



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID



EPES
Escuela Politécnica
de Enseñanza Superior



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA DE ENSEÑANZA SUPERIOR (EPES)

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

El teorema de Frobenius

Autora: Marina Jiménez Barrantes

Dirigido por: M.^a Eugenia Rosado María
Bernardo de la Calle Ysern

Madrid, 4 de julio de 2025



El teorema de Frobenius

Autora: Marina Jiménez Barrantes

Dirigido por: M.^a Eugenia Rosado María
Bernardo de la Calle Ysern

Trabajo Fin de Grado, 4 de julio de 2025

Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)

Edificio C, Paseo Juan XXIII, 11. Madrid

Si deseas citar este trabajo, la entrada completa en BibTeX es la siguiente:

```
@mastersthesis{citekey,  
title = {El teorema de Frobenius},  
author = {Jiménez Barrantes, Marina},  
school = {Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)},  
year = {2025},  
type = {Trabajo Fin de Grado}  
}
```

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons «Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional»](#).

Plantilla derivada de <https://github.com/blazaid/UPM-Report-Template>.



Agradecimientos

Mi madre siempre dice que heredé de mi padre la “mente matemática”, y quizá por eso hoy estoy escribiendo un Trabajo de Fin de Grado como este. Sea como sea, este camino no lo he recorrido sola, y me gustaría dedicar unas líneas a quienes me han acompañado a lo largo de todo este proceso.

En primer lugar, a mis padres, que han estado siempre presentes, incluso en la distancia, ofreciéndome su apoyo incondicional y su confianza. Ay, mamá, sé bien cuánto te han afectado mis nervios durante estos años y lo mucho que has querido estar cerca en los momentos difíciles.

A mis amigos Luis, Alejandra, Guillermo, Rocío y Lucía, que han compartido conmigo incontables noches de trabajo y momentos de agobio. Sin su compañía, sus ánimos y los juegos de mesa, este camino habría sido mucho más difícil, y probablemente no estaría escribiendo estas líneas.

También quiero agradecer a otros compañeros de clase, hoy ya amigos, que no solo me han ofrecido su ayuda académica, sino también su escucha y su apoyo, convirtiéndose en una parte fundamental de esta etapa.

A mis amigas de Plasencia, gracias por ser ese refugio lejos del ritmo frenético de la ciudad, por ayudarme a desconectar y recordarme que hay vida más allá de las matemáticas.

Y, por último, y no por ello menos importante, a mis tutores, quienes me han guiado con paciencia, rigor y dedicación a lo largo de estos meses de trabajo. Han sabido alentarme en los momentos de duda y transmitirme su entusiasmo y pasión por las matemáticas.

Resumen

En este trabajo se estudia en profundidad el teorema de Frobenius, que proporciona condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones de una clase general de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Este resultado admite una formulación geométrica equivalente, en la que se caracteriza cuándo una distribución es integrable. El objetivo principal es presentar y demostrar el teorema en tres formulaciones distintas, mediante coordenadas, en término de campos vectoriales y empleando formas diferenciales. Cada una de estas tres versiones se desarrolla de forma independiente, con su correspondiente demostración basada en las herramientas propias de cada formalismo. Posteriormente, se analiza la versión global, utilizando el concepto de foliación y ciertos resultados técnicos sobre la estructura de las variedades integrales. Finalmente, se analizan algunas aplicaciones del teorema, destacando la demostración del teorema fundamental de superficies.

Palabras clave: Distribución, foliación, involutividad, teorema de Frobenius, variedad integral.

Abstract

This work provides an in-depth study of the Frobenius theorem, which establishes necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to a general class of systems of first-order partial differential equations. This result admits an equivalent geometric formulation that characterizes when a distribution is integrable. The main objective is to present and prove the theorem in three different formulations: using coordinates, in terms of vector fields, and employing differential forms. Each formulation is developed independently, and each proof is based on the specific tools of its respective formalism. Subsequently, the global version is analyzed using the concept of foliation and certain technical results on the structure of integral manifolds. Finally, we examine some applications of the theorem, highlighting the proof of the fundamental theorem of surfaces.

Keywords: Distribution, foliation, Frobenius theorem, integral manifold, involutivity.

Índice general

1	Introducción	I
2	Preliminares	3
2.1	Variedades y aplicaciones diferenciables	4
2.2	Fibrados tangente y cotangente	5
2.3	Subvariedades	6
2.4	Campos vectoriales y flujos	10
2.5	Distribuciones y variedades integrales	18
2.6	Formas diferenciales y producto exterior	19
2.7	Teoremas adicionales	22
3	Teorema de Frobenius local	25
3.1	Formulación en coordenadas	27
3.2	Formulación mediante campos	32
3.3	Formulación mediante formas	35
4	Teorema de Frobenius global	51
5	Aplicaciones del teorema de Frobenius	61
5.1	Factor integrante	61
5.2	Teorema fundamental de la teoría local de superficies	63
	Bibliografía	71
	Índice alfabético	73

Índice de figuras

2.1	Foliación unidimensional en $D^2 \setminus \{(0, 0)\}$	18
3.1	Distribución \mathcal{D}^2 en \mathbb{R}^3	26

1

Introducción

El teorema de Frobenius es uno de los resultados fundamentales de la geometría diferencial, con profundas implicaciones tanto en el estudio de las variedades diferenciables como en el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales. Su formulación permite caracterizar las condiciones bajo las cuales una distribución en una variedad es integrable; es decir, cuando existe una subvariedad cuyo espacio tangente en cada punto coincide con la distribución dada.

El teorema de Frobenius surge en un momento crucial del desarrollo del análisis y la geometría en el siglo XIX, cuando los matemáticos buscaban entender bajo qué condiciones un sistema de ecuaciones diferenciales o, de manera equivalente, un sistema de formas diferenciales, admite soluciones integrales. En este contexto, diversas figuras clave ya habían abordado el problema. Carl Gustav Jacob Jacobi y Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, por ejemplo, introdujeron condiciones que más tarde se conocerían como criterios de integrabilidad, destacándose la conocida condición de Clebsch.

Sin embargo, fue Ferdinand Georg Frobenius quien, al reformular el problema en un lenguaje algebraico más general y simétrico, logró una formulación unificada y elegante. Utilizando herramientas como los sistemas de Pfaff, Frobenius pudo expresar la integrabilidad en términos de la anulación de ciertas estructuras algebraicas, aportando una visión novedosa que facilitó la generalización del resultado.

No obstante, la autoría del teorema no recae exclusivamente en Frobenius. La versión moderna del resultado es en realidad el fruto de un trabajo colectivo, que incluye también contribuciones de Heinrich Deahna, quien ya había proporcionado una formulación más algebraica años antes. Por esta razón, algunos historiadores prefieren referirse al resultado como el Teorema de Jacobi–Clebsch–Deahna–Frobenius, en reconocimiento del proceso histórico compartido que condujo a su enunciado actual.

La consolidación del nombre “teorema de Frobenius” se debe en gran parte a Élie Cartan, quien en 1922 destacó su importancia en el desarrollo de la geometría diferencial.

El tratamiento algebraico y geométrico de Frobenius, influyó decisivamente en la evolución moderna de esta rama de las matemáticas y en la formulación de nuevas estructuras geométricas. Para más detalles sobre la historia del teorema, cf. [Haw13].

Así, el teorema de integrabilidad de Frobenius no solo resolvió un problema clásico sobre sistemas de ecuaciones diferenciales, sino que también abrió nuevas líneas de investigación en matemáticas puras y aplicadas. Su relevancia persiste hasta el presente, con estudios contemporáneos que buscan extender su validez a contextos menos regulares, como distribuciones de clase Lipschitz [Ram07].

En este trabajo se analizan con detalle las distintas formulaciones del teorema: en coordenadas, en términos de campos vectoriales y mediante formas diferenciales. Cada una de estas versiones ofrece una perspectiva particular, desarrollada con herramientas propias de su formalismo.

El enfoque seguido es fundamentalmente teórico. El capítulo 2 introduce los conceptos preliminares necesarios para enunciar y demostrar las distintas versiones del teorema. En el capítulo 3 se presenta su formulación local en los distintos lenguajes mencionados, incluyendo demostraciones y ejemplos ilustrativos. El capítulo 4 aborda una versión global del resultado, introduciendo nociones como la de foliación y algunos resultados técnicos sobre distribuciones. Es interesante señalar que esta extensión no requiere condiciones adicionales más allá de las consideradas localmente. Finalmente, el capítulo 5 explora algunas aplicaciones, entre ellas el teorema fundamental de superficies, mostrando el alcance práctico del teorema en distintos contextos. Además de las aplicaciones teóricas en matemáticas, el teorema de Frobenius también encuentra utilidad en campos como la ingeniería. Un ejemplo notable es su uso en el estudio del problema de los puntos ciegos en vehículos motorizados, tal como se analiza en el artículo *The Frobenius Integrability Theorem and the Blind-Spot Problem for Motor Vehicles* [CHM13].

Este trabajo nace de una motivación profundamente personal. Tras varios años de formación en el grado de Matemáticas, me encuentro en el tramo final de esta etapa académica. Conscientemente, he querido dedicar mi Trabajo de Fin de Grado al estudio de un resultado que, por su belleza, profundidad y relevancia, considero una culminación adecuada para despedirme, al menos temporalmente, del estudio formal de las matemáticas. Elegir este tema ha sido, en cierto modo, una forma de rendir homenaje a la disciplina que me ha acompañado durante toda la carrera. Tal vez esta sea la última oportunidad que tenga de estudiar con detenimiento un resultado de esta magnitud, y he querido aprovecharla al máximo. Confío en que este trabajo sea, para quien lo lea, al menos tan interesante como lo ha sido para mí explorarlo y desarrollarlo.

2

Preliminares

En esta sección se introducen los conceptos fundamentales necesarios para la formulación del teorema de Frobenius. Con este propósito, se revisan nociones básicas de la teoría de variedades diferenciables, tales como variedades, aplicaciones y funciones diferenciables, así como estructuras asociadas como los fibrados tangente y cotangente, y la aplicación diferencial.

Se abordan también las inmersiones, los embebimientos y las subvariedades generadas a partir de ellos, junto con resultados clave como el teorema del rango constante. Una parte esencial de esta sección está dedicada al estudio de campos vectoriales y flujos, destacando en particular el teorema de la caja de flujo por su relevancia en la prueba del teorema de Frobenius. Posteriormente, se introducen conceptos como distribuciones, variedades integrales, así como las formas e ideales diferenciales, que resultan especialmente importantes para la formulación del teorema en términos de formas.

Además, en esta sección se fija la notación que se empleará de forma consistente a lo largo del trabajo.

Cabe destacar que, entre los contenidos desarrollados, resultan especialmente relevantes para el desarrollo posterior la caracterización de subvariedades, estableciendo una jerarquía entre subvariedades, subvariedades débilmente embebidas y subvariedades embebidas; los ideales diferenciales; y las nociones fundamentales sobre distribuciones, que serán clave para la formulación y prueba del teorema de Frobenius.

Los contenidos y resultados presentados en esta sección han sido recopilados y adaptados a partir de diversas fuentes bibliográficas, entre las que se incluyen [Spi99], [GMM13], [Boo86] entre otras.

2.1. Variedades y aplicaciones diferenciables

Un espacio *localmente euclídeo* es un espacio topológico M tal que cada punto tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto \mathbb{R}^n .

Si φ es un homeomorfismo de un subconjunto abierto $U \subset M$ a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , entonces U se denomina *entorno coordinado* y φ *aplicación coordinada*. Al par (U, φ) o $(U, (x^1, \dots, x^n))$ lo denominaremos *sistema coordinado* o *carta local*.

Definición 2.1. Una *variedad diferenciable* de dimensión n es un par (M, \mathcal{A}) , con M espacio topológico localmente euclídeo, Hausdorff, que satisface el segundo axioma de numerabilidad (IIAN) y $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ una familia de entornos coordinados que satisface las siguientes propiedades:

1. $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
2. Para todo $\alpha, \beta \in A$ los sistemas coordinados $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son compatibles en sentido C^∞ , es decir, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es C^∞ .
3. Si un sistema coordinado (V, ϕ) es compatible con cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, entonces $(V, \phi) \in \mathcal{A}$.

Cuando se haga referencia a una variedad (M, \mathcal{A}) se denotará M y se entenderá que se trata de una variedad diferenciable de clase C^∞ de dimensión n .

Nótese que para una variedad de clase C^∞ Hausdorff son equivalentes las siguientes propiedades:

1. M es paracompacta.
2. Cada componente conexa de M es separable.

Definición 2.2. Sea M una variedad diferenciable. Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *diferenciable* en $p \in M$ si, para toda carta local (U, φ) de M , la función composición $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $q = \varphi(p)$.

$$\begin{array}{ccc}
 U \subset M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow id \\
 \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f \circ \varphi^{-1}} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Si f es diferenciable en todo $p \in M$, entonces se dice que f es *diferenciable en M* .

Definición 2.3. Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones n y d respectivamente. Se dice que una aplicación $\Phi : M \rightarrow N$ es de clase C^∞ si, para todo par de sistemas de coordenadas (U, φ) en M y (V, ψ) en N , la función $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ es también de clase C^∞ .

2.2. Fibrados tangente y cotangente

Definición 2.4. El *espacio tangente* $T_p M$ a una variedad M en un punto $p \in M$, es el espacio de derivaciones reales del álgebra local $C_p^\infty M$ de gérmenes de funciones C^∞ en p , es decir, las funciones \mathbb{R} -lineales $X : C_p^\infty M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(Xg), \quad f, g \in C_p^\infty M.$$

Definición 2.5. Un *fibrado vectorial* de rango k sobre M es una terna (E, π, M) , con E una variedad y $\pi : E \rightarrow M$ la proyección diferenciable tal que

- para cada $p \in M$, la fibra $\pi^{-1}(p)$ tiene estructura de espacio vectorial real k -dimensional,
- para cada $p \in M$ existe un entorno U de p y un difeomorfismo $\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ (llamado trivialización local de E por U) tal que para todo $q \in U$, $\phi_U|_{\pi^{-1}(q)}$ es un isomorfismo lineal de $\pi^{-1}(q)$ en $\{p\} \times \mathbb{R}^k$,
- en la intersección $U \cap V$, la aplicación

$$\phi_U \circ \phi_V^{-1} : U \cap V \times \mathbb{R}^k \longrightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^k, \quad (p, v) \longmapsto (p, g_{UV}(p)v)$$

es C^∞ , siendo $g_{UV} : U \cap V \rightarrow Gl(k; \mathbb{R})$ una aplicación diferenciable.

Definición 2.6. Dado un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$, un *subfibrado vectorial* de (E, π, M) es una subvariedad (véase la definición 2.14) $F \subset E$ tal que $\pi|_F : F \rightarrow M$ es un fibrado vectorial.

Definición 2.7. Definimos el *fibrado tangente* de una variedad M como la terna

$$(TM, \pi, M),$$

donde

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

y $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección natural que asocia a cada vector de $T_p M$ el punto p . Denotaremos por TM el fibrado tangente.

El fibrado tangente de una variedad M de dimensión n es una variedad de dimensión $2n$, cuyos elementos son pares (p, v) , con $p \in M$ y $v \in T_pM$.

Definición 2.8. Llamamos *fibrado cotangente* de una variedad M al fibrado vectorial (T^*M, π^*, M) , donde T^*M es la unión disjunta de los espacios cotangentes de M y $\pi^* : T^*M \rightarrow M$.

Definición 2.9. Sea $\Phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. La *aplicación diferencial* $d\Phi_p$ de Φ en un punto $p \in M$ es la aplicación lineal $d\Phi_p : T_pM \rightarrow T_{\Phi(p)}N$ definida como

$$(d\Phi_p X)(f) := X(f \circ \Phi),$$

donde f es cualquier función C^∞ en un entorno de $\Phi(p)$.

2.3. Subvariedades

Definición 2.10. Una aplicación $h : N \rightarrow M$ de clase C^∞ entre variedades se denomina *inmersión* si dh_p es inyectiva para todo $p \in N$, o equivalentemente si $\text{rank } h = \text{rank } M$.

Definición 2.11. Sea $\Phi : M \rightarrow N$ una aplicación de clase C^∞ , Φ es una *submersión* si $d\Phi_p$ es sobreyectiva para todo $p \in M$.

Teorema 2.12 (Teorema del rango). Sea $\Phi : N \rightarrow M$ una aplicación C^∞ , con $\dim N = k$ y $\dim M = n$, y $p \in N$. Si $d\Phi_p : T_pN \rightarrow T_{\Phi(p)}M$ tiene rango constante r para todos los puntos q en un entorno de p , entonces existen cartas locales (U, ϕ) y (V, φ) centradas en p y $\Phi(p)$ respectivamente, tales que

$$\varphi \circ \Phi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Loj24, Theorem 7.1].

Proposición 2.13. Sea $h : N \rightarrow M$ una inmersión. Entonces, para cada $p \in N$, existen cartas locales (U, ϕ) centrada en p y (V, φ) centrada en $h(p) \in M$, tales que

$$\varphi \circ h \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

La demostración se obtiene de manera inmediata del teorema del rango.

Antes de introducir formalmente el concepto de subvariedad, conviene destacar una cuestión clave: la topología de la imagen de una inmersión.

Sea $h : N \rightarrow M$ una inmersión. Existen entonces dos topologías naturales en su imagen $h(N) \subset M$:

- La topología heredada, que es la inducida por M , es decir, los abiertos en $b(N)$ son los conjuntos $U \cap b(N)$, con $U \subset M$ abierto.
- La topología dada por b , es decir, un subconjunto $A \subseteq b(N)$ es abierto si $b^{-1}(A)$ es abierto en N .

Estas dos topologías no coinciden en general. Como b es continua para la topología heredada de M , necesariamente la topología dada por b es más fina. Este hecho es lo que permite distinguir entre distintos tipos de subvariedades; una subvariedad inmersa o simplemente subvariedad es la imagen de una inmersión inyectiva. Una subvariedad embebida, en cambio, requiere que b sea un homeomorfismo sobre su imagen, es decir, que ambas topologías en $b(N)$ coincidan.

Entre estos dos conceptos se encuentra la noción intermedia de subvariedad débilmente embebida. Para más detalles, véase [Jol13, Theorem 5.31, Theorem 5.32, Theorem 5.33].

Veamos ahora las definiciones formales de los conceptos anteriores.

Definición 2.14. Una *subvariedad* de una variedad M es un par (N, b) , donde N es una variedad y $b : N \rightarrow M$ es una inmersión inyectiva. Cuando b es además un homeomorfismo sobre su imagen $b(N) \subseteq M$ en la topología inducida por M en $b(N)$, entonces (N, b) se denomina *subvariedad embebida* y b un *embebimiento*.

Algunos autores emplean el término subvariedad inmersa para enfatizar que la aplicación $b : N \rightarrow M$ es solo una inmersión, y se reserva el término subvariedad para las subvariedades embebidas. Sin embargo, en este trabajo, usaremos el término subvariedad para denotar subvariedades inmersas que pueden no estar embebidas.

Además, a lo largo del trabajo denotaremos la subvariedad mediante el par (N, b) o simplemente por H , siendo $H = \text{Im}(b) \subset M$. Cuando la topología de la variedad no sea relevante, se emplearán ambas notaciones.

Definición 2.15. Una *subvariedad débilmente embebida* o *subvariedad regularmente inmersa* de M es una subvariedad (N, b) tal que, para cualquier variedad diferenciable S y para toda aplicación diferenciable $f : S \rightarrow M$, con $f(S) \subset b(N)$, existe una aplicación diferenciable $\hat{f} : S \rightarrow N$ tal que $f = b \circ \hat{f}$. Es decir, es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{b} & M \\
 \hat{f} \uparrow & & \nearrow f \\
 S & &
 \end{array}$$

Vamos a ver que existe una jerarquía natural entre estas nociones. Por definición, toda subvariedad embebida y toda subvariedad débilmente embebida son, en particular, subvariedades. Falta demostrar que toda subvariedad embebida es también una subvariedad débilmente embebida.

Proposición 2.16. *Sea (N, h) una subvariedad de M , $f : S \rightarrow M$ una aplicación diferenciable tal que $f(S) \subset h(N)$ y sea $\hat{f} : S \rightarrow N$.*

(i) *Si \hat{f} es continua, entonces es diferenciable.*

(ii) *Si h es un embebimiento, entonces \hat{f} es continua (y, por tanto, diferenciable).*

Demostración. Vamos a comenzar suponiendo que \hat{f} es continua. Para todo $p \in N$, consideramos un entorno $U \subset N$ de p y $(V, \phi) = (V, x^1, \dots, x^n)$ una carta local en M con V entorno de $h(p)$. Definimos la aplicación

$$\Psi = \pi \circ \phi \circ h : U \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

donde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ es la proyección $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^k)$. De modo que (U, Ψ) es una carta local de N centrada en p .

Por otro lado, se tiene que

$$\Psi \circ \hat{f} = \pi \circ \phi \circ h \circ \hat{f} = \pi \circ \phi \circ f,$$

es diferenciable en el abierto $\hat{f}^{-1}(U)$. La colección de los $\hat{f}^{-1}(U)$ cubre S , por lo que podemos concluir que \hat{f} es diferenciable.

Supongamos ahora que h es un embebimiento. Entonces, por ser h un homeomorfismo sobre su imagen, todo abierto $U \subset N$ tiene la forma $U = h^{-1}(V)$ con $V \subset h(N) \subset M$ abierto. Por tanto,

$$\hat{f}^{-1}(U) = f^{-1}(h(U)) = f^{-1}(V),$$

que es abierto en S , ya que f es continua y V es abierto en M . Se concluye entonces que \hat{f} es continua. \square

Corolario 2.17. *Sea (N, h) una subvariedad embebida de una variedad diferenciable M . Entonces, (N, h) es una subvariedad débilmente embebida.*

Veamos ahora que los recíprocos no se cumplen.

Comenzamos con el siguiente ejemplo, que ilustra que no toda subvariedad es una subvariedad débilmente embebida.

Ejemplo 2.18. Consideramos la curva $\beta : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\beta(t) = (\sin 2t, \sin t).$$

Claramente β es una inmersión, pues $\beta'(t) = (2 \cos 2t, \cos t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in (-\pi, \pi)$, y además es inyectiva.

Queremos demostrar que la imagen de β no define una subvariedad regularmente inmersa de \mathbb{R}^2 . Para ello, consideramos la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como

$$f(t) = (\sin 2t, \sin t).$$

Observamos que $f(\mathbb{R}) \subset \text{Im}(\beta)$. Si $\text{Im}(\beta)$ definiera una subvariedad regularmente inmersa, entonces debería existir una aplicación diferenciable $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi)$ tal que

$$f = \beta \circ \hat{f}.$$

Sin embargo, no es posible definir tal aplicación \hat{f} . Pues, por un lado, se tiene que $\hat{f}(\pi) < \pi$, pero por otro

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \hat{f}(x) = \pi.$$

Por tanto, \hat{f} no es continua y, en consecuencia, no puede ser diferenciable.

Veamos ahora que no toda subvariedad débilmente embebida es subvariedad embebida. Para hacerlo, vamos a aplicar el siguiente resultado.

Teorema 2.19 (Teorema de aproximación de Dirichlet). *Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y cualquier entero positivo N , existen enteros n, m , con $n \in [1, N]$, tales que $|n\alpha - m| < 1/N$.*

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Jol13, Lemma 4.21].

Ejemplo 2.20. Sean el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^2$ y α un número irracional. Consideramos la curva c dada por la imagen de la aplicación $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}).$$

Esta aplicación es inyectiva, pues si $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ entonces

$$e^{2\pi i(t_1 - t_2)} = 1 \quad \text{y} \quad e^{2\pi i \alpha(t_1 - t_2)} = 1,$$

lo que implica que tanto $t_1 - t_2$ como $\alpha(t_1 - t_2)$ sean enteros. Esto sólo puede ocurrir si $t_1 = t_2$, ya que α es irracional.

Además, como

$$\gamma'(t) = (2\pi i e^{2\pi i t}, 2\pi i \alpha e^{2\pi i \alpha t}),$$

nunca se anula, se tiene que γ es una inmersión inyectiva. Veamos ahora que no es un embebimiento. Para ello, vamos a probar que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\gamma(n) - \gamma(0)\| = 0,$$

es decir, que existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(n_k) = \gamma(0).$$

Esto demuestra que γ no es un embebimiento, porque si lo fuera, entonces γ^{-1} sería continua y se tendría que $\liminf_{k \rightarrow \infty} n_k = 0$, que no es posible.

Además, como $\gamma(n) \neq \gamma(0)$, basta probar que para todo ε existe un n tal que

$$\|\gamma(n) - \gamma(0)\| < \varepsilon.$$

Si elegimos N tal que $2\pi/N < \varepsilon$, por el teorema de aproximación de Dirichlet, existen dos enteros n, m con $n \in [1, N]$ tales que $|\alpha n - m| < 1/N$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que, por razones geométricas, el segmento de e^{it_1} a e^{it_2} es más corto que el arco circular de longitud $|t_1 - t_2|$, se tiene que $|e^{it_1} - e^{it_2}| \leq |t_1 - t_2|$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, lo que implica que

$$|e^{2\pi i \alpha n} - 1| = |e^{2\pi i \alpha n} - e^{2\pi i m}| \leq 2\pi |\alpha n - m| < \frac{2\pi}{N} < \varepsilon.$$

Se tiene entonces

$$\|\gamma(n) - \gamma(0)\| = \left\| \begin{pmatrix} e^{2\pi i n} \\ e^{2\pi i \alpha n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \|e^{2\pi i \alpha n} - 1\| < \varepsilon.$$

Concluimos entonces que γ no es un embebimiento.

La verificación de que c es débilmente embebida se verá más adelante, véase el ejemplo 4.3.

2.4. Campos vectoriales y flujos

Definición 2.21. Un *campo vectorial* en una variedad M es una sección del fibrado tangente. Es decir, una aplicación diferenciable $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$ o, equivalentemente, que $X(p) \in T_p M$ para todo $p \in M$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de campos vectoriales en M .

Definición 2.22. Sea $\Phi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, el campo vectorial *imagen directa* o *pushforward* de X por Φ se denota Φ_*X y es el campo en N definido como

$$(\Phi_*X)_q = d\Phi(X_{\Phi^{-1}(q)}), \quad q \in N.$$

Esto es, Φ_*X es el campo en N que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\Phi} & TN \\ \uparrow X & & \uparrow \Phi_*X \\ M & \xrightarrow{\Phi} & N \end{array}$$

Definición 2.23. Sean $\Phi : M \rightarrow N$ una aplicación de clase C^∞ , $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Diremos que X e Y están Φ -relacionados si $d\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)}$ para todo $p \in M$.

Sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, una función de clase C^∞ arbitraria, se tiene que

$$X(f \circ \Phi)(p) = X_p(f \circ \Phi) = d\Phi(X_p)f.$$

Por otro lado,

$$(Yf) \circ \Phi(p) = (Yf)(\Phi(p)) = Y_{\Phi(p)}f.$$

Por tanto, X e Y están Φ -relacionadas si y solo si $X(f \circ \Phi) = (Yf) \circ \Phi$.

Proposición 2.24. Sea $\Phi : N \rightarrow M$ una inmersión. Si Y es un campo vectorial en M tal que

$$Y_{\Phi(p)} \in d\Phi_p(T_pN), \quad p \in N,$$

entonces existe un único campo vectorial X en N que está Φ -relacionado con Y .

Demostración. Comenzamos escribiendo el campo Y en coordenadas como

$$Y = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Por el corolario 2.13, para todo $p \in N$ existen cartas locales $(U, \phi) = (U, (x^1, \dots, x^d))$ centrada en p y $(V, \varphi) = (V, (y^1, \dots, y^n))$ centrada en $\Phi(p) \in M$ tales que

$$\varphi \circ \Phi \circ \phi^{-1}(a^1, \dots, a^d) = (a^1, \dots, a^d, 0, \dots, 0).$$

Se tiene entonces que

$$d\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\Phi(p)}.$$

Si existe X un campo Φ -relacionado con Y , entonces debe cumplir que $d\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)}$ para todo $p \in M$. Sea

$$X = \sum_{i=1}^d \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

se tiene que

$$d\Phi_p(X_p) = \sum_{i=1}^n \beta^i(p) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right|_p.$$

Como

$$Y_{\Phi(p)} = \sum_{i=1}^n \alpha^i(\Phi(p)) \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{\Phi(p)} = \sum_{i=1}^n \alpha^i(\Phi(p)) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right|_p,$$

basta considerar las funciones $\beta^i = \alpha^i \circ \Phi$, que son de clase C^∞ . \square

Definición 2.25. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Una curva $\gamma : I \rightarrow M$, con $I \subseteq \mathbb{R}$, de clase C^∞ en M se dice que es una *curva integral* del campo X si

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}, \quad t \in I.$$

Definición 2.26. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M , y sea $p \in M$. La *curva integral maximal* de X que pasa por p es la única curva integral

$$\gamma_p : (a_p, b_p) \rightarrow M,$$

donde $(a_p, b_p) \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto maximal (con extremos en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), tal que

1. $0 \in (a_p, b_p)$ y $\gamma_p(0) = p$.
2. $\gamma_p'(t) = X(\gamma_p(t))$ para todo $t \in (a_p, b_p)$.
3. Para cualquier otra curva integral $\eta : (c, d) \rightarrow M$ de X con $\eta(0) = p$, se cumple que $(c, d) \subset (a_p, b_p)$ y $\eta = \gamma_p|_{(c,d)}$.

Para todo $t \in \mathbb{R}$, definimos el dominio $D_t(X)$ que consiste en aquellos puntos p para los cuales existe la curva integral por p hasta, por lo menos, el tiempo t

$$D_t(X) = \{p \in M : t \in (a_p, b_p)\}.$$

Usaremos la notación D_t en lugar de $D_t(X)$ cuando esté claro el campo al que nos referimos.

Definición 2.27. El *flujo* de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se define como la aplicación $\phi_t^X : D_t \rightarrow M$ dada por

$$\phi_t^X(p) = \gamma_p(t).$$

A continuación, se enuncian algunas propiedades fundamentales del flujo asociado a un campo vectorial.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial con flujo ϕ_t^X . Entonces:

(i) Para cada $p \in M$, existe un entorno U de p y $\varepsilon > 0$, de manera que la aplicación $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M, (t, q) \mapsto \phi_t^X(q)$ está bien definida y es diferenciable para todo $q \in U$.

(ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, D_t es abierto y $\bigcup_{t>0} D_t = M$.

(iii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t^X : D_t \rightarrow D_{-t}$ es un difeomorfismo y

$$(\phi_t^X)^{-1} = \phi_{-t}^X.$$

(iv) Para cada $s, t \in \mathbb{R}$, el dominio de $\phi_t^X \circ \phi_s^X$ está contenido en D_{t+s} y

$$\phi_{t+s}^X = \phi_t^X \circ \phi_s^X.$$

Se dice que X es un *campo vectorial completo* si $D_t = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$; es decir, la curva integral maximal en cada punto $p \in M$ está definida para todo $t \in (-\infty, \infty)$. En este caso, el flujo de X es la aplicación

$$\begin{aligned} \phi^X : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \phi_t^X(p). \end{aligned}$$

Por las propiedades anteriores, se tiene que $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), t \mapsto \phi_t^X$, es un homomorfismo del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ en el grupo de los difeomorfismos de M con la composición de difeomorfismos $(\text{Diff}(M), \circ)$. Por esta razón, a ϕ_t^X se le denomina habitualmente *grupo uniparamétrico de transformaciones* de M . En el caso en que el campo no sea completo, esta estructura existe de forma local y se habla entonces de *grupo uniparamétrico de transformaciones locales* de M .

Lema 2.28. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $f \in C^\infty(M)$. Entonces,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \phi_t^X)(p) = X_p(f), \quad p \in M,$$

siendo ϕ_t^X el flujo local de X en un entorno de p .

Demostración. Para todo $p \in M$ se tiene

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \phi_t^X)(p) = df_p \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^X(p) \right) = df_p(X_p) = X_p(f).$$

□

Teorema 2.29. *Sea X un campo vectorial en M y sea $p \in M$ un punto tal que $X_p \neq 0$. Entonces, existe un entorno coordenado $(U, (x^1, \dots, x^n))$ centrado en p tal que*

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Demostración. Comenzamos considerando la carta local $(V, \varphi = (y^1, \dots, y^n))$, centrada en p , tal que

$$X_p = \left. \frac{\partial}{\partial y^1} \right|_p.$$

Para $(t^1, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeño, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M \\ \sigma(t^1, \dots, t^n) &= \phi_{t^1}^X(\varphi^{-1}(0, t^2, \dots, t^n)), \end{aligned}$$

donde ϕ_t^X es el flujo del campo X , y $\phi_{t^1}^X(\varphi^{-1}(0, t^2, \dots, t^n))$ es el punto alcanzado en t^1 por la curva integral con punto inicial $\varphi^{-1}(0, t^2, \dots, t^n)$. Nótese que, por definición, la aplicación σ está bien definida y es de clase C^∞ en un entorno del origen. La diferencial de σ en el origen viene dada por

$$\begin{aligned} d\sigma_0 \left(\left. \frac{\partial}{\partial t^1} \right|_0 \right) &= \left. \frac{\partial}{\partial t^1} \phi_{t^1}^X(\varphi^{-1}(0, 0, \dots, 0)) \right|_{t^1=0} = X_p = \left. \frac{\partial}{\partial y^1} \right|_p, \\ d\sigma_0 \left(\left. \frac{\partial}{\partial t^i} \right|_0 \right) &= \left. \frac{\partial}{\partial t^i} \phi_0^X(\varphi^{-1}(0, \dots, 0, t^i, 0, \dots, 0)) \right|_{t^i=0} = \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_p, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos tenido en cuenta que $\phi_0^X = \text{id}$.

Tenemos entonces que $d\sigma$ es invertible en el origen. Por el teorema de la función inversa, σ es un difeomorfismo local en un entorno del origen y, por tanto, existe un entorno U de p tal que (U, σ^{-1}) es la carta buscada. Si consideramos $\sigma^{-1} = (x^1, \dots, x^n)$, se tiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_{\sigma^{-1}(t^1, \dots, t^n)} &= d\sigma_{\sigma^{-1}(t^1, \dots, t^n)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial t^1} \right|_{(t^1, \dots, t^n)} \right) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t^X(\varphi^{-1}(0, t^2, \dots, t^n)) \right|_{t=t^1} \\ &= X(\phi_{t^1}^X(\varphi^{-1}(0, t^2, \dots, t^n))) = X_{\sigma^{-1}(t^1, \dots, t^n)}, \end{aligned}$$

con lo que se concluye. □

Lema 2.30. Sean $\Phi : M \rightarrow N$ un difeomorfismo y ϕ_t^X el flujo de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, Φ_*X genera el flujo $\Phi \circ \phi_t^X \circ \Phi^{-1}$.

Demostración. Sea $f \in C^\infty(N)$. Aplicando la definición 2.22, y el lema 2.28, se tiene que

$$\begin{aligned} (\Phi_*X)_q(f) &= d\Phi(X_{\Phi^{-1}(q)})(f) = X_{\Phi^{-1}(q)}(f \circ \Phi) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((f \circ \Phi) \circ \phi_t^X)(\Phi^{-1}(q)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \Phi \circ \phi_t^X \circ \Phi^{-1})(q). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.31. Sean $f \in \text{Diff}(M)$ y ϕ_t^X el flujo de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, $\Phi_*X = X$ si y solo si $\Phi \circ \phi_t^X = \phi_t^X \circ \Phi$.

Definición 2.32. El corchete de Lie de dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ es el campo vectorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ definido como

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad f \in C^\infty(M).$$

Veamos ahora algunos resultados del corchete de Lie, así como su interpretación geométrica.

Teorema 2.33. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$, se cumple

$$[X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p - ((\phi_t^X)_*Y)_p}{t}.$$

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Loj24, Theorem 12.1].

Proposición 2.34. Sean $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y_i \in \mathfrak{X}(N)$ campos Φ -relacionados para $i = 1, 2$. Entonces, $[X_1, X_2]$ y $[Y_1, Y_2]$ están Φ -relacionados.

Demostración. Sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ . Entonces,

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ \Phi) &= X_1(X_2(f \circ \Phi)) - X_2(X_1(f \circ \Phi)) \\ &= X_1((Y_2f) \circ \Phi) - X_2((X_1f) \circ \Phi) \\ &= (Y_1(Y_2f)) \circ \Phi - (Y_2(Y_1f)) \circ \Phi = ([Y_1, Y_2]f) \circ \Phi. \end{aligned}$$

□

Lema 2.35. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y ϕ_t^X, ϕ_s^Y sus respectivos flujos. Entonces, $[X, Y] = 0$ si y solo si $\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$ para todo t, s donde estén definidos los respectivos flujos.

Demostración. Si $\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$ para todo s, t , entonces por el corolario 2.31 y el teorema 2.33, se tiene que $[X, Y] = 0$.

Supongamos ahora que $[X, Y] = 0$, de modo que

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{Y_q - ((\phi_b^X)_* Y)_q}{b} = 0, \quad q \in M.$$

Dado $p \in M$, consideramos la curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ definida como $c(t) = ((\phi_t^X)_* Y)_p$, de modo que

$$\begin{aligned} c'(t) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{c(t+b) - c(t)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{((\phi_{t+b}^X)_* Y)_p - ((\phi_t^X)_* Y)_p}{b} \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{d\phi_t^X((\phi_b^X)_* Y)_{\phi_{-t}^X(p)} - d\phi_t^X(Y_{\phi_{-t}^X(p)})}{b} \\ &= -d\phi_t^X \left(\lim_{b \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi_{-t}^X(p)} - ((\phi_b^X)_* Y)_{\phi_{-t}^X(p)}}{b} \right) = -d\phi_t^X(0) = 0. \end{aligned}$$

Nótese que la última igualdad es resultado de la linealidad de la aplicación diferencial. Por tanto, $c(t) = c(0)$ y entonces $(\phi_t^X)_* Y = Y$ y por el corolario 2.31 se concluye que $\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$. \square

Teorema 2.36 (Caja de flujo). Sean X_1, \dots, X_k campos vectoriales de clase C^∞ linealmente independientes en un entorno de p y tales que $[X_i, X_j] = 0$ para $1 \leq i, j \leq k$. Entonces, existe una carta local $(U, (x^1, \dots, x^n))$, con U entorno de p , tal que

$$X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Demostración. Comenzamos considerando el entorno coordenado $(V, \varphi = (y^1, \dots, y^n))$, centrado en p y tal que

$$X_i|_p = \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para cada $1 \leq i \leq k$, sea $\phi_t^{X_i}$ el flujo de X_i . Existe un entorno W de p , contenido en V y existe $\delta > 0$ tales que $|t^i| < \delta$ y para cualquier permutación s de $\{1, \dots, k\}$, la aplicación

$$\phi_{t^{s(1)}}^{X_{s(1)}} \circ \phi_{t^{s(2)}}^{X_{s(2)}} \circ \dots \circ \phi_{t^{s(k)}}^{X_{s(k)}}$$

está definida en W . La aplicación $\sigma : (-\delta, \delta) \times \dots \times (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow W$, dada por

$$\sigma(t^1, \dots, t^n) = \phi_{t^1}^{X_1} \circ \phi_{t^2}^{X_2} \circ \dots \circ \phi_{t^k}^{X_k} \left(\varphi^{-1}(0, \dots, 0, t^{k+1}, \dots, t^n) \right),$$

está bien definida y es de clase C^∞ en un entorno del origen. Es decir, proyectamos (t^1, \dots, t^n) sobre el subespacio $t^1 = 0, \dots, t^k = 0$, calculamos su imagen mediante la parametrización φ^{-1} y, finalmente, lo desplazamos siguiendo los flujos de los campos X_1, \dots, X_k ; es decir, a lo largo de las curvas integrales de los campos. Dado que $[X_i, X_j] = 0$, $1 \leq i, j \leq k$, por el lema 2.35, podemos intercambiar el orden de los flujos, y el proceso anterior se puede hacer en cualquier orden. Nótese que $\sigma(0, \dots, 0, t^{k+1}, \dots, t^n) = \varphi^{-1}(0, \dots, 0, t^{k+1}, \dots, t^n)$, pues $\phi_0^{X_i} = \text{id}$, $1 \leq i \leq k$. Por tanto,

$$d\sigma_0 \left(\frac{\partial}{\partial t^i} \Big|_0 \right) = \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Para cualquier $a = (a^1, \dots, a^n)$ con $|a^i| < \delta$, $1 \leq i \leq k$ y fijado un $1 \leq i \leq k$, se define la aplicación

$$F: (-\delta, \delta) \rightarrow W$$

dada por

$$F(t) = \phi_t^{X_i} \left(\phi_{a^1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{a^{i-1}}^{X_{i-1}} \circ \phi_{a^{i+1}}^{X_{i+1}} \circ \dots \circ \phi_{a^k}^{X_k} \left(\varphi^{-1}(0, \dots, 0, a^{k+1}, \dots, a^n) \right) \right).$$

Sea $q = \phi_{a^1}^{X_1} \circ \dots \circ \phi_{a^{i-1}}^{X_{i-1}} \circ \phi_{a^{i+1}}^{X_{i+1}} \circ \dots \circ \phi_{a^k}^{X_k} \left(\varphi^{-1}(0, \dots, 0, a^{k+1}, \dots, a^n) \right)$, entonces

$$F(t) = \phi_t^{X_i}(q), \quad F'(a^i) = X_i|_{\phi_{a^i}^{X_i}(q)},$$

pues $F(t)$ es la curva integral del campo X_i . Por tanto, fijado $1 \leq i \leq k$, se tiene

$$d\sigma_a \left(\frac{\partial}{\partial t^i} \Big|_a \right) = \sum_{j=1}^n \frac{d(y^j \circ F)}{dt}(a^i) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\sigma(a)} = X_i|_{\sigma(a)}.$$

En particular para $a = 0$, tenemos

$$d\sigma_0 \left(\frac{\partial}{\partial t^i} \Big|_p \right) = \begin{cases} X_i|_p = \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p, & 1 \leq i \leq k, \\ \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p, & k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Luego σ es un difeomorfismo sobre la imagen en un entorno $U' \subset (-\delta, \delta) \times \dots \times (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^{n-k}$ que contiene al origen. Considerando $U = \sigma(U')$ y $\psi = \sigma^{-1}$, el entorno coordinado $(U, \psi = (x^1, \dots, x^n))$ satisface el enunciado del teorema. \square

2.5. Distribuciones y variedades integrales

Definición 2.37. Una *distribución* de rango $k < n$, \mathcal{D}^k , sobre una variedad M de dimensión n , se define asignando a cada $p \in M$ un subespacio vectorial $\mathcal{D}_p^k \subseteq T_pM$ de dimensión k , y considerando

$$\mathcal{D}^k = \bigcup_{p \in M} \mathcal{D}_p^k.$$

Diremos que \mathcal{D}^k es una distribución diferenciable si para cada $p \in M$ existe un entorno U de M y k campos vectoriales C^∞ linealmente independientes X_1, X_2, \dots, X_k tales que $X_1(q), X_2(q), \dots, X_k(q)$ forman una base de \mathcal{D}_q^k para todo $q \in U$. En este caso, decimos que \mathcal{D}^k es una distribución generada localmente por X_1, X_2, \dots, X_k .

Alternativamente, podemos definir una distribución de rango k en M como un subfibrado vectorial de rango k de TM .

En el presente trabajo se considerarán únicamente distribuciones de rango constante. Para distribuciones de rango no constante, véase [Mico8].

Observación. Cuando se haga referencia a una distribución, se entenderá que se trata de una distribución diferenciable.

Ejemplo 2.38. En general, una distribución de rango k no está generada globalmente por k campos vectoriales. Veámoslo con un ejemplo para $k = 1$. Consideremos el disco abierto sin el origen, $D^2 \setminus \{(0, 0)\}$, y la distribución de rango 1 asociada a la foliación —véase la definición 4.4— que aparece en la figura 2.1.

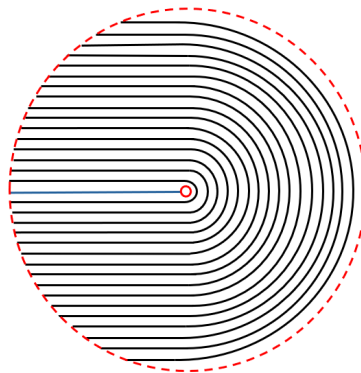


Figura 2.1. Foliación unidimensional en $D^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si consideramos el segmento $I = \{(x, y) \in D^2 \setminus \{0\} : y = 0, x < 0\}$, observamos que no se puede establecer un campo vectorial en un entorno de I , ya que no es posible definir consistentemente la orientación de los vectores del campo en dicho entorno.

Definición 2.39. Sea M una variedad y \mathcal{D}^k una distribución sobre M . Una subvariedad H de M se dice *variedad integral* de \mathcal{D}^k si, para todo $p \in H$, se tiene que

$$dh_p(T_p H) = \mathcal{D}_{h(p)}^k.$$

Decimos entonces que \mathcal{D}^k es *integrable* si todo punto $q \in M$ está contenido en la imagen de alguna variedad integral de \mathcal{D}^k .

La definición anterior establece la integrabilidad de una distribución en un sentido local. Veremos más adelante que se puede dar una definición global.

2.6. Formas diferenciales y producto exterior

Sea $\Lambda^k(T_p^* M)$ el conjunto de aplicaciones

$$\omega : T_p M \times \overset{(k)}{\dots} \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

que son k -lineales (ω es lineal en cada variable) y alternadas; es decir, se cumple la identidad

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

para toda permutación σ .

Definimos una k -forma (o forma de grado k) en M como una aplicación ω que asocia a cada $p \in M$ un elemento $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^* M)$. Sea $(U, (x^1, \dots, x^n))$ una carta local. Consideramos dx^i , $1 \leq i \leq n$, la base en $T_p^* M$ para cada $p \in U$. Una k -forma ω definida en U se expresa localmente como

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k},$$

donde \wedge denota el producto exterior y $\omega_{j_1 \dots j_k}$ son funciones reales en U . Si estas funciones son de clase C^∞ en U , diremos que ω es una k -forma diferencial.

En adelante, cuando hablemos de formas, entenderemos siempre formas diferenciales, salvo que se indique explícitamente lo contrario.

Vamos a denotar $\Omega^k(M)$ al conjunto de todas las k -formas en M y

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M),$$

donde, por convenio, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Dada f una 0-forma y $\omega \in \Omega^*(M)$, escribimos $f \wedge \omega$ como $f\omega$. Entonces, se tiene que el producto exterior satisface las igualdades

- $(f\omega + h\eta) \wedge \theta = f\omega \wedge \theta + g\eta \wedge \theta$;
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{\deg \omega \deg \eta} \eta \wedge \omega$;
- $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;

con $f, g \in C^\infty(M)$ y $\omega, \eta, \theta \in \Omega^*(M)$. Estas propiedades establecen que $\Omega^*(M)$ tiene estructura de álgebra sobre el anillo $C^\infty(M)$

Definición 2.40. Una colección $\omega^1, \dots, \omega^k$ de 1-formas en M se llama *independiente* si, para cada $p \in M$, el conjunto $\{\omega_1(p), \dots, \omega_k(p)\} \subseteq T_p^*M$ es linealmente independiente.

Una *derivación* (resp. *antiderivación*) de $\Omega^*(M)$ es una aplicación lineal D del espacio $\Omega^*(M)$ en sí mismo que satisface

$$\begin{aligned} D(\omega_1 \wedge \omega_2) &= D\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge D\omega_2, \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega^*(M), \\ (\text{resp. } D(\omega_1 \wedge \omega_2) &= D\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^j \omega_1 \wedge D\omega_2, \quad \omega_1 \in \Omega^j(M), \omega_2 \in \Omega^*(M)). \end{aligned}$$

Una derivación o anti-derivación D de $\Omega^*(M)$ se dice que es de grado k si lleva $\Omega^r(M)$ dentro $\Omega^{k+r}(M)$ para cada r .

La *diferencial exterior* de $\Omega^*(M)$ es la única antiderivación

$$d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$$

de grado 1 tal que:

- (i) $d^2 = 0$,
- (ii) para toda $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, df es la diferencial de f .

La prueba de que este operador existe y está unívocamente determinado por estas propiedades se puede encontrar, por ejemplo, en [Jol13, Theorem 14.24].

Proposición 2.41. Sean X, Y dos campos vectoriales en la variedad M . Para toda 1-forma ω , se verifica que

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Demostración. Por linealidad, basta considerar una 1-forma $\omega = u dv$ con u, v funciones C^∞ en la variedad. Por un lado, como $d\omega = du \wedge dv$, se tiene que

$$d\omega(X, Y) = (du \wedge dv)(X, Y) = du(X)dv(Y) - du(Y)dv(X) = X(u)Y(v) - Y(u)X(v).$$

Por otro lado,

$$X(\omega(Y)) = X(u dv(Y)) = X(uY(v)) = X(u)Y(v) + uX(Y(v)),$$

y análogamente,

$$Y(\omega(X)) = Y(u)X(v) + uY(X(v)).$$

Por tanto,

$$d\omega(X, Y) - X(\omega(Y)) + Y(\omega(X)) = uY(X(v)) - uX(Y(v)) = -u[X, Y](v).$$

Nótese además que

$$u[X, Y](v) = u dv([X, Y]) = \omega([X, Y]),$$

con lo que se concluye que

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

□

Definición 2.42. Sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación diferenciable entre variedades. Dada $\omega \in \Omega^r(M_2)$, se define el *pullback* de ω como la r -forma $f^*\omega \in \Omega^r(M_1)$ dada por

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_r) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_r)),$$

para todo $p \in M_1$, y para todo $v_i \in T_p M$, $1 \leq i \leq r$.

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r(M_1) & \xrightarrow{f^*\omega} & \Omega^r(M_2) \\ \uparrow x & & \uparrow f(x) \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Proposición 2.43. Sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación diferenciable y sea ω una r -forma en M_2 . Entonces,

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

La demostración se puede encontrar, por ejemplo en [Joh3, Proposition 14.26].

Definición 2.44. Sea \mathcal{D}^k una distribución de rango k en M . Una k -forma ω se dice que anula a \mathcal{D}^k si, para todo $p \in M$, se cumple

$$\omega_p(v_1, \dots, v_k) = 0, \quad \text{con } v_1, \dots, v_k \in \mathcal{D}_p^k.$$

Una forma $\omega \in \Omega^*(M)$ se dice que anula a \mathcal{D}^k si cada una de las partes homogéneas de ω anulan a \mathcal{D}^k . Definimos

$$\mathcal{I}(\mathcal{D}^k) = \{\omega \in \Omega^*(M) : \omega \text{ anula a } \mathcal{D}^k\}.$$

Este conjunto $\mathcal{I}(\mathcal{D}^k)$ es un ideal de $\Omega^*(M)$, ya que es cerrado bajo la suma de formas y bajo multiplicación por cualquier elemento de $\Omega^*(M)$ mediante el producto exterior. Esto se deduce de la estructura de álgebra que posee $\Omega^*(M)$.

Definición 2.45. Un ideal $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$ se denomina *ideal diferencial* si es cerrado bajo la diferencial exterior d , es decir,

$$d(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}.$$

2.7. Teoremas adicionales

Aunque la mayor parte de esta sección está dedicada a introducir nociones fundamentales de la geometría diferencial, también se incluyen algunos resultados clásicos de análisis y topología general, como el teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf o el teorema de Lindelöf. Si bien estos resultados no pertenecen estrictamente al ámbito geométrico, su incorporación es esencial para el desarrollo de diversas demostraciones a lo largo del trabajo. En particular, el teorema de Picard-Lindelöf será una herramienta clave en la demostración de la versión local del teorema de Frobenius mediante coordenadas. Asimismo, los teoremas 2.47, 2.48 y 2.49 serán fundamentales en el tratamiento de la versión global del teorema.

Teorema 2.46 (Picard-Lindelöf). Sea $f: I \times U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, siendo I un intervalo abierto de \mathbb{R} y U abierto de \mathbb{R}^n . Consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

con $(0, y_0) \in I \times U$.

Sea $K = [-b, b] \times \overline{B_\delta(y_0)} \subset I \times U$. Si f es continua Lipschitz en el segundo argumento uniformemente con respecto al primero en K , entonces existe una única solución local de (2.1) definida en $(-,)$, con $\delta = \min \{b, \frac{\delta}{M}\}$, siendo M el máximo de $|f|$ en K .

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Tes12, Theorem 2.2].

Teorema 2.47. Sea $\Phi: S \rightarrow M$ una aplicación diferenciable y sea $q \in M$ tal que todo punto $p \in \Phi^{-1}(q)$ satisface que la diferencial $d_p\Phi: T_pS \rightarrow T_{\Phi(p)}M$ es sobreyectiva. Entonces $\Phi^{-1}(q) \subset S$ es una subvariedad embebida de dimensión $\dim S - \dim M$ y, para todo $p \in \Phi^{-1}(q)$, se cumple que

$$T_p(\Phi^{-1}(q)) = \text{Ker } d_p\Phi.$$

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Loj24, Theorem 8.1].

Teorema 2.48. Un espacio Y es localmente conexo si y solo si las componentes conexas de cada conjunto abierto son conjuntos abiertos.

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Dug78, Theorem 4.2].

Teorema 2.49 (Lindelöf). Si Y es IIAN, entonces todo recubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$ admite un subrecubrimiento numerable.

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Dug78, Theorem 6.3].

3

Teorema de Frobenius local

En esta sección abordamos las tres formulaciones del teorema de Frobenius, que, como ya se ha mencionado, es una herramienta fundamental para comprender la integrabilidad de distribuciones sobre variedades diferenciables.

Primero, nos centraremos en la formulación clásica, expresada en coordenadas, donde mediante un ejemplo concreto se ilustrará cómo la integrabilidad está íntimamente relacionada con la igualdad de derivadas cruzadas. Esta idea servirá como base para entender el razonamiento general del teorema.

A continuación, presentaremos la formulación en términos de campos vectoriales, introduciendo el concepto clave de involutividad de una distribución, que resulta esencial para caracterizar la integrabilidad desde un punto de vista más geométrico.

Finalmente, exploraremos la formulación mediante formas diferenciales, interpretando el teorema en el marco de los sistemas de Pfaff.

Como se ha mencionado, el teorema de Frobenius proporciona un criterio para determinar la integrabilidad de una distribución. Sin embargo, en general, las variedades integrales no existen, ni siquiera localmente, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Sea \mathcal{D}^2 la 2-distribución en \mathbb{R}^3 generada por los campos vectoriales

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para todo $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\mathcal{D}_p^2 = \left\{ r \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + s \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + (sa - rb) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p : r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por ser una 2-distribución, sabemos que \mathcal{D}_p^2 es un plano contenido en $T_p\mathbb{R}^3$, para cada punto $p \in \mathbb{R}^3$. El vector normal a este plano será de la forma $(b, -a, 1)$ y por tanto, la

ecuación de \mathcal{D}_p^2 es

$$b(x - a) - a(y - b) + z - c = 0$$

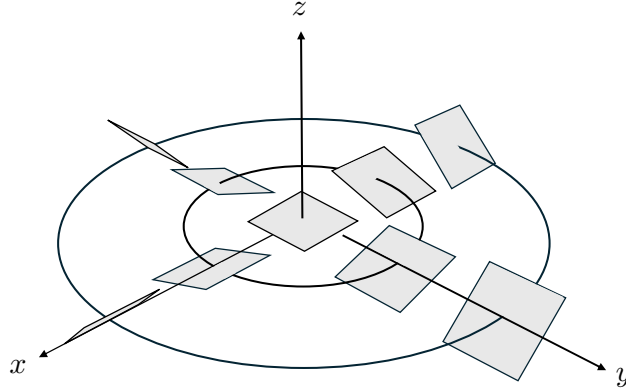


Figura 3.1. Distribución \mathcal{D}^2 en \mathbb{R}^3 .

Vamos a ver que, efectivamente, esta distribución no admite una variedad integral. Daremos dos argumentos para ello, uno analítico y otro geométrico.

Desde el punto de vista analítico, podemos proceder localmente. Siempre es posible escoger un entorno coordenado, de manera que la variedad integral N se puede representar como la gráfica de una función diferenciable

$$N = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}.$$

Considerando la parametrización de N , $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, obtenemos la base del espacio tangente en $p = (a, b, f(a, b))$

$$\varphi_x(a, b) = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + \left. \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \frac{\partial}{\partial z} \right|_p, \quad \varphi_y(a, b) = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p + \left. \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \frac{\partial}{\partial z} \right|_p.$$

De modo que N es variedad integral de \mathcal{D}^2 si, para todo $p \in \mathbb{R}^3$, $\varphi_x(a, b), \varphi_y(a, b) \in \mathcal{D}_p^2$. Para que esto ocurra, se debe satisfacer que

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -y, \\ f_y(x, y) = x. \end{cases}$$

Por tanto, como buscamos que f sea diferenciable y $f_{xy}(x, y) = -1 \neq 1 = f_{yx}(x, y)$, se concluye que \mathcal{D}^2 no admite una variedad integral, luego no es integrable.

Estudiamos ahora la existencia de una variedad integral de manera geométrica. Para ello, consideremos el campo

$$X' = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial z},$$

que pertenece a la distribución. La curva integral de este campo por un punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ es la hélice ascendente alrededor del eje z

$$c_p(t) = (x_0 \cos t + y_0 \sin t, x_0 \sin t - y_0 \cos t, (x_0^2 + y_0^2)t + z_0).$$

Si consideramos $p = (1, 1, 0)$, la curva integral por este punto es

$$c_p(t) = (\cos t + \sin t, \sin t - \cos t, 2t).$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos el punto inicial

$$c_p(0) = (1, -1, 0)$$

y para $t = 2\pi$, el punto

$$c_p(2\pi) = (1, -1, 4\pi).$$

Se tiene entonces que, para un mismo par de coordenadas $(x, y) = (1, -1)$, estamos asignando dos valores distintos a z . Luego N no se puede representar como la gráfica de una función y , por tanto, \mathcal{D}^2 no es integrable.

A partir de este ejemplo, el lector puede ya intuir que la condición para que una distribución admita una variedad integral estará relacionada con la existencia de una función f similar a la que se ha presentado en la parte analítica del ejemplo.

3.1. Formulación en coordenadas

Definición 3.2. Sean $f_i : V \times U \rightarrow \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, n$, funciones continuas en el abierto $V \times U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y sea $(0, y_0) \in V \times U$. Una solución local del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x^j}(x) = f_j(x, y(x)), & j = 1, \dots, n; \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

es una función $y : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en un entorno W de 0 que verifica (3.1).

Debido a que trabajamos dentro del marco de la geometría diferencial, consideraremos funciones f_i con una regularidad superior, asumiendo que son de clase C^∞ . Nótese que esto implica que las f_i cumplen las condiciones del teorema de Picard-Lindelöf y, además, que la solución del problema de valor inicial es también de clase C^∞ .

Dadas las funciones f_i de la definición anterior, las igualdades

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y^k} f_i^k - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y^k} f_j^k = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

son clave en la integrabilidad del problema de valor inicial (3.1).

Lema 3.3. *Si el problema de valor inicial (3.1) tiene una solución local, entonces existe un entorno de $(0, y_0)$ en el cual se cumple la igualdad (3.2).*

Demostración. Sea y una solución local del problema de valor inicial (3.2). Entonces y es de clase C^∞ y, por tanto, debe cumplir que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial y}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial y}{\partial x^i} \right), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Por la definición de la función y , podemos reescribir la igualdad anterior como

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^i} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

y aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y^k} f_i^k = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y^k} f_j^k,$$

que es la expresión buscada. \square

El siguiente teorema constituye una generalización del teorema de Picard-Lindelöf para el problema de valor inicial (3.2). La demostración se basa en la construcción de problemas de valor inicial en una única variable y en la aplicación iterativa del teorema de Picard-Lindelöf.

Teorema 3.4. *Si existe un entorno de $(0, y_0)$ en el cual las funciones f_i , $i = 1, \dots, n$ cumplen la igualdad (3.2), entonces el PVI de la definición 3.2 admite una única solución local.*

Demostración. Comenzamos considerando el compacto

$$K = \overline{B_b(0)} \times \overline{B_\delta(y_0)} \subset V \times U,$$

y sea M la cota común a las $\|f_i\|$, $i = 1, \dots, n$, en K .

Queremos definir primero $y(x, 0, \dots, 0)$ de modo que

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x^1}(x, 0, \dots, 0) = f_1(x, 0, \dots, 0, y(x, 0, \dots, 0)); \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Para hacerlo, vamos a considerar el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z_1'(x) = b_1(x, z_1(x)); \\ z_1(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

con $b_1(x, z) = f_1(x, 0, \dots, 0, z)$. Por construcción, la función b_1 satisface las mismas condiciones de regularidad que f_1 y está acotada en K por M .

Sea $K_1 = [-b, b] \times \overline{B_{\delta/2}(y_0)} \subset K$. El teorema de Picard-Lindelöf garantiza que existe una única solución $z_1(x)$ verificando (3.4) que toma valores en $\overline{B_{\delta/2}(y_0)}$ y de clase C^∞ en el intervalo $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ con

$$\varepsilon_1 \leq \min \left\{ b, \frac{\delta/2}{M} \right\}.$$

Definimos $y(x, 0, \dots, 0) = z_1(x)$, de modo que efectivamente se cumple (3.3).

Queremos ahora definir $y(x^1, x, 0, \dots, 0)$, con $x^1 \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, de modo que

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x^2}(x^1, x, 0, \dots, 0) = f_2(x^1, x, 0, \dots, 0, y(x^1, x, 0, \dots, 0)); \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Para cada $x^1 \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ planteamos un nuevo problema de valor inicial

$$\begin{cases} z_2'(x) = b_2(x, z_2(x)); \\ z_2(0) = y_1, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $b_2(x, z) = f_2(x^1, x, 0, \dots, 0, z)$ e $y_1 = y(x^1, 0, \dots, 0)$. La función b_2 satisface las condiciones de regularidad de f_2 y está acotada en K por M .

Sea $K_2 = [-b, b] \times \overline{B_{\delta/4}(y_1)} \subset K$. El teorema de Picard-Lindelöf garantiza que existe una única solución $z_2(x)$ verificando (3.6) que toma valores en $\overline{B_{\delta/4}(y_1)}$ y definida en el intervalo $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, con

$$\varepsilon_2 \leq \min \left\{ b, \frac{\delta/4}{M} \right\}.$$

Definimos entonces $y(x^1, x, 0, \dots, 0) = z_2(x)$, donde z_2 es la solución correspondiente al x^1 fijado.

Falta comprobar que para $x^1 \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ y $x^2 \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ se sigue cumpliendo que

$$\frac{\partial y}{\partial x^1}(x^1, x^2, 0, \dots, 0) = f_1(x^1, x^2, 0, \dots, 0, y(x^1, x^2, 0, \dots, 0)).$$

Para probarlo, vamos a definir la función

$$g(x) = \frac{\partial y}{\partial x^1}(x^1, x, 0, \dots, 0) - f_1(x^1, x, 0, \dots, 0, y(x^1, x, 0, \dots, 0))$$

y vamos a ver que es igual a cero en $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$.

Calculamos

$$\begin{aligned} g' &= \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial y^k} f_2^k \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x^1} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_2}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial y^k} f_2^k \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x^1} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_2}{\partial y^k} [g^k + f_1^k] - \frac{\partial f_1}{\partial x} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial y^k} f_2^k \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_2}{\partial y^k} g^k, \end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de aplicar (3.2). Obsérvese, además, que $g(0) = 0$ por (3.3). Por tanto, tenemos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} g'(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_2}{\partial y^k}(x^1, x, 0, \dots, 0, y(x^1, x, 0, \dots, 0)) g^k(x); \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

Como la función nula es solución de este PVI, concluimos por unicidad que g es nula.

Sea

$$W' = \prod_{i=1}^{n-1} (-\varepsilon_i, \varepsilon_i).$$

De forma análoga, definimos $y(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)$, con $(x^1, \dots, x^{n-1}) \in W'$, cumpliendo que

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x^i}(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, 0) = f_i(x^1, \dots, x^{n-1}, 0, y(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)), & i = 1, \dots, n-1; \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Finalmente, buscamos $y(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n)$, con $(x^1, \dots, x^{n-1}) \in W'$, tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}, x) = f_n(x^1, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}, x, y(x^1, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}, x)); \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Para cada $(x^1, \dots, x^{n-1}) \in W'$, planteamos un nuevo problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'_n(x) = h_n(x, z_n(x)); \\ z_n(0) = y_{n-1}, \end{cases} \quad (3.9)$$

donde $h_n(x, z_n(x)) = f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, x, z)$ y $y_{n-1} = y(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, 0)$. La función h_n satisface las condiciones de regularidad de f_n y está acotada en K por M .

Consideramos ahora $K_n = [-b, b] \times \overline{B_{\delta/2^n}(x)}$. Nótese que

$$\overline{B_{\frac{\delta}{2^n}}(y_{n-1})} \subset \overline{B_{\delta(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n})}(y_0)} \subset \overline{B_{\delta}(y_0)},$$

y, por tanto, $K_n \subset K$. Por el teorema de Picard-Lindelöf, existe una única solución $z_n(x)$ verificando (3.9) que toma valores en $\overline{B_{\delta/2^n}(x)}$ y de clase C^∞ en el intervalo $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$ con

$$\varepsilon_n \leq \min \left\{ b, \frac{\delta/2^n}{M} \right\}.$$

Definimos entonces $y(x^1, \dots, x^{n-1}, x) = z_n(x)$.

Sea

$$W = \prod_{i=1}^n (-\varepsilon_i, \varepsilon_i).$$

Falta comprobar que, para todo $(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) \in W$, se sigue cumpliendo que

$$\frac{\partial y}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^n) = f_j(x^1, \dots, x^n, y(x^1, \dots, x^n)), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Para probarlo, para cada $(x^1, \dots, x^{n-1}) \in W'$ definimos la función

$$g(x) = \frac{\partial y}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^{n-1}, x) - f_j(x^1, \dots, x^{n-1}, x, y(x^1, \dots, x^{n-1}, x)),$$

y vemos que es igual a cero en $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$.

Calculamos

$$\begin{aligned}
 g' &= \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{\partial f_j}{\partial x} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y^k} f_n^k \\
 &= \frac{\partial f_n}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y^k} f_n^k \\
 &= \frac{\partial f_n}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial y^k} [g^k + f_j^k] - \frac{\partial f_j}{\partial x} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y^k} f_n^k \\
 &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial y^k} g^k.
 \end{aligned}$$

Además, se tiene que $g(0) = 0$ por (3.7). Por tanto, si consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} g'(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial y^k}(x^1, \dots, x^{n-1}, x, y(x^1, \dots, x^{n-1}, x)) g^k(x); \\ g(0) = 0, \end{cases}$$

se concluye por unicidad de soluciones que g es nula.

Hemos obtenido por tanto una función $y : W \rightarrow V$ que satisface (3.1). Además, esta solución es única por construcción, pues si hubiera dos soluciones y e y' de (3.1), entonces ambas soluciones tendrían que satisfacer (3.8) y, por tanto, serían iguales a z_n , que es única. \square

El teorema 3.4 resuelve esencialmente el problema de decidir qué distribuciones admiten variedades integrales.

3.2. Formulación mediante campos

Veamos ahora la formulación y demostración del teorema de Frobenius mediante campos. Para ello, es necesario definir el concepto de involutividad.

Definición 3.5. Sea M una variedad y sea \mathcal{D}^k una distribución de rango k en M . Se dice que \mathcal{D}^k es *involutiva* si para cualquier par de campos X, Y pertenecientes a \mathcal{D}^k — es decir, definidos en un subconjunto abierto U de M y que satisfacen que para todo $p \in U$ $X(p), Y(p) \in \mathcal{D}_p^k$ — se tiene que

$$[X, Y](p) \in \mathcal{D}_p^k.$$

De manera inmediata se obtiene la siguiente caracterización de una distribución involutiva. Una distribución es involutiva si y solo si, para todo $p \in M$, existe un entorno abierto U y una base local de \mathcal{D}^k en U , dada por campos vectoriales X_1, X_2, \dots, X_k , tal que

$$[X_i, X_j] = \sum_{m=1}^k c_{ij}^m X_m, \quad 1 \leq i, \quad j \leq k,$$

con c_{ij}^m funciones de clase C^∞ en U .

En general, las distribuciones no son involutivas. A continuación, se muestra un ejemplo sencillo que lo ilustra.

Ejemplo 3.6. Sea \mathcal{D}^2 la distribución en \mathbb{R}^3 generada por los campos de vectores

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Vemos que no es involutiva, pues $[X, Y] = 2x \frac{\partial}{\partial y}$, que no se puede escribir como combinación lineal de X e Y .

Proposición 3.7. *Sea \mathcal{D}^k una distribución en M . Supongamos que existe una variedad integral de \mathcal{D}^k . Entonces, para cualquier $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{D}^k)$, se cumple que $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p^k$.*

Demostración. Sean X, Y dos campos vectoriales pertenecientes a \mathcal{D}^k . Supongamos que existe una variedad integral (N, h) de \mathcal{D}^k , con $h : N \rightarrow M$. Para todo $q \in N$, la aplicación $dh_q : T_q N \rightarrow T_{h(q)} M$ es inyectiva y su imagen es $\mathcal{D}_{h(q)}^k$. Por la proposición 2.24, existen dos únicos campos \tilde{X}, \tilde{Y} en N que están h -relacionados con X e Y , respectivamente. Por la proposición 2.34, se tiene entonces que $[X, Y]$ y $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ están h -relacionados. De modo que, para todo $p \in M$, se cumple que

$$[X, Y]_p = dh_q([\tilde{X}, \tilde{Y}]_q) \in dh_q(T_q N) = \mathcal{D}_p^k, \quad \text{con } q = h(p).$$

□

Definición 3.8. Sea \mathcal{D}^k una distribución de rango k en M . Decimos que una carta local (U, x) en M es *plana* o *trivializa a \mathcal{D}^k* si $x(U)$ es un cubo en \mathbb{R}^n y, en puntos de U , \mathcal{D}^k está generada por $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k$.

Decimos que una distribución \mathcal{D}^k es *completamente integrable* si en torno a cada punto de M existe una carta plana para \mathcal{D}^k . En particular, para distribuciones completamente integrables, las variedades integrales son las secciones del tipo $x^{k+1} = a^{k+1}, \dots, x^n = a^n$, con a^{k+1}, \dots, a^n constantes.

Claramente, toda distribución completamente integrable es integrable.

Teorema 3.9. *Una distribución es completamente integrable si y solo si es involutiva.*

Demostración. Como toda distribución completamente integrable es integrable, la proposición 3.7 muestra que una de las implicaciones se cumple.

Para probar la otra implicación, vamos a suponer que la distribución \mathcal{D}^k es involutiva.

Vamos a comenzar probando que se cumple que, para cada $p \in M$, existen campos vectoriales X_1, \dots, X_k , definidos en un entorno abierto U de p , tales que $\mathcal{D}^k|_U = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ y $[X_i, X_j] = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, k$.

Para todo $p \in M$, existe un conjunto de campos Y_1, \dots, Y_k definidos en un entorno V de p tales que $\mathcal{D}^k|_V = \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle$. Podemos además asumir que V es el entorno coordinado de cierta carta $(V, (x^1, \dots, x^n))$ de M , de modo que

$$Y_i = \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad i = 1, \dots, k,$$

con a_{il} funciones de clase C^∞ en V . Consideramos ahora la matriz $A = (a_{il})$, de n filas y k columnas y de rango k . Podemos asumir que la submatriz formada por las primeras k filas y k columnas de A tiene determinante no nulo en un entorno abierto $U \subset V$ de p . Sea $B = (b_{ij})$ la matriz inversa $k \times k$ de dicha submatriz y definimos los campos X_1, \dots, X_k en U dados por

$$X_i = \sum_{j=1}^k b_{ij} Y_j = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n b_{ij} a_{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=k+1}^n c_{il} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad i = 1, \dots, k,$$

donde

$$c_{il} = \sum_{j=1}^k b_{ij} a_{jl},$$

son funciones de clase C^∞ en U . Además, por construcción se cumple que

$$\mathcal{D}^k|_U = \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_k \rangle.$$

Por otro lado, se tiene que

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=k+1}^n d_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

donde

$$d_{ij}^l = \frac{\partial c_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{il}}{\partial x^j} + \sum_{m=k+1}^n \left(c_{im} \frac{\partial c_{jl}}{\partial x^m} - c_{jm} \frac{\partial c_{il}}{\partial x^m} \right)$$

son funciones de clase C^∞ en U . Por ser \mathcal{D}^k involutiva, se tiene que

$$\sum_{l=k+1}^n d_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l} = \sum_{m=1}^k \lambda_{ij}^m X_m = \sum_{m=1}^k \lambda_{ij}^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m} + \sum_{l=k+1}^n c_{ml} \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$$

y, por tanto, las funciones d_{ij}^l son nulas, lo que implica que $[X_i, X_j] = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, k$.

Por el teorema 2.36, concluimos que cada punto $p \in M$ admite una carta plana y, por tanto, está contenido en una variedad integral de \mathcal{D}^k . \square

Teniendo en cuenta este nuevo criterio para determinar si una distribución es integrable, vamos a resolver nuevamente el ejemplo 3.1.

Ejemplo 3.10. Sea \mathcal{D}^2 la 2-distribución en \mathbb{R}^3 generada por los campos vectoriales

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para todo $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\mathcal{D}_p^2 = \left\{ r \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + s \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + (sa - rb) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p : r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

A continuación, volveremos a comprobar que la distribución no es integrable, esta vez verificando que no es involutiva.

Como

$$[X, Y] = 2 \frac{\partial}{\partial z}$$

no se puede escribir como combinación lineal de los campos X, Y , se concluye que \mathcal{D}^2 no es integrable.

3.3. Formulación mediante formas

Por último, estudiaremos la formulación del teorema de Frobenius a través del lenguaje de las formas diferenciales, que es como se planteó históricamente el problema (véase, [Haw13, Chapter 6]). Para ello, introduciremos el concepto de sistemas de Pfaff.

Dadas las funciones

$$f_1, \dots, f_{n-k}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

de clase C^∞ cuyas diferenciales df_1, \dots, df_{n-k} son linealmente independientes, podemos definir una variedad diferenciable de dimensión k en \mathbb{R}^n como

$$\mathcal{M}_{c_1, \dots, c_{n-k}}^k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = c_1, \dots, f_{n-k}(x) = c_{n-k}\}.$$

El espacio tangente a esta variedad viene dado por

$$T\mathcal{M}_{c_1, \dots, c_{n-k}}^k = \{v \in T\mathbb{R}^n : df_1(v) = \dots = df_{n-k}(v) = 0\}.$$

Estas ecuaciones determinan, para cada $p \in \mathbb{R}^n$, un subespacio k -dimensional del espacio tangente a \mathbb{R}^n , es decir, una distribución. Esta distribución puede expresarse, de manera equivalente, mediante un sistema de 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$ como sigue: Si (h_{ij}) es una matriz invertible de funciones, las 1-formas

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} h_{ij} df_j, \quad i = 1, \dots, n-k,$$

satisfacen

$$T\mathcal{M}_{c_1, \dots, c_{n-k}}^k = \{v \in T\mathbb{R}^n : \omega_1(v) = \dots = \omega_{n-k}(v) = 0\}.$$

Dado que (h_{ij}) es invertible, estas 1-formas ω_i forman un sistema equivalente al formado por las 1-formas df_i , por lo que el sistema

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{n-k} = 0,$$

describe exactamente la misma distribución que el conjunto original de ecuaciones. A este sistema de 1-formas igualadas a cero se le conoce como *sistema de Pfaff*.

Este enfoque nos permite reformular el teorema de Frobenius en términos de formas diferenciales, recuperando los conceptos previamente introducidos desde una perspectiva dual. Si antes describíamos \mathcal{D}^k como el espacio generado por campos vectoriales $\{X_i\}$, ahora lo caracterizamos como el núcleo de las 1-formas $\{\omega_j\}$. Es decir,

$$\mathcal{D}_p^k = \langle X_1(p), \dots, X_k(p) \rangle,$$

es la notación con campos y

$$\mathcal{D}_p^k = \{v \in T_p\mathcal{M} : \omega_1(v) = \dots = \omega_{n-k}(v) = 0\},$$

es la notación con formas, donde las 1-formas ω_j satisfacen

$$\omega_j(X_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n-k.$$

Antes de exponer la versión del teorema de Frobenius en términos de formas diferenciales, necesitamos el siguiente resultado técnico. La demostración que se presenta a continuación sigue, en esencia, la de [AF02][Theorem 2].

Teorema 3.11. Sean 1-formas linealmente independientes, $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$, definidas en un subconjunto abierto $M \subset \mathbb{R}^n$ tales que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j, \quad i = 1, \dots, n-k, \quad (3.10)$$

para ciertas 1-formas θ_{ij} . Entonces, en cada punto $p \in M$ existen un entorno $U \subset M$ de p y funciones b_{ij} y f_j definidas en U que satisfacen

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} b_{ij} df_j, \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Demostración. En primer lugar, vamos a probar que basta hacer la demostración para un sistema de 1-formas del tipo

$$\omega_i = dx^i - \sum_{l=n-k+1}^n \alpha_{il} dx^l, \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (3.11)$$

Sea p un punto cualquiera de M y $(V, (x^i))$ una carta centrada en p . Podemos entonces escribir las 1-formas ω_i como

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} dx^j, \quad i = 1, \dots, n-k,$$

con a_{ij} funciones de clase C^∞ en V . Consideramos ahora la matriz $A = (a_{ij})$, de $n-k$ filas y n columnas y de rango $n-k$. Podemos suponer que la submatriz formada por las primeras $n-k$ filas y $n-k$ columnas de A tiene determinante no nulo en un entorno $W \subset V$ de p . Sea $B = (b_{ij})$ la matriz inversa $(n-k) \times (n-k)$ de dicha submatriz. Definimos las 1-formas

$$\omega_i^* = \sum_{j=1}^{n-k} b_{ij} \omega_j = \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{r=1}^n b_{ij} a_{jr} dx^r = dx^i - \sum_{l=n-k+1}^n \alpha_{il} dx^l, \quad i = 1, \dots, n-k,$$

donde

$$\alpha_{il} = - \sum_{j=1}^{n-k} b_{ij} a_{jl}, \quad l = n-k+1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n-k,$$

son funciones de clase C^∞ en W .

Ahora, teniendo en cuenta la hipótesis (3.10) del enunciado, se cumple que

$$d\omega_i^* = \sum_{j=1}^{n-k} (db_{ij} \wedge \omega_j + b_{ij} d\omega_j) = \sum_{j=1}^{n-k} \left(db_{ij} \wedge \omega_j + b_{ij} \sum_{l=1}^{n-k} \theta_{jl} \wedge \omega_l \right), \quad i = 1, \dots, n-k,$$

donde, sustituyendo

$$\omega_j = \sum_{t=1}^{n-k} a_{jt} \omega_t^*, \quad j = 1, \dots, n-k,$$

se obtiene

$$d\omega_i^* = \sum_{t=1}^{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} \left(db_{ij} a_{jt} + \sum_{s=1}^{n-k} b_{ij} \theta_{js} a_{st} \right) \wedge \omega_t^*, \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (3.12)$$

Si ahora denotamos

$$\theta_{it}^* = \sum_{j=1}^{n-k} db_{ij} a_{jt} + \sum_{j,s=1}^{n-k} b_{ij} \theta_{js} a_{st}, \quad i = 1, \dots, n-k, \quad t = 1, \dots, n-k,$$

las 1-formas $\omega_1^*, \dots, \omega_{n-k}^*$ satisfacen

$$d\omega_i^* = \sum_{t=1}^{n-k} \theta_{it}^* \wedge \omega_t^*, \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Si el teorema se cumple para el sistema dado por las 1-formas $\omega_1^*, \dots, \omega_{n-k}^*$, entonces existen funciones b_{ij}^* y f_j^* tales que

$$\omega_i^* = \sum_{j=1}^{n-k} b_{ij}^* df_j^*, \quad i = 1, \dots, n-k.$$

De modo que

$$\omega_i = \sum_{t=1}^{n-k} a_{it} \omega_t^* = \sum_{t=1}^{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} b_{ij}^* a_{it} df_j^*, \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Luego ω_i también cumple el teorema. Por tanto, como se mencionó, basta probarlo para formas del tipo (3.11).

Sean $p \in M$ un punto cualquiera y (U, ϕ) una carta local centrada en p . Dado q un punto de U , vamos a denotar $q = (y, z)$, con

$$y = (y^1, \dots, y^k) \in \mathbb{R}^k \quad \text{y} \quad z = (z^1, \dots, z^{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Fijado $y \in \mathbb{R}^k$, consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

$$\dot{z}^i(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(ty, z(t)) y^j, \quad z^i(0) = z^i, \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (3.13)$$

Dado que las funciones α_{ij} son de clase C^∞ , se satisfacen las condiciones del teorema de Picard–Lindelöf. Existe entonces una única solución $z(t) = (z^1(t), \dots, z^{n-k}(t))$ definida en cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y que depende del punto q considerado. Definimos la solución como una función $F(t, y, z) = z(t)$, con $F(t, y, z) = (F^1(t, y, z), \dots, F^{n-k}(t, y, z))$.

Fijamos un índice i , con $i = 1, \dots, k$. Sea μ un valor muy próximo a cero. Se cumple que $F^i(\mu t, y, z) = F^i(t, \mu y, z)$. En efecto, las funciones

$$G^i(t, y, z) = F^i(\mu t, y, z)$$

satisfacen la condiciones iniciales $G^i(0, y, z) = z^i$ y además son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes al vector μy ; es decir,

$$G^{i'}(t, y, z) = \mu F^{i'}(\mu t, y, z) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(\mu t, y, G^1(t, y, z), \dots, G^{n-k}(t, y, z)) \mu y^j.$$

Como $F^i(t, \mu y, z)$ cumple el mismo problema de valor inicial, por unicidad se concluye que son iguales.

Consideramos ahora el cambio de coordenadas en U dado por

$$u = y, \quad F(1, u, v) = z,$$

y obtenemos su matriz jacobiana en el punto p , el cual, al trabajar en coordenadas locales dadas por la carta (U, ϕ) , se identifica con el origen $(0, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Por un lado, de (3.13) se deduce que $F(t, 0, z) = z$ para cualquier t . De modo que

$$\left. \frac{\partial z^i}{\partial v^j} \right|_0 = \left. \frac{\partial F^i(1, u, v)}{\partial v^j} \right|_0 = \left. \frac{\partial v^i}{\partial v^j} \right|_{v=0} = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Teniendo esto en cuenta, la matriz jacobiana de este cambio de coordenadas es

$$J = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}.$$

Por el teorema de la función inversa, existe un entorno V de p en el cual el cambio de coordenadas anterior es un difeomorfismo.

Nótese que, con la división del espacio \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, las 1-formas originales se escriben como

$$\omega_i = dz^i - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} dy^j, \quad (3.14)$$

Las representamos ahora en las nuevas coordenadas como

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} C_{ij}(u, v) dv^j + \sum_{j=1}^k P_{ij}(u, v) du^j, \quad i = 1, \dots, n-k,$$

con

$$C_{ij}(u, v) = \frac{\partial F^i}{\partial v^j}(1, u, v), \quad P_{ij} = \frac{\partial F^i}{\partial u^j}(1, u, v) - \alpha_{ij}(u, F(1, u, v)), \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Fijamos el índice i , con $1 \leq i \leq n-k$. Debemos probar que P_{ij} es igual a cero para todo $j = 1, \dots, n-k$. Primero, vamos a ver que

$$\sum_{j=1}^k P_{ij}(ty, v) y^j = 0.$$

Para hacerlo, consideramos la aplicación

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k},$$

que se define para un valor $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ fijo mediante $\Phi(t, y) = (ty, v)$. Entonces,

$$\Phi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^k P_{ij}(ty, v) (tdy^j + y^j dt). \quad (3.15)$$

Por otro lado, consideramos la aplicación $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ determinada por

$$\Psi(t, y) = (ty, F(1, ty, v)) = (ty, F(t, y, v)).$$

Debido a que las ω_i , con $i = 1, \dots, n-k$, se escriben como (3.14), obtenemos que

$$\Psi^*(\omega_i) = \frac{\partial F^i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F^i}{\partial y^j} dy^j - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} (y^j dt + t dy^j). \quad (3.16)$$

Comparando en las expresiones (3.15) y (3.16), los coeficientes de dt se obtiene que

$$\sum_{j=1}^k P_{ij}(ty, v) y^j = \frac{\partial F^i}{\partial t}(t, y, v) - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} y^j,$$

y además es igual a cero por (3.13).

Finalmente, vamos a ver que $P_{ij} = 0$, para todo $j = 1, \dots, n-k$. Para ello, consideramos la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k},$$

definida por $\varphi(t, y, v) = (ty, v)$. Entonces, la identidad que acabamos de probar implica

$$\varphi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^{n-k} C_{ij}(ty, v)dv^j + \sum_{j=1}^k P_{ij}(ty, v)tdy^j.$$

Denotamos $P_{ij}^*(t, y, v) = tP_{ij}(ty, v)$, de modo que

$$\varphi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^{n-k} C_{ij}(ty, v)dv^j + \sum_{j=1}^k P_{ij}^*(t, y, v)dy^j,$$

y calculamos la derivada exterior

$$d\varphi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^{n-k} dC_{ij} \wedge dv^j + \sum_{j=1}^k \frac{\partial P_{ij}^*}{\partial t} dt \wedge dy^j + \sum_{j,b=1}^k \frac{\partial P_{ij}^*}{\partial y^b} dy^b \wedge dy^j. \quad (3.17)$$

Por hipótesis, sabemos que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j,$$

por lo que el pullback es

$$\varphi^*(d\omega_i) = \sum_{j=1}^{n-k} \varphi^*(\theta_{ij}) \wedge \varphi^*(\omega_j).$$

Si escribimos

$$\varphi^*(\theta_{ij}) = H_{ij}dt + \sum_{a=1}^k L_{ij}^a dy^a + \sum_{b=1}^{n-k} M_{ij}^b dv^b, \quad j = 1, \dots, n-k,$$

entonces los coeficientes de $dt \wedge dy^j$ en $\varphi^*(d\omega_i)$ son

$$\sum_{l=1}^{n-k} H_{il}P_{lj}^* \quad j = 1, \dots, n-k.$$

Igualándolos a los obtenidos en (3.17), obtenemos la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n-k} H_{il}P_{lj}^* \quad j = 1, \dots, n-k,$$

con condición inicial $P_{ij}^*(0, y, v) = 0$. Por el teorema de Picard-Lindelöf, concluimos que $P_{ij}^*(t, y, v) \equiv 0$, para todo $j = 1, \dots, n-k$, es la única solución, lo que implica que $P_{ij}(ty, v) = 0$. \square

Teorema 3.12. Sea \mathcal{D}^k una distribución k -dimensional en la variedad M definida por 1-formas linealmente independientes $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$. Entonces, son equivalentes las condiciones

1. \mathcal{D}^k es integrable.
2. \mathcal{D}^k es involutiva.
3. Para todo punto $p \in M$, existen un entorno U de p y 1-formas θ_{ij} definidas en U tales que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j \quad i = 1, \dots, n-k.$$

4. Para todos los índices $1 \leq i \leq n-k$, los productos exteriores cumplen

$$d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-k}) = 0.$$

A la cuarta condición del teorema de Frobenius se le denomina *condición de integrabilidad* del sistema de Pfaff asociado.

Demostración. Para demostrar el teorema, vamos a proceder en dos etapas. En primer lugar, mostraremos que las tres últimas condiciones del enunciado son equivalentes entre sí. A continuación, para completar la demostración, probaremos que la primera condición implica la cuarta y que la tercera implica la primera. Esta última implicación se demostrará empleando el resultado técnico anterior, teorema 3.II.

Comenzamos probando que las tres últimas condiciones son equivalentes.

Equivalencia entre las condiciones 3 y 4. Supongamos que existen 1-formas θ_{ij} tales que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j, \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Entonces, teniendo en cuenta que $d^2\omega_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n-k$, se concluye que

$$d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-k}) = \sum_{j=1}^{n-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-k}) = 0, \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Supongamos ahora que se cumple la condición 4. Sea p un punto cualquiera de M y $U \subset M$ un entorno de p . Vamos a extender la familia de 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$ añadiendo las 1-formas linealmente independientes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. De este modo, el conjunto extendido

de formas $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-k}, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ forma una base de $\Lambda^1(T_q^*M)$ para todo q en U . Por tanto, podemos escribir las 2-formas $d\omega_i$, con $1 \leq i \leq n-k$, como

$$d\omega_i = \sum_{r,s=1}^{n-k} f_{rs} \omega_r \wedge \omega_s + \sum_{r=1}^{n-k} \sum_{l=1}^k g_{rl} \omega_r \wedge \alpha_l + \sum_{j,l=1}^k h_{jl} \alpha_j \wedge \alpha_l, \quad i = 1, \dots, n-k,$$

con f_{rs}, g_{rl} y h_{jl} funciones de clase C^∞ en U .

Observamos ahora que la condición $d\omega_i \wedge (\omega_1, \dots, \omega_{n-k}) = 0$ implica que

$$\sum_{j,l=1}^k h_{jl} \alpha_j \wedge \alpha_l \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-k}) = 0,$$

y, por tanto, $h_{jl} = 0$ para todo $j, l = 1, \dots, k$. Basta entonces definir la 1-forma

$$\theta_{ij} = - \sum_{l=1}^{n-k} f_{jl} \omega_l - \sum_{t=1}^k g_{it} \alpha_t, \quad i, j = 1, \dots, n-k.$$

Prueba de que 3 implica 2. Dados dos campos X, Y en la distribución \mathcal{D}^k , queremos demostrar que el corchete de Lie $[X, Y]$ también está en la distribución. Sabemos que, para cada $i = 1, \dots, n-k$, se cumple $\omega_i(X) = \omega_i(Y) = 0$. Aplicando la proposición 2.41, obtenemos que

$$d\omega_i(X, Y) = -\omega_i([X, Y]), \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Si la condición 3 se cumple para la distribución \mathcal{D}^k , entonces

$$d\omega_i(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-k} (\theta_{ij} \wedge \omega_j)(X, Y) = 0, \quad i = 1, \dots, n-k,$$

lo que implica que $\omega_i([X, Y]) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-k$. Se concluye entonces que el campo $[X, Y]$ está en la distribución, es decir, \mathcal{D}^k es involutiva.

Prueba de que 2 implica 4. Sea \mathcal{D}^k una distribución involutiva de rango k . Fijamos $i = 1, \dots, n-k$ y consideramos la forma diferencial $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-k})$, que tiene grado $n-k+2$. Para probar que esta forma es nula, tomamos $n-k+2$ campos vectoriales en M . Observemos que, dado que \mathcal{D}^k tiene codimensión $n-k$, necesariamente al menos dos de estos vectores deben pertenecer a \mathcal{D}^k . De lo contrario, la evaluación de la forma se anularía trivialmente debido a la dependencia lineal de al menos dos campos y la antisimetría de las formas. Sean X, Y estos dos campos en \mathcal{D}^k . Por un lado $\omega_i(X) = \omega_i(Y) = 0$ y, por

la involutividad de la distribución, $d\omega_i(X, Y) = -\omega_i([X, Y]) = 0$. Luego el producto $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-k})$ se anula para toda tupla de $n - k + 2$ campos vectoriales.

Prueba de que 1 implica 4. Sea \mathcal{D}^k una distribución integrable. Fijamos el índice i , con $i = 1, \dots, n - k$. Sea $p \in M$ un punto cualquiera y N una variedad integral a \mathcal{D}^k en ese punto. Consideramos $\phi : U \rightarrow N$, con U entorno de p . Se tiene entonces que $\phi^*(\omega_i) = 0$, lo que, por la proposición 2.43, implica que $\phi^*(d\omega_i) = 0$. Entonces, la 2-forma $d\omega_i$ se anula en el subespacio \mathcal{D}_p^k .

Al igual que en la demostración anterior, consideramos ahora $n - k + 2$ campos vectoriales en un entorno de p , donde al menos dos de ellos, X, Y , pertenecen a \mathcal{D}_p^k . Se tiene entonces que, $\omega_i(X) = \omega_i(Y) = 0$ y $d\omega_i(X, Y) = 0$. Concluimos entonces que $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-k}) = 0$.

Finalmente, vamos a probar que 3 implica 1, que constituye el núcleo de esta formulación, al proporcionar un criterio puramente algebraico para la integrabilidad de distribuciones.

Prueba de que 3 implica 1. Sea \mathcal{D}^k una distribución que cumple la condición 3. Dado p un punto cualquiera de M y $U \subset M$ entorno de p . Por el teorema 3.II, podemos escribir las 1-formas ω_i , con $1 \leq i \leq n - k$, como

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n-k} h_{ij} df_j, \quad i = 1, \dots, n - k,$$

para ciertas funciones h_{ij} definidas en U . Como, por hipótesis, las 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$ son linealmente independientes, df_1, \dots, df_{n-k} también lo son, y el conjunto

$$N = \{x \in U : f_1(x) = f_1(p), \dots, f_{n-k}(x) = f_{n-k}(p)\}$$

es una subvariedad de M que contiene al punto p . Consideremos ahora un punto cualquiera x de N . El espacio tangente de N en ese punto viene determinado por

$$\begin{aligned} T_x N &= \{v \in TM : df_1(v) = 0, \dots, df_{n-k}(v) = 0\} \\ &\subset \{v \in TM : \omega_1(v) = 0, \dots, \omega_{n-k}(v) = 0\} = \mathcal{D}_x^k. \end{aligned}$$

Como ambos espacios vectoriales tienen la misma dimensión k , coinciden. Por tanto, hemos construido una variedad integral de \mathcal{D}^k en el punto p . Como p es un punto arbitrario de M , queda probado que la distribución \mathcal{D}^k es integrable. \square

Observación. Nótese que, en la demostración del teorema 3.I2, se ha omitido la ya establecida equivalencia entre las condiciones 1 y 2. Esta decisión responde al propósito de tratar las tres formulaciones de manera independiente.

Observación. Una distribución de rango 1 está determinada por 1-formas, $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$. Entonces, para cada i tal que $1 \leq i \leq n-1$, $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-1})$ es una $n+1$ -forma. Trivialmente, se tiene que este producto debe ser cero, por lo que la condición de integrabilidad del teorema de Frobenius se satisface automáticamente.

Algunos autores (por ejemplo, [War83][Proposition 2.30]), en lugar de presentar el teorema de Frobenius en la versión de formas como se ha expuesto en el presente trabajo, prefieren una formulación más abstracta basada en la teoría de ideales diferenciales. En este enfoque, la tercera condición es equivalente a que

$$\mathcal{I}(\mathcal{D}^k) = \{\omega \in \Omega^*(M) : \omega \text{ anula a } \mathcal{D}^k\}$$

es un ideal diferencial, es decir, $d(\mathcal{I}(\mathcal{D}^k)) \subset \mathcal{I}(\mathcal{D}^k)$.

Así, el teorema de Frobenius formulado en términos de ideales puede enunciarse del siguiente modo.

Teorema 3.13. *Una distribución \mathcal{D}^k en M es integrable si y solo si el ideal $\mathcal{I}(\mathcal{D}^k)$ es un ideal diferencial.*

Al igual que hicimos con la formulación mediante campos, volveremos a analizar el ejemplo 3.1, esta vez aplicando el nuevo criterio.

Ejemplo 3.14. Sea \mathcal{D}^2 la 2-distribución en \mathbb{R}^3 generada por los campos vectoriales

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para todo $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, se tiene

$$\mathcal{D}_p^2 = \left\{ r \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + s \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + (sa - rb) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p : r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nuestro objetivo es estudiar la integrabilidad de \mathcal{D}^2 mediante el criterio de formas diferenciales. Para ello, debemos comenzar escribiendo la distribución \mathcal{D}^2 como

$$\mathcal{D}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \omega(v) = 0\},$$

donde ω es una 1-forma que anula simultáneamente a X y a Y . Sea $\omega = f dx + g dy + h dz$, con $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e imponemos que ω anula a X y a Y :

$$\omega(X) = f - hy = 0, \quad \omega(Y) = g + hx = 0.$$

De estas ecuaciones se deduce que

$$f = by, \quad g = -bx.$$

Por simplicidad, tomamos $b = 1$, obteniendo así la 1-forma

$$\omega = y dx - x dy + dz.$$

Ahora vamos a demostrar que la distribución \mathcal{D}^2 no es integrable utilizando dos criterios equivalentes.

Primero, vamos a probar que $d\omega \wedge \omega \neq 0$. Calculamos

$$d\omega \wedge \omega = (-2dx \wedge dy) \wedge (y dx - x dy + dz) = -2dx \wedge dy \wedge dz \neq 0,$$

con lo que se concluye que \mathcal{D}^2 no es integrable.

Por otro lado, vamos a ver que $d\omega$ no pertenece al ideal generado por ω o, equivalentemente, que $\mathcal{I}(\mathcal{D}^2)$ no es un ideal diferencial.

Supongamos que $d\omega$ pertenece al ideal generado por ω . Entonces existen funciones $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tales que

$$\begin{aligned} d\omega &= \omega \wedge (\hat{f} dx + \hat{g} dy + \hat{h} dz) \\ &= (y\hat{g} + x\hat{f}) dx \wedge dy + (y\hat{h} - \hat{f}) dx \wedge dz + (-x\hat{h} - \hat{g}) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

De modo que se debe cumplir el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y\hat{g} + x\hat{f} = -2, \\ y\hat{h} - \hat{f} = 0, \\ x\hat{h} + \hat{g} = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo las dos últimas igualdades en la primera se llega a que

$$y(-x\hat{h}) + x(y\hat{h}) = 0 \neq -2,$$

que es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{I}(\mathcal{D}^2)$ no es un ideal diferencial.

El Teorema de Frobenius garantiza la existencia local de variedades integrales para una distribución integrable, pero no ofrece un método explícito para determinarlas. A continuación, se presenta un ejemplo en el que la distribución es integrable y, además, se calcula la expresión de sus variedades integrales. Para ello, se emplearán algunos resultados desarrollados en este trabajo y se utilizarán las herramientas propias de cada una de las tres formulaciones del teorema.

Ejemplo 3.15. Consideramos en \mathbb{R}^3 la distribución \mathcal{D}^2 generada por los campos

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2xz}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2yz}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Vamos a comenzar probando que esta distribución es integrable.

Si existe N una variedad integral de \mathcal{D}^2 , como vimos en el ejemplo 3.1, siempre podemos escoger un entorno coordenado de manera que, localmente, N se puede representar como la gráfica de una función diferenciable ; es decir,

$$N = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}.$$

Considerando la parametrización de N , $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, obtenemos la base del espacio tangente en $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ dada por

$$\varphi_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial}{\partial z} \right|_p, \quad \varphi_y(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p + \left. \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial}{\partial z} \right|_p.$$

De modo que N es variedad integral de \mathcal{D}^2 si, para todo $p \in \mathbb{R}^3$, se cumple que

$$\varphi_x(x_0, y_0), \varphi_y(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_p^2.$$

Para que esto ocurra, se debe satisfacer el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xf}{1+x^2+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2yf}{1+x^2+y^2}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Nótese que, en el caso que se está estudiando, la condición de integrabilidad es precisamente la igualdad de derivadas cruzadas. Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2xf_y(1+x^2+y^2) - 4xyf}{(1+x^2+y^2)^2} = 0,$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2yf_x(1+x^2+y^2) - 4xyf}{(1+x^2+y^2)^2} = 0,$$

se concluye que \mathcal{D}^2 es integrable.

Resolviendo el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (3.18), obtenemos que la variedad integral es

$$N = \{(x, y, z) : z = c(1+x^2+y^2), \text{ con } c \in \mathbb{R}\},$$

es decir, las superficies de nivel de f .

Veamos ahora cómo resolver el ejemplo mediante campos vectoriales. Para ver que es integrable, basta calcular el corchete de Lie de los campos X, Y . Como $[X, Y] = 0$, la distribución es involutiva y, por el teorema de Frobenius, concluimos que es integrable. Calculemos ahora las variedades integrales. Sea $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Para el campo X , las curvas integrales vienen dadas por

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \end{cases}$$

y

$$\frac{z'}{z} = \frac{2(x_0 + t)}{1 + (x_0 + t)^2 + y_0^2}.$$

Resolviendo esta última ecuación, se tiene que

$$z = C(1 + (x_0 + t)^2 + y_0^2),$$

con $C \in \mathbb{R}$ una constante a determinar. Calculamos el valor de esta constante con la condición inicial $z(t) = z_0$, de modo que

$$C = \frac{z_0}{1 + x_0^2 + y_0^2}.$$

Así,

$$z = z_0 \frac{1 + (x_0 + t)^2 + y_0^2}{1 + x_0^2 + y_0^2}.$$

Por tanto, el flujo del campo X es

$$\phi_t^X(x, y, z) = \left(x + t, y, z \frac{1 + (x + t)^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Análogamente, el flujo del campo Y es

$$\phi_s^Y(x, y, z) = \left(x, y + s, z \frac{1 + x^2 + (y + s)^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Las variedades integrales pueden parametrizarse mediante la composición de flujos

$$\varphi(t, s) = (\phi_s^Y \circ \phi_t^X)(x_0, y_0, z_0),$$

pues el plano tangente a la superficie parametrizada por φ en cada punto es igual a la distribución en ese punto. En efecto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) = Y(\phi_s^Y(\phi_t^X(p_0))) = Y(\varphi(t, s)),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) = d\phi_s^Y(X(\phi_t^X(p_0))).$$

Claramente $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s)$ está en $\mathcal{D}_{\varphi(t,s)}^2$. Por otro lado, como $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s)$ es el transporte del vector X a lo largo del flujo de Y , también permanece en la distribución.

Finalmente, resolvemos el ejemplo empleando formas diferenciales. En este caso, buscamos una 1-forma ω que anule los campos X e Y .

Sea $\omega = f dx + g dy + h dz$, con $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Imponemos que

$$\omega(X) = f + b \frac{2xz}{1+x^2+y^2} = 0, \quad \omega(Y) = g + b \frac{2yz}{1+x^2+y^2} = 0.$$

Vamos a considerar, por ejemplo,

$$f = 2xz, \quad g = 2yz, \quad h = -(1+x^2+y^2),$$

teniendo así que

$$\omega = 2xz dx + 2yz dy - (1+x^2+y^2) dz.$$

Calculamos ahora

$$d\omega = 4x dz \wedge dx + 4y dz \wedge dy,$$

de modo que

$$d\omega \wedge \omega = (4x dz \wedge dx + 4y dz \wedge dy) \wedge (2xz dx + 2yz dy - (1+x^2+y^2) dz) = 0,$$

por lo que la distribución \mathcal{D}^2 es integrable.

Además,

$$\begin{aligned} \omega &= 2xz dx + 2yz dy - (1+x^2+y^2) dz = z d(1+x^2+y^2) - (1+x^2+y^2) dz \\ &= -(1+x^2+y^2)^2 d\left(\frac{z}{1+x^2+y^2}\right), \end{aligned}$$

de lo que se concluye que las variedades integrales están dadas por las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = \frac{z}{1+x^2+y^2}.$$

Nótese que $df_p(X_p) = df_p(Y_p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$, lo que implica que los campos X, Y son tangentes a las superficies de nivel de f . Por tanto, estas superficies son variedades integrales de la distribución \mathcal{D}^k .

4

Teorema de Frobenius global

En esta sección vamos a estudiar la versión global del teorema de Frobenius. Para ello, introduciremos el concepto de foliación y presentaremos algunos resultados técnicos sobre la estructura de las distribuciones. Un aspecto especialmente destacable es que esta versión global no requiere condiciones adicionales sobre las ya impuestas en la formulación local.

El siguiente resultado describe la estructura local de las variedades integrales de una distribución involutiva, y desempeñará un papel fundamental en todas las demostraciones de esta sección.

Proposición 4.1. *Sea \mathcal{D}^k una distribución involutiva de rango k en la variedad M . Sea H una variedad integral para \mathcal{D}^k y sea $p \in H$. Supongamos que (U, x) es una carta plana para \mathcal{D}^k con $p \in U$. Entonces, $H \cap U$ es una unión numerable y disjunta de subconjuntos abiertos conexos de secciones paralelas k -dimensionales de U , cada uno de los cuales es abierto en H y embebido en M .*

Demostración. Sea H una variedad integral de la distribución \mathcal{D}^k . Por definición, H es una subvariedad de M de dimensión k . Por tanto, existe una inmersión inyectiva

$$h : N \longrightarrow M,$$

donde N es una variedad de dimensión k y $H = \text{Im}(h)$.

Dado que \mathcal{D}^k es involutiva, la versión local del teorema de Frobenius garantiza que es completamente integrable. Luego para todo $p \in H$ existe una carta plana (U, x) centrada en p . Queremos analizar la estructura de la intersección $H \cap U$.

La topología inducida en H por la aplicación h está definida como la más fina que hace continua a h . En particular, todo conjunto que es abierto en la topología heredada también lo es en esta topología. Por tanto, $H \cap U$ es abierto en H . Así, $H \cap U$ tiene estructura de variedad diferencial y, en particular, es localmente conexo y IIAN. Por el teorema 2.48 las componentes conexas de $H \cap U$ son abiertos de H y como todo recubrimiento por

abiertos admite un subrecubrimiento numerable (teorema 2.49), se tiene que $H \cap U$ es una unión disjunta de componentes conexas, cada una de las cuales es abierta en H . De modo que podemos escribir

$$H \cap U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,$$

donde cada C_n es una componente conexa abierta en H .

Ahora, debido a que la carta (U, x) es plana, cada componente conexa C de $H \cap U$ está contenida en una única sección S de U de la forma

$$S = \{p \in U : x^{k+1}(p) = a^{k+1}, \dots, x^n(p) = a^n\},$$

para algún $a = (a^{k+1}, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Esto se debe a que las formas dx^{k+1}, \dots, dx^n definen localmente la distribución \mathcal{D}^k . Como C es conexa, los valores de x^{k+1}, \dots, x^n son constantes en C , lo que implica que $C \subseteq S$.

Definimos ahora la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \pi : U \subset M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-k} \\ & & p \longmapsto (x^1, \dots, x^n) & \longmapsto & (x^{k+1}, \dots, x^n) \end{array}$$

de modo que $S = \pi^{-1}(a)$, con $a = (a^{k+1}, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. En cada punto $p \in \pi^{-1}(a)$, el diferencial $d_p\pi$ es la proyección sobre las últimas $n - k$ coordenadas, y por tanto es sobreyectivo. Por el teorema 2.47, se concluye que S es una subvariedad embebida de dimensión $k = \dim M - (n - k)$.

Finalmente, debemos comprobar que C está embebido en M . Consideramos $\hat{C} = b^{-1}(C)$, que es un abierto en N por ser C abierto en H y b ser continua. Por construcción $b(\hat{C}) = C \subset S$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{e} & M \\ \hat{b} \uparrow & & \nearrow b \\ \hat{C} \subset N & & \end{array}$$

con e el embebimiento entre S y M .

Como b es una inmersión inyectiva y se puede escribir como la composición $e \circ \hat{b}$, se tiene que \hat{b} es una inmersión inyectiva entre espacios de la misma dimensión. Por tanto, es un difeomorfismo local y, dado que \hat{C} es abierto en N , resulta ser un difeomorfismo sobre su imagen. Esto implica que la topología en C dada por b coincide con la topología

inducida por S . Finalmente, puesto que e es un embebimiento, la topología inducida en C por S coincide con la topología inducida en C por M . Se concluye entonces que C está embebido en M . \square

Teorema 4.2. *Toda variedad integral de una distribución involutiva es débilmente embebida.*

Demostración. Sea M una variedad diferenciable y sea $H \subset M$ una variedad integral de la distribución involutiva \mathcal{D}^k de rango k .

Supongamos que $H = \text{Im}(b)$, donde $b : N \rightarrow M$ es una inmersión inyectiva desde una variedad de dimensión k . Sea T una variedad auxiliar y sea $f : T \rightarrow M$ una aplicación diferenciable tal que $\text{Im}(f) \subset H$. Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{b} & M \\ \hat{f} \uparrow & & \nearrow f \\ T & & \end{array}$$

Por la proposición 2.16, basta probar que \hat{f} es continua.

Sea $p \in T$, queremos ver que \hat{f} es continua en un entorno de p . Sea $q = f(p) \in M$, como la distribución \mathcal{D}^k es involutiva, existe una carta plana (U, x) centrada en q . Tomamos además un entorno conexo B de p tal que $f(B) \subset U$. Dado que $f(B) \subset H \cap U$ y es conexo, entonces $f(B)$ está contenido en una única componente conexa de $H \cap U$. Por la proposición 4.1, cada componente conexa de $H \cap U$ está contenida en una única sección paralela S que es una subvariedad embebida en M . Ahora bien, como b^{-1} está bien definida sobre su imagen y $f(B) \subset S \subset H$, se tiene que $b^{-1}|_S$ es continua. Así, $\hat{f}|_B = b^{-1} \circ f|_B$ es continua en B , lo que prueba que \hat{f} es continua en p . Se concluye entonces que \hat{f} es continua, luego diferenciable, y H es débilmente embebida en M . \square

Ejemplo 4.3. Retomamos ahora el ejemplo 2.20. Recordemos que, dados el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^2$ y α un número irracional, consideramos la curva c definida por la imagen de la aplicación $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t}).$$

Quedó pendiente ver en el capítulo 2 que c es una subvariedad débilmente embebida en \mathbb{T}^2 .

Para ello, comenzamos definiendo la aplicación

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) \end{aligned}$$

Nótese que F es una extensión de γ y es sencillo ver que es un difeomorfismo local en \mathbb{R}^2 y global sobre todo cuadrado abierto de lado 2π .

Consideramos sobre este cuadrado las rectas con pendiente irracional α , dadas por

$$r_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \alpha x + b, b \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando el vector $v_\alpha = (1, \alpha)$ tangente a estas rectas, su imagen por la diferencial $dF_p(v_\alpha)$ define en cada punto $q = F(p)$ un vector tangente en \mathbb{T}^2 . De esta manera, hemos definido un campo de vectores que generan una distribución \mathcal{D}^1 en \mathbb{T}^2 .

Consideramos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y - \alpha x), \end{aligned}$$

que transforma las rectas de pendiente α en rectas horizontales. La composición $G^{-1} \circ F^{-1}$ define entonces una carta plana para \mathcal{D}^1 .

Tenemos, entonces, que \mathcal{D}^1 es completamente integrable, luego involutiva. Como por construcción c es variedad integral de \mathcal{D}^1 , por el teorema 4.2 se concluye que c es débilmente embebida.

Además, dado que $F(x, y) = F(x + m, y + n)$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$F^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \alpha x + (m - \alpha n), m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por otro lado, es bien conocido que el conjunto $\{m - \alpha n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en \mathbb{R} cuando α es irracional. Esto implica que las rectas $F^{-1}(c)$ están densamente distribuidas a lo largo del plano. Como la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es continua y sobreyectiva, la imagen de un subconjunto denso bajo F es también densa en \mathbb{T}^2 . Por tanto, c es densa en \mathbb{T}^2 .

Además, si consideramos otro número irracional β que no pueda expresarse como combinación racional de α , es decir, que β no pertenezca al conjunto $\{m + \alpha n : m, n \in \mathbb{Q}\}$, entonces, las curvas

$$c_\alpha(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}) \quad \text{y} \quad c_\beta(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \beta t})$$

son disjuntas y ambas densas en \mathbb{T}^2 .

De esta forma, al considerar todas las curvas definidas por números irracionales que no estén relacionados racionalmente entre sí, obtenemos una descomposición del toro en curvas densas mutuamente disjuntas. Esta descomposición se conoce como una foliación del toro. Formalizamos este concepto en la siguiente definición.

Observación. Naturalmente, existen descomposiciones mucho más simples del toro, como la que se obtiene en el ejemplo anterior al considerar α un número racional. En ese caso, \mathbb{T}^2 se descompone en circunferencias embebidas en \mathbb{T}^2 . Sin embargo, hemos considerado con detalle el ejemplo 4.3 porque permite mostrar todas las dificultades técnicas y conceptuales que conllevan los conceptos de distribución, foliación y variedad integral. En particular, la estructura local del ejemplo 4.3 es coherente con la dada en la proposición 4.1.

Definición 4.4. Sea M una variedad de dimensión n . Una *foliación* de dimensión k sobre M es una colección \mathcal{F} de subvariedades de M de dimensión k no vacías tales que

- (i) cada subvariedad de \mathcal{F} es conexa;
- (ii) las subvariedades de \mathcal{F} son disjuntas entre sí;
- (iii) la unión de todas las subvariedades en \mathcal{F} es igual a M ;
- (iv) para todo $p \in M$ existe una carta (U, φ) , llamada *carta plana* para la foliación, tal que $\varphi(U)$ es un cubo de \mathbb{R}^n y para toda $F \in \mathcal{F}$, la intersección $F \cap U$ es, o bien el conjunto vacío, o bien una cantidad numerable de conjuntos del tipo

$$\{x^{k+1} = a^{k+1}, \dots, x^n = a^n\}.$$

A cada subvariedad $F \in \mathcal{F}$ se le llama una *hoja de la foliación*.

Ejemplo 4.5. Sea $f : S \rightarrow M$ una submersión, donde $d = \dim S$ y $n = \dim M$. Por el teorema 2.47, para cada $q \in M$, el conjunto de nivel $f^{-1}(q)$ es una subvariedad embebida de S de dimensión $k = d - n$. Además, localmente estas subvariedades se disponen como copias paralelas de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^d . Por tanto, las componentes conexas de los conjuntos de nivel no vacíos de f son las hojas de una foliación \mathcal{F} en S de dimensión k . Nótese además que, localmente, toda foliación proviene de una submersión, por la propiedad 4 de la definición 4.4.

Proposición 4.6. Sea \mathcal{F} una foliación en una variedad diferenciable M . La colección de espacios tangentes a las hojas de \mathcal{F} forma una distribución involutiva en M .

Sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ una foliación de rango k sobre M . Definimos una distribución

$$\mathcal{D}^k = \bigcup_{p \in M} \mathcal{D}_p^k,$$

con $\mathcal{D}_p^k = T_p F_\alpha$, siendo F_α la única hoja que contiene a p .

Dado $p \in M$, existe una carta (U, φ) centrada en p que es plana para la foliación \mathcal{F} . Con esta carta, la distribución \mathcal{D}_p^k está generada por los campos

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Luego (U, φ) es una carta plana para la distribución \mathcal{D}^k y por tanto, \mathcal{D}^k es completamente integrable, lo que implica que es involutiva.

Lema 4.7. *Sea H una subvariedad débilmente embebida en M . Entonces H tiene una única estructura topológica y diferenciable con respecto a la cual es una subvariedad débilmente embebida.*

Demostración. Supongamos que existen dos inmersiones inyectivas

$$b : N \rightarrow M \quad \text{y} \quad b' : N' \rightarrow M$$

tales que $H = \text{Im}(b) = \text{Im}(b')$, y ambas hacen de H una subvariedad débilmente embebida en M .

Tenemos entonces los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{b} & M \\ \hat{b}' \uparrow & & \nearrow b' \\ N' & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} N' & \xrightarrow{b'} & M \\ \hat{b} \uparrow & & \nearrow b \\ N & & \end{array}$$

con \hat{b} y \hat{b}' inmersiones inyectivas únicas.

Dado que H es débilmente embebida, las aplicaciones \hat{b} y \hat{b}' son necesariamente continuas y diferenciables. Además, como son funciones inversas entre sí, se tiene que N y N' son variedades difeomorfas y ambas inmersiones inducen la misma estructura diferenciable sobre H . \square

A continuación, se presenta un lema técnico que nos permitirá demostrar la versión global del teorema de Frobenius. Para la demostración se ha seguido la que aparece en [Jol13][Theorem 19.21], que es similar a la de [Jel09][Theorem 11.25]. Otro enfoque con una demostración alternativa se puede encontrar en [CCoo][Corollary 1.3.9].

Lema 4.8. *Sea \mathcal{D}^k una distribución involutiva en M , y sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de variedades integrales conexas de \mathcal{D}^k con un punto en común. Entonces*

$$N = \bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha$$

tiene una única estructura diferenciable que la hace variedad integral conexas de \mathcal{D}^k .

Demostración. La idea de la demostración es construir una topología y una estructura diferenciable que hagan de N una variedad integral de \mathcal{D}^k .

El primer paso es probar que $N_\alpha \cap N_\beta$ es abierto en N_α y en N_β para todo $\alpha, \beta \in A$. Sea $q \in N_\alpha \cap N_\beta$ un punto cualquiera, consideramos una carta plana (W, x) para \mathcal{D}^k , con W un entorno de q . Sean C_α, C_β las componentes conexas de $N_\alpha \cap W$ y $N_\beta \cap W$, respectivamente, que contienen a q . Por la proposición 4.1, C_α y C_β son subconjuntos abiertos de una única sección con la topología heredada, y puesto que ambas contienen a q , están en la misma sección S . Por lo tanto, $C_\alpha \cap C_\beta$ es abierto en S y también en N_α y N_β , así que q tiene un entorno en N_α y un entorno en N_β contenidos en $N_\alpha \cap N_\beta$.

Definimos entonces la topología en N como

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq N : U \cap N_\alpha \text{ es abierto en } N_\alpha \text{ para todo } \alpha \in A\}.$$

Con esta topología, N es localmente euclídea de dimensión k . En efecto, sea $p \in N$, por construcción, existe un índice α tal que $p \in N_\alpha$. Como N_α es una variedad de dimensión k , existe una carta local (U, x) de N_α centrada en p . Dado que N_α es abierto en N , y U es abierto en N_α , se sigue que U también es abierto en N . Por lo tanto, (U, x) es una carta local de N en p .

Por otro lado, sea $V \subseteq M$ un abierto. Para cada $\alpha \in A$, $V \cap N_\alpha$ es abierto en N_α , ya que la topología de N_α es más fina que la heredada de M , en la cual $V \cap N_\alpha$ es abierto. Luego, por la definición de la topología en N , el conjunto $V \cap N$ es abierto en N . Esto implica que la aplicación $h : N \rightarrow M$ es continua.

Ahora vemos que N es Hausdorff. Para ello, tomamos dos puntos distintos $q, q' \in N$ y consideramos dos subconjuntos abiertos disjuntos $U, U' \subseteq M$ que contienen a q y q' , respectivamente. Como la aplicación h es continua, $N \cap U$ y $N \cap U'$ son subconjuntos abiertos disjuntos de N que contienen a q y q' .

A continuación, probamos que N es IIAN. Vamos a considerar el conjunto numerable $\{(W_i, \phi^i)\}$ de cartas planas para \mathcal{D}^k que cubre M . Basta probar que, para todo i , $N \cap W_i$ está contenido en una unión numerable de secciones, ya que, como cualquier subconjunto abierto de una única sección es IIAN, porque la sección lo es, entonces N puede expresarse como una unión de subconjuntos numerables, cada uno de los cuales es IIAN y abierto en N .

Sea p el punto en común de todos los N_α . Diremos que una sección S de algún W_k es *accesible desde p* si existe una secuencia finita de índices i_1, \dots, i_m y para cada i_j una sección $S_{i_j} \subseteq W_{i_j}$ tal que $p \in S_{i_1}$, $S_{i_m} = S$, y $S_{i_j} \cap S_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ para cada $j = 1, \dots, m-1$.

Sea W_k una carta plana, consideramos un punto $q \in N \cap W_k$ y $S \subseteq W_k$ una sección que contiene a q . Como q está contenido en una de las variedades integrales N_α y p también

está en N_α , existe una aplicación $\gamma : [0, 1] \rightarrow N_\alpha$ que conecta p y q . Además, dado que $\gamma([0, 1])$ es compacto, podemos cubrir la imagen de γ con un número finito de cartas planas W_{i_j} , para $j = 1, \dots, m$, de manera que

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq W_{i_j},$$

para ciertos puntos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$. Observamos ahora que, para cada j , la imagen $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ es conexa, por ser la imagen de un intervalo por una aplicación continua, y por tanto está contenida en una única componente conexa de $W_{i_j} \cap N_\alpha$, luego en una única hoja $S_{i_j} \subseteq W_{i_j}$. Además, para cada $j = 1, \dots, m-1$, el punto intermedio $\gamma(t_j)$ pertenece tanto a $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ como a $\gamma([t_j, t_{j+1}])$, por lo que pertenece a la intersección $S_{i_j} \cap S_{i_{j+1}}$. Así, se ha construido una cadena de secciones S_{i_1}, \dots, S_{i_m} , lo que prueba que S es accesible desde p .

Esto muestra que toda sección de algún W_k que contenga un punto de N es accesible desde p . Para completar la prueba, vamos a probar que desde p solo se puede acceder a una cantidad numerable de secciones.

Para ello, es suficiente ver que cada sección S_{i_j} interseca una cantidad numerable de otras secciones, es decir, la elección de $S_{i_{j+1}}$ está restringida a un conjunto numerable. En efecto, dado que cada sección S_{i_j} es en sí misma una variedad integral, por la proposición 4.1 interseca, a lo sumo, una cantidad numerable de secciones de $W_{i_{j+1}}$.

Para construir una estructura diferenciable en N , definimos el atlas que consiste en todas las cartas de la forma $(S \cap N, \phi)$, donde S es una sección de alguna carta plana, y $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ es la función cuya representación coordenada en la carta plana es la proyección sobre las primeras k coordenadas. Es decir,

$$\phi(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k).$$

Como cualquier sección es una subvariedad embebida, su estructura diferenciable está unívocamente determinada, y así cuando dos secciones S, S' se solapan, la función de transición $\phi' \circ \phi^{-1}$ es diferenciable.

Por otro lado, la aplicación $h : N \rightarrow M$ es una inmersión diferenciable. En efecto, dado que cada sección $S \subseteq M$ es una subvariedad embebida, también lo es su intersección con N . Como N está cubierto localmente por estas intersecciones, h es una inmersión. En cada carta $(S \cap N, \phi)$, el espacio tangente en cada punto coincide con \mathcal{D}^k por ser S variedad integral de la distribución. Por definición de la estructura diferenciable de N , se concluye que en cada punto $q \in N$, $T_q N = \mathcal{D}_q^k$.

Finalmente, como por el teorema 4.2, toda variedad integral es débilmente embebida, se concluye por 4.7 que la topología y la estructura diferenciable definidas están unívocamente determinadas. \square

Teorema 4.9 (Teorema Global de Frobenius). *Sea \mathcal{D}^k una distribución involutiva en una variedad diferenciable M . La colección de todas las variedades integrales conexas maximales de \mathcal{D}^k forma una foliación de M .*

Demostración. El primer paso de la demostración es construir las hojas de la foliación. Para cada punto $p \in M$, definimos F_p como la unión de todas las variedades integrales conexas de \mathcal{D}^k que contienen a p . Aplicando el lema 4.8, F_p es una variedad integral conexas de \mathcal{D}^k que contiene a p , y, por construcción, es maximal. Sean ahora F_p y $F_{p'}$ dos hojas con intersección no vacía. Nuevamente por el lema 4.8, la unión $F_p \cup F_{p'}$ es también una variedad integral conexas de \mathcal{D}^k , pero, por maximalidad, eso implica que $F_p = F_{p'}$. Por lo tanto, la colección $\{F_p\}_{p \in M}$ es una partición de M en variedades integrales conexas de \mathcal{D}^k .

Para terminar, veamos que se verifica la condición (iv) de la definición 4.4. Sea (U, φ) una carta plana para \mathcal{D}^k , vamos a ver que $F_p \cap U$ —en el caso de ser un conjunto no vacío— es precisamente una unión numerable de secciones. Por la proposición 4.1, la intersección $F_p \cap U$ está contenida en una unión numerable de subconjuntos abiertos de secciones. Sea S una sección de U . Supongamos que $F_p \cap S \neq \emptyset$ y distinta de S . Entonces, $F_p \cup S$ es una variedad integral conexas que contiene propiamente a F_p , lo cual contradice la maximalidad de F_p . Por lo tanto, si una sección intersecta a F_p , debe estar completamente contenida en F_p . Se concluye entonces que $F_p \cap U$ es una unión disjunta y numerable de secciones. De modo que la colección $\{F_p : p \in M\}$ define la foliación buscada. \square

Observación. Podemos entonces dar una definición alternativa de distribución integrable en términos de foliaciones. Se dice que una distribución \mathcal{D}^k en M es *integrable* si existe una foliación \mathcal{F} en M tal que $\mathcal{D}^k = T\mathcal{F}$. Nótese que cada hoja de la foliación es una subvariedad integral de \mathcal{D}^k .

5

Aplicaciones del teorema de Frobenius

El teorema de Frobenius es una herramienta fundamental en geometría diferencial, y tiene importantes implicaciones tanto en el desarrollo teórico de las matemáticas como en aplicaciones concretas en distintas áreas. En esta sección, exploraremos dos ejemplos que ilustran su utilidad. En primer lugar, veremos cómo el teorema permite caracterizar la existencia de factores integrantes para formas. En segundo lugar, demostraremos el teorema fundamental de las superficies.

5.1. Factor integrante

Definición 5.1. Dada una 1-forma no nula ω , una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que no se anula en ningún punto se dice que es un *factor integrante* para ω si $f\omega$ cumple que $d(f\omega) = 0$.

Teorema 5.2. Sean ω una 1-forma en la variedad M y \mathcal{D}^{n-1} la distribución definida por ω . Se verifica:

1. Si existe un factor integrante para ω , entonces $d\omega \wedge \omega = 0$. En este caso, la distribución \mathcal{D}^{n-1} es integrable.
2. Si $d\omega \wedge \omega = 0$, entonces existe un factor integrante para ω definido en un entorno de cada punto de M .
3. Localmente, las variedades integrales de la distribución \mathcal{D}^{n-1} son las superficies de nivel de la función g determinada a partir del factor integrante f mediante las ecuaciones

$$d(f\omega) = 0, \quad f\omega = dg.$$

Demostración. La ecuación $d(f\omega) = 0$ implica $df \wedge \omega + fd\omega = 0$. Multiplicando esta ecuación por la 1-forma ω se obtiene que $fd\omega \wedge \omega = 0$. Dado que f es no nula, concluimos que $d\omega \wedge \omega = 0$ es una condición necesaria para la existencia de un factor integrante. Por el teorema de Frobenius, se concluye que \mathcal{D}^{n-1} es una distribución integrable.

Por otro lado, si $d\omega \wedge \omega = 0$, por la condición 4 del teorema de Frobenius 3.12, se tiene que $d\omega = \theta \wedge \omega$. Por el teorema 3.11, ω localmente se puede escribir como $f^{-1}dg$, de modo que $f\omega = dg$ lo que implica que $d(f\omega) = 0$. Entonces, todo vector v en la distribución anula también dg pues

$$dg(v) = f\omega(v) = 0.$$

Esto implica que las variedades integrales de la distribución están contenidas en las superficies de nivel de g . Como $dg \neq 0$, las superficies $g = \text{constante}$ son de dimensión $n - 1$, igual que la distribución, así que localmente las variedades integrales de la distribución son las superficies de nivel de g . \square

Corolario 5.3. Toda 1-forma que no se anula en ningún punto de una variedad de dimensión 2, localmente tiene un factor integrante.

Demostración. La demostración se sigue directamente del teorema anterior, ya que, para una variedad de dimensión $n = 2$, se cumple por razones algebraicas que $d\omega \wedge \omega = 0$. \square

Ejemplo 5.4. Consideremos en \mathbb{R}^2 la ecuación diferencial

$$P(t, x) + Q(t, x)x'(t) = 0.$$

Supongamos que P y Q no se anulan simultáneamente en cierto entorno U de un punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Podemos definir la 1-forma

$$\omega = Pdt + Qdx,$$

que admite un factor integrante $f(t, x)$ por el corolario 5.3. La ecuación diferencial equivalente es

$$(fP)(t, x) + (fQ)(t, x) x'(t) = 0,$$

la cual se denomina ecuación diferencial total.

Sea $dg = f\omega$. Entonces, la ecuación $f\omega = 0$ puede escribirse como $dg = 0$, y, por tanto, las curvas solución están determinadas por la ecuación

$$g(t, x) = \text{constante}.$$

Hemos demostrado así que es posible resolver la ecuación diferencial original utilizando el método descrito.

5.2. Teorema fundamental de la teoría local de superficies

Veamos ahora otra aplicación del teorema de Frobenius: el teorema fundamental de existencia local de superficies.

Empezamos recordando el concepto de elemento de superficie e introduciendo las nociones de primera y segunda forma fundamental de una superficie, que describen, respectivamente, la métrica inducida en una superficie y su curvatura intrínseca; véase, e.g. [Küh15, Chapter 3].

Definición 5.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Un *elemento de superficie parametrizado* es una inmersión inyectiva

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

A φ se le denomina también *parametrización*, los elementos de U se llaman parámetros y los denotamos u y sus imágenes bajo φ se denominan puntos.

Definimos el espacio tangente a $\varphi(U)$ en $p = \varphi(u) \in \varphi(U)$ y lo denotamos $T_u\varphi$, como

$$T_u\varphi = d\varphi_u(T_uU) \subseteq T_{\varphi(u)}\mathbb{R}^3.$$

El producto euclídeo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^3 induce de manera natural un producto escalar en cada espacio tangente $T_p\mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^3$; esto es, si $v, w \in T_p\mathbb{R}^3$, entonces $\langle (p, v), (p, w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

Definición 5.6. La *primera forma fundamental* I de un elemento de superficie φ es la restricción de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a cada plano tangente $T_u\varphi$; esto es,

$$I(X, Y) = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in T_u\varphi.$$

En coordenadas, $\varphi(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2))$, con (u^1, u^2) coordenadas en U . Como φ es una inmersión, los campos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u^2},$$

que, a partir de ahora, denotaremos φ_{u^1} y φ_{u^2} respectivamente, son linealmente independientes en cada punto de $\varphi(U)$ y, por tanto, en cada punto $p = \varphi(u)$ forman una base de $T_u\varphi$. La matriz de la primera forma fundamental respecto de la base $(\varphi_{u^1}, \varphi_{u^2})$ es

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{con } g_{ij} = \langle \varphi_{u^i}, \varphi_{u^j} \rangle.$$

Definición 5.7. Dado un elemento de superficie $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, se define el *campo normal* por la fórmula

$$N = \frac{\varphi_{u^1} \times \varphi_{u^2}}{\|\varphi_{u^1} \times \varphi_{u^2}\|}.$$

Cuando el elemento de superficie se sobreentienda, escribiremos N_p , con $p = \varphi(u)$.

Definición 5.8. La *segunda forma fundamental* de un elemento de superficie φ , con aplicación de Weingarten $L = -DN \circ (D\varphi)^{-1}$, es la forma bilineal simétrica dada por

$$II(X, Y) = \langle LX, Y \rangle$$

para X, Y vectores tangentes a $\varphi(U)$.

La matriz de la segunda forma fundamental respecto de la base $(\varphi_{u^1}, \varphi_{u^2})$ es

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{con } b_{ij} = \langle \varphi_{u^i u^j}, N \rangle.$$

Proposición 5.9. Para todo elemento de superficie φ de clase C^2 , se cumplen las ecuaciones

(i) *La fórmula de Gauss*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^1 \partial u^1} = \Gamma_{11}^1 \varphi_{u^1} + \Gamma_{11}^2 \varphi_{u^2} + b_{11} N, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^1 \partial u^2} = \Gamma_{12}^1 \varphi_{u^1} + \Gamma_{12}^2 \varphi_{u^2} + b_{12} N, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2 \partial u^2} = \Gamma_{22}^1 \varphi_{u^1} + \Gamma_{22}^2 \varphi_{u^2} + b_{22} N. \end{cases} \quad (5.1)$$

(ii) *La ecuación de Weingarten*

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial u^1} = -(b_{11} g^{11} + b_{12} g^{21}) \varphi_{u^1} - (b_{11} g^{12} + b_{12} g^{22}) \varphi_{u^2}, \\ \frac{\partial N}{\partial u^2} = -(b_{21} g^{11} + b_{22} g^{21}) \varphi_{u^1} - (b_{21} g^{12} + b_{22} g^{22}) \varphi_{u^2}, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $(g^{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ es la matriz inversa de $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Los coeficientes Γ_{ij}^k en (5.1) se denominan *símbolos de Christoffel*.

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [Küh15, Corollary 4.8].

Proposición 5.10. Dado un elemento de superficie φ de clase C^3 , con coeficientes de la primera (resp. segunda) forma fundamental dados por (g_{ij}) (resp. (h_{ij})) y símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k , las condiciones de integrabilidad para las ecuaciones de Gauss y Weingarten 5.9 vienen dadas por

(i) La ecuación de Gauss

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik}^s + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s) = \sum_{m=1}^2 (h_{ij} h_{km} - h_{ik} h_{jm}) g^{ms}, \quad i, j, k, s = 1, 2.$$

(ii) La ecuación de Codazzi-Mainardi

$$\frac{\partial}{\partial u^k} h_{ij} - \frac{\partial}{\partial u^j} h_{ik} + \sum_{r=1}^2 (\Gamma_{ij}^r h_{rk} - \Gamma_{ik}^r h_{rj}) = 0, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Demostración. Dado que φ es de clase C^3 , se deben satisfacer las condiciones

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^i \partial u^k \partial u^j}, \quad i, j, k = 1, 2; \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 N}{\partial u^j \partial u^i}, \quad i, j = 1, 2. \quad (5.4)$$

Sustituyendo en (5.3), las expresiones de las derivadas de φ y N dadas por las fórmulas de Gauss y Weingarten en la proposición 5.9, obtenemos las condiciones de integrabilidad buscadas. Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u^k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^k} \\ &= \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} \varphi_{u^s} - \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial u^j} \varphi_{u^s} + \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^k \partial u^r} - \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ik}^r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^j \partial u^r} \\ &\quad + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} N - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} N + h_{ij} \frac{\partial N}{\partial u^k} - h_{ik} \frac{\partial N}{\partial u^j} \\ &= \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial u^j} \right) \varphi_{u^s} + \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ij}^r \left(\sum_{s=1}^2 \Gamma_{kr}^s \varphi_{u^s} + h_{kr} N \right) \\ &\quad - \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ik}^r \left(\sum_{s=1}^2 \Gamma_{jr}^s \varphi_{u^s} + h_{jr} N \right) + \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} \right) N \\ &\quad - h_{ij} \sum_{m=1}^2 \sum_{s=1}^2 h_{km} g^{ms} \varphi_{u^s} + h_{ik} \sum_{m=1}^2 \sum_{s=1}^2 h_{jm} g^{ms} \varphi_{u^s}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi se obtienen de igualar a cero la parte tangencial y normal, respectivamente, de la expresión anterior.

Nótese, además, que la condición de integrabilidad análoga para la ecuación de Weingarten (5.2) no aporta nuevas ecuaciones, sino que es simplemente una reformulación de la ecuación de Codazzi-Mainardi. \square

Observación. Obsérvese que, a partir de la ecuación de Gauss, se pueden calcular los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental. Por tanto, se tiene la siguiente propiedad fundamental: todos los conceptos geométricos que se expresan en términos de los símbolos de Christoffel son invariantes por isometrías.

Lema 5.11. *Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un elemento de superficie, sea $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido (esto es, transformación ortogonal compuesta con una traslación) y sea el elemento de superficie $\tilde{\varphi} = B \circ \varphi$. Entonces, los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de φ y de $\tilde{\varphi}$ coinciden, es decir,*

$$g_{ij} = \tilde{g}_{ij}, \quad h_{ij} = \tilde{h}_{ij}.$$

Demostración. Como B es un movimiento rígido, se tiene que $B = T \circ \rho$, donde ρ es una transformación ortogonal con matriz $A \in O(3)$ en la base canónica de \mathbb{R}^3 y T es una traslación de vector $b \in \mathbb{R}^3$, de manera que $B(x) = Ax + b$, para cada $x \in \mathbb{R}^3$. Teniendo en cuenta $\tilde{\varphi} = B \circ \varphi$, tenemos $\tilde{\varphi}_{u^i} = A\varphi_{u^i}$. Ahora, como $A \in O(3)$, se tiene

$$g_{ij} = \langle \varphi_{u^i}, \varphi_{u^j} \rangle = \langle A\varphi_{u^i}, A\varphi_{u^j} \rangle = \langle \tilde{\varphi}_{u^i}, \tilde{\varphi}_{u^j} \rangle = \tilde{g}_{ij},$$

Análogamente, se prueba que $h_{ij} = \tilde{h}_{ij}$. \square

En la siguiente demostración hemos combinado elementos de [Küh15][Theorem 4.24] y [DoCi16][Theorem (Bonnet)].

Teorema 5.12 (Teorema fundamental de superficies). *Sean $g_{11}, g_{12}, g_{22}, h_{11}, h_{12}, h_{22}$ funciones de clase C^1 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con $g_{11} > 0, g_{22} > 0$ y $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ en todo punto. Supongamos que satisfacen formalmente las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi.*

Entonces, para todo punto $q \in U$ existe un entorno abierto $V \subset U$ y un elemento de superficie $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que las funciones g_{11}, g_{12}, g_{22} (resp. h_{11}, h_{12}, h_{22}) son los coeficientes de la primera (resp. segunda) forma fundamental.

Además, si V es conexo y $\tilde{\varphi} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otro elemento de superficie satisfaciendo las mismas condiciones, entonces existe un movimiento rígido $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\tilde{\varphi} = B \circ \varphi$.

Demostración. La idea de la demostración es obtener una familia de triedros $\{X_1, X_2, N\}$, dependiente de (u^1, u^2) , que satisfaga el sistema de ecuaciones en derivadas parciales dado por (5.1) y (5.2), que se puede escribir como un sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. En efecto,

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 + b_{11} N, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u^1} = \Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2 + b_{12} N, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2 + b_{22} N, \\ \frac{\partial N}{\partial u^1} = a_{11} X_1 + a_{12} X_2, \\ \frac{\partial N}{\partial u^2} = a_{21} X_1 + a_{22} X_2, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde los coeficientes $\Gamma_{ij}^k, a_{ij}, i, k, k = 1, 2$, se han obtenido a partir de las funciones $g_{11}, g_{12}, g_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}$. Escribiendo

$$y = (X_1, X_2, N)$$

y, dadas condiciones iniciales $y(u_0^1, u_0^2) = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ que suponemos satisfacen

$$\begin{cases} \xi_0^2 = g_{11}(u_0^1, u_0^2), \\ \eta_0^2 = g_{22}(u_0^1, u_0^2), \\ \langle \xi_0, \eta_0 \rangle = g_{12}(u_0^1, u_0^2), \\ \zeta_0^2 = 1, \\ \langle \xi_0, \zeta_0 \rangle = \langle \zeta_0, \eta_0 \rangle = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

el sistema (5.5), junto con las condiciones iniciales dadas, se puede ver como el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u^j} = F_j(u^1, u^2)y(u^1, u^2), \quad j = 1, 2; \\ y(u_0^1, u_0^2) = y_0, \end{cases}$$

con $y_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y con

$$F_j = \begin{pmatrix} \Gamma_{j1}^1 & \Gamma_{j1}^2 & b_{j1} \\ \Gamma_{j2}^1 & \Gamma_{j2}^2 & b_{j2} \\ a_{j1} & a_{j2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Las condiciones de integrabilidad del sistema (5.5) son equivalentes a las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi —ecuaciones (i) y (ii) en la proposición 5.10— que por hipótesis se satisfacen. Por tanto, el teorema de Frobenius 3.4 garantiza la existencia de una única solución X_1, X_2, N definida en un entorno de (u_0^1, u_0^2) y satisfaciendo las condiciones iniciales dadas.

Probamos primero que la solución $\{X_1, X_2, N\}$ del sistema (5.5) satisface

$$\begin{cases} \langle X_1, X_1 \rangle = g_{11}, & \langle X_1, X_2 \rangle = g_{12}, & \langle X_2, X_2 \rangle = g_{22}, \\ \langle N, N \rangle = 1, & \langle X_1, N \rangle = \langle X_2, N \rangle = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

en el entorno en el que la solución está definida.

En el punto (u_0^1, u_0^2) las propiedades anteriores se satisfacen por la condición inicial. Para ver que las tres ecuaciones anteriores también se cumplen en un entorno de (u_0^1, u_0^2) , tomamos la derivada de las funciones $X_1^2, X_2^2, \langle X_1, X_2 \rangle, N^2, \langle X_1, N \rangle, \langle X_2, N \rangle$ y, utilizando (5.5), expresamos dichas derivadas como función de las mismas funciones, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} \langle N, N \rangle &= 2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u^i}, N \right\rangle = 2 \sum_{l=1}^2 a_{il} \langle X_l, N \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial u^i} \langle N, X_j \rangle &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial u^i}, X_j \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial X_j}{\partial u^i} \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^2 a_{il} \langle X_l, X_j \rangle + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \langle N, X_k \rangle + b_{ij} \langle N, N \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial u^k} \langle X_i, X_j \rangle &= \sum_{r=1}^2 \Gamma_{ik}^r \langle X_r, X_j \rangle + \sum_{s=1}^2 \Gamma_{jk}^s \langle X_i, X_s \rangle + b_{ik} \langle N, X_j \rangle + b_{jk} \langle X_i, N \rangle, \end{aligned}$$

con $i, j, k = 1, 2$. Teniendo en cuenta las expresiones de Γ_{ij}^k y de a_{ij} en función de las funciones g_{ij} y b_{ij} , se tiene

$$\Gamma_{ij}^k = g^{bk} \left(\frac{\partial g_{ib}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{bj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^b} \right), \quad a_{ik} = -b_{ij} g^{jk}.$$

Es inmediato, haciendo cálculos rutinarios, comprobar que las funciones $\langle X_1, X_1 \rangle = g_{11}, \langle X_1, X_2 \rangle = g_{12}, \langle X_2, X_2 \rangle = g_{22}, \langle N, N \rangle = 1$, y $\langle X_1, N \rangle = \langle X_2, N \rangle = 0$ verifican las ecuaciones diferenciales anteriores con las condiciones iniciales (5.6). El teorema de Frobenius garantiza la existencia y unicidad de solución para el sistema, por lo que se concluye que las igualdades (5.7) se verifican en todo el entorno V .

Con los campos X_1 y X_2 obtenidos, consideramos un nuevo sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w^j} = X_j, \quad j = 1, 2.$$

Las condiciones de integrabilidad para el sistema anterior son

$$\frac{\partial X_i}{\partial u^j} = \frac{\partial X_j}{\partial u^i},$$

que se satisfacen debido a las simetrías

$$b_{ij} = b_{ji} \quad \text{y} \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Nuevamente, el teorema de Frobenius garantiza la existencia y unicidad de solución φ con la condición inicial $\varphi(u_0^1, u_0^2) = p_0$.

Basta ahora demostrar que g_{ij} y b_{ij} son efectivamente los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de φ . Es inmediato que las funciones g_{ij} son los coeficientes de la primera forma fundamental, pues

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \right\rangle.$$

Además, N es el vector normal unitario de φ pues cumple

$$0 = \langle N, X_i \rangle = \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \right\rangle,$$

de donde, derivando, obtenemos

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u^k} + b_{ij} N, N \right\rangle = b_{ij}.$$

Finalmente, veamos que si V es conexo, entonces cualquier otro elemento de superficie $\tilde{\varphi}$ satisfaciendo las mismas condiciones coincide con φ salvo un movimiento rígido. Sea $\tilde{\varphi}$ otro elemento de superficie con $\tilde{g}_{11} = g_{11}, \tilde{g}_{12} = g_{12}, \tilde{g}_{22} = g_{22}, \tilde{b}_{11} = b_{11}, \tilde{b}_{12} = b_{12}$ y $\tilde{b}_{22} = b_{22}$. Como los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental son iguales, es posible hacer coincidir el triedro $\{\tilde{\varphi}_{u^1}(u_0^1, u_0^2), \tilde{\varphi}_{u^2}(u_0^1, u_0^2), \tilde{N}(u_0^1, u_0^2)\}$ con el triedro $\{\varphi_{u^1}(u_0^1, u_0^2), \varphi_{u^2}(u_0^1, u_0^2), N(u_0^1, u_0^2)\}$, mediante una transformación ortogonal y una traslación.

Ambos elementos de superficie, φ y $\tilde{\varphi}$, satisfacen el sistema (5.2) y además coinciden en el punto (u_0^1, u_0^2) . Por unicidad de soluciones, se tiene que

$$\varphi_{u^1} = \tilde{\varphi}_{u^1}, \quad \varphi_{u^2} = \tilde{\varphi}_{u^2}, \quad N = \tilde{N}, \quad (5.8)$$

en un entorno W de (u_0^1, u_0^2) . Nótese que W puede escribirse como

$$W = \{u \in V : \varphi_{u^i}(u) - \tilde{\varphi}_{u^i}(u) = 0, \quad i = 1, 2, \quad N(u) - \tilde{N}(u) = 0\},$$

que es cerrado por ser la preimagen de un conjunto cerrado por funciones continuas.

Dado que V es conexo, el conjunto W , que es no vacío, abierto y cerrado, debe coincidir con todo V . Por tanto, la igualdad (5.8) se cumple para todo $u \in V$.

De las dos primeras ecuaciones de (5.8) y el hecho de que V es conexo, se deduce que

$$\varphi(u^1, u^2) = \tilde{\varphi}(u^1, u^2) + C,$$

con $C \in \mathbb{R}^3$. Además, como $\varphi(u_0^1, u_0^2) = \tilde{\varphi}(u_0^1, u_0^2)$, se concluye que $C = 0$. □

Observación. La generalización del teorema fundamental de superficies a hipersuperficies en \mathbb{R}^{n+1} se obtiene de manera natural extendiendo las ecuaciones de compatibilidad (Gauss y Codazzi) al caso de mayor dimensión, así como adaptando el argumento de existencia y unicidad del elemento de superficie a este contexto más general. Para más detalles, véase [Küh15][Theorem 4.24].

Bibliografía

- [AF02] I. AGRICOLA, T. FRIEDRICH, *Global Analysis: Differential Forms in Analysis, Geometry and Physics*, American Mathematical Society, 2002.
- [CC00] A. CANDEL Y L. CONLON, *Foliations I*, American Mathematical Society, 2000.
- [Boo86] W. M. BOOTHBY, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2.^a edición, Academic Press, 1986.
- [CHM13] M. L. COLETTA, R. A. HICKS, and S. MOSKOW, The Frobenius integrability theorem and the blind-spot problem for motor vehicles, *SIAM J. Imaging Sci.*, **6**, 1367–1384 (2013).
- [DoCi6] M. P. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 2.^a edición, Dover Publications, Inc., 2016.
- [Dug78] J. DUGUNDJI, *Topology*, Prentice Hall, 1978.
- [GMM13] P. M. GADEA, J. MUÑOZ MASQUÉ, I. V. MYKYTYUK, *Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds*, 2.^a edición, Springer, 2013.
- [Haw13] T. HAWKINS, *The Mathematics of Frobenius in Context: A Journey Through 18th to 20th Century Mathematics*, Springer, 2013.
- [Jel09] J. M. LEE, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, 2009.
- [Jol13] J. M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2.^a edición, Springer, 2013.
- [Küh15] W. KÜHNEL, *Differential Geometry: Curves–Surfaces–Manifolds*, 3.^a edición, Student Mathematical Library, Vol. 77, American Mathematical Society, 2015.
- [Loj24] R. LOJA, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, 2024.
- [Mico8] P. W. MICHOR, *Topics in Differential Geometry*, American Mathematical Society, 2008.

- [Ramo7] F. RAMPAZZO, Frobenius-type theorems for Lipschitz distributions, *J. Differential Equations*, **243**, 270–300 (2007).
- [Spi99] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, 3.^a edición, Publish or Perish, 1999.
- [Tes12] G. TESCHL, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 140, American Mathematical Society, 2012.
- [War83] F. W. WARNER, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 94, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.

Índice alfabético

- antiderivación, 20
 - aplicación coordenada, 4
 - aplicación diferencial, 6
 - campo vectorial, 10
 - campo vectorial completo, 13
 - carta local, 4
 - carta plana, 33
 - corchete de Lie, 15
 - curva integral, 12
 - curva integral maximal, 12
 - derivación, 20
 - diferencial exterior, 20
 - distribución, 18
 - distribución completamente integrable, 33
 - distribución integrable, 19
 - elemento de superficie parametrizado, 63
 - embebimiento, 7
 - entorno coordenado, 4
 - espacio localmente euclídeo, 4
 - espacio tangente, 5
 - fibrado cotangente, 6
 - fibrado tangente, 5
 - fibrado vectorial, 5
 - flujo, 13
 - foliación, 55
 - hojas de la foliación, 55
 - forma diferencial, 19
 - formas independientes, 20
 - función diferenciable, 4
 - ideal diferencial, 22
 - imagen directa, 11
 - inmersión, 6
 - primera forma fundamental, 63
 - pullback, 21
 - pushforward, 11
 - segunda forma fundamental, 64
 - sistema coordenado, 4
 - sistema de Pfaff, 36
 - subfibrado vectorial, 5
 - submersión, 6
 - subvariedad, 7
 - subvariedad embebida, 7
 - subvariedad regularmente inmersa,
- 7
- variedad diferenciable, 4
 - variedad integral, 19



EPES

Escuela Politécnica
de Enseñanza Superior