyendo esta última expresión en la expresión de la curvatura de Gauss obtenemos finalmente que:

$$K = \Xi(H) = -\frac{2H}{r} - \frac{1}{r^2}. \quad (4.8)$$

### 4.3.1. Superficie tubería a lo largo de una catenaria

En esta subsección, aplicaremos todo lo mencionado anteriormente al caso particular de una superficie tubería construída a lo largo de una catenaria como curva asociada. Para ello, tomaremos como parametrización de la catenaria  $\gamma(t) = (t, \cosh(t), 0)$ .

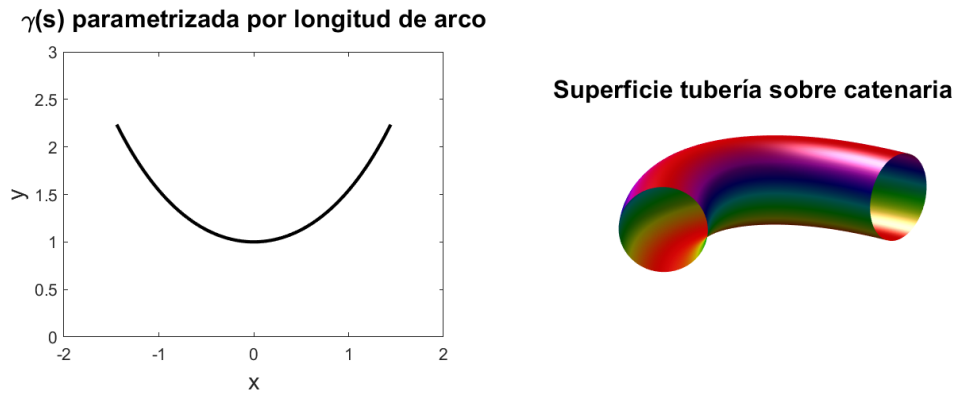
Observamos como  $\gamma(t)$  no está parametrizada por longitud de arco pues  $\|\gamma'(t)\| = \cosh(t)$ . Sin embargo, como  $s = \int_0^t \cosh \tau d\tau = \sinh t$ , nos basta escoger  $t = \operatorname{arcsinh}(s)$  para que la catenaria esté parametrizada por longitud de arco:

$$\gamma(s) = (\operatorname{arcsinh}(s), \sqrt{1+s^2}, 0).$$

La parametrización de la superficie tubería  $\mathcal{M}$  definida a partir de la curva catenaria parametrizada por arco es:

$$X(s, \phi) = \left( \operatorname{arcsinh}(s) - r \cos \phi \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \sqrt{1+s^2} + r \cos \phi \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, r \sin \phi \right).$$

En las representaciones gráficas fijamos  $r = 0.5 > 0$  para el radio de las circunferencias del plano normal a la curva,  $s \in I$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ .



**Figura 4.7.** Representación gráfica de la curva catenaria parametrizada por longitud de arco con  $s \in [-2, 2]$  (imagen de la izquierda) y de la superficie tubería generada con la curva catenaria PPA con  $s \in [-2, 2]$ ,  $r = 0.5$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$  (imagen de la derecha) realizadas en el software *Matlab*.

Teniendo en cuentas las expresiones obtenidas en (4.7) se tiene que, para esta parametrización, las curvaturas principales asociadas son:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{\cos \phi}{1+s^2 - r \cos \phi}, \\ k_2 = -\frac{1}{r}. \end{cases}$$

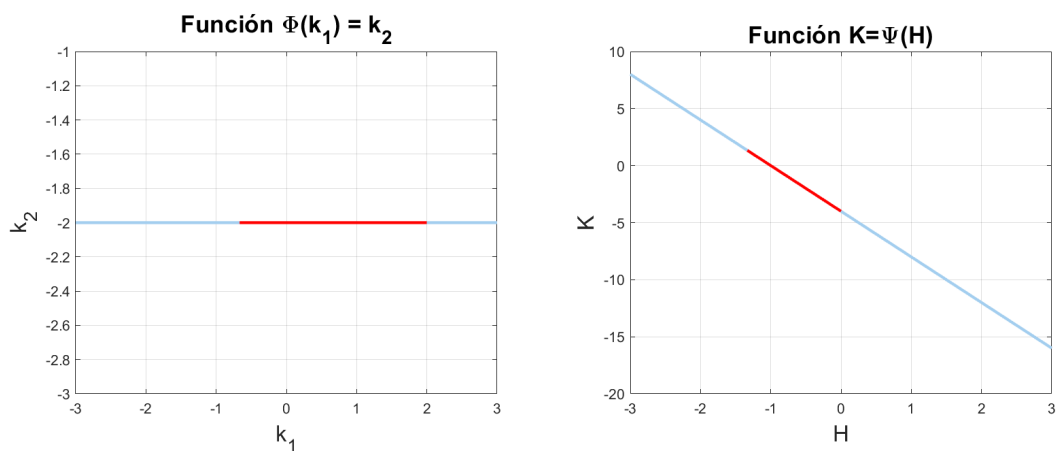
De modo que, al ser  $k_2$  constante, la función  $\Phi$  que relaciona ambas curvaturas principales es:

$$k_2 = \Phi(k_1) = -\frac{1}{r},$$

y la función que relaciona la curvatura de Gauss y la curvatura media en la superficie, teniendo en cuenta la expresión obtenida en (4.8), es:

$$K = \Psi(H) = -\frac{2H}{r} - \frac{1}{r^2}.$$

Tal y como se ha mencionado antes, estas relaciones no dependen de la curva  $\gamma$ . Representamos a continuación los diagramas de curvaturas asociados a la superficie en las variables  $k_1$  y  $k_2$  y en  $H$  y  $K$ .



**Figura 4.8.** Representación gráfica del diagrama de curvatura en las variables  $k_1$  y  $k_2$  (imagen de la izquierda) y en las variables  $H$  y  $K$ . Los valores de  $k_1$  y  $H$  para los tramos azules están en el intervalo  $[-3, 3]$ . Para el tramo rojo, los parámetros de la superficie bajo estudio son  $s \in [-2, 2]$ ,  $r = 0.5$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Imágenes elaboradas en *Matlab*.

Como se puede observar, ambos diagramas de curvatura son lineales. La primera de las gráficas muestra la relación existente entre las curvaturas principales. El diagrama es una línea horizontal, propio de las superficies con solo una de las curvaturas principales constantes. En este caso, el valor de la segunda curvatura  $k_2$  es constante, mientras que el valor de  $k_1$  depende del punto de la superficie, y por tanto de los parámetros  $s$  y  $\phi$ . Teniendo en cuenta que en la superficie hemos tomado como valores de los parámetros  $s \in [-2, 2]$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ , se pueden calcular numéricamente los valores máximos y mínimos que abarca la curvatura principal  $k_1$  y representar con ello el segmento de recta correspondiente a la superficie, mostrado en color rojo en la Figura 4.8.

Observamos como en ningún punto del fragmento considerado asociado a la superficie las curvaturas principales son iguales. Por tanto, la superficie no cuenta con ningún punto umbilical.

Por otro lado, la segunda de las gráficas en la Figura 4.8 muestra la relación entre la curvatura de Gauss  $K$  y la curvatura media  $H$  en la superficie. En este caso, el diagrama de curvaturas es una recta con pendiente  $-\frac{2}{r}$ , siendo  $r = 0.5$ .

Para representar los valores asociados a la superficie en particular, es necesario utilizar el dominio de parametrización puesto que la curvatura media  $H$  depende del punto de la superficie. Calculamos numéricamente los valores máximos y mínimos de  $H$  para representar el segmento correspondiente a la superficie en color rojo.

Al igual que en el toro, la superficie tubería tiene puntos hiperbólicos, elípticos y parabólicos. Esto se observa en el diagrama de curvatura de  $\Psi$  cuya imagen es un intervalo que contiene al cero. Es por ello por lo que en este ejemplo resulta bastante relevante calcular tanto la indicatriz de Dupin como el paraboloides oscultriz, ya que cada punto en la superficie se puede corresponder con tres tipos de cónicas distintas y de paraboloides oscultrices.

En los puntos hiperbólicos obtendremos paraboloides oscultrices hiperbólicos, en los puntos elípticos paraboloides elípticos y en los puntos parabólicos un paraboloides cilíndrico. Teniendo en cuenta la expresión (3.22), la ecuación que define el paraboloides oscultriz asociado a la superficie tubería en un punto  $p = X(s_0, \phi_0)$  genérico es:

$$\begin{aligned}
 X(s, \phi) \approx & X(s_0, \phi_0) + \overbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{1+s_0^2}} \left( 1 - \frac{r \cos \phi_0}{1+s_0^2} \right), \frac{s_0}{\sqrt{1+s_0^2}} \left( 1 - \frac{r \cos \phi_0}{1+s_0^2} \right), 0 \right)}^{X_s(s_0, \phi_0)} (s - s_0) \\
 & + \overbrace{\left( \frac{rs_0 \sin \phi_0}{\sqrt{1+s_0^2}}, -\frac{r \sin \phi_0}{\sqrt{1+s_0^2}}, r \cos \phi_0 \right)}^{X_\phi(s_0, \phi_0)} (\phi - \phi_0) \\
 & + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\cos \phi_0}{s_0^2 + 1} - \frac{r \cos^2 \phi_0}{(s_0^2 + 1)^2} \right) (s - s_0)^2 - r(\phi - \phi_0)^2 \right) \overbrace{\left( -\frac{s_0 \cos \phi_0}{\sqrt{1+s_0^2}}, \frac{\cos \phi_0}{\sqrt{1+s_0^2}}, \sin \theta_0 \right)}^{N(s_0, \phi_0)}.
 \end{aligned}$$

En el sistema de referencia afín:

$$\mathcal{R} = \left\{ X(s_0, \phi_0); \left\{ \frac{X_s(s_0, \phi_0)}{\|X_s(s_0, \phi_0)\|}, \frac{X_\phi(s_0, \phi_0)}{\|X_\phi(s_0, \phi_0)\|}, N(s_0, \phi_0) \right\} \right\},$$

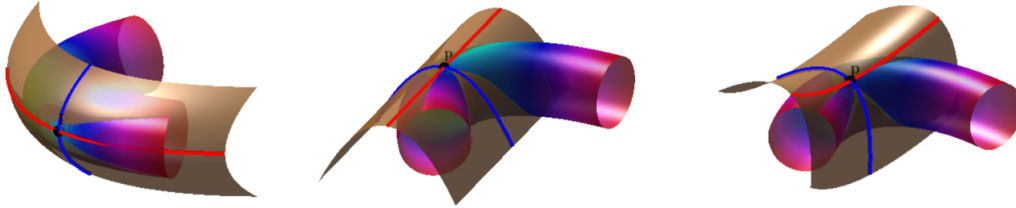
el paraboloido oscultriz tiene la siguiente parametrización:

$$X_{\mathcal{R}}(u, v) = \left( \left| 1 - \frac{r \cos \phi_0}{1 + s_0^2} \right| u, rv, \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \phi_0}{s_0^2 + 1} - \frac{r \cos^2 \phi_0}{(s_0^2 + 1)^2} \right) u^2 - \frac{r}{2} v^2 \right),$$

y su ecuación explícita es:

$$z = \frac{\cos \phi_0}{2(s_0^2 + 1 - r \cos \phi_0)} x^2 - \frac{1}{2r} y^2. \quad (4.9)$$

Manteniendo los valores empleados en las representaciones anteriores, es decir,  $r = 0.5$ ,  $s \in [-2, 2]$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ , podemos observar como  $s_0^2 + 1 - r \cos \phi_0 > 0$ . De esta manera, se deduce que la ecuación (4.9) representa un paraboloido hiperbólico si  $\cos \phi_0 > 0$  si y solo si  $\phi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , un paraboloido cilíndrico si  $\cos \phi_0 = 0$ , es decir,  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$  o  $\frac{3\pi}{2}$  y un paraboloido elíptico si  $\cos \phi_0 < 0$ , equivalentemente,  $\phi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ .



**Figura 4.9.** Representación gráfica de la superficie tubería con  $s \in [-2, 2]$ ,  $r = 0.5$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$  y sus paraboloides oscultrices en distintos puntos  $p$  de la superficie. De izquierda a derecha los puntos  $p$  son  $X(0.7, \frac{3\pi}{4})$ ,  $X(0.7, \frac{\pi}{2})$ ,  $X(0.7, \frac{\pi}{5})$  y sus paraboloides oscultrices elíptico, parabólico e hiperbólico, respectivamente. Las curvas en rojo representan la curvas coordenadas del paraboloido oscultriz de la forma  $X(s, \phi_0)$ , y en color azul se representan la curvas coordenadas de la forma  $X(s_0, \phi)$ . Imágenes elaboradas en *Matlab*.

Calculamos ahora la expresión de la indicatriz de Dupin. Tomamos  $p = X(s_0, \phi_0)$  un punto en la superficie tubería. Como base de  $T_p\mathcal{M}$  tomamos las direcciones principales normalizadas, que coinciden con las derivadas parciales de la parametrización normalizadas al ser diagonal el operador de Weingarten. Luego  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\} = \left\{ \frac{X_s}{\|X_s\|}, \frac{X_\phi}{\|X_\phi\|} \right\}$ .

Consideramos un vector unitario arbitrario  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$  con coordenadas  $(v_1, v_2)$  en la base  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$ . Su curvatura normal viene dada por:

$$k_n(\mathbf{v}, p) = k_1 v_1^2 + k_2 v_2^2 = \frac{\cos \phi}{1 + s^2 - r \cos \phi} v_1^2 - \frac{1}{r} v_2^2.$$

Tomamos  $v_1 = \cos \theta$  y  $v_2 = \sin \theta$ , establecemos que  $|k_n(\theta)| = \frac{1}{\mu^2}$  y realizamos el cambio de variable  $x_1 = \mu \cos \theta$  y  $x_2 = \mu \sin \theta$ . Llegamos entonces a:

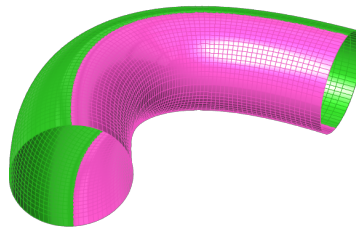
$$\pm 1 = \frac{\cos \phi}{1 + s^2 - r \cos \phi} x_1^2 - \frac{1}{r} x_2^2. \quad (4.10)$$

Podemos observar como la indicatriz de Dupin depende del signo de  $k_1$ .

- Si  $\text{sign}(k_1) < 0$ , entonces la indicatriz de Dupin es una elipse y únicamente existe para la condición  $k_n(\theta) = -\frac{1}{\mu^2}$ , es decir, para el valor  $-1$  en el lado izquierdo de la ecuación.
- Si  $\text{sign}(k_1) > 0$ , la indicatriz de Dupin corresponde a dos hipérbolas conjugadas.
- Por último, si  $\text{sign}(k_1) = 0$ , entonces la indicatriz de Dupin son dos rectas paralelas y solo existen nuevamente para la condición  $k_n(\theta) = -\frac{1}{\mu^2}$  y por tanto con  $-1$  en el lado izquierdo de la ecuación.

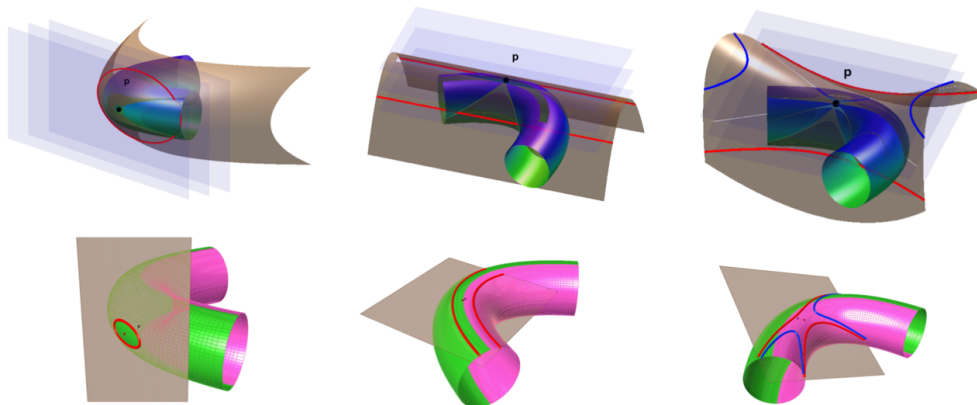
**Observación 4.3.4.** De nuevo, se observa como al imponer  $z = \pm \frac{1}{2}$  en la expresión (4.9) se obtiene la indicatriz de Dupin (4.10) en los puntos de la forma  $X(s_0, \phi_0)$ . A diferencia del catenoide, la indicatriz de Dupin en este caso depende del punto de la superficie.

Para una mejor interpretación, la Figura 4.10 representa la superficie tubería por colores en función del signo de la primera curvatura principal  $k_1$ .



**Figura 4.10.** Representación gráfica de los distintos tipos de puntos en la superficie tubería con  $s \in [-2, 2]$ ,  $r = 0.5$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Los puntos en color verde representan los puntos elípticos y los de color rosa los hiperbólicos. En la frontera de los dos se sitúan los parabólicos. Imagen elaborada en *Grasshopper*.

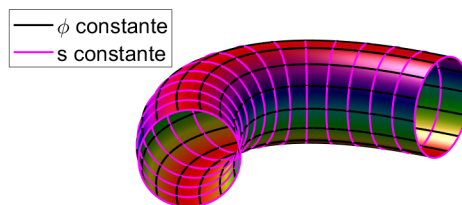
El resultado obtenido coincide con la clasificación de puntos calculada previamente en el paraboloides osculatrix para dichos parámetros.



**Figura 4.11.** Las imágenes superiores muestran la representación gráfica de la tubería con  $s \in [-2, 2]$ ,  $r = 0.5$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$  y su indicatriz de Dupin para tres puntos  $p$  distintos de la superficie:  $X(0.7, \frac{3\pi}{4})$ ,  $X(0.7, \frac{\pi}{2})$ ,  $X(0.7, \frac{\pi}{5})$ , respectivamente. En rojo se muestra la condición  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$  y en azul  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ . Elaboradas en *Matlab*. Las imagen inferiores representan los cortes de la tubería en los mismos puntos con planos desplazados  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  en dirección del normal hacia el interior (color rojo) y hacia el exterior (color azul). Imagen elaborada en *Grasshopper*

En último lugar y dado que el operador de Weingarten es diagonal (4.7), se tiene que la parametrización empleada es por líneas de curvatura.

#### Líneas de curvatura de la superficie tubería



**Figura 4.12.** Representación gráfica de las curvas coordenadas que son líneas de curvatura de la superficie tubería generada con la curva catenaria PPA con  $s \in [-2, 2]$ ,  $r = 0.5$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ . En color blanco las curvas de la forma  $X(s_0, \phi)$  con  $s_0$  constante y en negro  $X(s, \phi_0)$  con  $\phi_0$  constante. Se ha representado en el software *Grasshopper*.

Por un lado, las curvas coordenadas del parámetro  $\phi$  son las curvas representadas en color negro. Estas hacen referencia a la curva catenaria que genera la superficie. Por otro lado, las curvas coordenadas del parámetro  $s$  están representadas en rosa y hacen referencia a las circunferencias de radio  $r$  que definen la estructura característica de tubería. Recordamos que, el vector tangente de estas curvas es proporcional a una de las direcciones principales de la superficie.

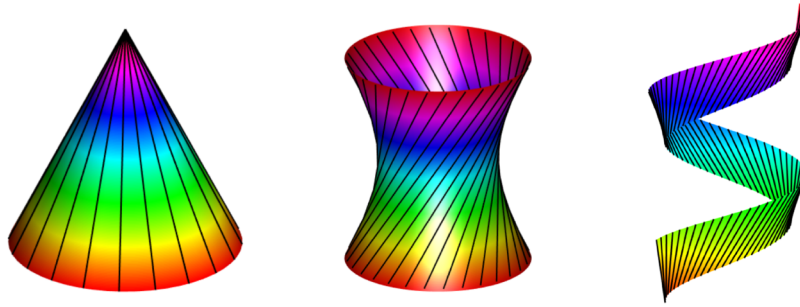
## 4.4. Superficies regladas

En esta sección, estudiaremos las relaciones Weingarten existentes en las superficies regladas. Introducimos primero el concepto de superficie reglada.

**Definición 4.4.1.** Una *superficie reglada* es una superficie que verifica que por cada punto existe una recta contenida en la superficie que pasa por el punto. Estas superficies admiten siempre una parametrización de la forma

$$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(u, v) = \gamma(u) + v w(u),$$

donde  $\gamma(u)$  es una curva en la superficie llamada *curva directriz*, y  $w(u)$  es una curva en  $\mathbb{S}^1$  que define la dirección de las generatrices denominada *curva generatriz*.



**Figura 4.13.** Representación gráfica de un cono, un hiperboloide y una superficie reglada generada por dos hélices desplazadas y sus respectivas generatrices. Imágenes elaboradas en *Matlab*.

Utilizando la parametrización  $X(u, v) = \gamma(u) + v w(u)$  con  $w(u) \in \mathbb{S}^1$  de una superficie reglada  $\mathcal{M}$ , estudiamos cómo es su curvatura de Gauss y curvatura media en busca de una relación que las involucre. Para empezar:

$$\begin{cases} X_u(u, v) = \gamma'(u) + v w'(u), \\ X_v(u, v) = w(u), \\ X_{uu}(u, v) = \gamma''(u) + v w''(u), \\ X_{uv}(u, v) = w'(u), \\ X_{vv}(u, v) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

De esta manera, el vector unitario normal a la superficie  $\mathcal{M}$  en un punto  $p = X(u, v)$  es  $N(u, v) = \frac{\gamma'(u) \times w(u) + v w'(u) \times w(u)}{\|\gamma'(u) \times w(u) + v w'(u) \times w(u)\|}$ . Por tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle = \|\gamma'(u) + v w'(u)\|^2, \\ F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle = \langle \gamma'(u), w(u) \rangle + v \langle w'(u), w(u) \rangle = \langle \gamma'(u), w(u) \rangle, \\ G(u, v) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle = \|w(u)\|^2 = 1, \\ e(u, v) = \langle X_{uu}(u, v), N \rangle = \langle \gamma''(u) + v w''(u), N \rangle, \\ f(u, v) = \langle X_{uv}(u, v), N \rangle = \langle w'(u), N \rangle, \\ g(u, v) = \langle X_{vv}(u, v), N \rangle = 0. \end{array} \right.$$

donde se ha usado que, puesto que  $w(u) \in \mathbb{S}^1$ , entonces  $\|w(u)\|^2 = \langle w(u), w(u) \rangle = 1$  y, derivando la expresión con respecto a la variable  $u$ , se tiene que  $2\langle w'(u), w(u) \rangle = 0$ .

De esta manera, las matrices de la primera y segunda forma fundamental son:

$$I_p = \begin{pmatrix} \|\gamma'(u) + v w'(u)\|^2 & \langle \gamma'(u), w(u) \rangle \\ \langle \gamma'(u), w(u) \rangle & 1 \end{pmatrix}, \quad II_p = \begin{pmatrix} \langle \gamma''(u) + v w''(u), N \rangle & \langle w'(u), N \rangle \\ \langle w'(u), N \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

La curvatura de Gauss y la curvatura media de la superficie  $M$  en el punto  $p$  pueden calcularse entonces en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{f^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{Ge - 2Ff}{EG - F^2}.$$

Con ello, concluimos que, al ser  $f^2 \geq 0$  y  $EG - F^2 > 0$ , la curvatura de Gauss,  $K$ , es siempre negativa o nula. Luego, los puntos de las superficies regladas son hiperbólicos (si  $K < 0$ ) o parabólicos o umbilicales planos (si  $K = 0$ ) en función del signo de  $H$ .

Debido a esta particularidad de signos de la curvatura de Gauss en una superficie reglada, surgen dos tipos de superficies regladas:

**Definición 4.4.2.** Una superficie reglada  $M$  se dice que es *desarrollable* si tiene curvatura de Gauss idénticamente nula en todos los puntos. En caso contrario, diremos que la superficie reglada es *no desarrollable*.

Para las superficies regladas desarrollables se cumple que en todos los puntos:

$$K = 0 \iff f^2 = 0 \iff \langle w'(u), N \rangle = 0 \iff \begin{cases} w'(u) = 0, \\ \text{o} \\ w'(u) \in T_{X(u,v)}M. \end{cases}$$

De aquí se deduce una relación de Weingarten clara:  $K = \Xi(H) = 0$ . Por otro lado, una de las curvaturas principales es siempre cero, obteniendo la relación  $k_1 = \Theta(k_2) = 0$  o  $k_2 = \Phi(k_1) = 0$ .

Para superficies regladas no desarrollables no existe ninguna relación de Weingarten válida para todas ellas y tendrá que estudiarse caso por caso.

#### 4.4.1. Desarrollables: cilindro

Uno de los ejemplos más ilustrativos de una superficie reglada desarrollable es el cilindro. En particular, vamos a considerar el cilindro circular de radio  $R > 0$  y altura  $h > 0$  con la parametrización dada por:

$$X(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, h].$$

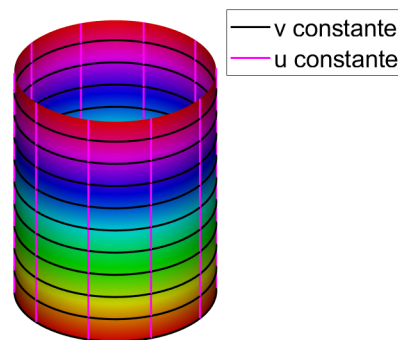
A partir de:

$$\begin{cases} X_u(u, v) = (-R \sin u, R \cos u, 0), \\ X_v(u, v) = (0, 0, 1), \\ X_{uu}(u, v) = (-R \cos u, -R \sin u, 0), \\ X_{uv}(u, v) = \mathbf{0}, \\ X_{vv}(u, v) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Tomamos como vector normal y unitario a la superficie  $N(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$ . De esta manera, los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental en el punto  $p = X(u, v)$  son:  $E(u, v) = R^2$ ,  $F(u, v) = 0$ ,  $G(u, v) = 1$ ,  $e(u, v) = -R$  y  $f(u, v) = g(u, v) = 0$ .

$$I_p = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II_p = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

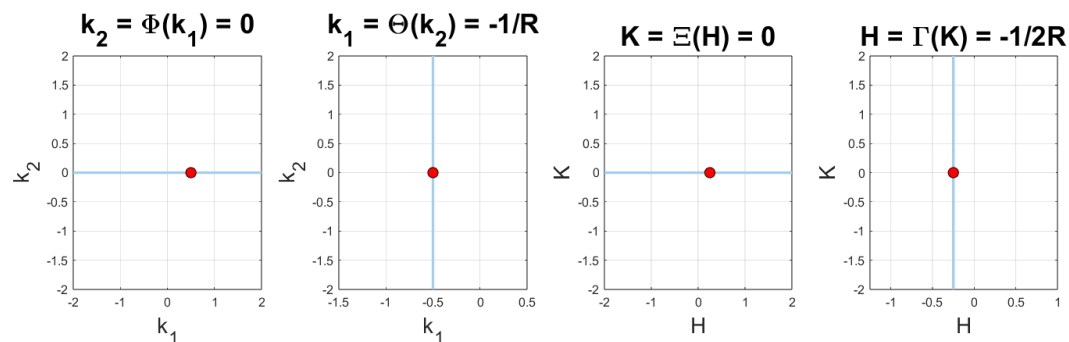
Como el operador de Weingarten  $L_p$  tiene asociada una matriz diagonal, la superficie está parametrizada por líneas de curvatura y sus curvaturas principales son  $k_1 = -\frac{1}{R}$  y  $k_2 = 0$ , luego es una superficie reglada desarrollable porque su curvatura de Gauss es siempre cero.



**Figura 4.14.** Representación gráfica de las curvas coordenadas que coinciden con las líneas de curvatura del cilindro con  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $R = 2$ ,  $b = 5$  y  $v \in [0, b]$ . En color negro las curvas de la forma  $X(u, v_0)$  con  $v_0$  constante y en rosa  $X(u_0, v)$  con  $u_0$  constante. Imagen elaborada en *Matlab*.

En este caso, la primera relación de Weingarten que nos surge es  $k_2 = \Phi(k_1) = 0$  al ser una superficie reglada desarrollable. Sin embargo, la otra curvatura principal también es constante y se puede considerar la relación Weingarten  $k_1 = \Theta(k_2) = -\frac{1}{R}$ .

Por otro lado, en las variables  $H$  y  $K$ , el cilindro es una superficie con curvatura de Gauss constante y relación de Weingarten  $K = \Xi(H) = 0$ . Además, como superficie con curvatura media constante admite una relación de Weingarten  $H = \Gamma(K) = -\frac{1}{2R}$ .



**Figura 4.15.** Representación gráfica de los distintos diagramas de curvaturas asociados al cilindro para un radio  $R = 2$  en las variables  $k_1$  y  $k_2$  (primera y segunda imagen) y en  $H$  y  $K$  (tercera y cuarta imagen). Imágenes elaboradas en *Matlab*.

Podemos observar como en todos los casos los diagramas de curvatura que se obtienen son lineales. No obstante, los valores correspondientes a la superficie son solo un punto en el diagrama de curvatura porque todas las curvaturas que intervienen son constantes en toda la superficie.

Por otro lado, al ser la curvatura de Gauss  $K = 0$  y la curvatura media  $H \neq 0$ , todos los puntos del cilindro son parabólicos. Es por ello que, en cualquier punto del cilindro, la indicatriz de Dupin es una cónica degenerada formada por dos líneas paralelas y su paraboloides oscultriz es siempre cilíndrico.

Teniendo en cuenta la expresión (3.22) podemos concluir que la expresión del paraboloides oscultriz en un punto  $p = X(u_0, v_0)$  es:

$$X(u, v) \approx X(u_0, v_0) + \underbrace{(-R \sin u_0, R \cos u_0, 0)}_{X_u(u_0, v_0)}(u - u_0) + \underbrace{(0, 0, 1)}_{X_v(u_0, v_0)}(v - v_0) - \frac{R}{2}(u - u_0)^2 \underbrace{(\cos u_0, \sin u_0, 0)}_{N(u_0, v_0)}.$$

Tomando el sistema de referencia afín

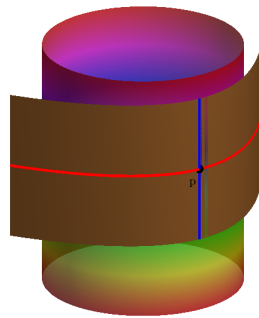
$$\mathcal{R} = \left\{ X(u_0, v_0); \left\{ \frac{X_u(u_0, v_0)}{\|X_u(u_0, v_0)\|}, \frac{X_v(u_0, v_0)}{\|X_v(u_0, v_0)\|}, N(u_0, v_0) \right\} \right\}$$

el paraboloides oscultriz se parametriza como:

$$X_{\mathcal{R}}(s, t) = \left( Rs, t, -\frac{R}{2}s^2 \right).$$

Su ecuación explícita entonces es:

$$z = -\frac{x^2}{2R}. \quad (4.11)$$



**Figura 4.16.** Representación gráfica del paraboloides oscultriz del cilindro con  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $R = 2$ ,  $b = 5$  y  $v \in [0, b]$ . El punto de estudio es  $p = X(4.8, 3)$ . La curva en rojo representa la curva coordenada del paraboloides oscultriz de la forma  $X(u, v_0)$ , y en color azul se representa la curva coordenada de la forma  $X(u_0, v)$ . Se ha representado en el software *Matlab*.

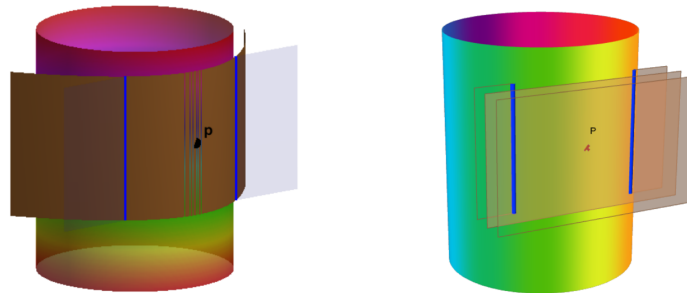
Por último, para construir la indicatriz de Dupin consideramos como base del plano tangente  $T_p\mathcal{M}$  la formada por las direcciones principales normalizadas  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$ . De manera análoga a casos anteriores, tomar esta base equivale a tomar la base formada por las derivadas parciales de la parametrización normalizadas, pues el operador de Weingarten ya es diagonal en esa base. Fijamos el punto  $p = X(u_0, v_0)$ .

Consideramos un vector unitario cualquiera  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$  con coordenadas  $(v_1, v_2)$  en la base de  $T_p\mathcal{M}$  tomada. De esta manera, la curvatura normal de la superficie en el punto  $p$  en la dirección de  $\mathbf{v}$  tiene la siguiente expresión:

$$k_n(\mathbf{v}, p) = k_1 v_1^2 + k_2 v_2^2 = -\frac{1}{R} v_1^2.$$

Tomamos  $v_1 = \cos \theta$  y  $v_2 = \sin \theta$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Asumimos además que  $|k_n(\theta)| = \frac{1}{\mu^2}$  y con ello realizamos el cambio de variable  $x_1 = \mu \cos \theta$  y  $x_2 = \mu \sin \theta$ . Llegamos entonces a que la expresión de la indicatriz de Dupin asociada al cilindro es:

$$\pm 1 = -\frac{1}{R} x_1^2. \quad (4.12)$$



**Figura 4.17.** La imagen de la izquierda muestra la representación gráfica de la indicatriz de Dupin del cilindro con  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $R = 2$ ,  $b = 5$  y  $v \in [0, b]$  en el punto de estudio es  $p = X(4.8, 3)$ . Representada en *Matlab*. La imagen de la derecha muestra los cortes de la superficie con el plano tangente desplazado una altura  $\frac{1}{2}$  en dirección del vector normal hacia el interior. Imagen realizada en *Grasshopper*.

La expresión (4.12) determina una cónica real cuando el lado izquierdo válido es  $-1$ . Esto supone la limitación de la indicatriz de Dupin a la condición  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$ .

**Observación 4.4.3.** En este caso, si se toma  $z = -\frac{1}{2}$  en la expresión del paraboloides osculador (4.11) se obtiene la misma expresión que la indicatriz de Dupin (4.12).

### 4.4.2. No desarrollables: helicoides

Como se ha mencionado anteriormente, para una superficie reglada no desarrollable no existe, en general, una relación de Weingarten clara.

La *superficie helicoidal* o *helicoides* es un caso particular de una superficie reglada no desarrollable y además minimal (ver Definición 2.2.22). Al tener curvatura media  $H = 0$ , existe una relación inmediata entre las curvaturas principales en las variables  $k_1$  y  $k_2$ :  $k_1 = \Theta(k_2) = -k_2$ . Analicemos esta superficie, que además veremos que no está parametrizada por líneas de curvatura.

**Definición 4.4.4.** Una *superficie helicoidal* es una superficie generada a partir de una curva a la cual se le aplica una rotación alrededor de un eje y una traslación a lo largo del mismo eje, es decir, un movimiento helicoidal.

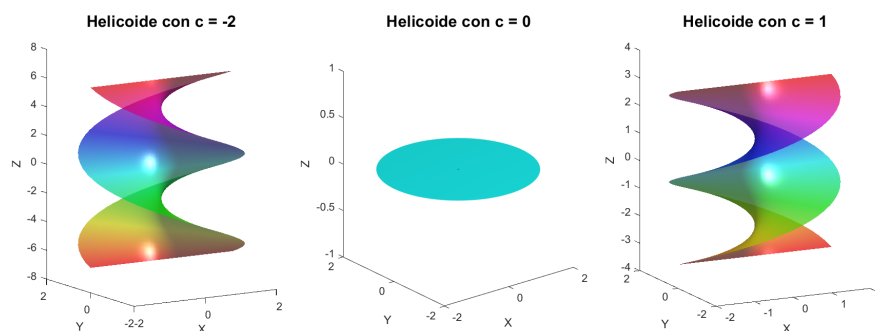
**Definición 4.4.5.** Un *helicoides* es una superficie helicoidal generada a partir de una recta plana.

Asumiremos, sin pérdida de generalidad, el eje de rotación y traslación como el eje  $z$ . Se considera la siguiente parametrización del helicoides generado a partir de un segmento en el plano  $XY$ :

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu),$$

donde  $u \in [-\pi, \pi]$  es el parámetro angular que marca la rotación alrededor del eje  $z$ ,  $v \in [-2, 2]$  es el desplazamiento a lo largo de la recta generatriz y  $c \in \mathbb{R}$  es un parámetro que controla, en función del signo, el desplazamiento vertical del segmento a lo largo del eje de rotación tras dar una vuelta completa.

Se puede comprobar fácilmente como el helicoides es una superficie reglada (ver Definición 4.4.1) con  $\gamma(u) = (0, 0, cu)$  y  $w(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ .



**Figura 4.18.** Representación gráfica del helicoides para distintos valores de  $c$  con  $u \in [-\pi, \pi]$  y  $v \in [-2, 2]$  realizadas en *Matlab*.

Podemos observar como, para  $c = 0$  lo que se obtiene es un (trozo de) plano, degenerando la superficie reglada en desarrollable. Calculamos las derivadas parciales de la parametrización:

$$\begin{cases} X_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, c), \\ X_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 0), \\ X_{uu}(u, v) = (-v \cos u, -v \sin u, 0), \\ X_{uv}(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0), \\ X_{vv}(u, v) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Por otro lado, se calcula el vector normal  $N(u, v)$ :

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-c \sin u, c \cos u, -v)}{\sqrt{c^2 + v^2}}.$$

De esta manera, las matrices de la primera y segunda forma fundamental son respectivamente:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Con ello obtenemos que la matriz asociada al operador de Weingarten es:

$$L_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{(c^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con polinomio característico } p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{c^2}{(c^2 + v^2)^2}. \quad (4.14)$$

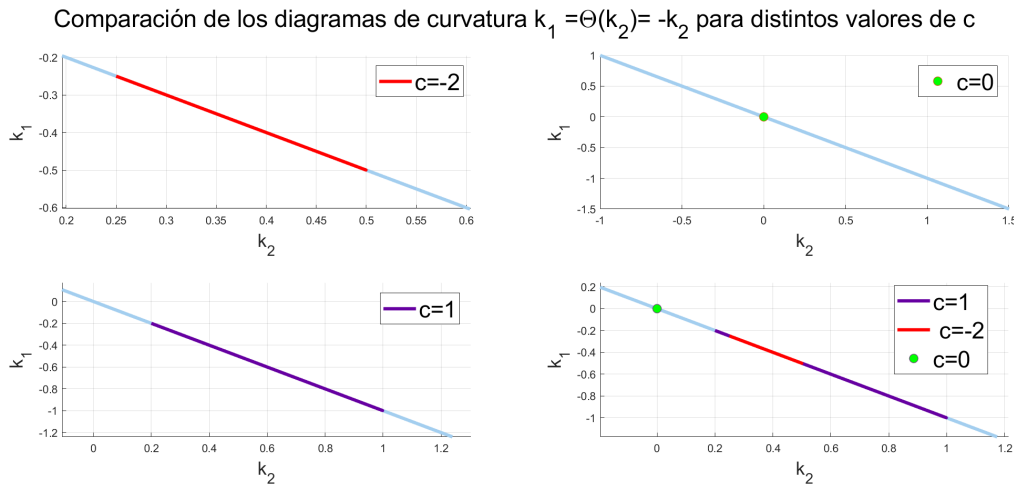
Los autovalores asociados al operador de Weingarten, y por tanto raíces de su polinomio característico, así como curvaturas principales del helicoide, son:

$$k_1 = -\frac{|c|}{(c^2 + v^2)}, \quad k_2 = \frac{|c|}{(c^2 + v^2)}.$$

De aquí deducimos que el helicoide es una superficie minimal pues  $k_1 + k_2 = 0$ . Por tanto, la condición de Weingarten asociada a esta superficie es  $k_1 = \Theta(k_2) = -k_2$ .

Por otro lado, como la curvatura media de la superficie es  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$  y su curvatura de Gauss  $K = k_1 k_2 = -\frac{c^2}{(c^2 + v^2)^2}$ , que sí depende de una de las variables de la parametrización, encontramos también una relación Weingarten dada por:  $H = \Gamma(K) = 0$ .

En consecuencia, podemos representar los diagrama de curvaturas en las variables  $k_1$  y  $k_2$  y en  $H$  y  $K$ . En primer lugar se representan los resultados obtenidos en las variables  $k_1$  y  $k_2$ .



**Figura 4.19.** Representación gráfica del diagrama de curvatura en las variables  $k_1$  y  $k_2$  asociado al helicoido con  $c \in \{-2, 0, 1\}$ . Los segmentos en color rojo y morado y el punto en color verde hacen referencia a los valores que toman las curvaturas principales para  $v \in [-2, 2]$ . Imágenes realizadas con el software *Matlab*.

Como se puede observar, los diagramas de curvatura muestran una relación lineal entre las curvaturas principales. De manera análoga al caso del catenoide (ver Sección 4.2.1), al tratarse de una superficie minimal, la pendiente de las rectas es  $-1$  y todas ellas pasan por el origen de coordenadas independientemente del valor que tome el parámetro  $c$ .

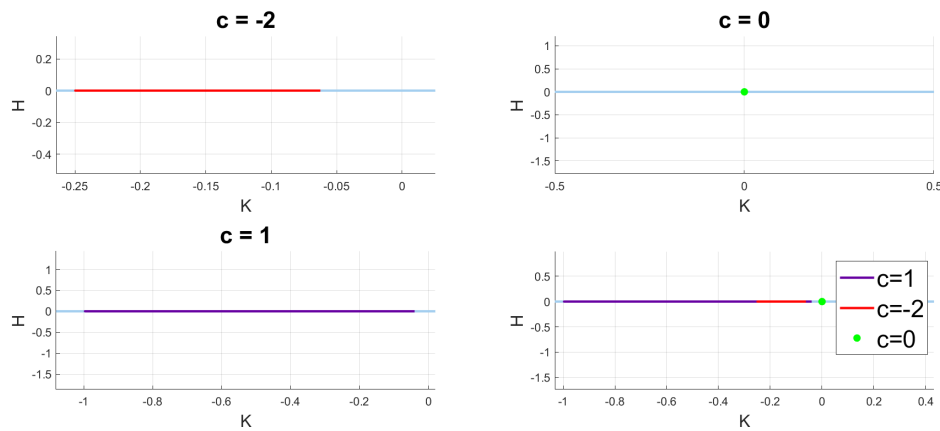
Para el primer caso, con  $c = -2$ , es destacable como, el segmento de recta asociada a  $v \in [-2, 2]$ , refleja que una de las curvaturas principales es siempre positiva mientras la otra es siempre negativa.

En el caso de  $c = 0$  la superficie resultante es el plano. Como era de esperar, ambas curvaturas principales son constantes e iguales a cero, representando así un único punto en el diagrama.

Por último, para  $c = 1$  los resultados obtenidos son análogos a los de  $c = -2$ , salvo por el abanico de valores que adoptan las curvaturas principales, que es algo más amplio.

Se incluye una última gráfica que compara los tres diagramas de curvatura particulares con el fin de tener una mejor interpretación. A continuación se muestra el diagrama de curvaturas asociado a las variables  $H$  y  $K$ .

Comparación de los diagramas de curvatura del helicoides  $H=\Gamma(K)=0$  para distintos valores de  $c$



**Figura 4.20.** Representación gráfica del diagrama de curvatura asociado a las variables  $H$  y  $K$  para el helicoides con  $c = \{-2, 0, 1\}$ . Los segmentos en color rojo y morado y el punto en color verde hacen referencia a los valores que abarca la curvatura de Gauss tomando  $v \in [-2, 2]$ . Han sido realizados con el software *Matlab*.

A la vista de las representaciones gráficas, es posible ver que la relación entre la curvatura de Gauss y la curvatura media es también lineal.

De nuevo, de manera análoga al catenoide (ver Sección 4.2.1), al tratarse de una superficie minimal, el valor de la curvatura media es siempre constante e igual a cero. Es por ello que el diagrama de curvatura en este caso es una línea vertical.

Para los casos de  $c = -2$  y  $c = 1$  observamos como, los valores asociados a  $v \in [-2, 2]$  reflejan que todos los puntos del helicoides son hiperbólicos pues la curvatura de Gauss es siempre negativa.

Sin embargo, para el caso  $c = 0$  vemos como, al tratarse del plano, tanto la curvatura de Gauss como la curvatura media son nulas en todo punto representando así un único punto en el diagrama. Por tanto, para  $c = 0$  todos los puntos son umbilicales planos.

Volviendo al operador de Weingarten (4.14), como en esta ocasión no tiene asociada una matriz diagonal, la superficie no está parametrizada por líneas de curvatura. La existencia de una parametrización por líneas de curvatura está garantizada pero no es trivial hallarla explícitamente. Veamos cómo proceder para obtener dicha parametrización.

Tomamos  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  con  $t \in I$  una curva contenida en la superficie y un punto en la superficie. De esta manera, obtendremos las dos líneas de curvatura que pasan por dicho punto, pero no la parametrización completa por líneas de curvatura. Sea

$p = X(0, 1) = (1, 0, 0)$  un punto en la superficie. La curva  $\gamma(t)$  es línea de curvatura si  $(u'(t), v'(t))$  es solución de la siguiente ecuación diferencial (ver Sección 2.4):

$$-\frac{c}{\sqrt{c^2 + v(t)^2}} (v'(t))^2 + c\sqrt{c^2 + v(t)^2} (u'(t))^2 = 0 \iff$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + v(t)^2}} ((c^2 + v(t)^2)(u'(t))^2 - (v'(t))^2) = 0.$$

Asumiendo la constante  $c \neq 0$ <sup>1</sup>, la ecuación diferencial de las líneas de curvatura queda:

$$(c^2 + v^2)(u'(t))^2 - (v'(t))^2 = 0 \text{ o equivalentemente } \frac{dv}{du} = \pm\sqrt{c^2 + v(t)^2}.$$

Esta EDO es separable y se integra como  $\int \frac{dv}{\sqrt{c^2 + v^2}} = \pm \int du$  que tiene como solución  $\ln(v + \sqrt{c^2 + v^2}) = \pm u + C_1$ , lo cual es equivalente a  $v + \sqrt{c^2 + v(t)^2} = e^{\pm u + C_1}$ .

Tomando  $C_2 := e^{C_1}$  se tiene que  $v + \sqrt{c^2 + v^2} = C_2 e^{\pm u}$ . Con todo ello, despejando  $v$  llegamos a:

$$v = \frac{C_2^2 e^{\pm 2u} - c^2}{2C_2 e^{\pm u}}. \quad (4.15)$$

Establecemos ahora como condición inicial para la curva que  $(u(0), v(0)) = (0, 1)$ . De esta manera, podemos calcular cual sería el valor adecuado de  $C_2$ .

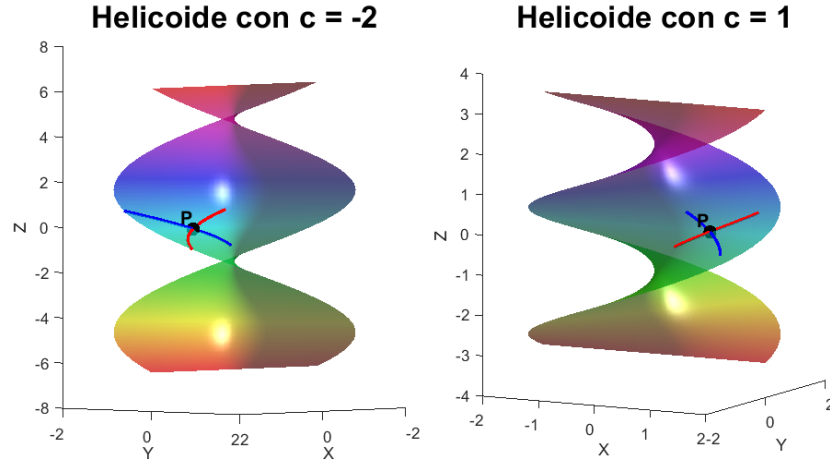
$$1 = \frac{C_2^2 e^{\pm 2 \cdot 0} - c^2}{2C_2 e^{\pm 0}} = \frac{C_2^2 - c^2}{2C_2} \iff C_2^2 - 2C_2 - c^2 = 0 \iff C_2 = 1 \pm \sqrt{1 + c^2}.$$

Como previamente se ha definido  $C_2 := e^{C_1}$  nos quedamos con la solución positiva de  $C_2$ , es decir,  $C_2 = 1 + \sqrt{1 + c^2}$ . En conclusión, la parametrización de las dos líneas de curvatura de  $X(u, v)$  en un entorno del punto  $(0, 1)$  son:

$$\gamma_1(u) := X\left(u, \frac{(1 + \sqrt{1 + c^2})^2 e^{2u} - c^2}{2(1 + \sqrt{1 + c^2})e^u}\right), \quad \gamma_2(u) := X\left(u, \frac{(1 + \sqrt{1 + c^2})^2 e^{-2u} - c^2}{2(1 + \sqrt{1 + c^2})e^{-u}}\right),$$

donde, para evitar confusión,  $u = t$  continúa siendo el parámetro angular y tomamos  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , con  $\varepsilon > 0$ , puesto que la descripción es local.

<sup>1</sup>Si  $c = 0$  se trata del caso del plano con ambas curvaturas principales iguales e idénticas a 0. En este caso, todas las direcciones son direcciones principales.



**Figura 4.21.** Representación gráfica de las líneas de curvatura del helicoide para valores de  $c \in \{-2, 1\}$  con  $t \in [-0.4, 0.4]$  y  $p = X(0, 1)$  realizados en el software *Matlab*.

Discretizando el dominio de la parametrización,

$$D = \left\{ (u_j, v_k) = \left( -\pi + \frac{2\pi j}{n}, -2 + \frac{4k}{m} \right), j = 0, \dots, n; k = 0 \dots m; n, m \in \mathbb{N} \right\},$$

puede generalizarse el procedimiento extendiendo la expresión a distintos puntos en la superficie. Para cada uno de estos valores, puede obtenerse el valor de la constante  $C_2$  resolviendo la ecuación (4.15), es decir:

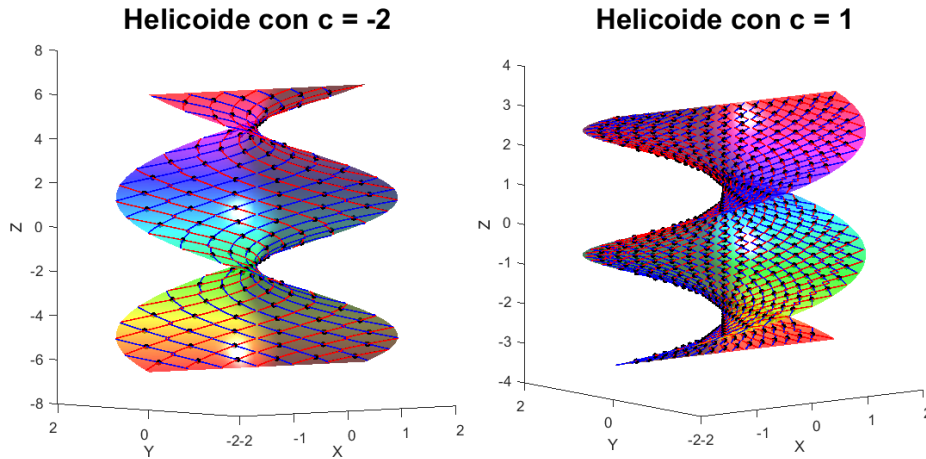
$$v_0 = \frac{C_2^2 e^{\pm 2u_0} - c^2}{2C_2 e^{\pm u_0}} \iff C_2 = v_0 e^{\mp u_0} \pm \sqrt{(v_0^2 + c^2) e^{\mp 2u_0}}.$$

Por el mismo razonamiento anterior, al haber definido  $C_2 := e^{C_1}$  tomamos únicamente la rama positiva en la solución de  $C_2$ . Luego,  $C_2 = v_0 e^{\mp u_0} + \sqrt{(v_0^2 + c^2) e^{\mp 2u_0}}$  y obtenemos una parametrización de las líneas de curvatura en un entorno local del punto  $X(u_j, v_k)$  del helicoide con  $(u_j, v_k) \in D$ :

$$\gamma_1(u_j, v_k, t) := X \left( t, \frac{\overbrace{\left( v_k e^{-u_j} + \sqrt{(v_k^2 + c^2) e^{-2u_j}} \right)^2}^{C_2^2} e^{2t} - c^2}{\underbrace{2 \left( v_k e^{-u_j} + \sqrt{(v_k^2 + c^2) e^{-2u_j}} \right) e^t}_{C_2}} \right),$$

$$\gamma_2(u_j, v_k, t) := X \left( t, \frac{\overbrace{\left( v_k e^{u_j} + \sqrt{(v_k^2 + c^2) e^{2u_j}} \right)^2}^{C_2^2} e^{-2t} - c^2}{\underbrace{2 \left( v_k e^{u_j} + \sqrt{(v_k^2 + c^2) e^{2u_j}} \right) e^{-t}}_{C_2}} \right),$$

con  $i = 0 \dots n$ ,  $k = 0 \dots m$ ,  $t \in [u_j - \varepsilon, u_j + \varepsilon]$  y  $\varepsilon > 0$ , es decir, un intervalo cercano al valor de  $u_j$  puesto que la descripción es local.



**Figura 4.22.** Representación gráfica de las líneas de curvatura. Primera imagen  $c = -2$ , un mallado de 20 puntos en la dirección de  $u$  y 6 en la de  $v$  tomando  $n = 19$  y  $m = 5$  con  $t \in [u_j - 0.15, u_j + 0.15]$ . El rango de valores de  $u$  está en  $[-\pi + 0.18, \pi - 0.18]$  y el de  $v$  en  $[-2 + 0.4, 2 - 0.4]$ . Segunda imagen  $c = 1$ , un mallado de 32 puntos en la dirección de  $u$ , 15 en la de  $v$  tomando  $n = 31$  y  $m = 14$  con  $t \in [u_j - 0.1, u_j + 0.1]$ . El rango de valores de  $u$  está en  $[-\pi + 0.12, \pi - 0.12]$  y el de  $v$  en  $[-2 + 0.24, 2 - 0.24]$ . Imágenes elaboradas en *Matlab*.

Procedemos a calcular la expresión del paraboloides oscultriz del helicoides. Destacar que, a pesar de que la superficie no está parametrizada por líneas de curvatura, el sistema de referencia afín  $\{X(u, v); \{X_u(u, v), X_v(u, v), N(u, v)\}\}$  es ortogonal.

A partir de la expresión (3.22) podemos afirmar que la expresión del paraboloides oscultriz del helicoides en un punto  $p = X(u_0, v_0)$  es:

$$\begin{aligned}
X(u, v) \approx X(u_0, v_0) &+ \overbrace{(-v_0 \sin u_0, v_0 \cos u_0, c)}^{X_u(u_0, v_0)}(u - u_0) + \overbrace{(\cos u_0, \sin u_0, 0)}^{X_v(u_0, v_0)}(v - v_0) \\
&+ \frac{c}{\sqrt{c^2 + v_0^2}} \overbrace{\frac{(-c \sin u_0, c \cos u_0, -v_0)}{\sqrt{c^2 + v_0^2}}}_{N(u_0, v_0)}(u - u_0)(v - v_0).
\end{aligned}$$

Considerando el sistema de referencia afín

$$\mathcal{R} = \left\{ X(u_0, v_0); \left\{ \frac{X_u(u_0, v_0)}{\|X_u(u_0, v_0)\|}, \frac{X_v(u_0, v_0)}{\|X_v(u_0, v_0)\|}, N(u_0, v_0) \right\} \right\},$$

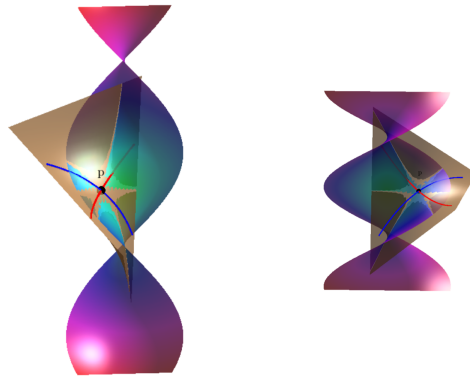
el paraboloido osculatríz puede parametrizarse como:

$$X_{\mathcal{R}}(s, t) = \left( \sqrt{c^2 + v_0^2} s, t, \frac{c}{\sqrt{c^2 + v_0^2}} st \right).$$

Explícitamente podemos expresarla como:

$$z = \frac{c}{c^2 + v_0^2} xy. \quad (4.16)$$

Dicha expresión representa un paraboloido hiperbólico si  $c \neq 0$ . Sin embargo, si  $c = 0$ , el paraboloido hiperbólico es el propio plano tangente que a su vez coincide con la superficie, pues se trata de un plano.



**Figura 4.23.** Representación gráfica del helicoido para valores de  $c \in \{-2, 1\}$  de izquierda a derecha, con  $u \in [-\pi, \pi]$  y  $v \in [-2, 2]$  y su correspondiente paraboloido osculatríz en  $p = X(0, -1)$ . La curva en rojo representa la primera dirección principal  $\mathbf{v}_{k_1}$  del paraboloido osculatríz y en color azul se representa la segunda dirección principal  $\mathbf{v}_{k_2}$ . Dichas direcciones principales coinciden con las del helicoido en el punto. Realizado en *Matlab*.

Por último, representamos la indicatriz de Dupin. Tomamos  $p = X(u_0, v_0)$  un punto cualquiera del helicoido. Como base del plano tangente, tomamos la base natural inducida por la parametrización normalizada:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{X_u(u_0, v_0)}{\|X_u(u_0, v_0)\|}, \frac{X_v(u_0, v_0)}{\|X_v(u_0, v_0)\|} \right\},$$

que es ortogonal porque la matriz de la primera forma fundamental es diagonal (4.13).

Teniendo en cuenta la expresión (2.2), la matriz de la segunda forma fundamental en la base  $\mathcal{B}$  es:

$$II'_p = A^t II_p A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2 + v_0^2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{\sqrt{c^2 + v_0^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{c^2 + v_0^2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2 + v_0^2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{c^2 + v_0^2} \\ \frac{c}{c^2 + v_0^2} & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $A$  es la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}$  a la base natural sin normalizar inducida por la parametrización, es decir,  $\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\}$ . Denotamos  $e', f'$  y  $g'$  a los coeficientes de la segunda forma fundamental de la matriz  $II'_p$ .

Consideramos un vector unitario  $\mathbf{v} \in T_p \mathcal{M}$  con coordenadas  $(v_1, v_2)$  en la base  $\mathcal{B}$ . De este modo, la curvatura normal de la superficie en el punto  $p$  en la dirección  $\mathbf{v}$  es:

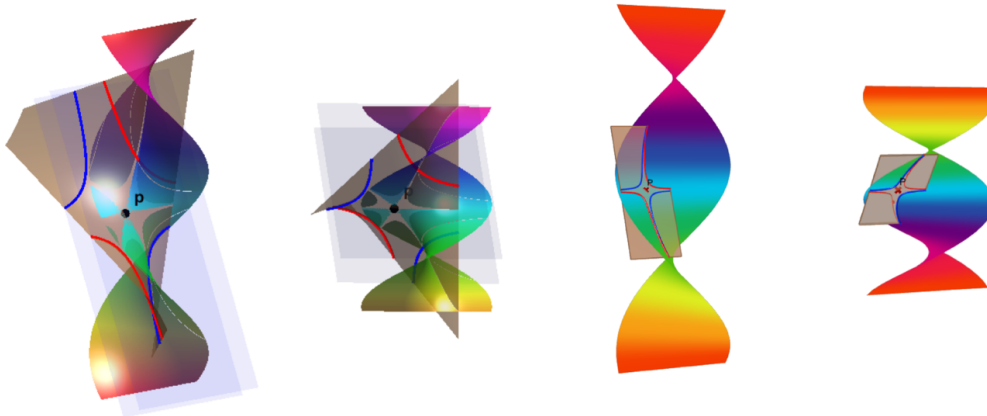
$$k_n(\mathbf{v}, p) = 2f'v_1v_2 = \frac{2c}{c^2 + v_0^2}v_1v_2.$$

Por tanto, suponiendo  $|k_n(\theta)| = \frac{1}{\mu^2}$  y realizando el cambio de variables  $x_1 = \mu \cos \theta$  y  $x_2 = \mu \sin \theta$  obtenemos que la expresión de la indicatriz de Dupin es:

$$\pm 1 = \frac{2c}{c^2 + v_0^2}x_1x_2. \quad (4.17)$$

Para  $c \neq 0$ , como  $eg - f^2 < 0$ , todos los puntos del helicoido son hiperbólicos. Luego, la indicatriz de Dupin (4.17) resulta en un par de hipérbolas conjugadas.

**Observación 4.4.6.** Al igual que en casos anteriores, si imponemos  $z = \pm \frac{1}{2}$  en la expresión del paraboloido oscultriz (4.16) obtenemos la indicatriz de Dupin (4.17).



**Figura 4.24.** Las dos imágenes de la izquierda muestra la representación gráfica de la indicatriz de Dupin del helicoido con  $c \in \{-2, 1\}$ ,  $u \in [-\pi, \pi]$  y  $v \in [-2, 2]$  en el punto  $p = X(0, -1)$ . En rojo se muestra la condición  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$  y en azul  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$ . Elaborado en *Matlab*. Las dos imágenes de la derecha representan los cortes de los helicoides en el mismo punto con  $c \in \{-2, 1\}$  con planos desplazados  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  en dirección del normal hacia el interior (color rojo) y hacia el exterior (color azul). Imagen elaborada en *Grasshopper*

**Observación 4.4.7.** Si  $c = 0$ , el helicoido es un plano. En este caso, independientemente del vector  $\mathbf{v} \in T_pM$  del plano tangente, la curvatura normal  $k_n(\mathbf{v}, p)$  es nula. Por tanto, no existe indicatriz de Dupin. Geométricamente podemos verlo como, al ser el paraboloido oscultriz igual a la propia superficie, la perturbación del plano tangente a lo largo del vector normal no produce corte alguno con la superficie.

## 4.5. Superficies con curvatura de Gauss o curvatura media constante

Las superficies que presentan una curvatura de Gauss,  $K$ , o una curvatura media,  $H$ , constante, son directamente superficies Weingarten.

En particular, si la curvatura de Gauss es igual a la constante  $K_0$  en cualquier punto de la superficie, entonces las relaciones de Weingarten buscadas son  $\Xi(H) = K_0$ ,  $\Phi(k_1) = \frac{K_0}{k_1}$  si  $k_1 \neq 0$  o  $\Theta(k_2) = \frac{K_0}{k_2}$  si  $k_2 \neq 0$ . Por otro lado, si la curvatura media es igual a la constante  $H_0$  en todo punto, las relaciones de Weingarten pueden ser  $\Gamma(K) = H_0$ ,  $\Phi(k_1) = 2H_0 - k_1$  o  $\Theta(k_2) = 2H_0 - k_2$ .

Si se quiere buscar genéricamente una superficie Weingarten con curvatura de Gauss

constante o curvatura media constante, es necesario resolver una ecuación diferencial donde intervienen los términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental.

Sea  $M$  una superficie regular y orientada por el campo unitario  $N$ . Tomamos como parametrización de la superficie  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . De este modo, la curvatura media y la curvatura de Gauss están dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} H(p) = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}, \\ K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{cases}$$

Por un lado, si imponemos que la curvatura media sea constante, de modo que  $H(p) = H_0$ , podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$2H_0(EG - F^2) = Eg - 2Ff + Ge. \quad (4.18)$$

Por otro lado, si lo que imponemos es que la curvatura de Gauss sea constante e igual a  $K_0$ , obtendríamos la siguiente ecuación:

$$K_0(EG - F^2) = eg - f^2. \quad (4.19)$$

En ambos casos, lo que obtenemos es una ecuación en derivadas parciales no lineal y de segundo orden en términos de los coeficientes  $E, F, G, e, f, g$ , que dependen de las parciales de las funciones  $x(u, v), y(u, v)$  y  $z(u, v)$ .

Para simplificar las ecuaciones, reducimos el análisis a superficies con parametrización de Monge, es decir  $X(u, v) = (u, v, h(u, v))$  siendo  $h : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  una función diferenciable. Entonces:

$$\begin{cases} X_u(u, v) = (1, 0, h_u(u, v)), \\ X_v(u, v) = (0, 1, h_v(u, v)), \\ X_{uu}(u, v) = (0, 0, h_{uu}(u, v)), \\ X_{uv}(u, v) = (0, 0, h_{uv}(u, v)), \\ X_{vv}(u, v) = (0, 0, h_{vv}(u, v)), \\ N(u, v) = \frac{(-h_u(u, v), -h_v(u, v), 1)}{\sqrt{1 + h_u^2(u, v) + h_v^2(u, v)}}, \end{cases}$$

donde hemos denotado  $h_u := \frac{\partial h(u, v)}{\partial u}$ ,  $h_v := \frac{\partial h(u, v)}{\partial v}$ ,  $h_{uu} := \frac{\partial^2 h(u, v)}{\partial u^2}$ ,  $h_{uv} := \frac{\partial^2 h(u, v)}{\partial u \partial v}$  y  $h_{vv} := \frac{\partial^2 h(u, v)}{\partial v^2}$ .

Con ello, las matrices con los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son respectivamente:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b_u^2 & b_u b_v \\ b_u b_v & 1 + b_v^2 \end{pmatrix}, \quad II_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_{uu}}{\sqrt{1+b_u^2+b_v^2}} & \frac{b_{uv}}{\sqrt{1+b_u^2+b_v^2}} \\ \frac{b_{uv}}{\sqrt{1+b_u^2+b_v^2}} & \frac{b_{vv}}{\sqrt{1+b_u^2+b_v^2}} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, en estos casos, las ecuaciones (4.18) y (4.19) se convierten en:

$$2H_0(1 + b_u^2 + b_v^2)^{\frac{3}{2}} = (1 + b_u^2)b_{vv} - 2b_u b_v b_{uv} + (1 + b_v^2)b_{uu}, \quad (4.20)$$

$$K_0(1 + b_u^2 + b_v^2)^2 = b_{uu}b_{vv} - b_{uv}^2. \quad (4.21)$$

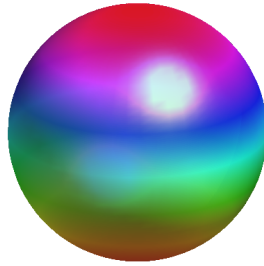
En conclusión, que una superficie verifique la ecuación (4.18) para todo  $(u, v)$  del dominio de la parametrización es equivalente a que dicha superficie tenga curvatura media constante igual a  $H_0$ . Si la superficie admite una parametrización como gráfica de una función, dicha condición es equivalente a (4.20).

De manera análoga, que la superficie verifique (4.19) para todo  $(u, v)$  del dominio de la parametrización equivale a que la superficie tenga curvatura de Gauss constante igual a  $K_0$ . De nuevo, si la superficie admite una parametrización como gráfica de una función y verifica (4.21), entonces tiene curvatura de Gauss constante igual a  $K_0$ .

Como ejemplos representativos de esta sección se presentan la esfera y la pseudoesfera. La esfera es una superficie que tiene tanto curvatura media, como curvatura de Gauss constante. Por otro lado, la pseudoesfera, presenta una curvatura de Gauss constante a pesar de que su curvatura media no lo es.

#### 4.5.1. Esfera

Uno de los ejemplos más conocidos de una superficie con curvatura media constante es la esfera. Tomamos la parametrización  $X(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$  con  $u \in [0, \pi]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  y  $R > 0$  el radio (fijo) de la esfera.



**Figura 4.25.** Representación gráfica de una esfera de radio  $R = 2$  con  $u \in [0, \pi]$  y  $v \in [0, 2\pi]$  realizada en *Matlab*.

Calculando las derivadas parciales de la parametrización, se obtiene que el vector normal unitario en un punto  $p = X(u, v)$  es  $N(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ . Con ello, se puede comprobar como las matrices de la primera y segunda forma fundamental son:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u \end{pmatrix}, \quad II_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -R \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que  $H_0 = -\frac{1}{R}$  verifica la ecuación (4.18). Por tanto, la superficie tiene curvatura media constante igual a  $H_0$ .

De las matrices de la primera y segunda forma fundamental extraemos que el operador de Weingarten es:

$$L_p = I_p^{-1} II_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Las curvaturas principales son  $k_1 = k_2 = -\frac{1}{R} \neq 0$  constantes. Al tratarse de una superficie con curvatura media constante, una condición de Weingarten es  $\Phi(k_1) = 2H_0 - k_1 = -\frac{2}{R} + \frac{1}{R} = -\frac{1}{R}$ . Análogamente, podemos considerar como condición de Weingarten  $\Theta(k_2) = 2H_0 - k_2$ .

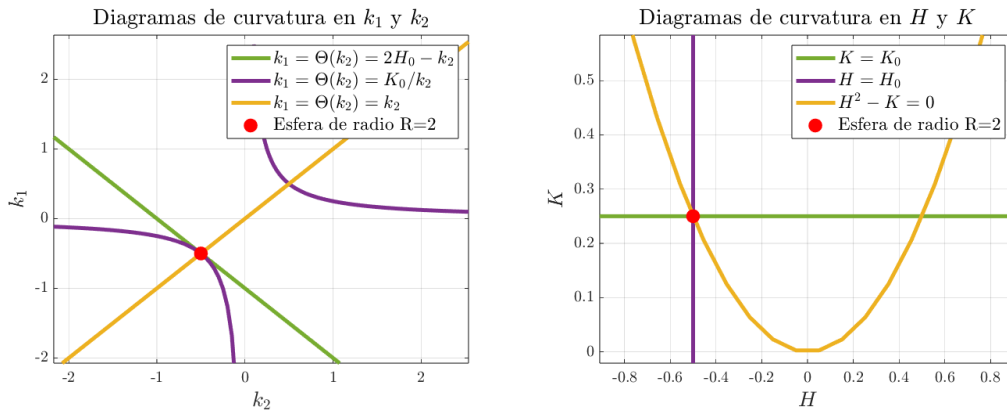
Como se ha mencionado, en el caso particular de la esfera, podemos observar como tanto la curvatura de Gauss  $K = k_1 k_2 = \frac{1}{R^2}$  como la curvatura media  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{R}$  son constantes. De esta manera, en las variables  $k_1$  y  $k_2$  también existen otras relaciones Weingarten como son  $k_2 = \Phi(k_1) = -\frac{1}{R} = \frac{K_0}{k_1}$ , o  $k_1 = \Theta(k_2) = -\frac{1}{R} = \frac{K_0}{k_2}$ , donde  $K_0 = \frac{1}{R^2}$ .

Teniendo en cuenta la Observación 4.1.2, podemos definir en la esfera distintas relaciones de Weingarten en las variables  $H$  y  $K$ , que no son necesariamente del mismo tipo que en las variables  $k_1$  y  $k_2$ .

Por un lado, al tratarse de una superficie con curvatura de Gauss constante, podemos definir la condición de Weingarten  $K = \Xi(H) = \frac{1}{R^2}$ . Por otro lado, como superficie con curvatura media constante se tiene que  $H = \Gamma(K) = -\frac{1}{R}$ .

Por último, al ser todos los puntos de la superficie umbilicales, pues  $k_1 = k_2$ , se tiene que  $0 = \Psi(H, K) = H^2 - K$ , en las variables  $H$  y  $K$  y que  $\Phi(k_1) = k_1$ , o  $\Theta(k_2) = k_2$  en las variables  $k_1$  y  $k_2$ .

De esta manera, podemos representar los diagrama de curvaturas en las variables  $k_1$  y  $k_2$  y en  $H$  y  $K$ . Por simetría de las relaciones Weingarten calculadas se representa únicamente una relación de cada tipo.



**Figura 4.26.** Representación gráfica de los diagrama de curvatura asociados a la esfera para un radio  $R = 2$  y un valor de  $K_0 = \frac{1}{R^2}$  en las variables  $k_1$  y  $k_2$  (imagen de la izquierda) y en las variables  $H$  y  $K$  (imagen de la derecha). Imágenes realizadas en *Matlab*.

Con respecto a los diagramas de curvatura en las variables  $k_1$  y  $k_2$  podemos observar como, la relación de Weingarten característica de las superficies con curvatura media constante es una recta con pendiente  $-1$  y que pasa por el punto  $(0, 2H_0) = (0, -1)$  con  $R = 2$  (color verde).

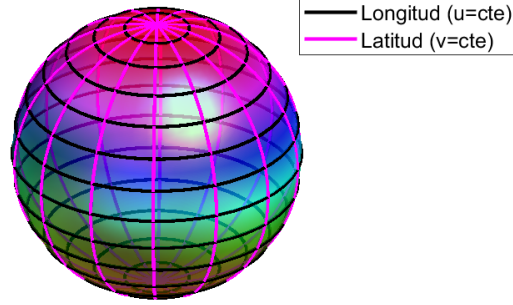
Por otro lado, observamos como el diagrama de curvatura de una superficie con curvatura de Gauss constante permite una relación hiperbólica entre las curvaturas principales de la forma  $k_1 = \frac{K_0}{k_2} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{k_2}$  (color morado).

Por último, al tratarse de una superficie umbilical, existe una relación lineal entre las curvaturas principales. En particular, una recta con pendiente igual a 1 y que pasa por el origen de coordenadas (color amarillo). Los tres diagramas de curvaturas se cortan en el punto correspondiente a la esfera de radio  $R = 2$  con  $(k_1, k_2) = \left(-\frac{1}{R}, -\frac{1}{R}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  (color rojo).

En relación con los diagramas de curvatura en las variables  $H$  y  $K$  observamos como, al mantener la curvatura media y la curvatura de Gauss constante, se obtiene la recta vertical  $H = H_0$  (color morado) y la recta horizontal  $K = K_0$  (color verde). En último lugar, al ser todos los puntos umbilicales, podemos obtener una relación parabólica entre la curvatura media y la curvatura de Gauss de la forma  $H^2 - K = 0$ . Las tres gráficas se cortan en el punto correspondiente a la esfera de radio  $R = 2$  con  $(H, K) = \left(-\frac{1}{R}, \frac{1}{R^2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  (color rojo).

Asimismo, dado que el operador de Weingarten es diagonal (4.22), se tiene que, con la parametrización empleada, la superficie está parametrizada por líneas de curvatura.

Particularmente, queda parametrizada por la longitud y latitud de una esfera.



**Figura 4.27.** Representación gráfica de las líneas de curvatura de la esfera de radio  $R = 2$  con  $u \in [0, \pi]$  y  $v \in [0, 2\pi]$ . En color negro las curvas de la forma  $X(u_0, v)$  y en color rosa las de la forma  $X(u, v_0)$ . Imagen elaborada en *Matlab*.

A continuación, calculamos el paraboloides oscultriz de la esfera en un punto  $p = X(u_0, v_0)$  teniendo en cuenta la expresión (3.22). Dado que todos los puntos de la esfera son elípticos, su paraboloides oscultriz es un paraboloides elíptico.

$$\begin{aligned} X(u, v) \approx & X(u_0, v_0) + \overbrace{(R \cos u_0 \cos v_0, R \cos u_0 \sin v_0, -R \sin u_0)}^{X_u(u_0, v_0)} (u - u_0) \\ & + \overbrace{(-R \sin u_0 \sin v_0, R \sin u_0 \cos v_0, 0)}^{X_v(u_0, v_0)} (v - v_0) + \\ & + \frac{1}{2} (-R(u - u_0)^2 - R \sin^2 u_0 (v - v_0)^2) \overbrace{(\sin u_0 \cos v_0, \sin u_0 \sin v_0, \cos u_0)}^{N(u_0, v_0)}. \end{aligned}$$

Si tomamos como sistema de referencia afín el dado por:

$$\mathcal{R} = \left\{ X(u_0, v_0); \left\{ \frac{X_u(u_0, v_0)}{\|X_u(u_0, v_0)\|}, \frac{X_v(u_0, v_0)}{\|X_v(u_0, v_0)\|}, N(u_0, v_0) \right\} \right\},$$

se obtiene que el paraboloides oscultriz puede parametrizarse como:

$$X_{\mathcal{R}}(s, t) = \left( Rs, R |\sin u_0| t, -\frac{R}{2} s^2 - \frac{R \sin^2 u_0}{2} t^2 \right).$$

De modo que su ecuación explícita es:

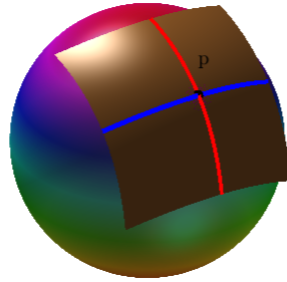
$$z = -\frac{x^2}{2R} - \frac{y^2}{2R}. \quad (4.23)$$

**Observación 4.5.i.** En los polos de la esfera ( $u_0 = 0$  o  $\pi$ ) el vector  $X_v = \mathbf{0}$ . Esto implica que  $X_v$  no define correctamente una dirección del plano tangente. En estos puntos, la parametrización no es válida pues el paraboloido no captura la curvatura en la dirección  $v$ .

Esto ocurre debido a que los polos de la esfera son puntos singulares para la parametrización dada por coordenadas esféricas. Sin embargo, debido a la naturaleza, simetría y estructura interna de la esfera, en los polos, el paraboloido oscultriz continúa siendo un paraboloido elíptico. Para capturar correctamente esta construcción es necesaria otra parametrización que abarque estos puntos de manera que no sean polos de la parametrización.

Un ejemplo de ello puede ser de nuevo la parametrización por coordenadas esféricas pero con  $v \in [-\pi, \pi]$ .

A continuación se muestra una implementación del paraboloido oscultriz para un punto cualquiera de la esfera distinto de los polos.



**Figura 4.28.** Representación gráfica de la esfera con  $u \in [0, \pi]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  y  $R = 2$  y paraboloido oscultriz en  $p = X\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ . La curva en rojo representa la curva coordenada del paraboloido oscultriz de la forma  $X(u, v_0)$ , y en color azul se representa la curva coordenada de la forma  $X(u_0, v)$ . Realizado en el software *Matlab*.

Por último, representamos la indicatriz de Dupin. Tomamos un punto  $p = X(u_0, v_0)$  en la esfera, y como base del plano tangente las direcciones principales normalizadas, que coinciden con las derivadas parciales de la parametrización normalizadas, es decir,  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\} = \left\{ \frac{X_u}{\|X_u\|}, \frac{X_v}{\|X_v\|} \right\}$ .

Tomamos un vector unitario arbitrario  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$  con coordenadas  $(v_1, v_2)$  en la base  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$ . La curvatura normal es:

$$k_n(\mathbf{v}, p) = k_1 v_1^2 + k_2 v_2^2 = -\frac{1}{R} v_1^2 - \frac{1}{R} v_2^2.$$

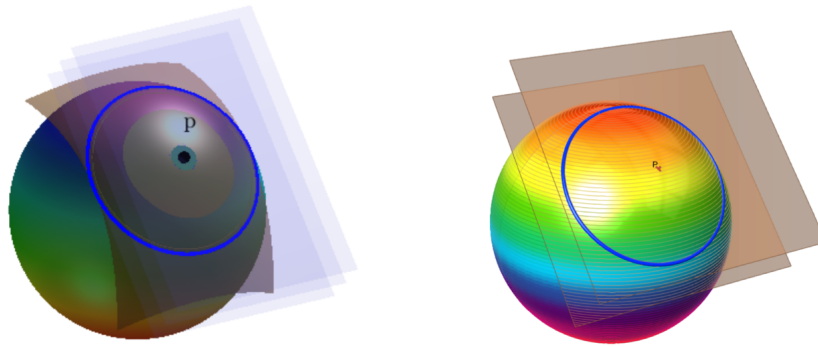
Tomamos  $v_1 = \cos \theta$  y  $v_2 = \sin \theta$ . Establecemos  $|k_n(\theta)| = \frac{1}{\mu^2}$  y realizamos el cambio  $x_1 = \mu \cos \theta$  y  $x_2 = \mu \sin \theta$ . Llegamos a:

$$\pm 1 = -\frac{1}{R} x_1^2 - \frac{1}{R} x_2^2 \iff \mp R = x_1^2 + x_2^2. \quad (4.24)$$

Esta ecuación se corresponde con circunferencias en el plano tangente, lo que indica que todos los puntos de la esfera son umbilicales.

**Observación 4.5.2.** Hay que destacar que, la indicatriz de Dupin en  $\mathbb{R}^2$ , ofrece resultados únicamente para desplazamientos negativos del plano tangente sobre el vector normal, que en este caso es exterior. Es decir, imponiendo que  $k_n(\theta) = -\frac{1}{\rho^2}$  y por tanto un  $-1$  en el lado izquierdo de la ecuación. Esto equivale a  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$

**Observación 4.5.3.** Si en la ecuación del paraboloides oscultriz de la esfera (4.23) imponemos  $z = -\frac{1}{2}$  obtenemos la ecuación de la indicatriz de Dupin (4.24).



**Figura 4.29.** La imagen de la izquierda muestra la representación gráfica de la esfera con  $u \in [0, \pi]$  y  $v \in [0, 2\pi]$  y su indicatriz de Dupin asociada en  $p = X\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ . En color azul se representa la condición  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$ . Imagen realizada en *Matlab*. La imagen de la derecha muestra los cortes de la esfera con el plano tangente desplazado una altura  $\frac{1}{2}$  en dirección del vector normal hacia el interior. Imagen realizada en *Grasshopper*.

### 4.5.2. Pseudoesfera

Un ejemplo representativo de una superficie con curvatura de Gauss constante, y curvatura media no constante, es la *pseudoesfera*. Esta superficie se construye como la superficie de revolución de la *tractriz*. Definamos primero estos conceptos.

**Definición 4.5.4.** La *tractriz* es una curva plana caracterizada por verificar que la longitud del segmento de la recta tangente en un punto cualquiera de la curva a su asíntota es constante. Definimos esta constante como  $d$ . Tomamos como parametrización de esta curva:

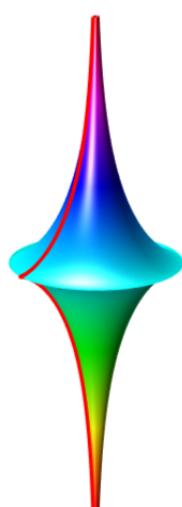
$$\gamma(t) = (d \operatorname{sech}(t), 0, d(t - \tanh(t))) \text{ con } d > 0 \text{ y } t \in \mathbb{R}.$$

**Definición 4.5.5.** Se define la *pseudoesfera* como la superficie de revolución resultante de rotar una tractriz alrededor de su asíntota.

Para este ejemplo, asumiremos sin pérdida de generalidad que el eje de rotación es el eje  $z$  y la tractriz está definida en el plano  $XZ$ . En consecuencia, podemos tomar como parametrización de la pseudoesfera la dada por:

$$X(u, v) = (d \operatorname{sech} u \cos v, d \operatorname{sech} u \sin v, d(u - \tanh u)),$$

con  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  y  $d > 0$ , donde  $u$  es el parámetro de desplazamiento sobre la asíntota,  $v$  es el parámetro de rotación y  $d$  es la distancia que define la tractriz.



**Figura 4.30.** Representación gráfica de la pseudoesfera con  $d = 2$ ,  $u \in [-4, 4]$  y  $v \in [0, 2\pi]$ . En color rojo aparece representada la tractriz generatriz de la superficie. Esta curva es equivalente a  $X(u, 0)$ . Realizado en *Matlab*.

Calculando las derivadas parciales de la parametrización se obtiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_u(u, v) = (-d \operatorname{sech} u \tanh u \cos v, -d \operatorname{sech} u \tanh u \sin v, d \tanh^2 u), \\ X_v(u, v) = (-d \operatorname{sech} u \sin v, d \operatorname{sech} u \cos v, 0), \\ X_{uu}(u, v) = (-d \operatorname{sech} u (\operatorname{sech}^2 u - \tanh^2 u) \cos v, \\ \quad -d \operatorname{sech} u (\operatorname{sech}^2 u - \tanh^2 u) \sin v, 2d \operatorname{sech}^2 u \tanh u), \\ X_{uv}(u, v) = (d \operatorname{sech} u \tanh u \sin v, -d \operatorname{sech} u \tanh u \cos v, 0), \\ X_{vv}(u, v) = (-d \operatorname{sech} u \cos v, -d \operatorname{sech} u \sin v, 0), \\ N(u, v) = (-\cos v |\tanh u|, -\sin v |\tanh u|, -\operatorname{sech} u \operatorname{sign}(\tanh u)). \end{array} \right.$$

Con ello, las matrices de la primera y segunda forma fundamental y el operador de Weingarten en un punto  $p = X(u, v)$  son:

$$I_p = \begin{pmatrix} d^2 \tanh^2 u & 0 \\ 0 & d^2 \operatorname{sech}^2 u \end{pmatrix}, \quad II_p = \begin{pmatrix} -d \operatorname{sech} u |\tanh u| & 0 \\ 0 & d \operatorname{sech} u |\tanh u| \end{pmatrix},$$

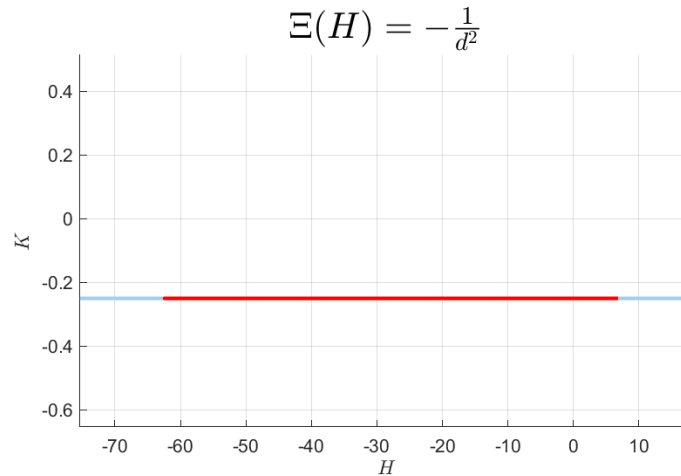
$$L_p = \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sech} u}{d |\tanh u|} & 0 \\ 0 & \frac{|\tanh u|}{d \operatorname{sech} u} \end{pmatrix}.$$

A la vista de la expresión del operador de Weingarten podemos concluir que las curvaturas principales de la superficie son  $k_1 = -\frac{\operatorname{sech} u}{d |\tanh u|}$  y  $k_2 = \frac{|\tanh u|}{d \operatorname{sech} u}$ .

Es por ello que, la curvatura de Gauss es  $K = -\frac{1}{d^2}$ , un valor constante en cada punto, mientras que la curvatura media depende del punto de estudio pues  $H = \frac{1}{2d} \left( \frac{1-2\operatorname{sech}^2 u}{\operatorname{sech} u |\tanh u|} \right)$ .

De este modo, podemos establecer como relación de Weingarten  $\Xi(H) = -\frac{1}{d^2}$  y representar su diagrama de curvaturas asociado.

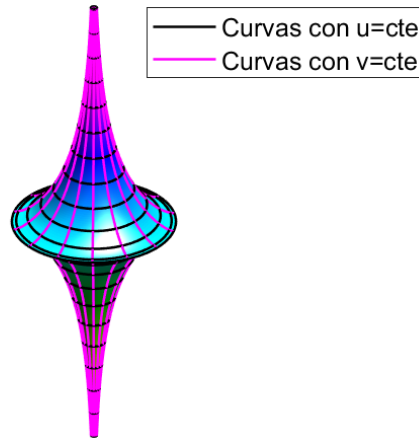
Como es una superficie con curvatura de Gauss constante, su diagrama es una línea horizontal,  $K = -\frac{1}{d^2}$ , en las variables  $H$  y  $K$ . Los valores que abarca la curvatura media,  $H$ , vendrán marcados por los parámetros de la pseudoesfera, en particular, del rango de valores de  $u$ .



**Figura 4.31.** Representación gráfica del diagrama de curvatura de la pseudoesfera con  $d = 2$  en las variables  $H$  y  $K$  en color azul. Los valores de  $H$  para el segmento en color rojo están asociados a los parámetros de la pseudoesfera:  $u \in [-4, 4]$  y  $v \in [0, 2\pi]$ . Se han representado en el software *Matlab*.

Se puede observar como, al ser  $d > 0$ , la curvatura de Gauss es siempre negativa en cualquier punto. Luego, todos los puntos de la pseudoesfera son hiperbólicos. Esta propiedad se verá reflejada en el paraboloido oscultriz y la indicatriz de Dupin asociada.

Además, dado que el operador de Weingarten es diagonal con esta parametrización, la pseudoesfera está parametrizada por líneas de curvatura. Se representan a continuación las curvas coordenadas de la parametrización.



**Figura 4.32.** Representación gráfica de las curvas coordenadas de la pseudoesfera con  $d = 2$  que son las líneas de curvatura para  $u \in [-4, 4]$  y  $v \in [0, 2\pi]$ . Imagen realizada con *Matlab*.

A continuación, calculamos la expresión del paraboloido oscultriz teniendo en cuenta (3.22). De esta manera, el paraboloido oscultriz de la pseudoesfera en un punto  $p = X(u_0, v_0)$  resulta en:

$$\begin{aligned}
 X(u, v) \approx & X(u_0, v_0) + \overbrace{(-d \operatorname{sech} u \tanh u \cos v, -d \operatorname{sech} u \tanh u \sin v, d(1 - \operatorname{sech}^2 u))}_{X_u(u_0, v_0)}(u - u_0) + \\
 & + \overbrace{(-d \operatorname{sech} u \sin v, d \operatorname{sech} u \cos v, 0)}_{X_v(u_0, v_0)}(v - v_0) \\
 & + \frac{(-d \operatorname{sech} u |\tanh u| ((u - u_0)^2 - (v - v_0)^2))}{2} \overbrace{(-\cos v |\tanh u|, -\sin v |\tanh u|, -\operatorname{sech} u \operatorname{sign}(\tanh u))}_{N(u_0, v_0)}.
 \end{aligned}$$

Considerando el sistema de referencia afín de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{R} = \left\{ X(u_0, v_0); \left\{ \frac{X_u(u_0, v_0)}{\|X_u(u_0, v_0)\|}, \frac{X_v(u_0, v_0)}{\|X_v(u_0, v_0)\|}, N(u_0, v_0) \right\} \right\},$$

el paraboloido oscultriz tiene la siguiente parametrización:

$$X_{\mathcal{R}}(s, t) = \left( d |\tanh u_0| s, d \operatorname{sech} u_0 t, \left( -\frac{d \operatorname{sech} u_0 |\tanh u_0|}{2} \right) (s^2 - t^2) \right),$$

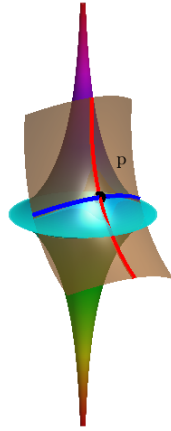
y su ecuación explícita asociada es:

$$z = -\frac{\operatorname{sech} u_0}{2d |\tanh u_0|} x^2 + \frac{|\tanh u_0|}{2d \operatorname{sech} u_0} y^2. \quad (4.25)$$

Dado que  $\operatorname{sech} u_0 > 0$  y  $|\tanh u_0| > 0$  para todo valor de  $u_0$  se comprueba que el paraboloides oscultriz de la pseudoesfera es siempre hiperbólico.

En el caso de que  $u_0 = 0$  pasa algo similar a lo que ocurre en los polos de la esfera. Sin embargo, en este caso, dichos puntos son singulares para cualquier parametrización, pues no existe un único plano tangente debido a la naturaleza de la superficie. Esto se debe a que la tractriz generatriz de la superficie presenta un punto anguloso. En consecuencia, la construcción del paraboloides oscultriz es inconsistente en los puntos en que  $u_0 = 0$ .

En particular, para la parametrización escogida observamos que el vector del plano tangente es  $X_v(0, v) = \mathbf{0}$ , al igual que sucede con la parametrización en coordenadas esféricas estándar de la esfera.



**Figura 4.33.** Representación gráfica de la pseudoesfera con  $u \in [-4, 4]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  y  $d = 2$  y su paraboloides oscultriz en  $p = X(\pm 1.25, \frac{3\pi}{2})$ . La curva en color azul representa la curva coordenada de la forma  $X(u_0, v)$  del paraboloides oscultriz, mientras que la de color rojo muestra la de la forma  $X(u, v_0)$ . Realizado en el software *Matlab*.

Por último, construimos la indicatriz de Dupin. Al ser una superficie parametrizada por líneas de curvatura, consideramos como base del plano tangente las direcciones principales normalizadas  $\{\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}\}$ , la cual coincide con la base formada por las derivadas parciales de la parametrización normalizadas. Fijamos el punto  $p = X(u_0, v_0)$ .

Consideramos un vector unitario  $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$  con coordenadas  $(v_1, v_2)$  en la base de  $T_p\mathcal{M}$  escogida. De este modo, la curvatura normal de la superficie en el punto  $p$  en la dirección de  $\bar{\mathbf{v}}$  viene dada por:

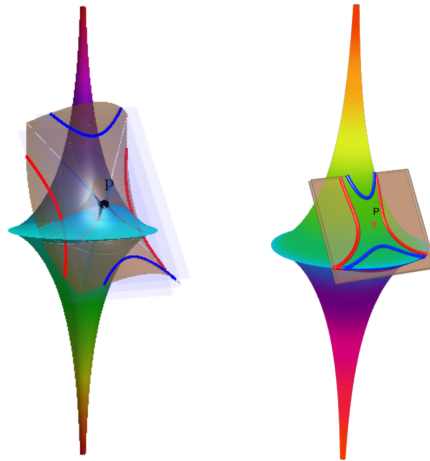
$$k_n(\mathbf{v}, p) = k_1 v_1^2 + k_2 v_2^2 = -\frac{\operatorname{sech} u_0}{d |\tanh u_0|} v_1^2 + \frac{|\tanh u_0|}{d \operatorname{sech} u_0} v_2^2.$$

Al ser la base de  $T_p\mathcal{M}$  ortogonal, tomamos  $v_1 = \cos \theta$  y  $v_2 = \sin \theta$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Asumimos además que  $|k_n(\theta)| = \frac{1}{\mu^2}$  y realizamos el cambio de variable  $x_1 = \mu \cos \theta$  y  $x_2 = \mu \sin \theta$ . Llegamos entonces a que la expresión de la indicatriz de Dupin asociada a la pseudoesfera es:

$$\pm 1 = -\frac{\operatorname{sech} u_0}{d |\tanh u_0|} x_1^2 + \frac{|\tanh u_0|}{d \operatorname{sech} u_0} x_2^2. \quad (4.26)$$

La ecuación obtenida se corresponde con dos hipérbolas conjugadas centradas en el punto  $p$  y con asíntotas  $x_2 = \pm \frac{\operatorname{sech} u_0}{|\tanh u_0|} x_1$ . Si el lado izquierdo es  $+1$  entonces los focos son  $(0, \pm \sqrt{\frac{d}{|\tanh u_0| \operatorname{sech} u_0}})$  (hipérbolas con eje real  $OX_2$ ), mientras que si el lado izquierdo es  $-1$  tienen focos en  $(\pm \sqrt{\frac{d}{|\tanh u_0| \operatorname{sech} u_0}}, 0)$  (hipérbolas con eje real  $OX_1$ ).

**Observación 4.5.6.** Si sustituímos  $z = \pm \frac{1}{2}$  en la ecuación (4.25) obtenemos la indicatriz de Dupin (4.26).



**Figura 4.34.** La imagen de la izquierda muestra la representación gráfica de la pseudoesfera con  $u \in [-4, 4]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  y  $d = 2$  junto con su indicatriz de Dupin asociada en  $p = X(\mp 1.5, \frac{3\pi}{2})$ . En rojo se muestra la condición  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$  y en azul  $II_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$ . Elaborado en *Matlab*. La imagen de la derecha representa los cortes de la superficie con planos desplazados  $\frac{1}{4^2}$  en dirección del normal hacia el interior (color rojo) y hacia el exterior (color azul). Imagen elaborada en *Grasshopper*.



# 5

## Conclusiones

Este Trabajo de Fin de Grado tenía como objetivo estudiar las superficies Weingarten desde un punto de vista teórico para comprender el potencial que tienen en las aplicaciones relacionadas con la discretización o panelización de superficies.

En primer lugar, nos centramos en las relaciones funcionales entre las curvaturas principales que permiten definir superficies Weingarten. Estas relaciones se representan mediante diagramas de curvaturas, los cuales no son únicos para cada superficie. Esto ha quedado plasmado en el ejemplo de la esfera de la Subsección 4.5.1. Sin embargo, artículos como el de Wolfgang Kühnel y Michael Steller ([KS05]) no profundizan en este aspecto y se limitan a presentar la definición. Esta omisión restringe la diversidad de diagramas de curvatura asociados a una superficie, ya que estos pueden variar según las características que se deseen resaltar. Es por ello, que se ha desarrollado este concepto bajo un criterio personal para ganar en claridad.

Algunas aplicaciones de las superficies Weingarten [HP21] hacen uso del paraboloides oscultriz cuya expresión para superficies con parametrización de Monge [MS79] está descrita en la literatura. En referencias como [BG88] y [Co69] se introduce únicamente y sin ninguna construcción previa la definición de paraboloides oscultriz e indicatriz de Dupin con las ecuaciones reducidas. En el caso del paraboloides oscultriz, la definición clásica del paraboloides crea confusión con el desarrollo de Taylor de la parametrización. No obstante, para poder representar el paraboloides oscultriz en un punto es necesario determinar un sistema de referencia afín de  $\mathbb{R}^3$  adecuado con origen en el punto para así obtener una expresión paramétrica o explícita. Una de las mayores dificultades del trabajo ha sido el desarrollo claro de estos conceptos que permitiesen la representación gráfica exacta que se describe en el Capítulo 3, donde también se ha establecido la relación entre la indicatriz de Dupin y el paraboloides oscultriz. Estos dos objetos se han representado para todos los ejemplos de superficies Weingarten considerados incluyendo un vídeo accesible desde la [carpeta de archivos](#).

Algunas líneas de investigación sobre la caracterización de superficies Weingarten [CH20] consisten en restringir el tipo de relación de Weingarten a lineal o cuadrática. En este trabajo, las relaciones funcionales que han aparecido en el Capítulo 4 se resumen en la siguiente tabla:

Superficie	Lineal	No lineal
Catenoide	$\begin{cases} k_1 = \Theta(k_2) = -k_2, \\ H = \Gamma(K) = 0. \end{cases}$	-
Superficie tubería	$\begin{cases} k_2 = \Phi(k_1) = -\frac{1}{r}, \\ K = \Psi(H) = -\frac{2H}{r} - \frac{1}{r^2}. \end{cases}$	-
Cilindro circular	$\begin{cases} k_1 = \Theta(k_2) = -\frac{1}{R}, \\ k_2 = \Phi(k_1) = 0, \\ K = \Xi(H) = 0, \\ H = \Gamma(K) = -\frac{1}{2R}. \end{cases}$	-
Helicoide	$\begin{cases} k_1 = \Theta(k_2) = -k_2, \\ H = \Gamma(K) = 0. \end{cases}$	-
Esfera	$\begin{cases} k_1 = \Theta(k_2) = 2H_0 - k_2, \\ k_1 = \Theta(k_2) = k_2, \\ K = \Xi(H) = \frac{1}{R^2}, \\ H = \Gamma(K) = -\frac{1}{R}. \end{cases}$	$\begin{cases} k_1 = \Theta(k_2) = \frac{1}{k_2 R^2}, \\ \Psi(H, K) = H^2 - K = 0. \end{cases}$
Pseudoesfera	$K = \Xi(H) = -\frac{1}{d^2}.$	-

**Tabla 5.1.** Tabla de relaciones de Weingarten presentes en los ejemplos del Capítulo 4.

La mayor parte de las relaciones de Weingarten obtenidas son lineales. Estas son las más estudiadas en la literatura. Sin embargo, otros artículos como [KS05] estudian las superficies Weingarten en base a los diagramas de curvatura, clasificándolos en lineales  $k_1 = ck_2 + d$  en las variables  $k_1$  y  $k_2$ , lineales  $aK + bH + c = 0$  en las variables  $H$  y  $K$  o del tipo  $k_1 = ck_2^z$  entre otras.

Otra conclusión a destacar es la simplicidad que supone trabajar con superficies parametrizadas por líneas de curvatura. En caso contrario, es difícil encontrar explícitamente dicha parametrización, tal y como ha sucedido con el helicoides en la Subsección 4.4.2.

A través de este trabajo ha quedado patente la necesidad de invertir tiempo en describir los objetos geométricos con precisión en lugar de dar una idea intuitiva, lo cual puede llevar a confusión. Esta precisión me ha permitido el poder elaborar un material gráfico no hallado en la literatura.

Como línea futura de trabajo, se plantea profundizar en las aplicaciones de las superficies Weingarten en el ámbito de la arquitectura geométrica y diseño industrial puesto que las propiedades de estas superficies permiten controlar la forma y utilizarlas para aproximar superficies más complejas ([BG96], [HP21]). Para ello era esencial el trabajo desarrollado en este TFG.



# A

## Apéndice: Implementación

En este apéndice se recogen las explicaciones de las implementaciones numéricas y gráficas del documento, junto con un breve funcionamiento. Estos programas se han utilizado principalmente en los ejemplos desarrollados durante el Capítulo 4.

Se distinguen dos secciones, los códigos de *Matlab* y los de Grasshopper. Sin embargo, hay que destacar que también se han empleado otros programas como *Maple* para la verificación de los cálculos o *Geogebra* para la comprobación de las indicatrices de Dupin.

Todos los códigos y recursos complementarios están disponibles en la [siguiente carpeta habilitada](#) que incluye las versiones actualizadas de la mayor parte de los códigos y un vídeo adicional que no puede incluirse en la versión pdf.

### A.1. Códigos de Matlab

La mayor parte de las representaciones han sido implementadas en *Matlab*. A continuación se explica brevemente en qué consisten los códigos principales y más recurrentes del documento.

1. **Representación de la superficie:** Se definen los parámetros necesarios con un `linspace` que abarca sus dominios, además de las constantes adicionales influyentes de la parametrización. Con ello, se realiza un mallado del dominio con la función `meshgrid` y por último, se emplea la función `surf(X, Y, Z)` donde  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  hacen referencia a las coordenadas de la parametrización.
2. **Representación de los diagramas de curvatura:** Se definen las constantes necesarias en la parametrización y se representan con la función `plot(k1, k2)` los diagramas de curvatura donde, una de las dos variables se define como una función handle de la otra variable. Se emplea un dominio genérico de la variable y en otro color se

muestran los valores asociados a la parametrización en particular con un dominio restringido.

3. **Representación de las líneas de curvatura de la superficie:** Se procede de manera análoga al punto 1, a diferencia de que añadimos para ambos parámetros un bucle. En cada uno de ellos definimos respectivamente un `linspace` de unos 10 – 15 valores y representamos para cada valor del `linspace` un `plot3(X, Y, Z)` con la parametrización.
4. **Representación del paraboloido osculatríz:** En esta implementación trabajamos de manera simbólica. Se definen los parámetros y variables necesarias como simbólicas con la función `syms`. A continuación, se define un valor particular de los parámetros que definen nuestro punto de estudio. Seguidamente, se calculan todas las derivadas parciales de la parametrización mediante la función `diff(X, u)`, que en este caso equivaldría a  $X_u$  siguiendo con la notación empleada.

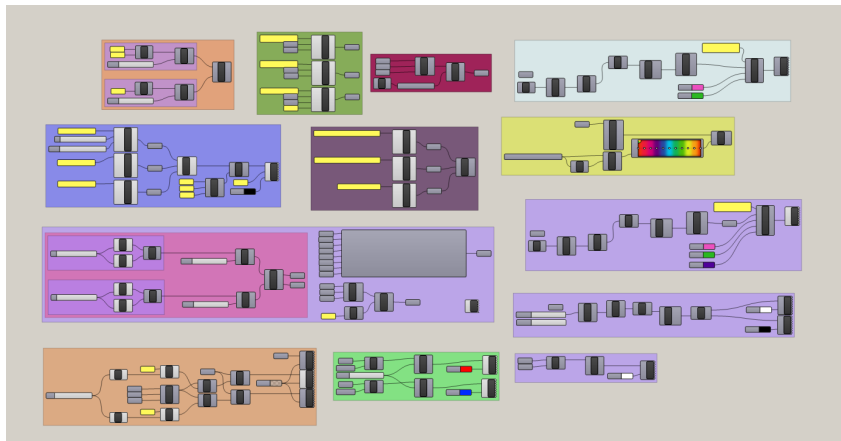
Calculamos los valores de dichas expresiones en el punto tomado mediante la función `double(subs())`, la cual nos permite sustituir por los valores particulares del punto y convertir el valor en numérico de tipo `double`. Con ello, definimos el vector normal a la superficie como el producto vectorial normalizado de las derivadas parciales de la parametrización evaluadas en el punto.

Por último, definimos un mallado con valores cercanos a los del punto de estudio y representamos la ecuación (3.22) mediante un `surf`. Para visualizar el paraboloido junto a la superficie, se realiza un `hold on` y se repite el paso 1.

5. **Representación de la indicatriz de Dupin:** Se procede de manera análoga al paso 4, añadiendo la generación del plano tangente en el punto de estudio y dos planos paralelos al plano tangente desplazados a lo largo del vector normal una distancia de  $\pm \frac{1}{2}$ . Por último, con la función `contour()` se extraen las curvas intersección entre los planos paralelos y el paraboloido osculatríz y se representan mediante la función `plot_contour_3D()`.

## A.2. Códigos de Grasshopper

*Grasshopper* es un programa de diseño geométrico asistido por ordenador de gran utilidad en arquitectura y diseño industrial. Se trata de un software de programación usual puesto que los ficheros se construyen mediante la conexión de cables y burbujas.



**Figura A.1.** Imagen del fichero parcial realizado para la superficie tubería en *Grasshopper*.

Este programa fue creado por el arquitecto David Rutten en 2007 y ha impulsado el diseño paramétrico computacional. Las distintas burbujas se organizan en pestañas que permiten el análisis de curvas y superficies.

La comunidad científica en geometría discreta y arquitectura geométrica contribuyen activamente en la creación de nuevas burbujas que implementan algoritmos para, por ejemplo, discretización de superficies.

Con respecto a los códigos realizados en *Grasshopper*, estos han sido diseñados principalmente para representar los cortes de las superficies con planos paralelos al plano tangente.

En primer lugar se definen los valores de los parámetros y constantes que influyen en la parametrización para dibujar la superficie. Seguidamente, se fijan unos valores del dominio para definir con ellos el punto de estudio y el vector normal en dicho punto.

Con el vector normal en el punto de estudio se define el plano tangente. Por último, se define un valor de  $\mu$  y se realizan los cortes entre la superficie y el plano tangente perturbado a alturas  $\pm \frac{1}{\mu^2}$ .



# Bibliografía

---

- [CB10] C. Bär, *Elementary differential geometry*. Traducción de la obra original en alemán de P. Meerkamp en 2001, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2010).
- [BG88] M. Berger y B. Gostiaux, *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*, translated from the French by Silvio Levy, Graduate Texts in Mathematics, vol. **115**, Springer, New York, (1988).
- [BO22] J. A. Bueno Linares y I. Ortiz, Surfaces of prescribed linear Weingarten curvature in  $\mathbb{R}^3$ , *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, vol. **153** (2023), no. 4, 1347–1370.
- [CH20] P. Carretero Hermoso. *Superficies de revolución de tipo Weingarten*. (2020). Universidad de Jaén, Trabajo Fin de Máster.
- [Co69] H. S. M. D. Coxeter, *Introduction to geometry*, second edition, Wiley, New York-London-Sydney, (1969).
- [CD13] C. Dupin *Développements de géométrie*. Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques. Quai des Augustins, no. 57. (1813).
- [CG27] C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Recentiores*, vol. **6** (1827), 99–146.
- [ZH95] Z. Har'El . *Curvature of curves and surfaces - a parabolic approach*. Israel Institute of Technology. (1995). ([Enlace](#)).
- [CP10] M. Á. Hernández Cifre y J. A. Pastor González. *Un curso de Geometría Diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid (CSIC). (2010).
- [HH47] H. Hopf, Differential geometry in the large. *Lectures at Stanford University* (1947). [Publicado después como: *Lecture Notes in Math.* 1000, Springer, 1989].
- [KS05] W. Kühnel y M. Steller, On closed Weingarten surfaces, *Monatsb. Math*, vol. **146** (2005), no. 2, 113–126.

- [LP20] R. López Camino y Á. Pámpano, Classification of rotational surfaces in Euclidean space satisfying a linear relation between their principal curvatures, *Math. Nachr.*, vol. **293** (2020), no. 4, 735–753.
- [JO07] J. F. Oprea, *Differential geometry and its applications*, second edition, Classroom Resource Materials Series, *Math. Assoc. America*, Washington, DC, (2007).
- [RO69] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand Reinhold, New York-London-Melbourne, (1969).
- [HP21] D. Pellis, M. Kilian, H. Pottmann, y M. Pauly. 2021. Computational Design of Weingarten Surfaces. *ACM Trans. Graph.*, vol **40**, no. 4, Article 114, (2021), 11 pages. ([Enlace](#)).
- [HP07] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, y A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, (2007).
- [ER06] M.E. Rosado María. *Geometría diferencial de curvas y superficies. Superficies.* (2011). Departamento de Matemática Aplicada. Escuela Técnica Superior de Arquitectura, UPM. Avda. Juan de Herrera 4, 28040-Madrid, España. ([Enlace](#)).
- [MS79] M. D. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III*, Publish or Perish, Boston, MA, (1975).
- [BG96] B. van-Brunt and K. D. Grant, Potential applications of Weingarten surfaces in CAGD. I. Weingarten surfaces and surface shape investigation, *Comput. Aided Geom. Design*, vol. **13** (1996), no. 6, 569–582.
- [JW61] J. Weingarten, Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. *J. Reine Angew. Math*, vol. **59** (1861), 382–393.
- [JW63] J. Weingarten, Ueber die Flächen deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. *J. Reine Angew. Math*, vol. **62** (1863), 61–63.



**EPES**

Escuela Politécnica  
de Enseñanza Superior