



POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID



EPES
Escuela Politécnica
de Enseñanza Superior



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA DE ENSEÑANZA SUPERIOR (EPES)

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

Introducción a la topología algebraica desde una perspectiva categórica

Autor: Pablo José Lestau Torres

Dirigido por: Alberto Navarro Garmendia

Madrid, 5 de julio de 2025

Introducción a la topología algebraica desde una perspectiva categórica

Autor: Pablo José Lestau Torres

Dirigido por: Alberto Navarro Garmendia

Trabajo Fin de Grado, 5 de julio de 2025

Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)

Edificio C, Paseo Juan XXIII, II. Madrid

Si deseas citar este trabajo, la entrada completa en B_IB_TE_X es la siguiente:

```
@mastersthesis{citekey,  
title = {Introducción a la topología algebraica desde una perspectiva categórica},  
author = {Lestau Torres, Pablo y Navarro Garmendia, Alberto},  
school = {Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)},  
year = {2025},  
type = {Trabajo Fin de Grado}  
}
```

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons «Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional»](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Plantilla derivada de <https://github.com/blazaid/UPM-Report-Template>.



Agradecimientos

Desde que comencé la carrera de Matemáticas, siempre tuve claro que quería dedicar mi trabajo de fin de grado a un tema que me conectara con mi historia personal. Mi mayor inspiración ha sido mi abuelo, Miguel Torres Iglesias, catedrático de Álgebra en la Universidad de Zaragoza, cuya pasión por las matemáticas ha sido para mí un ejemplo constante. Esta dedicación tiene un valor simbólico: seguir, de algún modo, sus pasos y mantener su memoria presente a través del trabajo académico.

Desde el inicio, supe que quería elegir un tema que no solo me interesase intelectualmente, sino que también tuviera relación con lo que él enseñaba y valoraba. Por eso opté por la teoría de categorías, una rama profundamente vinculada con el álgebra y, al mismo tiempo, con proyecciones hacia otros ámbitos de las matemáticas que siempre me han fascinado. Es más, la estructura del primer capítulo es debida a él y a unas notas escritas a mano por su puño y letra, por tanto este trabajo de fin de grado es una forma de honrar su memoria.

Quiero expresar también mi profundo agradecimiento a mi tutor, Alberto Navarro Garmendia, no solo por su acompañamiento constante y paciente, sino por haberme propuesto un enfoque original y enriquecedor que ha guiado el desarrollo completo del trabajo. Su implicación, claridad y generosidad han sido claves.

De igual modo, agradezco al padre de Alberto, Juan Antonio Navarro, cuyas notas y libros —aunque abiertos al público— me han resultado de gran ayuda durante todo el proceso. Su trabajo ha sido una fuente valiosa de conocimiento. También quiero dar las gracias a Juan Sancho, cuyas notas personales sirvieron como base para algunos de los textos principales utilizados en el capítulo final.

A todos ellos, gracias por acompañarme, directa o indirectamente, en este viaje matemático y personal.

Resumen

El presente trabajo desarrolla una introducción a la teoría de categorías y muestra cómo este lenguaje permite reinterpretar y estructurar conceptos fundamentales de la topología algebraica desde una perspectiva más general y abstracta. Tras una primera parte dedicada a los fundamentos categóricos, se estudia el grupo fundamental de un espacio topológico y el teorema de Van Kampen desde este nuevo enfoque. Finalmente, se establece un paralelismo riguroso entre la teoría de Galois algebraica y la teoría de los espacios recubridores, culminando en la equivalencia categórica entre revestimientos de un espacio y G -conjuntos. El trabajo combina teoría, demostraciones completas, ejemplos elaborados por el autor y observaciones comparativas que subrayan la potencia unificadora de la teoría de categorías.

Palabras clave: Teoría de categorías; Topología algebraica; Grupo fundamental; Teorema de Van Kampen; Teoría de Galois; Espacios recubridores

Abstract

This work provides an introduction to category theory and shows how this language can be used to reinterpret and organize fundamental concepts in algebraic topology from a more general and abstract perspective. After a first chapter devoted to categorical foundations, we study the fundamental group of a topological space and Van Kampen's theorem using this new framework. Finally, we establish a rigorous parallel between algebraic Galois theory and the theory of covering spaces, culminating in the categorical equivalence between Galois coverings and G -sets. The work combines theoretical development, complete proofs, original examples, and comparative observations that highlight the unifying power of category theory.

Keywords: Category Theory; Algebraic Topology; Fundamental Group; Van Kampen's Theorem; Galois Theory; Covering Spaces

Índice general

o	Introducción	I
1	Teoría de Categorías	3
1.1	Definición y ejemplos de categorías	4
1.2	Morfismos y objetos especiales	11
1.3	Funtores y transformaciones naturales	20
1.4	Isomorfismo y equivalencia de categorías	32
1.5	Límites y colímites: primeras construcciones	39
2	Topología Algebraica	51
2.1	El grupo y grupoide fundamental	52
2.2	Homotopía de espacios topológicos	57
2.3	El Teorema de Van Kampen desde una perspectiva categórica	61
3	Teoría de Galois para revestimientos	67
3.1	El producto fibrado	68
3.2	Revestimientos: definición, grado y ejemplos	69
3.3	Producto fibrado de revestimientos	74
3.4	Morfismos entre revestimientos	75
3.5	Cocientes por la acción de un grupo	80
3.6	Revestimientos de Galois	82
3.7	Revestimiento universal	97
3.8	Ejemplos	102
A	Anexo de demostraciones	113
A.1	Demostraciones capítulo 1: Teoría de Categorías	113
A.2	Demostraciones capítulo 2: Topología Algebraica	116
A.3	Demostraciones capítulo 3: Teoría de Galois para revestimientos	117
B	Apéndice	123
B.1	Límites y colímites	123
B.2	Categorías de diagramas (Yoneda)	135
	Bibliografía	147
	Índice alfabético	149

Índice de figuras

2.1	Comparativa grupo fundamental y grupoide fundamental	54
2.2	Deformación del cilindro al círculo	58
2.3	Contracción del disco a un punto	58
2.4	Deformación del toro sólido al círculo	59
2.5	Representación de la imagen de la homotopía $H : I \times I \rightarrow X$	62
2.6	$S^1 \vee S^1$ con ambos generadores a y b uno en cada círculo	65
3.1	Recubrimiento de grado n	73
3.2	Recubrimiento de grado infinito	73

0

Introducción

Introducción general

Este trabajo tiene como objetivo explorar cómo el lenguaje de la teoría de categorías puede utilizarse para reinterpretar, estructurar y simplificar conceptos fundamentales de la topología algebraica, así como establecer un paralelismo preciso con la teoría clásica de Galois. El hilo conductor es, por tanto, una lectura categórica de diversas construcciones matemáticas, que permite no solo unificar diferentes áreas, sino también revelar nuevas formas de entender resultados conocidos.

El capítulo inicial introduce la teoría de categorías como marco teórico general. Se presentan los conceptos básicos —categorías, funtores, transformaciones naturales, límites, colímites, entre otros— y se construyen las herramientas necesarias para abordar desde esta perspectiva los temas que se desarrollan en los capítulos siguientes. La exposición se basa principalmente en [Toro8], pero ha sido completada con demostraciones, ejemplos y reformulaciones propias, incluyendo una selección de ideas tomadas de [Nav14] para facilitar la comprensión conceptual.

El segundo capítulo se centra en los fundamentos de la topología algebraica, pero desde una perspectiva categórica. En lugar de seguir una presentación clásica, se reinterpretan conceptos como el grupoide fundamental y el funtor π_1 dentro del marco categórico. Esta aproximación permite comprender de forma más estructurada la relación entre topología y álgebra. El capítulo culmina con una demostración alternativa del teorema de Van Kampen, cuya formulación —inspirada en [San24b]— permite una exposición más clara y accesible que en los tratamientos tradicionales. Aunque la demostración no es original, su integración dentro de este enfoque constituye uno de los puntos más valiosos del trabajo.

En el tercer capítulo, se desarrolla la teoría de revestimientos, abordada desde una perspectiva categórica y comparativa. A partir de la exposición no convencional de [San24], se reconstruye y completa la teoría, reinterpretando sus resultados en el lenguaje de las categorías. El capítulo establece un paralelismo riguroso con la teoría de Galois clásica de polinomios, presentando los resultados algebraicos en rojo y los topológicos en azul, con el objetivo de resaltar su correspondencia estructural. La selección de resultados, la formulación de observaciones, la comparación entre proposiciones duales y la construcción de ejemplos son contribuciones originales del autor, que culminan en la formulación categórica del teorema de Galois topológico y unos ejemplos aplicándolo.

En conjunto, el trabajo propone una lectura alternativa de conceptos fundamentales de la topología algebraica y de la teoría de Galois, guiada por el lenguaje de las categorías. Las aportaciones principales del autor son: la presentación categórica sistemática de nociones clásicas, la exposición accesible de la formulación categórica

del teorema de Van Kampen, y la comparación estructurada entre dos teorías aparentemente distantes, pero profundamente análogas, y la construcción y demostración de los ejemplos en todos los capítulos, especialmente en el primero y tercero.

1

Teoría de Categorías

Este primer capítulo está dedicado a presentar los conceptos fundamentales de la teoría de categorías, el marco teórico general sobre el que se apoya el resto del trabajo. El objetivo principal es ofrecer un nuevo lenguaje, más abstracto y unificador, que permita comprender y relacionar distintas ramas de las matemáticas. En particular, este lenguaje nos permitirá abordar con mayor claridad los conceptos de la topología algebraica que se desarrollarán en los capítulos siguientes.

El capítulo se organiza en varias secciones que introducen progresivamente las nociones básicas: definiremos primero qué es una categoría, qué son los morfismos y qué tipos especiales de estos pueden aparecer en una categoría. A continuación, trataremos los *funtores* y las *transformaciones naturales*, herramientas esenciales para comparar categorías y estudiar su estructura interna. También discutiremos los conceptos de *isomorfismo* y *equivalencia de categorías*, fundamentales para entender cuándo dos estructuras categóricas pueden considerarse “la misma” o “esencialmente la misma”.

Una sección importante estará dedicada a los *límites y colímites*, nociones centrales en la teoría de categorías. Si bien en este capítulo se presentan algunos ejemplos concretos e intuitivos, hemos optado por relegar la definición general de límite y colímite, así como el tratamiento más técnico (incluyendo la categoría de diagramas, funtores representables y el lema de Yoneda), a un apéndice final. Esta decisión responde al objetivo de mantener el capítulo centrado en los conceptos necesarios para el desarrollo posterior del trabajo, sin sobrecargar la exposición inicial.

Cabe mencionar que, en un planteamiento inicial, se contempló un desarrollo más amplio de la teoría categórica, y de hecho se llegó a elaborar dicho material, motivado por la belleza de las ideas y resultados que encierra esta teoría. No obstante, conforme avanzó el trabajo, se optó por una selección más ajustada y dirigida, centrada únicamente en los elementos estrictamente necesarios para abordar con claridad los capítulos dedicados a la topología algebraica y al teorema de Galois en su formulación categórica.

En cuanto a las referencias empleadas, el desarrollo teórico sigue principalmente el texto de [Toro8], del cual se han extraído las definiciones clave y la estructura general. No obstante, este capítulo no se limita a una exposición pasiva: se han completado las demostraciones omitidas en el texto, se han incorporado nuevos ejemplos elaborados por el autor, y se ha ampliado el tratamiento con aportaciones de otras fuentes. En particular, se ha integrado una perspectiva más intuitiva y filosófica tomada de [Nav14], que permite una mejor comprensión de los conceptos desde un punto de vista conceptual.

En resumen, este capítulo sienta las bases necesarias para el resto del trabajo, ofreciendo una herramienta teórica poderosa que permite formular y demostrar teoremas con una claridad estructural notable. Como se mostrará en los capítulos siguientes, la teoría de categorías no solo proporciona un nuevo lenguaje, sino que también revela profundas conexiones entre distintas áreas de las matemáticas.

1.1. Definición y ejemplos de categorías

Definición 1.1. Una categoría C consiste en:

1. Una clase de objetos $\text{Ob}(C)$, que denotaremos generalmente por letras mayúsculas A, B, C, M, N, \dots .
2. Para cada par ordenado de objetos (A, B) , un conjunto $\text{Hom}_C(A, B)$ cuyos elementos se llaman morfismos de dominio A y codominio B .
3. Para cada terna A, B, C de objetos, se tiene una composición:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(A, B) \times \text{Hom}_C(B, C) &\longrightarrow \text{Hom}_C(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

Además, estos tres datos deben cumplir los siguientes axiomas:

Axioma 1. Si $(A, B) \neq (C, D)$, entonces $\text{Hom}_C(A, B) \cap \text{Hom}_C(C, D) = \emptyset$ ¹.

Axioma 2. Si $f \in \text{Hom}_C(A, B)$, $g \in \text{Hom}_C(B, C)$ y $h \in \text{Hom}_C(C, D)$, entonces:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Axioma 3. Para todo objeto A , existe un morfismo $\text{id}_A \in \text{Hom}_C(A, A)$ tal que $g \circ \text{id}_A = g$ para todo $g \in \text{Hom}_C(A, B)$ y $\text{id}_A \circ f = f$ para todo $f \in \text{Hom}_C(B, A)$, sean los objetos A y B cualesquiera.

Al morfismo $\text{id}_A \in \text{Hom}_C(A, A)$ se le llama identidad de A .

Definición. Denotamos por $\text{Mor}(C)$ a la clase que es la unión disjunta de todos los conjuntos $\text{Hom}_C(A, B)$. Es decir:

$$\text{Mor}(C) = \bigsqcup_{(A,B) \in \text{Ob}(C)} \text{Hom}_C(A, B).$$

Notación:

- Si no hay riesgo de confusión, escribiremos $\text{Hom}(A, B)$ en vez de $\text{Hom}_C(A, B)$, quedando implícita la categoría C .
- Un morfismo f de dominio A y codominio B se suele representar de dos formas, $f : A \rightarrow B$, o bien, $A \xrightarrow{f} B$.
- La igualdad $h = g \circ f$ se representa mediante el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ A & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

¹Este axioma no es tan común en un libro clásico sobre teorías de categorías, se define aquí para la correcta definición de $\text{Mor}(C)$.

- El axioma 2 permite escribir $h \circ g \circ f$ para indicar el morfismo.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Lema 1.2. Para todo objeto A en una categoría \mathcal{C} , la identidad 1_A es única.

Demostración. en el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Dada una categoría \mathcal{C} , diremos que un morfismo $f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo si existe algún morfismo $g : B \rightarrow A$ tal que

$$f \circ g = 1_B \quad \text{y} \quad g \circ f = 1_A,$$

en cuyo caso tal morfismo g es único y se llama inverso de f . Cuando exista tal isomorfismo, escribimos $A \cong B$. Los isomorfismos de un objeto A en sí mismo se llaman automorfismos de A .

Ejemplo 1.3. A continuación mostramos algunos ejemplos clásicos de categorías.

1. **Con.** Es la categoría cuyos objetos son la clase de todos los conjuntos y los morfismos son las aplicaciones. La composición de morfismos es la composición de aplicaciones en el sentido usual.
2. **Con***. Los objetos son los pares ordenados (A, a) con A conjunto y $a \in A$. Un morfismo $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ es una aplicación entre A y B tal que $f(a) = b$.
3. **Grp.** Los objetos son los grupos y los morfismos, los homomorfismos de grupos. La composición es la usual de homomorfismos de grupos.
4. **An.** Los objetos son los anillos con unidad y los morfismos, los homomorfismos de anillos.
5. **A-Mod.** Los objetos son los A -módulos, sus morfismos son A -lineales y la composición es la composición de aplicaciones.
6. **A-alg.** Los objetos son A -álgebras y los morfismos son morfismos de A -álgebras.
7. **Top.** Formada por los espacios topológicos (objetos) y las aplicaciones continuas (morfismos).
8. **Top***. Formada por los pares ordenados (A, a) con A espacio topológico y $a \in A$. Los morfismos $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ son aplicaciones continuas entre A y B tal que $f(a) = b$.
9. **Dif.** Formada por las variedades diferenciables y las aplicaciones diferenciables.
10. **K-Af.** Formada por los espacios afines sobre un cuerpo K y las aplicaciones afines.
11. **K-Proy.** Formada por los espacios proyectivos sobre un cuerpo K y las aplicaciones proyectivas.

Observación. No es lícito hablar de la categoría de módulos, de álgebras, de espacios afines o de espacios proyectivos, pues no hemos definido el concepto de morfismo entre módulos, álgebras, espacios afines o espacios proyectivos.

Todos los ejemplos de categorías descritos hasta ahora tienen como objetos ciertas clases de conjuntos dotados de una estructura adicional, cuyos morfismos son aplicaciones o clases de equivalencia de aplicaciones que preservan las estructuras de los objetos. Estos ejemplos motivan la notación adoptada para representar los morfismos entre objetos (flechas) y la terminología de composición de morfismos. En los posteriores ejemplos veremos la flexibilidad de la idea de categoría.

Un monoide M es un conjunto dotado de:

- Una operación binaria interna $\cdot : M \times M \rightarrow M$ que es asociativa, es decir, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in M$.
- Un elemento unidad $e \in M$, tal que $a \cdot e = a$ y $e \cdot a = a$ para todo $a \in M$.

Podemos interpretar un monoide M como una categoría \mathcal{M} con un único objeto x . Los morfismos de x en x denotan precisamente los elementos del conjunto M , es decir:

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(x, x) = M$$

- La composición de morfismos en \mathcal{M} se define mediante la operación del monoide. Es decir, si $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(x, x)$, entonces su composición en la categoría es:

$$g \circ f = g \cdot f$$

- La composición es asociativa, pues lo es en el monoide.
- El elemento identidad e de M actúa como morfismo identidad en la categoría para $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(x, x)$, ya que para cualquier $f \in \text{Hom}_{\mathcal{M}}(x, x)$ se cumple que

$$1_x \circ f = e \cdot f = f \quad \text{y} \quad g \circ 1_x = g \cdot e = g$$

Sea G un grupo, que también puede considerarse como un monoide donde todo elemento es inversible. Podemos interpretarlo como una categoría \mathcal{G} con un único objeto $*$, de modo que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G.$$

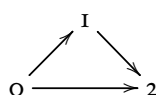
La composición de morfismos en \mathcal{G} está dada por la operación del grupo G , y cada morfismo tiene inverso. Por tanto, todos los morfismos en \mathcal{G} son isomorfismos. Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición 1.4. Un grupoide es una categoría \mathcal{G} donde todo morfismo es un isomorfismo, y la clase de objetos forma un conjunto (es decir, es una categoría pequeña véase 1.5). En este caso, los objetos se denotarán con minúsculas.

Un conjunto preordenado (A, \leq) define una categoría \mathcal{A} cuyos objetos son los elementos de A , de modo que si $x, y \in A$ son tales que $x \leq y$, entonces existe un único morfismo $x \rightarrow y$, mientras que si $x \not\leq y$, se entiende que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(x, y) = \emptyset$.

Por ejemplo, si definimos $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, se puede ordenar de modo habitual $v \leq s$ si $v = s$ o $v \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ y, en consecuencia, definir la categoría que denotamos por \mathbf{n} . A continuación, mostramos las más pequeñas de estas categorías, sin incluir los morfismos identidad:

- **0:** la categoría vacía, sin objetos ni morfismos.
- **1:** solo contiene el objeto 0 .
- **2:** tiene los objetos $0, 1$ y el morfismo $0 \rightarrow 1$.
- **3:** tiene los objetos $0, 1, 2$ y los morfismos representados por:



Otra categoría de uso creciente es la **categoría simplicial**, que se denota por Δ y sus objetos son los conjuntos ordenados finitos no vacíos, con su orden usual.

$$[n] = \{0 < 1 < \dots < n\} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

Los morfismos en Δ son las funciones monótonas (es decir, crecientes) entre estos conjuntos. En otras palabras:

$$\text{Hom}_{\Delta}([n], [m]) = \{f : [n] \rightarrow [m] \mid i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)\}.$$

La composición en Δ es la composición usual de funciones, y la identidad de $[n]$ es la función identidad. Cualquier morfismo en Δ se puede obtener como composición de funciones de estos dos tipos:

- Morfismos $\delta^i : [n-1] \rightarrow [n]$, definidos como las únicas funciones monótonas inyectivas cuya imagen es $[n]$ sin el elemento i .
- Morfismos $\sigma^i : [n+1] \rightarrow [n]$, definidos como las únicas funciones monótonas suprayectivas que envían tanto i como $i+1$ al mismo valor i y fijan el orden.

Definición 1.5. Se llama categoría pequeña a toda categoría cuya clase de objetos es un conjunto.

Bajo la condición de categoría pequeña, tenemos que $\text{Ob}(C)$ es en particular un conjunto y por tanto su producto cartesiano también. Como cada $\text{Hom}_C(A, B)$ está indexado por un par (A, B) en $\text{Ob}(C) \times \text{Ob}(C)$, y

$$\text{Mor}(C) = \bigsqcup_{(A,B) \in \text{Ob}(C) \times \text{Ob}(C)} \text{Hom}_C(A, B),$$

podemos asegurar que $\text{Mor}(C)$ es un conjunto.

Definición 1.6. Una categoría \mathcal{D} se dice subcategoría de la categoría C si:

1. $\text{Ob}(\mathcal{D})$ es una subclase de $\text{Ob}(C)$.
2. Para todo par de objetos A, B de \mathcal{D} , el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B)$ es un subconjunto de $\text{Hom}_C(A, B)$ de modo que si A es un objeto de \mathcal{D} , la identidad I_A es la misma en C que en \mathcal{D} , y la composición de morfismos en \mathcal{D} es la restricción de la composición en C .

Si además se tiene que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = \text{Hom}_C(A, B)$ para todo par de objetos A y B , la subcategoría se llama plena.

Observación. Toda categoría es trivialmente una subcategoría plena de sí misma.

Ejemplo 1.7. La categoría **Ab** de todos los grupos abelianos y homomorfismos de grupos abelianos es una categoría plena de **Grp**.

La categoría formada por todos los espacios topológicos Hausdorff y aplicaciones continuas entre los mismos es una categoría plena **Top₂** de la categoría **Top**. Asimismo, las categorías **Comp** y **Comp₂**, cuyos objetos son respectivamente los espacios topológicos compactos y los espacios topológicos compactos y Hausdorff, son también una subcategoría plena.

Si N es un submonoide del monoide M , la categoría \mathcal{N} asociada a N es una subcategoría de la de M adjunta por M . Únicamente es plena si $N = M$.

Definición 1.8. Sea x_0 un objeto de un grupoide \mathcal{G} . Se denota \mathcal{G}_{x_0} a la subcategoría plena de \mathcal{G} cuyo único objeto es x_0 . Nótese que \mathcal{G}_{x_0} es el grupoide asociado al grupo de automorfismos de x_0 .

Definición 1.9. Supongamos que C es una categoría cualquiera. Se define la categoría dual u opuesta de C y se denota por C° a la categoría definida por las siguientes propiedades:

1. $\text{Ob}(C^\circ) = \text{Ob}(C)$
2. Si A, B son objetos de C , entonces

$$\text{Hom}_{C^\circ}(A, B) = \text{Hom}_C(B, A)$$

es decir, la flecha

$$f : A \rightarrow B \quad \text{en } C^\circ \quad \text{es lo mismo que la flecha } f : B \rightarrow A \quad \text{en } C$$

3. Si $f \in \text{Hom}_{C^\circ}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_{C^\circ}(B, C)$, la composición $g \circ f$ en C° coincide con $f \circ g$ en C .

Lema 1.10. *La categoría opuesta de la categoría opuesta de C coincide con C ; es decir,*

$$(C^\circ)^\circ = C.$$

Demostración. En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Sea $P(C)$ una propiedad referida a una categoría C cualquiera, que puede ser cierta o falsa en una categoría dada y se expresa en términos de objetos, morfismos y composición de morfismos.

Por ejemplo, observamos la siguiente propiedad:

$$(\exists X)(\forall Y)(\exists! f)(f : X \rightarrow Y; X, Y, f \in C)$$

es decir, existe un objeto X tal que para todo objeto Y de C existe un único morfismo $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$. Un tal objeto X se denomina objeto inicial; en la categoría **Con**, el conjunto vacío es un objeto inicial; en **Grp**, cualquier grupo trivial. Un conjunto preordenado posee objeto inicial si y solo si posee un mínimo.

A partir de $P(C)$ se puede definir la propiedad $P^\circ(C)$ obtenida a partir de $P(C)$ cambiando los morfismos $f : X \rightarrow Y$ por los morfismos $f : Y \rightarrow X$. Un nuevo ejemplo:

$$(\exists X)(\forall Y)(\exists! f)(f : Y \rightarrow X; X, Y, f \in C)$$

A los elementos X que cumplan dicha propiedad los llamamos objeto final. Todo conjunto $\{a\}$ en **Con** es un objeto final, y todo par de la forma $(\{a\}, a)$ lo es en **Con**^{*}. Un conjunto preordenado posee elemento final si y solo si posee máximo.

Sobre ambos objetos se mencionará más en posteriores secciones, por ahora sirve para ilustrar una propiedad y su opuesta, y a partir de ellas enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.11 (Principio de dualidad en la teoría de categorías). *El enunciado $P^\circ(C)$ es cierto en una categoría C_1 si y solo si $P(C)$ es cierto en C_1° . Además, deducimos que si una propiedad $P(C)$ es cierta en toda categoría, entonces $P^\circ(C)$ también lo es.*

Demostración. Observamos primero que si $P(C_I)$ es un enunciado que involucra objetos, morfismos y composición de morfismos, entonces $P^o(C_I)$ invierte el orden de la composición. En efecto, si

$$h = f \circ g : A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \quad \text{en } P(C_I),$$

entonces, al aplicar la dualidad, el enunciado $P^o(C_I)$ considera los morfismos en orden inverso:

$$h = g \circ f : C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \quad \text{en } P^o(C_I),$$

es decir, se invierte el sentido de las flechas y también el orden de la composición. Llamaremos \circ_{C_I} a la composición en C_I , $\circ_{C_I}^o$ a la composición inducida por la propiedad opuesta y $\circ_{C_I^o}$ a la composición en C_I^o , observamos que estas dos últimas son iguales.

Sea entonces $P(C_I)$ un enunciado que podemos escribir en términos de la categoría C_I como:

$$P(C_I) = P(\text{Ob}(C_I), \text{Hom}_{C_I}(A, B), \circ_{C_I}),$$

y supongamos que este enunciado es cierto en la categoría opuesta C_I^o , es decir:

$$P(\text{Ob}(C_I^o), \text{Hom}_{C_I^o}(A, B), \circ_{C_I^o}) \text{ es cierto.}$$

La propiedad dual $P^o(C_I)$ consiste en intercambiar el orden de los morfismos, es decir:

$$P^o(C_I) = P(\text{Ob}(C_I), \text{Hom}_{C_I}(B, A), \circ_{C_I}^o).$$

Pero esta expresión coincide exactamente con la descripción de $P(C_I^o)$, ya que:

$$\text{Hom}_{C_I^o}(A, B) = \text{Hom}_{C_I}(B, A), \quad \text{y} \quad \circ_{C_I^o} = \circ_{C_I}^o.$$

Por tanto, si $P(C_I)$ es cierto en C_I^o , entonces $P^o(C_I)$ también lo es en C_I .

Además, si $P(C)$ es cierto para toda categoría C , entonces en particular es cierto para la categoría opuesta C^o . Pero $P(C^o)$ es, como hemos visto antes, $P^o(C)$, así que concluimos que si $P(C)$ es cierto en toda categoría, entonces $P^o(C)$ también lo es.

□

Observación. Nótese que tanto la demostración del Lema 1.10 como la del Teorema 1.11 no son más que simples manipulaciones simbólicas; en ambos casos basta con aplicar cuidadosamente las definiciones, sin necesidad de construcciones adicionales.

Definición. Dadas dos categorías C y \mathcal{D} , se define la categoría producto $C \times \mathcal{D}$ de la siguiente manera:

1. $\text{Ob}(C \times \mathcal{D}) = \text{Ob}(C) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$
2. Si A, B son objetos de C y A', B' lo son de \mathcal{D} , entonces:

$$\text{Hom}_{C \times \mathcal{D}}((A, A'), (B, B')) = \text{Hom}_C(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A', B')$$

de modo que $\mathbf{1}_{(A, A')} = (\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{A'})$, y la composición de morfismos, cuando tiene sentido, es:

$$(g, g') \circ (f, f') = (g \circ f, g' \circ f')$$

Evidentemente, $C \times D$ es una categoría.

Una relación de equivalencia \sim en la clase de los morfismos de una categoría C se llama congruencia si toda clase de equivalencia respecto a \sim está contenida en un conjunto $\text{Hom}_C(A, B)$ para algún par de objetos A y B , y si es compatible con la composición de morfismos; es decir, si $f \sim f'$ y $g \sim g'$, entonces $g \circ f \sim g' \circ f'$. Bajo ambas condiciones, se pueden asociar a C dos categorías:

1. \tilde{C} , cuyos objetos son los mismos que los de C , de modo que en \tilde{C} , un morfismo de A a B es un par ordenado (f, g) tal que $f : A \rightarrow B$ y $f \sim g$. Por la definición de congruencia, podemos asegurar que si

$$(f, g) : A \rightarrow B \quad \text{y} \quad (f', g') : B \rightarrow C,$$

la composición

$$(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$

está bien definida, es asociativa y $(1_A, 1_A)$ es la identidad de A en \tilde{C} .

2. Más importante que la anterior es la categoría C/\sim , que tiene los mismos objetos que C y cuyos morfismos entre los objetos A y B son las clases de equivalencia $[f]$ de morfismos $f : A \rightarrow B$ de C . La composición de $[f]$ y $[g]$ tiene sentido cuando existe $f \circ g$ en C , y se define por:

$$[f] \circ [g] = [f \circ g]$$

Demostrar que C/\sim es una categoría es rutinario.

Ejemplo. Por ejemplo, **hTop** es la categoría cociente de **Top** respecto a la congruencia definida por: $f \sim g$ precisamente cuando f y g son homotópicas. Afinando el concepto de homotopía, se tiene igualmente que **hTop**_{*} es una categoría cociente de **Top**_{*}.

1.2. Morfismos y objetos especiales

Supongamos que $f : A \rightarrow B$ es una aplicación de un conjunto no vacío A en un conjunto cualquiera B . Entonces son equivalentes:

1. f es una aplicación inyectiva.
2. Existe una aplicación $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$.

Demostración. Demostramos la doble implicación.

(1) \Rightarrow (2): Si f es inyectiva, para cada $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $f(a) = b$. Definimos:

$$g(b) = \begin{cases} a, & \text{si } b = f(a) \text{ para algún } a \in A, \\ \text{arbitrario,} & \text{si } b \notin f(A) \end{cases}$$

Entonces, para todo $a \in A$, se tiene $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$, por tanto $g \circ f = \text{id}_A$.

(2) \Rightarrow (1): Supongamos $g \circ f = \text{id}_A$. Entonces, para cualquier $a \in A$:

$$g(f(a)) = a.$$

Si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces:

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2,$$

luego f es inyectiva.

□

Mientras que la inyectividad se describe en términos de elementos y de la relación \in , es decir, de manera conjuntista, la segunda afirmación está hecha en términos de aplicaciones y composición de aplicaciones, que son morfismos y composición de morfismos en la categoría **Con**. Por tanto, es un enunciado típicamente categórico, que motiva la siguiente definición.

Definición 1.12. Un morfismo $f : A \rightarrow B$ en una categoría \mathcal{C} se llama sección si existe algún morfismo $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$.

Ejemplo. En la categoría **Ab** de los grupos abelianos, un morfismo $f : A \rightarrow B$ es una sección si y solo si

$$B = \text{Im}(f) \oplus \ker(g),$$

siendo $g : B \rightarrow A$ cualquier morfismo a izquierda de f .

Supongamos que f es una sección y tomamos un elemento $b \in B$ y definimos $a = g(b)$, luego,

$$f(a) = f(g(b)) \in \text{Im}(f).$$

Construimos $k = b - f(a)$, tenemos:

$$g(k) = g(b - f(a)) = g(b) - g(f(a)) = a - a = 0, \text{ luego } k \in \ker(g).$$

Con esto tenemos que $b = f(a) + k$, con $f(a) \in \text{Im}(f)$, $k \in \ker(g)$.

Veamos que la descomposición es única, supongamos que $b = f(a_1) + k_1 = f(a_2) + k_2$, donde $f(a_1), f(a_2) \in \text{Im}(f)$ y $k_1, k_2 \in \ker(g)$. Restando ambas expresiones:

$$0 = f(a_1) - f(a_2) + k_1 - k_2 \Rightarrow f(a_1 - a_2) = k_1 - k_2.$$

Aplicando g a ambos lados:

$$g(f(a_1 - a_2)) = g(k_1 - k_2) = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2,$$

luego $k_1 = k_2$, y la descomposición es única. Por último, sea $b \in \text{Im}(f) \cap \ker(g)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$, y además $g(b) = 0$, entonces:

$$0 = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = \text{I}_A(a) = a,$$

por lo tanto $a = 0$ y $b = f(a) = f(0) = 0$ y por tanto $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$. Finalmente concluimos,

$$B = \text{Im}(f) \oplus \ker(g).$$

Recíprocamente, supongamos que $B = \text{Im}(f) \oplus \ker(g)$. Esto significa que para cualquier $b \in B$, podemos escribir de manera única como:

$$b = f(a) + k \quad \text{con } a \in A \text{ y } k \in \ker(g).$$

Definimos $g : B \rightarrow A$ como $g(b) = a$, con b como antes. Tenemos que:

1. g está bien definido, pues como la descomposición es única para cualquier $b \in B$, el elemento $a \in A$ asociado a b por $f(a)$ está bien definido.
2. $g \circ f = \text{I}_A$, tomando $a \in A$, $f(a) \in \text{Im}(f) \subseteq B$, y

$$f(a) = f(a) + 0 = f(a) + k \quad \text{con } k = 0 \in \ker(g),$$

y según la definición de g ,

$$g(f(a)) = a \quad \Rightarrow \quad g \circ f = \text{I}_A.$$

Por tanto, concluimos que f es una sección.

Observamos que toda sección en **Ab** es un monomorfismo inyectivo, pero no al revés. Sea $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$, ambos grupos con la suma, definida por $f(n) = n$.

Claramente f es inyectiva, pues $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ por la propia definición. Pero si existiera $g : (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, homomorfismo de grupos abelianos tal que $g \circ f = \text{I}_{\mathbb{Z}}$, tendríamos que:

$$g\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1) = g(f(1)) = 1,$$

pero $g\left(\frac{1}{2}\right)$ debería ser un número entero, lo cual es imposible.

Proposición 1.13. Si C es una categoría cualquiera, se tiene:

1. Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son secciones de C , entonces $g \circ f$ también lo es.

2. Si f y g son morfismos de C tal que $g \circ f$ está definido y g es sección, entonces f es sección.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Volviendo a la categoría **Con**, observamos la siguiente equivalencia:

(1) $f : A \rightarrow B$ es una aplicación inyectiva.

(2) Si h, k son aplicaciones de C en A tales que $f \circ h = f \circ k$, entonces $h = k$. En otras palabras, se puede simplificar o cancelar a izquierda respecto de la composición de aplicaciones.

Demostración. Demostramos ambas implicaciones.

(1) \Rightarrow (2): Si f es inyectiva y $h, k : C \rightarrow A$ verifican que $f \circ h(c) = f \circ k(c)$ para todo $c \in C$, entonces por inyectividad:

$$h(c) = k(c), \quad \forall c \in C.$$

(2) \Rightarrow (1) Procedemos por contrarrecíproco. Supongamos que f no es inyectiva. En tal caso existen $a \neq a'$ en A tal que $f(a) = f(a')$. Sea $C = \{c\}$, definimos:

$$h, k : C \rightarrow A \quad \text{de modo que } h(c) = a, \quad k(c) = a',$$

con lo que

$$h \neq k, \text{ pero } f \circ h(c) = f(a) = f(a') = f \circ k(c) \Rightarrow f \circ h = f \circ k.$$

□

Esta caracterización de la inyectividad motiva la siguiente definición:

Definición 1.14. Un morfismo $f : A \rightarrow B$ en una categoría C se llama monomorfismo si para todo par de morfismos h, k tales que $f \circ h = f \circ k$, se tiene que $h = k$.

Ejemplo. De forma análoga al caso de **Con**, en las categorías **Grp**, **Ab** y **Top**, un monomorfismo es precisamente una aplicación inyectiva, un homomorfismo o una aplicación continua, según el caso.

Proposición 1.15. Si C es una categoría cualquiera, se tiene:

1. Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son monomorfismos de C , entonces $g \circ f : A \rightarrow C$ es un monomorfismo.

2. Si f y g son morfismos en C y $g \circ f$ es un monomorfismo, entonces f es monomorfismo.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Proposición 1.16. En toda categoría, una sección es un monomorfismo.

Demostración. Sea $f : A \rightarrow B$ una sección, es decir, existe g tal que $g \circ f = \text{id}_A$.

Supongamos que $f \circ h = f \circ k$. Componemos con g a la izquierda:

$$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) \Leftrightarrow (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k \Rightarrow \text{id}_A \circ h = \text{id}_A \circ k \Rightarrow h = k.$$

Por tanto, f es un monomorfismo. □

Observamos que el recíproco no es cierto. Tomamos el monomorfismo inyectivo de grupos abelianos:

$$f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +), \quad m \mapsto 2m.$$

Es un monomorfismo de forma trivial. Pero no es una sección, veámoslo. Si lo fuera, existiría $g : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, homomorfismo de grupos tal que $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Sin embargo, esto no es posible, pues:

- $\text{Im}(f) = 2\mathbb{Z}$, subgrupo de los números pares.
- Como g sería un homomorfismo de grupos y $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, entonces para todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$g \circ f(m) = g(2m) = m.$$

En particular, $g(2) = 1$, por ser homomorfismo de grupos,

$$g(1+1) = g(2) = 1 \Rightarrow g(1) + g(1) = 1 \Rightarrow g(1) = \frac{1}{2},$$

lo cual contradice que $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ por lo que tal g no puede existir.

De forma precisa, la imagen de f , que es el subgrupo de los números pares, no es un sumando directo en dicho grupo, es decir, no existe M tal que:

$$\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \oplus M \quad \text{con } M \text{ subgrupo de } \mathbb{Z}$$

Si \mathcal{D} es una subcategoría de una categoría \mathcal{C} , un morfismo que sea monomorfismo en \mathcal{D} no tiene por qué serlo en \mathcal{C} . Para ilustrarlo, consideraremos el caso en que $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$, la categoría de los grupos abelianos, y $\mathcal{D} = \mathbf{DivAb}$, la subcategoría formada por los grupos abelianos divisibles y los homomorfismos entre ellos.

Antes de continuar, recordemos que un grupo abeliano $(G, +)$ se dice divisible si para todo entero positivo n y todo $g \in G$, existe $y \in G$ tal que $ny = g$.

A continuación, mostraremos que \mathbf{DivAb} es efectivamente una subcategoría plena de \mathbf{Ab} .

1. $\text{Ob}(\mathbf{DivAb})$ es un subclase de $\text{Ob}(\mathbf{Ab})$ por la propia definición.
2. Sean $G, H \in \text{Ob}(\mathbf{DivAb})$, veamos que:

$$\text{Hom}_{\mathbf{DivAb}}(G, H) = \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(G, H). \quad (\text{I.1})$$

Sea f cualquier homomorfismo de grupos abelianos. Veamos que, en tal caso, respeta la estructura de divisibilidad. Para cualquier $g \in G$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $x \in G$ tal que $nx = g$, aplicando f .

$$f(g) = f(nx) = f(x + \cdots + x) = f(x) + \cdots + f(x) = nf(x).$$

Luego $f(g) = nf(x)$, por tanto $f(g) \in H$ también cumple la propiedad de divisibilidad.

Consideramos ahora la proyección canónica

$$\pi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

no es un monomorfismo en \mathcal{D} . Hay dos formas de verlo:

1. π no es inyectiva, pero en \mathbf{Ab} un monomorfismo es un homomorfismo inyectivo.

2. Usando la definición: sean $h, k : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, definidas por $h(q) = q, k(q) = q + 1$. Entonces:

$$\pi \circ h(q) = \pi(q) = q + \mathbb{Z}, \quad \pi \circ k(q) = \pi(q + 1) = (q + 1) + \mathbb{Z} = q + \mathbb{Z}, \quad \forall q \in \mathbb{Q}.$$

Luego $\pi \circ h = \pi \circ k$, pero $h \neq k$.

No obstante, sean $h, k : D \rightarrow \mathbb{Q}$ dos morfismos con D un grupo (abeliano) divisible tales que $\pi \circ h = \pi \circ k$. Entonces definimos $\varphi := h - k : D \rightarrow \mathbb{Q}$, que es un homomorfismo de grupos abelianos divisibles. Observamos que dado $d \in D$,

$$\pi \circ h(d) = \pi \circ k(d) \Rightarrow \pi(h(d) - k(d)) = 0 \Rightarrow h(d) - k(d) \in \ker \pi,$$

y $\ker \pi = \mathbb{Z}$. Por tanto $\text{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{Z}$. Si $\varphi(d) \neq 0$ para algún $d \in D$, elegimos $c_n \in D$ tal que $d = nc_n$ con lo que $\varphi(d) = \varphi(nc_n) = n\varphi(c_n)$, de modo que $\varphi(d)$ sería divisible por todo entero positivo, lo cual es absurdo. Por tanto $\varphi(d) = 0$ para todo $d \in D$. Por tanto $0 = \varphi = h - k \Rightarrow h = k$, y π es un monomorfismo en la subcategoría \mathcal{D} .

Pasemos a considerar una nueva situación que será dual de la anterior, la cual fue motivada por el concepto de aplicación inyectiva.

Consideremos ahora una aplicación $f : A \rightarrow B$ cualquiera entre conjuntos, es decir, un morfismo en la categoría **Con**. Entonces:

- 1) f es una aplicación sobreyectiva.
- 2) Existe alguna aplicación $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$.

Demostración.

1) \Rightarrow 2) Queremos construir una función $g : B \rightarrow A$ tal que $f(g(b)) = b$ para todo $b \in B$. Para ello, debemos seleccionar un $a \in A$ para cada $b \in B$ tal que $f(a) = b$.

Pues, por la definición de sobreyectividad, para cada $b \in B$, el conjunto

$$f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\} \neq \emptyset.$$

Utilizando el axioma de elección para conjuntos, existe una función

$$g : B \rightarrow A \quad \text{tal que} \quad g(b) \in f^{-1}(\{b\}) \quad \text{para cada } b \in B.$$

Esto garantiza $\forall b \in B, f(g(b)) = b$.

2) \Rightarrow 1) Supongamos que existe $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$. Tomamos cualquier $b \in B$, entonces $g(b) \in A$ y $f(g(b)) = b$, luego $b \in \text{Im}(f)$, ya que hay algún $a = g(b) \in A$ tal que $f(a) = b$.

$$f(a) = b \quad \text{Por tanto} \quad \text{Im } f = B$$

□

Definición 1.17 (Dual de 1.12). Un morfismo $f : A \rightarrow B$ en una categoría se llama retracción si existe algún morfismo $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$.

Por ejemplo, en la categoría **Ab**, un morfismo $f : A \rightarrow B$ es una retracción si y solo si $A = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$ con $g : B \rightarrow A$ cualquier morfismo inverso a derecha de f .

Observación. Toda retracción en **Ab** es un homomorfismo sobreyectivo, pero no al revés.

Consideramos $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, $n \mapsto n \pmod{2}$. Claramente f es sobreyectivo, sin embargo f no es retracción porque no existe $g : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ tal que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.

Esto se puede argumentar con la caracterización anterior, si f lo fuera, entonces

$$\mathbb{Z} = \ker(f) \oplus \text{Im}(g) = 2\mathbb{Z} \oplus \text{Im}(g),$$

pues $\ker(f) = 2\mathbb{Z}$. Pero $2\mathbb{Z}$ no es sumando directo en \mathbb{Z} .

Proposición 1.18 (Dual de 1.13). Si \mathcal{C} es una categoría cualquiera, se tiene:

1. Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son retracciones de \mathcal{C} , entonces $g \circ f : A \rightarrow C$ también lo es.
2. Si f y g son morfismos de \mathcal{C} tal que $g \circ f$ está definido y es una retracción, entonces f es una retracción.

Demostración. Esta proposición se obtiene por dualidad de la Proposición 1.13 En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Sea $f : A \rightarrow B$ una aplicación entre conjuntos A y B , entonces se prueba fácilmente la equivalencia:

1. f es sobreyectiva,
2. si h, k son aplicaciones de B en C tales que $h \circ f = k \circ f$, entonces $h = k$. En otras palabras, f es cancelable a derecha respecto de la composición de aplicaciones.

Demostración.

- 1) \Rightarrow 2) Consideramos dos aplicaciones $h, k : B \rightarrow C$ tales que $h \circ f = k \circ f$ y veamos que $h = k$. Por la igualdad $h(f(a)) = k(f(a))$ y como f es sobreyectiva, entonces $\forall b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, luego:

$$h(b) = h(f(a)) = k(f(a)) = k(b), \quad \forall b \in B \Rightarrow h = k.$$

- 2) \Rightarrow 1) Supongamos que f no es sobreyectiva, en tal caso existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \notin \text{Im}(f)$.

Definimos $h, k : B \rightarrow \{c_1, c_2\}$ como:

$$h(b) = c_1 \quad \forall b \in B, \quad k(b) = \begin{cases} c_1 & \text{si } b \neq b_0 \\ c_2 & \text{si } b = b_0 \end{cases}$$

Tenemos que $h \circ f = k \circ f$, pues para cualquier $a \in A$, tenemos que $f(a) \neq b_0$, luego:

$$h(f(a)) = c_1 = k(f(a)).$$

Sin embargo, $h(b_0) \neq k(b_0)$, luego $h \neq k$.

□

Todo esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.19 (Dual de 1.14). Un morfismo $f : A \rightarrow B$ en una categoría \mathcal{C} se llama epimorfismo si para todo par de morfismos h, k tales que $h \circ f = k \circ f$ se tiene que $h = k$.

1) En **Con**, **Ab** y **Top** es muy sencillo ver que un epimorfismo es precisamente una aplicación sobreyectiva.

2) En **Grp**, un epimorfismo es una aplicación sobreyectiva.

Demostración. En efecto, sean $f : G \rightarrow H$ un epimorfismo en la categoría **Grp**, $A = \text{Im}(f) \subseteq H$. Supongamos, por contradicción, que $A \subsetneq H$. Consideramos el conjunto cociente $H/A = \{[Ah] : h \in H\}$ de clases laterales por la derecha, y formamos el conjunto

$$S = H/A \sqcup \{*\},$$

donde $* \notin H/A$. Sea ahora $K = \Sigma_S$, el grupo de biyecciones de S .

Definimos un homomorfismo $g : H \rightarrow K$, haciendo que cada $h \in H$ actúe por permutaciones de la siguiente manera:

$$g(h)([Ah']) = [Ahh'] \text{ para todo } h' \in H, \quad \text{y} \quad g(h)(*) = *.$$

Sea ahora la permutación $\sigma \in K$ que intercambia $A \leftrightarrow *$ y deja fijos todos los demás elementos de S , es decir:

$$\sigma(A) = *, \quad \sigma(*) = [A], \quad \sigma([Ah]) = [Ah] \text{ si } [Ah] \in H/A, \quad h \notin A.$$

Construimos $k : H \rightarrow K$ como $k(h) = \sigma \circ g(h) \circ \sigma^{-1}$. Como composición de homomorfismos, k también es un homomorfismo. Observemos cómo actúan g y k sobre los elementos $a \in \text{Im}(f) = A$:

$$\begin{aligned} g(a)([A]) &= [Aa] = [A], & g(a)(*) &= *, \\ k(a)([A]) &= \sigma(g(a)(*)) = \sigma(*) = [A], & k(a)(*) &= \sigma(g(a)([A])) = \sigma([A]) = *. \end{aligned}$$

Por tanto, $g(a) = k(a)$ para todo $a \in A$, es decir, $g \circ f = k \circ f$ y por hipótesis como f es epimorfismo, se concluye que $g = k$.

Esto implica que $g(h) \circ \sigma = \sigma \circ g(h)$ para todo $h \in H$. Sin embargo, evaluando en $A \in S$, tenemos:

$$(g(h) \circ \sigma)([A]) = g(h)(*) = *, \quad (\sigma \circ g(h))([A]) = \sigma([Ah]).$$

Si $h \notin A$, entonces $[Ah] \neq [A]$ y $\sigma([Ah]) = [Ah]$, así que $* \neq [Ah]$ y las composiciones no coinciden. Por tanto, $g = k$ si y solo si $h \in A$ para todo $h \in H$, pues en tal caso $[Ah] = [A]$ y $\sigma([Ah]) = \sigma([A]) = *$ y las composiciones coinciden, concluyendo así $A = H$, y por tanto f es sobreyectivo. \square

3) En **Top**, un epimorfismo es una aplicación continua sobreyectiva, pero en la subcategoría **Top₂**, un epimorfismo no tiene por qué ser sobreyectivo.

En efecto, sea $f : X \rightarrow Y$, una aplicación continua tal que $f(X)$ está propiamente contenido en Y .

Dotar a $\mathbb{2} = \{0, 1\}$ de la topología trivial o indiscreta y definir las aplicaciones continuas $h, k : Y \rightarrow \mathbb{2}$, dadas por:

$$h(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in f(X), \\ 1 & \text{si } y \in Y \setminus f(X), \end{cases} \quad k(y) = 0 \quad \forall y \in Y.$$

Entonces $h \circ f = k \circ f$, pero $h \neq k$.

Pero si consideramos ahora únicamente espacios Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua no sobreyectiva donde $f(X)$ es denso en Y . Por el *principio de prolongación de identidades*², se puede asegurar que si $h, k : Y \rightarrow Z$ coinciden en $f(X)$, es decir, $h \circ f = k \circ f$, entonces $h = k$.

4) En la categoría **An** de los anillos con identidad, un epimorfismo no tiene por qué ser sobreyectivo.

Por ejemplo, la inclusión canónica $\iota : D \hookrightarrow F$ de un dominio de integridad D (que no sea un cuerpo) en su cuerpo de fracciones F es un homomorfismo de anillos inyectivo que, aunque no es sobreyectivo, sí es un epimorfismo en **An**.

En efecto, todo homomorfismo $f : F \rightarrow A$ está completamente determinado por su restricción a D , ya que para $x = \frac{a}{b} \in F$, con $a, b \in D, b \neq 0$, se tiene:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) \cdot f(b)^{-1},$$

por la propiedad universal del cuerpo de fracciones. En consecuencia, si $g \circ \iota = h \circ \iota$, entonces $g(d) = h(d) \forall d \in D$, y se sigue que:

$$g\left(\frac{a}{b}\right) = g(a) \cdot g(b)^{-1} = h(a) \cdot h(b)^{-1} = h\left(\frac{a}{b}\right),$$

para todo $\frac{a}{b} \in F$, por lo que $g = h$. Así, ι es epimorfismo.

Proposición 1.20 (Dual de 1.15). *En toda categoría \mathcal{C} , toda retracción es un epimorfismo.*

Demostración. Basta aplicar el principio de dualidad al enunciado 1.15. □

En **Ab**, el homomorfismo proyección canónica

$$p : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/(2), +); \quad p(n) = n \text{ mód } 2$$

es un epimorfismo pero no una retracción. Si lo fuera, la imagen de $g : (\mathbb{Z}/(2), +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ sería un subgrupo de \mathbb{Z} de orden 2, lo cual es imposible. Por tanto, el recíproco de la proposición es falso.

Supongamos que $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en una categoría, que admite inverso a izquierda $g : B \rightarrow A$ y también inverso a derecha $h : B \rightarrow A$. Entonces se cumple:

$$g \circ f \circ h = \begin{cases} (g \circ f) \circ h = \mathbf{1}_A \circ h = h, \\ g \circ (f \circ h) = g \circ \mathbf{1}_B = g, \end{cases}$$

Es decir, cualquier inverso a izquierda coincide con cualquier inverso a derecha. Esto nos da de nuevo la definición de isomorfismo en una categoría, como aquel morfismo que es sección y retracción.

Sea \mathcal{C} una categoría. Dado un morfismo $f : A \rightarrow B$, se dice que el morfismo es constante, o morfismo nulo a izquierda, si

$$\forall C \text{ objeto de } \mathcal{C} \text{ y } \forall g, h : C \rightarrow A, \quad f \circ g = f \circ h.$$

²*Principio de prolongación de las identidades:* Sean $f, g : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ aplicaciones continuas, y supongamos que (Y, τ_Y) es un espacio Hausdorff. Si $D \subseteq X$ es denso y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$. Este principio no es cierto en general si se omite la hipótesis de Hausdorff. Por ejemplo, consideremos $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ y $g(x) = x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, donde $\chi_{\mathbb{Q}}$ es la función indicatriz de los racionales. Ambas funciones $f, g : (\mathbb{R}, \tau_{us}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ son continuas, y se cumple que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$, pero $f \neq g$.

Análogamente se define morfismo coconstante (morfismo nulo a derecha) si

$$\forall C \text{ objeto de } C \text{ y } \forall g, h : B \rightarrow C, \quad g \circ f = h \circ f.$$

Se llama morfismo nulo o cero aquel que es constante y coconstante. Decimos que una categoría posee morfismos cero si para cualquier par de objetos A, B , existe un morfismo

$$o_{AB} : A \rightarrow B$$

cumpliendo:

1. Todos estos morfismos o_{AB} son morfismos cero.
2. Son compatibles con la composición; es decir, si $f : B \rightarrow C, g : A \rightarrow B$, entonces:

$$f \circ o_{AB} = o_{AC} \quad \text{y} \quad o_{BC} \circ g = o_{AC}.$$

Ejemplo.

- En **Grp**, los morfismos nulos $o_{GH} : G \rightarrow H, g \mapsto e_H$, envían todo al neutro de H .
- En **A-Mod**, los morfismos nulos $o_{MN} : M \rightarrow N, m \mapsto o_N$, donde o_N es el elemento cero del módulo N .

Objetos especiales

En **Con**, nos fijamos en el objeto conjunto vacío. Este conjunto está caracterizado por ser el único conjunto tal que para todo conjunto X , existe una única aplicación

$$\emptyset \rightarrow X,$$

la aplicación vacía. Esta idea generaliza en la siguiente definición:

Definición 1.21. Se llama objeto inicial de una categoría C a todo objeto I que verifica:

$$(\forall A \in \text{Ob}(C)) (|\text{Hom}_C(I, A)| = 1).$$

Lema 1.22. *Dos objetos iniciales en una categoría son isomorfos.*

Demostración. En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Por ejemplo, hemos observado que el conjunto vacío es un objeto inicial en la categoría **Con**; también lo es en **Top**. El grupo trivial $1 = \{e\}$ es inicial en la categoría de todos los grupos, y el anillo \mathbb{Z} es inicial en **An**. Para ver este último ejemplo, basta observar que un homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$ queda unívocamente determinado por el único valor posible $f(1)$, que necesariamente es la unidad de A .

Definición 1.23 (Dual de 1.21). Se llama objeto final de una categoría C a todo objeto F que verifica:

$$(\forall A \in \text{Ob}(C)) (|\text{Hom}_C(A, F)| = 1).$$

En las categorías **Con** y **Top**, los objetos finales son los singuletes $\{a\}$, y en la categoría de los grupos lo es el grupo trivial 1 . El anillo trivial (en el que $1 = 0$) es final en la categoría **An**.

Si $C \subseteq \mathbf{An}$ es la subcategoría plena formada por los cuerpos y los homomorfismos de anillos (necesariamente inyectivos), entonces C no posee ni objeto final ni objeto inicial.

Un objeto o que es simultáneamente inicial y final se llama objeto cero. Un ejemplo típico es el A -módulo trivial o en la categoría **A-Mod**. Por el contrario, es claro que las categorías **Con**, **Top** y **An** no poseen objeto cero.

1.3. Funtores y transformaciones naturales

Definición 1.24. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías, un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consta de dos aplicaciones:

$$F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), \quad F : \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$$

tales que si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en \mathcal{C} , entonces

$$F(f) : F(A) \rightarrow F(B) \text{ en } \mathcal{D},$$

de modo que se verifiquen las siguientes condiciones:

1. $F(1_A) = 1_{F(A)}$, las identidades en identidades.
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ siempre que $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ sean compatibles con la composición.

Escribimos de manera sencilla: $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Nota: A este tipo de funtor se le llama funtor covariante.

Definición 1.25 (Dual de 1.24). Sean \mathcal{C} , \mathcal{D} categorías, un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consta de dos aplicaciones:

$$F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), \quad F : \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$$

tales que si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en \mathcal{C} , entonces

$$F(f) : F(B) \rightarrow F(A) \text{ en } \mathcal{D},$$

de modo que se verifiquen las siguientes propiedades:

1. $F(1_A) = 1_{F(A)}$,
2. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$,

Al igual que el caso anterior, escribimos $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Ejemplo 1.26. Funtores covariantes.

1. En toda categoría \mathcal{C} se tiene el funtor identidad $F(A) = A$, $F(f) = f$. Más generalmente, si \mathcal{D} es una subcategoría de \mathcal{C} , se tiene el funtor inclusión $I : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, definido como el anterior.
2. Si \mathcal{C} es una categoría y \mathcal{C}/\sim es una categoría cociente de \mathcal{C} , la ley Q que asocia a cada objeto A de \mathcal{C} el mismo objeto $Q(A) = A$, pero considerado en la categoría cociente, y a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ su clase de equivalencia $[f] : A \rightarrow B$ en \mathcal{C}/\sim , es un funtor.
3. Sea \mathcal{C} una cualquiera de las categorías **Grp**, **A-Mod**, **Top**, **An**. Se define el funtor olvido

$$O : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Con}$$

que asocia a cada objeto G el conjunto subyacente; en otras palabras, “se olvida” de la estructura adicional de grupo, A -módulo, espacio topológico o anillo. A cada morfismo en \mathcal{C} se le asocia su correspondiente aplicación.

Observación. Hay también funtores olvido parciales; por ejemplo, se puede definir un funtor $\mathbf{An} \rightarrow \mathbf{Ab}$ que “se olvida” del producto.

4. Si G es un grupo cualquiera y G' el subgrupo derivado, es decir, el subgrupo generado por todos los conmutadores

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

de G , se tiene definido un grupo. Más aún, si $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, queda inducido un homomorfismo de grupos abelianos:

$$f' : G/G' \rightarrow H/H', \quad xG' \mapsto f(x)H'$$

Ambas asignaciones $G \mapsto G/G'$, $f \mapsto f'$ definen un funtor:

$$\mathcal{H} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

dado por $\mathcal{H}(G) = G/G'$, $\mathcal{H}(f) = f'$, llamado functor abelianización.

5. Sea \mathcal{C} la categoría cuyos objetos son pares (S, A) , donde A es un anillo conmutativo con unidad y $S \subseteq A$ es un *sistema multiplicativo* (es decir, $1 \in S$, o $\notin S$, y $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1s_2 \in S$). Los morfismos en \mathcal{C} son homomorfismos de anillos $f : A \rightarrow B$ tales que $f(S) \subseteq T$, donde $(S, A) \rightarrow (T, B)$.

La construcción del *anillo de fracciones* $S^{-1}A$ define un funtor covariante:

$$\mathcal{F} \text{ rac} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{An},$$

dado sobre objetos por:

$$\mathcal{F} \text{ rac}(S, A) = S^{-1}A.$$

Dado un morfismo $f : (S, A) \rightarrow (T, B)$, definimos el morfismo inducido

$$\mathcal{F} \text{ rac}(f) = f_S : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}B, \quad \frac{a}{s} \mapsto \frac{f(a)}{f(s)}.$$

Este está bien definido por la condición $f(S) \subseteq T$ y por la propiedad universal del anillo de fracciones, así definido, $\mathcal{F} \text{ rac}$ es un funtor covariante de \mathcal{C} en \mathbf{An} , que asigna a cada sistema multiplicativo el correspondiente anillo de fracciones.

6. Sea A un anillo conmutativo con unidad, y $S \subseteq A$ un sistema multiplicativo. La *localización* de un A -módulo M , denotada $S^{-1}M$, define un funtor covariante:

$$S^{-1}(-) : A\text{-Mod} \longrightarrow S^{-1}A\text{-Mod},$$

que actúa sobre los objetos mediante:

$$S^{-1}(-)(M) = S^{-1}M.$$

Dado un morfismo de A -módulos $f : M \rightarrow N$, el funtor lo transforma en:

$$S^{-1}(-)(f) = S^{-1}f : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N, \quad \frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}.$$

Este morfismo está bien definido por la propiedad universal de la localización de un módulo. Por tanto, $S^{-1}(-)$ es un funtor covariante que asigna a cada A -módulo su localización, y a cada morfismo de A -módulos el morfismo inducido entre los módulos localizados.

7. Para cada espacio topológico con un punto distinguido (X, x) , se define el grupo fundamental $\pi_1(X, x)$, formado por las clases de homotopía de los lazos de origen y extremo x .

Además, si $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ es una aplicación continua tal que $f(x) = y$, y $[p] \in \pi_1(X, x)$, entonces $f \circ p \in \pi_1(Y, y)$, y se tiene una aplicación:

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y), \quad [p] \mapsto [f \circ p]$$

que es un homomorfismo de grupos. Es inmediato comprobar que se tiene así un funtor:

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$$

Del comportamiento de la homotopía se puede inducir de este funtor la existencia del correspondiente de $\mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$.

Ejemplo 1.27. 1. Todo funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ define dos funtores contravariantes:

$${}^*F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{D}, \quad \text{y} \quad F^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^\circ,$$

dados por:

$${}^*F(f : B \rightarrow A) = F(f) : F(A) \rightarrow F(B), \quad F^*(f : A \rightarrow B) = F(f) : F(B) \rightarrow F(A).$$

2. Si a cada conjunto A le asociamos $\mathcal{P}(A)$, el conjunto de todos sus subconjuntos, y a cada aplicación $f : A \rightarrow B$ la aplicación

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \quad X \mapsto f^{-1}(X),$$

tenemos definido un funtor contravariante $\mathcal{P} : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}$.

En efecto, comprobamos solo propiedad (2) de la definición 1.25. Sean $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, g \circ f : A \rightarrow C$. Entonces:

$$\mathcal{P}(g \circ f) : \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(A), \quad X \mapsto (g \circ f)^{-1}(X) = f^{-1}(g^{-1}(X)),$$

y por otro lado:

$$\mathcal{P}(f) \circ \mathcal{P}(g) : \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \quad X \mapsto g^{-1}(X) \mapsto f^{-1}(g^{-1}(X)).$$

3. Sea A un anillo cualquiera, y consideremos las categorías $A\text{-Mod}$ y $\text{Mod-}A$, de los A -módulos a izquierda y derecha respectivamente. Se define un funtor contravariante que asocia a cada A -módulo a izquierda M , su A -módulo dual M^* , y a cada homomorfismo de módulos $f : M \rightarrow N$ el homomorfismo dual $f^* : N^* \rightarrow M^*$ dado por:

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f.$$

Llamaremos a este funtor contravariante el funtor de dualidad.

Como es natural, pueden intercambiarse los papeles de ambas categorías de A -módulos y definir el correspondiente funtor de dualidad.

4. La construcción que asigna a cada espacio topológico X el anillo $C(X)$ de funciones reales continuas sobre X , define un funtor contravariante

$$C(-) : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{An},$$

de la categoría de espacios topológicos en la categoría de anillos conmutativos con unidad.

A cada aplicación continua $h : X \rightarrow Y$, se le asigna el morfismo de anillos

$$C(h) : C(Y) \longrightarrow C(X), \quad f \longmapsto f \circ h.$$

Observación. 1. La composición de funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ se define de modo obvio, y se denota como $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$, y su carácter es covariante o contravariante dependiendo de cómo sean F y G .

Así, por ejemplo, la composición del funtor de dualidad de $A\text{-Mod}$ en $\mathbf{Mod}\text{-}A$ con el correspondiente $\mathbf{Mod}\text{-}A$ en $A\text{-Mod}$ define un funtor B de la categoría $A\text{-Mod}$ en $A\text{-Mod}$. Lo llamamos functor bidual.

$$\begin{array}{ll} F : A\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}A & G : \mathbf{Mod}\text{-}A \longrightarrow A\text{-Mod} \\ M \longmapsto M^* & N \longmapsto N^* \\ f \longmapsto f^* & g \longmapsto g^* \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{l} G \circ F : A\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Mod}\text{-}A \longrightarrow A\text{-Mod} \\ M \longmapsto M^* \longmapsto M^{**} \\ (f : M \rightarrow N) \longmapsto (f^* : N^* \rightarrow M^*) \longmapsto (f^{**} : M^{**} \rightarrow N^{**}) \end{array}$$

Donde,

$$\varphi \longmapsto f^*(\varphi) = \varphi \circ f \quad \phi \longmapsto f^{**}(\phi) = f^* \circ \phi.$$

2. Cuando no se mencione el carácter del funtor (covariante o contravariante), se supondrá que sigue la definición (1.24).

Sea ahora \mathcal{C} una categoría cualquiera. Asociamos a cada par de objetos A y B de la misma el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de todos los morfismos de A en B en dicha categoría.

Queda así definida una aplicación:

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathbf{Con}), \quad (A, B) \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Consideramos ahora morfismos $f : A' \rightarrow A, g : B \rightarrow B'$ en \mathcal{C} . Entonces, todo morfismo $\varphi : A \rightarrow B$ define un morfismo $g \circ \varphi \circ f : A' \rightarrow B'$. Con lo que, al variar φ , se tiene definida una aplicación:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B'), \quad \varphi \longmapsto g \circ \varphi \circ f.$$

Observamos que, si $f_1 : A'' \rightarrow A'$ y $g_1 : B' \rightarrow B''$ son nuevos morfismos y componemos primero $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)$ y luego $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f_1, g_1)$, tenemos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f_1, g_1)(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)(\varphi)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f_1, g_1)(g \circ \varphi \circ f) = g_1 \circ g \circ \varphi \circ f \circ f_1.$$

Por tanto se concluye que:

$$\text{Hom}_C(f \circ f_1, g_1 \circ g) = \text{Hom}_C(f_1, g_1) \circ \text{Hom}_C(f, g).$$

Es decir, $\text{Hom}_C(-, -)$ tiene un comportamiento contravariante en la primera variable y covariante en la segunda. Notamos además que, trivialmente, se cumple, $\text{Hom}_C(1_A, 1_B) = 1_{\text{Hom}_C(A, B)}$. Con todo ello, concluimos que hemos definido un bifunctor:

$$\text{Hom}_C : C \times C \longrightarrow \mathbf{Con}, \quad (1.2)$$

dado por:

$$(A, B) \mapsto \text{Hom}_C(A, B),$$

$$(f, g) : (A', B) \rightarrow (A, B') \mapsto \text{Hom}_C(f, g) : \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_C(A', B'), \quad \varphi \mapsto g \circ \varphi \circ f.$$

En general, un bifunctor no es más que un funtor de una categoría producto $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow C$, con un comportamiento covariante o contravariante en cada una de las dos variables.

Haciendo uso de la categoría opuesta en la variable adecuada, podemos suponer que un bifunctor es covariante en ambas variables. Así, el funtor hom anterior puede interpretarse sin más como un funtor de $C^o \times C \rightarrow \mathbf{Con}$.

Definición 1.28. Un funtor $F : C \rightarrow \mathcal{D}$ se llama pleno si todas las aplicaciones

$$\text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

son suprayectivas.

Un funtor se llama fiel si esas aplicaciones son inyectivas.

Un funtor es una inmersión si

$$F : \text{Mor}(C) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$$

es una aplicación inyectiva.

Un funtor $F : C \rightarrow \mathcal{D}$ se llama denso si para todo objeto $D \in \mathcal{D}$ existe algún objeto $A \in C$ tal que $F(A) \cong D$ (es decir, existe un isomorfismo $f : F(A) \rightarrow D$ en la categoría \mathcal{D}).

Lema 1.29 (Caracterización de inmersiones). *Un funtor $F : C \rightarrow \mathcal{D}$ es una inmersión si y sólo si es fiel e inyectivo entre las clases de objetos.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que F es una inmersión, es decir, la aplicación $F : \text{Mor}(C) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$, es inyectiva. Veamos que entonces es fiel e inyectivo en objetos.

- Sean $f, g : A \rightarrow B$ tales que $F(f) = F(g)$. Por la inyectividad global de F , se sigue que F es inyectiva en cada componente de $\text{Mor}(C)$, luego $f = g$. Luego F es fiel.
- Supongamos que $F(A) = F(A')$. Consideremos las identidades $1_A : A \rightarrow A$ y $1_{A'} : A' \rightarrow A'$. Como $F(1_A) = 1_{F(A)} = 1_{F(A')} = F(1_{A'})$, se concluye que $1_A = 1_{A'}$, luego $A = A'$.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que F es fiel e inyectivo en objetos. Veamos que entonces la aplicación

$$F : \text{Mor}(C) = \bigsqcup_{A, B} \text{Hom}_C(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$$

es inyectiva.

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : A' \rightarrow B'$ en C tales que $F(f) = F(g)$. Entonces, como $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ y $F(g) : F(A') \rightarrow F(B')$, se deduce que $F(A) = F(A')$ y $F(B) = F(B')$. Como F es inyectivo en objetos entonces $A = A'$ y $B = B'$. Luego $f, g \in \text{Hom}_C(A, B)$, y como F es fiel, se sigue que $f = g$.

Por tanto, F es inyectivo sobre el conjunto de todos los morfismos de C , es decir, F es una inmersión. \square

Intuitivamente la inyectividad entre objetos implica que dos morfismos con la misma imagen bajo F , salgan siempre de la misma componente de $\text{Mor}(C)$ y por F ser fiel, es inyectiva en cada componente; luego lo es globalmente.

Lema 1.30. Sea $F : C \rightarrow \mathcal{D}$ una inmersión. Entonces la clase de los objetos y morfismos que provienen de F , es una subcategoría \mathcal{S} de \mathcal{D} .

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) = \{F(A) \mid A \in \text{Ob}(C)\}$,
- $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(F(A), F(B)) = \{F(f) \mid f \in \text{Hom}_C(A, B)\}$,

En otras palabras, todo functor inmersión identifica a C con una subcategoría plena de \mathcal{D} .

Demostración. En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Observación. Este resultado es importante porque nos dice que si un functor es inmersión, entonces podemos ver a la categoría C como una parte completamente integrada dentro de \mathcal{D} , se dice que C queda sumergida dentro de \mathcal{D} .

Ejemplo. 1. El functor canónico $Q : C \rightarrow C/\sim$, entre una categoría y su categoría cociente, es pleno y denso, pero sólo en el caso trivial es fiel.

2. Todo functor inclusión $I : C \rightarrow \mathcal{D}$ de una subcategoría C en la categoría \mathcal{D} es una inmersión.

- a) La inclusión **DivAb** \rightarrow **Ab**, de la categoría de grupos abelianos divisibles en la categoría de todos los grupos abelianos, es un functor pleno, fiel y una inmersión. En efecto, los morfismos en **DivAb** son los mismos que en **Ab**, restringidos a grupos divisibles véase (1.1).
- b) La inclusión **Ab** \rightarrow **Grp**, de la categoría de grupos abelianos en la categoría de todos los grupos, también es una inmersión y es fiel. No es plena pues existen morfismos en **Grp** entre grupos abelianos que no preservan la conmutatividad.

3. Todo functor de olvido es fiel.

Transformaciones naturales

Ahora definiremos el segundo concepto fundamental de esta sección y que relaciona dos funtores entre sí. Para dar una definición precisa del mismo se definieron los funtores, que a su vez necesitaron la definición de categorías. Siguiendo así un patrón estructurado.

Definición 1.31. Sean $F, G : C \rightarrow \mathcal{D}$ dos funtores. Se llama transformación natural de F en G a una función

$$\eta : \text{Ob}(C) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$$

que asocia a cada objeto A en C un morfismo

$$\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

tal que para cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en C , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B) \end{array}$$

Escribimos $\eta : F \rightarrow G$.

Si en una transformación natural $\eta : F \rightarrow G$, todos los morfismos η_A son isomorfismos, se dice que η es un isomorfismo natural o que F y G son naturalmente isomorfos. En este caso escribimos $F \approx G$.

Ejemplo 1.32. Veamos algunos ejemplos de transformaciones naturales.

1. Empezamos con un ejemplo trivial. La transformación natural $1_F : F \rightarrow F$ del funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ en sí mismo asocia a cada objeto A de \mathcal{C} el morfismo identidad $1_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(A)$. Además, en este caso es obvio que 1_F es un isomorfismo natural, $F \approx F$.
2. Sea $\mathcal{C} = A\text{-mod}$ la categoría de los A -módulos con A un anillo cualquiera. Recordemos que dado un A -módulo M cualquiera, todo elemento $x \in M$ define una forma lineal

$$\hat{x} : M^* \longrightarrow A, \quad (f : M \rightarrow A) \mapsto \hat{x}(f) = f(x),$$

lo que permite definir un morfismo $\eta_M : M \rightarrow M^{**}$, $x \mapsto \hat{x}$.

Este es un homomorfismo de A -módulos. Para todo homomorfismo $f : M \rightarrow N$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_M} & M^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ N & \xrightarrow{\eta_N} & N^{**} \end{array}$$

es conmutativo. Por tanto, los morfismos η_M definen una transformación natural $\eta : 1_{A\text{-mod}} \rightarrow (-)^{**}$, del funtor identidad al funtor bidual.

Si además $A = K$ es un cuerpo conmutativo y nos restringimos a la subcategoría $\mathcal{V} \subseteq K\text{-mod}$ formada por los espacios vectoriales de dimensión finita, la transformación natural antes definida es un isomorfismo natural de funtores.

Recordamos que en los espacios vectoriales de dimensión finita, (no en general, véase el *Teorema de Erdős-Kaplansky*) si V es un espacio vectorial, V^* tiene la misma dimensión y por tanto V^{**} también.

La aplicación

$$\begin{aligned} \eta_V : V &\longrightarrow V^{**} & v &\longmapsto \eta_V(v) \\ \eta_V(v) : V^* &\longrightarrow K, & \varphi &\longmapsto \eta_V(v)(\varphi) = \varphi(v) \end{aligned}$$

es inyectiva, pues si $\eta_V(v) = 0$, entonces

$$\forall \varphi \in V^*, \quad \eta_V(v)(\varphi) = \varphi(v) = 0,$$

es decir, todos los elementos del dual se anulan en v , lo que implica que $v = 0$.

Tomando bases $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ y $V^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle$ base dual de la anterior, donde $e^i(e_j) = \delta_{ij}$, un vector $v = \sum_j \lambda_j e_j$ cumple que

$$e^i(v) = \sum_j \lambda_j e^i(e_j) = \sum_j \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i.$$

Si $v \neq 0$, entonces existe al menos un $\lambda_i \neq 0$, por tanto $\eta_V(v) \neq 0$. Luego η_V es inyectiva, y como $\dim V = \dim V^{**}$, es un isomorfismo.

3. Sean A un anillo conmutativo con unidad, y $S \subseteq T \subseteq A$ dos sistemas multiplicativos. La inclusión $S \subseteq T$ induce, para todo A -módulo M , un morfismo de localizaciones, que en particular es un morfismo de A -módulos:

$$\lambda_M : S^{-1}M \longrightarrow T^{-1}M, \quad \frac{m}{s} \mapsto \frac{m}{s},$$

bien definido porque todo $s \in S$ pertenece también a T . Además, para todo morfismo de A -módulos $f : M \rightarrow N$, los siguientes diagramas conmutan de manera obvia:

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}f} & S^{-1}N \\ \lambda_M \downarrow & & \downarrow \lambda_N \\ T^{-1}M & \xrightarrow{T^{-1}f} & T^{-1}N \end{array}$$

Esto define una transformación natural $\lambda : S^{-1}(-) \rightarrow T^{-1}(-)$ entre los funtores de localización, vistos como funtores entre $A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$.

4. El functor abelianización $\mathcal{H} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$, que asocia a cada grupo G , el cociente G/G' , y a cada homomorfismo de grupos $f : G \rightarrow H$, el homomorfismo inducido

$$\mathcal{H}(f) : G/G' \rightarrow H/H', \quad \mathcal{H}(f)(xG') = f(x)H',$$

donde G' y H' son los subgrupos derivados, es decir, los generados por los conmutadores. A cada grupo G le asociamos la proyección canónica:

$$\pi_G : G \rightarrow G/G', \quad x \mapsto xG'.$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_G} & G/G' \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{H}(f) \\ H & \xrightarrow{\pi_H} & H/H' \end{array}$$

Que claramente es conmutativo, pues:

$$\begin{aligned} \pi_H \circ f : G &\longrightarrow H \longrightarrow H/H', & x &\mapsto f(x) \mapsto f(x)H', \\ \mathcal{H}(f) \circ \pi_G : G &\longrightarrow G/G' \longrightarrow H/H', & x &\mapsto xG' \mapsto f(x)H'. \end{aligned}$$

Por tanto, la aplicación $G \mapsto \pi_G$ define una transformación natural:

$$\pi : \mathbf{1}_{\mathbf{Grp}} \rightarrow \mathcal{H}$$

Proposición 1.33 (Propiedades de transformaciones e isomorfismos naturales). *Mostramos las principales propiedades de las transformaciones naturales.*

- 1) Dadas dos categorías \mathcal{C} , \mathcal{D} y tres funtores

$$F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D},$$

junto con dos transformaciones naturales $\eta : F \rightarrow G$ y $\omega : G \rightarrow H$, entonces para todo morfismo $f : A \rightarrow B$ en \mathcal{C} , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\
\eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\
G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \\
\omega_A \downarrow & & \downarrow \omega_B \\
H(A) & \xrightarrow{H(f)} & H(B)
\end{array}$$

Permite definir una nueva transformación natural $\omega \circ \eta : F \rightarrow H$ dada por

$$(\omega \circ \eta)_A = \omega_A \circ \eta_A \quad \text{para todo } A \in \text{Ob}(C),$$

llamada composición de ω con η . Esta composición es asociativa en los términos Σ, ω, η en los que estén definidas las composiciones.

También es claro que para todo functor $F : C \rightarrow D$, existe una transformación natural identidad (o idéntica),

$$1_F : F \rightarrow F.$$

Con todo esto, cuando C es una categoría pequeña, podemos definir una categoría

$$\mathbf{Fun}(C, D),$$

cuyos objetos son funtores $F, G, H, \dots : C \rightarrow D$, y cuyos morfismos entre objetos F y G son las transformaciones naturales $\eta : F \rightarrow G$.

Si D es también pequeña, entonces $\mathbf{Fun}(C, D)$ también lo será.

- 2) Sean $F, G : C \rightarrow D$ y $H : D \rightarrow E$ funtores, y sea $\eta : F \rightarrow G$ una transformación natural. Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en C , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\
\eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\
G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B)
\end{array}$$

Aplicando el functor H , obtenemos otro diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
H(F(A)) & \xrightarrow{H(F(f))} & H(F(B)) \\
H(\eta_A) \downarrow & & \downarrow H(\eta_B) \\
H(G(A)) & \xrightarrow{H(G(f))} & H(G(B))
\end{array}$$

Esto define una transformación natural $H\eta : H \circ F \rightarrow H \circ G$. Si η es un isomorfismo natural, entonces $H\eta$ también lo es³.

³Todo functor preserva isomorfismos: si $f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo en C , existe $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Aplicando el functor F , se tiene:

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(1_A) = 1_{F(A)}, \quad F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(1_B) = 1_{F(B)}.$$

Por tanto, $F(f)$ es un isomorfismo en D , con inverso $F(g)$.

3) Sean $F, G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ dos funtores, $\eta : F \rightarrow G$ una transformación natural, y sea $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ otro funtor. Entonces $F \circ K$ y $G \circ K$ son funtores de \mathcal{C} a \mathcal{D} , y η induce una transformación natural:

$$\eta K : F \circ K \rightarrow G \circ K.$$

Para todo morfismo $g : C \rightarrow D$ en \mathcal{C} , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(K(C)) & \xrightarrow{F(K(g))} & F(K(D)) \\ \eta_{K(C)} \downarrow & & \downarrow \eta_{K(D)} \\ G(K(C)) & \xrightarrow{G(K(g))} & G(K(D)) \end{array}$$

Por tanto, ηK es una transformación natural. Además, si η es un isomorfismo natural, entonces ηK también lo es.

Observación. Las transformaciones naturales, los isomorfismos naturales de funtores, así como las composiciones descritas en los puntos anteriores se definen de manera análoga en el caso de funtores contravariantes.

Por último, veamos una de las categorías más útiles que han emergido en la matemática reciente [nLab25], que además está relacionada con la última categoría que hemos definido.

Sea Δ la categoría simplicial cuyos objetos son los conjuntos ordenados $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$ para $n \geq 0$ y cuyos morfismos son funciones monótonas no decrecientes. Un conjunto simplicial es un funtor contravariante,

$$X : \Delta^{\circ} \rightarrow \mathbf{Con}.$$

Para cada $n \geq 0$, $X_n = X([n])$ es el conjunto de n -simplices, es decir para $n = 0, 1, 2, 3$, estos son:

y para cada morfismo $\theta : [m] \rightarrow [n]$ en Δ , existe una función correspondiente $X(\theta) : X_n \rightarrow X_m$

De los morfismos fundamentales de la categoría Δ , se definen los siguientes operadores, que no son más que la imagen por el funtor de los primeros.

- Las aplicaciones cara $d_i = X(\delta^i) : X_n \rightarrow X_{n-1}$ para $0 \leq i \leq n$ provienen de los morfismos $\delta^i : [n-1] \rightarrow [n]$ en la categoría Δ , que omiten el elemento i . Geométricamente, $d_i(x)$ representa la i -ésima cara del n -símplice $x \in X_n$, es decir, el $(n-1)$ -símplice que se obtiene eliminando el vértice número i .
- Las aplicaciones de degeneración $s_i = X(\sigma^i) : X_n \rightarrow X_{n+1}$ para $0 \leq i \leq n$ provienen de los morfismos $\sigma^i : [n+1] \rightarrow [n]$, que repiten el elemento i . Geométricamente, $s_i(x)$ representa un $n+1$ -símplice degenerado, es decir un símplice que no añade nueva información geométrica respecto a $x \in X_n$, ya que colapsa una de sus dimensiones.

Ejemplo 1.34. Construimos un conjunto simplicial $X : \Delta^{\circ} \rightarrow \mathbf{Con}$, para ello definimos X como sigue, dando todos los elementos no degenerados:

- $X([0]) = X_0 = \{v_0, v_1, v_2\}$ (tres vértices)
- $X([1]) = X_1 = \{e_{01}, e_{12}, e_{02}\}$ (tres aristas)
- $X([2]) = X_2 = \{t_{012}\}$ (un triángulo 2-dimensional)
- $X([n]) = \emptyset$ para $n > 2$

Este conjunto simplicial es trivial en dimensiones superiores, es decir, se anula sobre todos los objetos $[n]$ con $n > 2$. Veamos cómo son algunas de las aplicaciones.

Aplicaciones cara desde X_2 a X_1 , para el 2-símplice $t_{012} \in X_2$, se tiene:

$$d_0(t_{012}) = e_{12}, \quad (\text{omitir } v_0)$$

$$d_1(t_{012}) = e_{02}, \quad (\text{omitir } v_1)$$

$$d_2(t_{012}) = e_{01}, \quad (\text{omitir } v_2)$$

Aplicaciones cara desde X_1 a X_0 :

$$d_0(e_{01}) = v_1, \quad d_1(e_{01}) = v_0$$

$$d_0(e_{12}) = v_2, \quad d_1(e_{12}) = v_1$$

$$d_0(e_{02}) = v_2, \quad d_1(e_{02}) = v_0$$

Aplicaciones de degeneración desde X_1 a X_2 , dado $e_{01} \in X_1$, se obtienen símlices degenerados en X_2 como:

$$s_0(e_{01}) = \text{triángulo degenerado con vértices } v_0, v_0, v_1$$

$$s_1(e_{01}) = \text{triángulo degenerado con vértices } v_0, v_1, v_1$$

Estos elementos no representan triángulos geométricos propiamente dichos, pero forman parte del conjunto simplicial como símlices degenerados.

Denotamos por $\mathbf{SCon} = \text{Fun}(\Delta^\circ, \mathbf{Con})$ a la categoría de conjuntos simpliciales. Sus objetos son los funtores $X: \Delta^\circ \rightarrow \mathbf{Con}$. Un morfismo en \mathbf{SCon} , es decir, una transformación natural $\eta: X \rightarrow Y$, está formada por una familia de funciones:

$$\eta_n: X_n \rightarrow Y_n \quad \text{para cada } n \geq 0,$$

que satisfacen la condición de conmutatividad para todo morfismo $\phi: [m] \rightarrow [n]$ en Δ , expresada mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\eta_n} & Y_n \\ X(\phi) \downarrow & & \downarrow Y(\phi) \\ X_m & \xrightarrow{\eta_m} & Y_m \end{array}$$

Dicho de otro modo, η es una transformación compatible con toda la estructura simplicial: para cada símlice $x \in X_n$, su imagen $\eta_n(x)$ en Y_n debe conservar las relaciones de cara y degeneración.

Geoméricamente, una transformación natural $\eta: X \rightarrow Y$ representa una forma de transformar el conjunto simplicial X en el conjunto simplicial Y que respeta la estructura simplicial en todas las dimensiones. En particular:

- $\eta_0: X_0 \rightarrow Y_0$: transforma los vértices de X en vértices de Y ;
- $\eta_1: X_1 \rightarrow Y_1$: transforma las aristas de X en aristas de Y , conectando los vértices transformados;
- $\eta_2: X_2 \rightarrow Y_2$: transforma los triángulos de X en triángulos de Y , de forma que sus lados y vértices son las imágenes correspondientes; así sucesivamente en dimensiones superiores.

Dicho de forma más explícita, la transformación natural $\eta: X \rightarrow Y$ debe satisfacer, para todo $n \geq 0$ y todo $0 \leq i \leq n$, las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\eta_{n-1} \circ d_i^X &= d_i^Y \circ \eta_n: X_n \rightarrow Y_{n-1}, \\ \eta_{n+1} \circ s_i^X &= s_i^Y \circ \eta_n: X_n \rightarrow Y_{n+1},\end{aligned}$$

donde d_i^X y s_i^X son las aplicaciones cara y degeneración en el conjunto simplicial X , y análogamente para Y .

1.4. Isomorfismo y equivalencia de categorías

Definición 1.35. Un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un isomorfismo de categorías si existe un funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que

$$G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Se dice entonces que las categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} son isomorfas y escribiremos $\mathcal{C} = \mathcal{D}$.

Por ejemplo, si a cada anillo A le asociamos su opuesto⁴ A° , y a cada homomorfismo $f : A \rightarrow B$ de anillos le asociamos el propio f , se obtiene un funtor de la categoría **An** en sí misma, que además es un isomorfismo con inversa el mismo.

Proposición 1.36. Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Entonces son equivalentes:

1. F es un isomorfismo de categorías.
2. F es fiel y pleno, y la aplicación inducida entre $\text{Ob}(\mathcal{C})$ y $\text{Ob}(\mathcal{D})$ es una biyección.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Supongamos que existen funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tales que

$$G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Entonces, para cada par de objetos $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, consideramos el morfismo inducido

$$F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)), \quad f \mapsto F(f),$$

y análogamente el morfismo inducido por G

$$G_{F(A),F(B)} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \quad h \mapsto G(h).$$

Por hipótesis, la composición $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ implica que $G_{F(A),F(B)} \circ F_{A,B} = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}$, y la identidad $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$ implica que $F_{A,B} \circ G_{F(A),F(B)} = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))}$.

Esto demuestra que $F_{A,B}$ es una biyección: en particular, es inyectiva y sobreyectiva, lo que implica que F es fiel y pleno.

Asimismo, como $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$, se define una biyección entre las clases de objetos de las categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} , simplemente restringiendo los funtores a objetos.

(2) \Rightarrow (1) Recíprocamente, supongamos que (2) es cierta. La aplicación inversa de $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ define una función

$$G : \text{Ob}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

Supongamos que $f' : A' \rightarrow B'$ es un morfismo cualquiera en \mathcal{D} , donde $A' = F(A)$ y $B' = F(B)$.

Como F es fiel y pleno, se tiene:

$$F_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

es biyectiva. Por ser pleno, existe $f : A \rightarrow B$ tal que $F(f) = f'$, y por ser fiel, este f es único. Podemos definir entonces $G(f') = f$.

Con esto, quedan definidas las imágenes de objetos y morfismos, es decir, el funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, inverso de F .

□

⁴El *anillo opuesto* A° de un anillo A es el anillo que tiene la misma estructura aditiva que A , pero cuya multiplicación está definida por $a \cdot^\circ b := ba$, es decir, se invierte el orden del producto.

Ejemplo 1.37. Supongamos que C es una categoría pequeña. Para todo objeto A de C , se define el conjunto A' formado por todos los morfismos $x : X \rightarrow A$, con X objeto de C , es decir:

$$A' := \bigcup_{X \in \text{Ob}(C)} \text{Hom}_C(X, A),$$

que en definitiva es un objeto de la categoría **Con**.

Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en C , definimos la aplicación

$$f' : A' \rightarrow B', \quad x \mapsto f \circ x,$$

que es un morfismo en **Con**. Observamos que queda así definido un functor:

1. $(\text{I}_A)' : A' \rightarrow A', x \mapsto \text{I}_A \circ x \Rightarrow (\text{I}_A)' = \text{I}_{A'}$
2. Si $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ son morfismos en C , entonces:

$$(g \circ f)' : A' \rightarrow C', \quad x \mapsto (g \circ f) \circ x,$$

y

$$g' \circ f' : A' \rightarrow C', \quad x \mapsto g \circ (f \circ x) \Rightarrow (g \circ f)' = g' \circ f'.$$

Denotamos a este functor $R : C \rightarrow \mathbf{Con}, A \mapsto A', f \mapsto f'$.

Observamos que si A, B son objetos de **Con** tales que $A' = B'$, entonces $\text{I}_B \in A'$, es decir, existe X tal que $\text{I}_B : X \rightarrow A$ lo que implica que $A = B$. Por tanto, la aplicación entre objetos que define el functor R es inyectiva.

Si los morfismos $f : A \rightarrow B, g : D \rightarrow C$ son tales que f', g' se pueden componer, por ejemplo, existe $g' \circ f'$, es decir, $g' \circ f' : A' \rightarrow B' = D' \rightarrow C'$ entonces necesariamente $B' = D'$, y por tanto $B = D$. Luego $g' \circ f' = (g \circ f)'$ con lo que los conjuntos A' y las aplicaciones f' (imágenes del functor R) constituyen una subcategoría C' de **Con**, de modo que $A \mapsto A'$ es una biyección entre los conjuntos $\text{Ob}(C)$ y $\text{Ob}(C')$.

Supongamos ahora que $f, g : A \rightarrow B$ son morfismos en C tales que $f' = g'$, entonces:

$$f = f \circ \text{I}_A = f'(\text{I}_A) = g'(\text{I}_A) = g \circ \text{I}_A = g,$$

pues $\text{I}_A \in \text{Hom}_C(A, A) \subset A'$.

Por lo que $f = g$, es decir, R es un functor fiel. Y como por definición todo morfismo en C' es una aplicación de la forma $f' : A' \rightarrow B'$, R es pleno.

Proposición 1.38. *El functor R establece un isomorfismo entre la categoría pequeña C y una subcategoría C' de **Con**.*

Demostración. Por el razonamiento anterior, R es un functor pleno y fiel, y además biyectivo entre $\text{Ob}(C)$ y $\text{Ob}(C')$; luego, por (1.36), se concluye. \square

Ejemplo 1.39. Si (G, \cdot) es un grupo cualquiera y se interpreta como una categoría donde recordamos que se trata de una categoría con un solo objeto $\{*\}$ y cuyos morfismos son G :

1. $\text{Ob}(\mathcal{G}) = \{*\}$
2. $\text{mor}(\mathcal{G}) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$

3. La composición de morfismos es el producto del grupo.

Esto implica que cada morfismo es un isomorfismo, pues en un grupo todo elemento tiene inverso. Aplicando el funtor R , podemos ver esta categoría como una subcategoría de **Con**:

1. Al objeto $* \in \mathcal{G}$, el funtor R le asigna $R(*) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$
2. A cada morfismo $g : * \rightarrow *$ en \mathcal{G} , el funtor R le asocia la permutación de G dada por la acción del grupo sobre sí mismo.

$$R(g) : G \rightarrow G, \quad R(g)(x) = g \cdot x$$

Por tanto, el funtor R sobre los morfismos

$$R|_{\text{mor}(\mathcal{G})} : G \longrightarrow \{R(g) : G \rightarrow G \mid R(g)(x) = g \cdot x\} \subseteq \Sigma_G; \quad g \mapsto R(g)$$

es en particular un homomorfismo de grupos e inyectivo. Luego G es isomorfo a su imagen, que es un subgrupo de Σ_G . A este resultado se le conoce como *Teorema de Cayley*.

Recordemos que un grupode (1.4) es una categoría en la que toda flecha es un isomorfismo. En este contexto, es natural considerar funtores entre grupoides que respeten esta estructura:

Definición 1.40. Un morfismo $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ entre grupoides es un funtor de categorías. Los isomorfismos de grupoides son los isomorfismos de categorías.

Proposición 1.41. Sean G y G' dos grupos considerados como grupoides. Entonces, los morfismos de grupoides $G \rightarrow G'$ son exactamente los morfismos de grupos.

Demostración. Recordemos que un grupo G puede verse como un grupode \mathcal{G} con un único objeto x_0 , y tal que $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(x_0, x_0) = G$. De forma análoga, G' se identifica con el grupode \mathcal{G}' con único objeto x'_0 , y $\text{Hom}_{\mathcal{G}'}(x'_0, x'_0) = G'$.

Un funtor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ debe asignar:

- Al objeto $x_0 \in \mathcal{G}$, un objeto $F(x_0) = x'_0 \in \mathcal{G}'$.
- A cada morfismo $g \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x_0, x_0) = G$, un morfismo $F(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{G}'}(x'_0, x'_0) = G'$.

La preservación de la composición implica que $F : G \rightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos:

$$F(g \circ g') = F(g) \circ F(g') \quad \text{para todo } g, g' \in G.$$

Por tanto, todo funtor entre grupoides con un único objeto se corresponde con un morfismo de grupos, y recíprocamente, todo morfismo de grupos define un funtor entre los correspondientes grupoides. \square

El isomorfismo de categorías es un fenómeno muy raro y por tanto de poco interés. Una mejor idea es la siguiente:

Definición 1.42. Un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ se llama equivalencia de categorías si existe un funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que

$$G \circ F \approx \text{I}_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad F \circ G \approx \text{I}_{\mathcal{D}}.$$

Cuando esto ocurra, diremos que las categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} son equivalentes o escribiremos, $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$

Sea $\mathcal{V} = K\text{-Vect}$, la categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K y aplicaciones lineales. Definimos ahora \mathbf{Mat}_K , la categoría cuyos objetos son los números naturales $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$ y los morfismos $n \rightarrow m$ son las matrices $m \times n$ con entradas en K .

Si en cada espacio vectorial en $\text{Ob}(\mathcal{V})$ se fija una base la cual podemos suponer que es la canónica si ese espacio es K^n , entonces cada aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ se puede representar por su matriz coordinada A en las correspondientes bases. Esto permite definir un funtor

$$F : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{Mat}_K, \quad F(V) = \dim V, \quad F(f) = A.$$

Por otro lado, si a cada número natural n se le asocia el espacio vectorial K^n y a cada matriz $A : n \rightarrow m$ la aplicación lineal de K^n en K^m que en bases canónicas tiene por matriz A , tenemos un funtor.

$$G : \mathbf{Mat}_K \rightarrow \mathcal{V}.$$

Entonces F y G definen una equivalencia de categorías que no es un isomorfismo de categorías, veamos que efectivamente es así. Definimos la transformación natural $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{V}} \rightarrow G \circ F$ tal que para cada objeto $V \in \text{Ob}(\mathcal{V})$, definimos

$$\eta_V : V \rightarrow G(F(V)) = K^{\dim V}$$

como el isomorfismo que envía un vector a su coordenada respecto a la base fija B_V de V , es decir,

$$\eta_V(v) = [v]_{B_V}.$$

Cada η_V es un isomorfismo de espacios vectoriales, y para cada morfismo $f : V \rightarrow W$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \eta_V \downarrow & & \downarrow \eta_W \\ K^{\dim V} & \xrightarrow{G(F(f))} & K^{\dim W} \end{array}$$

En efecto, si $A = F(f)$ es la matriz de la aplicación f respecto de las bases B_V y B_W , entonces $G(F(f))$ es la aplicación lineal $x \mapsto Ax$, y

$$\eta_W(f(v)) = [f(v)]_{B_W} = A \cdot [v]_{B_V} = G(F(f))(\eta_V(v)).$$

Definimos la transformación natural $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \mathbf{1}_{\mathbf{Mat}_K}$ tal que para cada objeto $n \in \text{Ob}(\mathbf{Mat}_K)$, tenemos:

$$F(G(n)) = F(K^n) = \dim(K^n) = n = \mathbf{1}_{\mathbf{Mat}_K}(n),$$

y para cada morfismo $A : n \rightarrow m$,

$$F(G(A)) = A = \mathbf{1}_{\mathbf{Mat}_K}(A).$$

Luego ε es la transformación natural idéntica.

Aunque en este ejemplo en concreto la verificación de la equivalencia de categorías parece casi trivial, era necesario demostrarla directamente a partir de la definición, por laborioso que resulte. Como en muchas otras definiciones que hemos visto, más adelante, presentamos una caracterización de las equivalencias de categorías que nos permitirá demostrar este tipo de resultados de manera más rápida y sistemática. Antes de eso, veamos el siguiente lema.

Lema 1.43. *La definición de equivalencia de categorías es una relación de equivalencia.*

Demostración. Claramente es simétrica y reflexiva.

Supongamos ahora que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ son funtores, equivalencias de categorías, entonces existen $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ y $G' : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ tales que

$$G \circ F \approx \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, \quad F \circ G \approx \mathbf{1}_{\mathcal{D}}, \quad G' \circ F' \approx \mathbf{1}_{\mathcal{D}}, \quad F' \circ G' \approx \mathbf{1}_{\mathcal{E}}.$$

Por las propiedades 2) y 3) (1.33) de las transformaciones naturales, podemos construir

$$\eta : F \circ G \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \Rightarrow F' \circ \eta : F' \circ F \circ G \rightarrow F',$$

lo que se puede componer como:

$$(F' \circ \eta) \circ G' : (F' \circ F) \circ (G \circ G') \rightarrow F' \circ G'.$$

Por tanto:

$$(F' \circ F) \circ (G \circ G') \approx F' \circ G' \approx \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$$

y del mismo modo

$$(G \circ G') \circ (F' \circ F) \approx \mathbf{1}_{\mathcal{C}}.$$

Por tanto, la equivalencia de categorías es transitiva. \square

Proposición 1.44. *Un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías si y solo si es fiel, pleno y denso.*

Demostración. Supongamos que F es una equivalencia de categorías, entonces existe un funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ que verifica

$$F \circ G \approx \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \quad \text{y} \quad G \circ F \approx \mathbf{1}_{\mathcal{C}}.$$

Por $F \circ G \approx \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$, todo objeto A'' en \mathcal{D} es isomorfo a $F(G(A''))$, y por tanto es denso.

Sean ahora A y B objetos de \mathcal{C} , y $f : A \rightarrow B$ un morfismo. Se tiene el diagrama conmutativo en \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_A} & G(F(A)) \\ f \downarrow & & \downarrow G(F(f)) \\ B & \xrightarrow{\alpha_B} & G(F(B)) \end{array}$$

donde la transformación natural $\alpha : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ es un isomorfismo natural, luego α_A y α_B son isomorfismos. Tenemos así una aplicación biyectiva:

$$\varphi_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(F(A)), G(F(B)))$$

dada por $\varphi_{A,B}(f) = \alpha_B \circ f \circ \alpha_A^{-1}$, que verifica:

$$\varphi_{A,B}(f) = G(F(f)) \quad \Rightarrow \quad G(F(f)) = \varphi_{A,B}(f).$$

Con lo que, por $\varphi_{A,B}$ biyectiva, $F_{A,B}$ es inyectiva y $G(F_{A,B})$ es suprayectiva.

Del mismo modo, tomando el isomorfismo natural $\beta : \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \rightarrow F \circ G$, se demuestra que todas las aplicaciones $G_{A',B'}$ son inyectivas. En particular, los $G(F_{A,B})$ son inyectivos y por lo anterior biyectivos. Por tanto, como $\varphi_{A,B}$ es biyectiva, necesariamente $F_{A,B}$ es biyectiva, que es lo mismo que decir que F es fiel y pleno.

Recíprocamente, supongamos que F es denso, fiel y pleno. Por densidad, todo objeto $A' \in \mathcal{D}$ es isomorfo a algún objeto en la subclase $\text{Im}(F) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{D})$, es decir

$$\forall A' \in \text{Ob}(\mathcal{D}) \exists A \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \text{ tal que } F(A) \cong A',$$

y el axioma de elección para clases permite seleccionar en cada clase de isomorfía de $\text{Im}(F)$ un representante,

$$[F(A)] = \{A' \in \text{Ob}(\mathcal{D}) \mid A' \cong F(A)\} \subseteq \text{Im}(F).$$

y de nuevo el mismo axioma permite seleccionar una antiimagen en $\text{Ob}(\mathcal{C})$ de ese representante. Es decir supongamos que A' es el representante de la clase $[F(A)]$, entonces le asociamos de antiimagen A . Esto muestra que podemos definir:

$$G : \text{Ob}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad A' \mapsto G(A') \quad (*)$$

De modo que $F \circ G(A') \cong A'$. Más aún, podemos elegir para tal A' un isomorfismo

$$\eta_{A'} : F(G(A')) \rightarrow A'.$$

En particular, si $A' = F(A)$, definimos $G(A') = A$ y

$$\eta_{A'} = \text{I}_{A'} : F(G(A')) = F(A) = A'.$$

Sea ahora $f : A' \rightarrow B'$ un morfismo en \mathcal{D} . Se tiene que

$$\eta_{B'} \circ f \circ \eta_{A'}^{-1} : F(G(A')) \rightarrow F(G(B')).$$

es un morfismo entre $F(G(A'))$ y $F(G(B'))$, que por la biyectividad de la aplicación $F_{G(A'), G(B')}$, define un morfismo

$$f_i : G(A') \rightarrow G(B') \quad \text{tal que} \quad F(f_i) = \eta_{B'}^{-1} \circ f \circ \eta_{A'}.$$

Si ponemos $f_i = G(f)$, podemos concluir que G es un funtor de \mathcal{D} en \mathcal{C} , de modo que $G(A')$ está definido mediante (*), y $G(f)$ mediante lo anterior.

Veamos que efectivamente cumple la definición de funtor.

(i) Tenemos que $G(f) = f_i$ tal que

$$F(f_i) = \eta_{A'}^{-1} \circ \text{I}_{A'} \circ \eta_{A'} = \text{I}_{F(G(A'))}.$$

Ahora, si $f = \text{I}_{A'} : A' \rightarrow A'$, entonces

$$F(G(\text{I}_{A'})) = \eta_{A'}^{-1} \circ \text{I}_{A'} \circ \eta_{A'} = \eta_{A'}^{-1} \circ \eta_{A'} = \text{I}_{F(G(A'))}.$$

A su vez, por F funtor, tenemos que $\text{I}_{G(A')} : G(A') \rightarrow G(A')$ tiene como imagen por F a $\text{I}_{F(G(A'))}$, y como es biyectiva, entonces necesariamente

$$\text{I}_{G(A')} = G(\text{I}_{A'}).$$

(2) Sean ahora $f : A' \rightarrow B'$, $g : B' \rightarrow C'$, entonces:

$$F(G(g \circ f)) = \eta_{C'}^{-1} \circ g \circ f \circ \eta_{A'},$$

$$F(G(g) \circ G(f)) = \eta_{C'}^{-1} \circ g \circ \eta_{B'} \circ \eta_{B'}^{-1} \circ f \circ \eta_{A'} = \eta_{C'}^{-1} \circ g \circ f \circ \eta_{A'}.$$

Como en el caso anterior, esto implica que

$$G(g) \circ G(f) = G(g \circ f),$$

pues tienen la misma imagen bajo F .

La definición de $G(f)$ y la selección de los isomorfismos $\eta_{A'}$ permiten describir un isomorfismo natural,

$$\eta : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$$

que lo es porque el siguiente diagrama conmuta por construcción.

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & F(G(A')) \\ f \downarrow & & \downarrow F(G(f)) \\ B' & \xrightarrow{\eta_{B'}} & F(G(B')) \end{array} \quad \text{donde } F(G(f)) = \eta_{B'}^{-1} \circ f \circ \eta_{A'}$$

y observamos además que $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$, por construcción.

□

El axioma de elección para clases permite seleccionar en toda clase de equivalencia de objetos isomorfos en una categoría cualquiera \mathcal{C} un representante. Se obtiene así una subclase E de $\text{Ob}(\mathcal{C})$.

Si para cada par de objetos $A, B \in E$ consideramos el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de los morfismos de \mathcal{C} de A en B , se obtiene una categoría \mathcal{E} definida:

$$\text{Ob}(\mathcal{E}) = E, \quad \text{y} \quad \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \quad \forall A, B \in E.$$

Esta categoría es una subcategoría plena, por definición, de \mathcal{C} , que se llama el esqueleto de \mathcal{C} . De la proposición anterior deducimos que la inmersión $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor que, por construcción de \mathcal{E} , define una equivalencia de categorías, en efecto.

Por ser un functor de inclusión, I es inyectivo en morfismos, y por tanto fiel. Como \mathcal{E} es subcategoría plena de \mathcal{C} , para todo $A, B \in \mathcal{E}$ y todo morfismo $h : I(A) \rightarrow I(B)$ en \mathcal{C} , se cumple que $h \in \mathcal{E}$. Luego, tomando $\tilde{h} = h$, tenemos $I(\tilde{h}) = h$, luego es pleno. Por hipótesis, \mathcal{E} contiene un representante de cada clase de isomorfismo en \mathcal{C} . Así, para todo $Y \in \mathcal{C}$, existe $X \in \mathcal{E}$ con $Y \cong I(X)$, luego es denso.

Definición 1.45 (Categoría Esqueletal). Una categoría \mathcal{C} es esqueletal si no contiene objetos isomorfos distintos (i.e., es su propio esqueleto).

Proposición 1.46. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. \mathcal{C} y \mathcal{D} son equivalentes.
2. \mathcal{C} y \mathcal{D} tienen esqueletos isomorfos.

Demostración. La demostración es muy parecida a la anterior, véase en [En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías](#). □

Corolario 1.47. Dos categorías esqueléticas son equivalentes si y solo si son isomorfas.

Demostración. Directo de la proposición anterior: al ser esqueléticas, $\mathcal{C} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{D} = \mathcal{E}_{\mathcal{D}}$, luego $\mathcal{C} = \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{C} \approx \mathcal{D}$. □

El esqueleto más clásico de la categoría \mathcal{V} de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K está formado por los espacios vectoriales K^n , con $n \in \mathbb{N}$.

Este esqueleto es isomorfo con la categoría \mathbf{Mat}_K . El isomorfismo está dado por el funtor que asocia a cada espacio K^n su dimensión n , y a cada aplicación lineal $K^n \rightarrow K^m$ su matriz coordinada en las bases canónicas.

1.5. Límites y colímites: primeras construcciones

Definición 1.48. Sea \mathcal{C} una categoría cualquiera, y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de \mathcal{C} , se llama producto de esta familia a un par $(P, (\pi_i)_{i \in I})$ en donde:

1. P es un objeto de \mathcal{C}
2. Para cada $i \in I$, $\pi_i : P \rightarrow A_i$ es un morfismo de \mathcal{C}
3. (Propiedad universal) Si $f_i : A \rightarrow A_i$ con $i \in I$ es una familia de morfismos de \mathcal{C} , entonces existe un único morfismo $f : A \rightarrow P$ tal que $f_i = \pi_i \circ f \ \forall i \in I$.

$$\begin{array}{ccc}
 & & A \\
 & \swarrow f_i & \downarrow \exists! f \\
 A_i & \xleftarrow{\pi_i} & P
 \end{array}$$

Si $I = \{1, \dots, n\}$ se escribe $P = A_1 \times \dots \times A_n$. Además en este caso se denota por $(f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$ al único morfismo tal que $\pi_i \circ (f_1, \dots, f_n) = f_i$

La unicidad de f permite asegurar que si $(P, (\pi_i)_{i \in I})$ y $(P', (\pi'_i)_{i \in I})$ son dos productos de una familia $\{A_i\}_{i \in I}$, entonces existe un único isomorfismo $\pi : P \rightarrow P'$ tal que $\forall i \in I$ se cumple $\pi_i = \pi'_i \circ \pi$, es decir, tal que los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\pi} & P' \\
 \searrow \pi_i & & \swarrow \pi'_i \\
 & & A_i
 \end{array}$$

son conmutativos.

Observación. La propiedad universal en una categoría cualquiera \mathcal{C} puede reformularse en términos de conjuntos de morfismos, si P es el producto de $\{A_i\}_{i \in I}$, entonces para todo objeto A de \mathcal{C} se tiene un isomorfismo de conjuntos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, P) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A_i),$$

es decir, dar un morfismo $f : A \rightarrow P$ equivale a dar una familia de morfismos $f_i : A \rightarrow A_i$ para cada $i \in I$.

- Ejemplo 1.49.* 1. En **Con** el producto de una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos está formado por el producto cartesiano $P = \prod_{i \in I} A_i$ y las aplicaciones $\pi_i : P \rightarrow A_i$, dados por $\pi_i((a_i)_{i \in I}) = a_i$.
2. En **Grp** el producto de $\{G_i\}_{i \in I}$ está formado por el grupo producto $P = \prod_{i \in I} G_i$, en donde la operación binaria se define componente a componente:

$$(a_i)_{i \in I} \cdot (b_i)_{i \in I} = (a_i b_i)_{i \in I}$$

junto con las proyecciones canónicas, que son ahora homomorfismos de grupos.

3. En **Top** el producto de $\{X_i\}_{i \in I}$ está formado por el conjunto producto cartesiano, dotado de la topología producto, que recordamos es la *menos fina*⁵ que hace continuas todas las proyecciones π_i .

Observación. Dado un conjunto de espacios topológicos $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$, el producto cartesiano $P = \prod_{i \in I} X_i$ induce distintas topologías:

- a) *Topología caja:* es la más fina posible que hace continuas todas las proyecciones $\pi_i : P \rightarrow X_i$. Sus abiertos básicos son:

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times \cdots, \quad \text{sin restricción en el número de factores abiertos,}$$

donde U_i es abierto en τ_i .

- b) *Topología producto:* es la menos fina entre todas las que hacen continuas las proyecciones. Sus abiertos básicos son:

$$\prod_{i \in I} U_i, \quad \text{donde } U_i = X_i \text{ salvo para } i \in F,$$

y $F = \{1, \dots, n\}$ es un conjunto finito. Es decir, solo un número finito de factores puede ser diferente de todo el espacio.

La segunda es la buena en el sentido de que es la que respeta la propiedad universal del producto. Véase el siguiente ejemplo que lo ilustra.

Tomamos $I = \mathbb{N}$ conjunto de índices, $X_i = \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, y el producto cartesiano $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Consideramos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto (x, x, \dots)$, observamos que $\pi_i \circ f = f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, luego las f_i son continuas. No obstante, f no es continua, veámoslo.

Sea $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} (-2^{-n}, 2^n)$ un abierto en la topología caja. Si tomamos $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-2^{-n}, 2^n) \forall n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$, que es un cerrado en \mathbb{R} con la topología usual. Luego, si $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una familia de aplicaciones continuas tal que $f_i = \text{id}_{\mathbb{R}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, en la topología caja no existe f continua cumpliendo $\pi_i \circ f = f_i$, pues el único candidato posible es el antes definido.

4. En un conjunto preordenado (P, \leq) considerado como categoría pequeña, el producto de una familia $(a_i)_{i \in I}$ de elementos de P , es (si existe) el ínfimo $\bigwedge_{i \in I} a_i$ de dicha familia.

Veamos que efectivamente el par $(\bigwedge_{i \in I} a_i, (\pi_i)_{i \in I})$ define un producto en la familia $(a_i)_{i \in I}$:

- a) Claramente $\bigwedge_{i \in I} a_i \in P$, luego es un objeto de (P, \leq) .

⁵Una topología τ_1 es menos fina que τ_2 si $\tau_1 \subset \tau_2$, es decir, tiene menos abiertos. Por tanto, la menos fina es la topología que, dado un conjunto, tiene menos abiertos.

- b) Para cada $\pi_i : \bigwedge_{j \in I} a_j \rightarrow a_i$ existe, pues $\bigwedge_{j \in I} a_j \leq a_i$ por definición de ínfimo.
- c) Si $f_i : b \rightarrow a_i$ para todo $i \in I$, entonces b es una cota inferior de $\{a_i\}_{i \in I}$, pues $b \leq a_i$ para todo $i \in I$. Existe un único morfismo tal que $f : b \rightarrow \bigwedge_{i \in I} a_i$, si pues el ínfimo es único y es la mayor de las cotas inferiores, luego $b \leq \bigwedge_{i \in I} a_i$, y además $\bigwedge_{i \in I} a_i \leq a_j$ para todo $j \in I$, luego $f_j = \pi_j \circ f$.

Definición 1.50. Sea C una categoría cualquiera y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de C . Se llama coproducto de esta familia a un par $(\mu_i)_{i \in I}, C$ donde:

1. C es objeto de C ,
2. Para cada $i \in I, \mu_i : A_i \rightarrow C$ es un morfismo,
3. (Propiedad Universal) Si $f_i : A_i \rightarrow A$ con $i \in I$ es una familia de morfismos en C , entonces existe un único morfismo $f : C \rightarrow A$ tal que $f_i = f \circ \mu_i$ para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\mu_i} & C \\ & \searrow f_i & \downarrow \exists! f \\ & & A \end{array}$$

Si $I = \{1, \dots, n\}$ se escribe $C = A_1 + \dots + A_n$. Además, se suele denotar por $(f_1, \dots, f_n) : A_1 + \dots + A_n \rightarrow A$ al morfismo tal que $(f_1, \dots, f_n) \circ \mu_i = f_i$.

Observación. Análogamente a la propiedad universal del producto si C es el coproducto de $\{A_i\}_{i \in I}$, entonces para todo objeto A de C se tiene un isomorfismo de conjuntos

$$\text{Hom}_C(C, A) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_C(A_i, A),$$

es decir, dar un morfismo $f : C \rightarrow A$ equivale a dar una familia de morfismos $f_i : A_i \rightarrow A$ para cada $i \in I$.

Observación. Está claro que un coproducto en una categoría C es un producto en la categoría opuesta C° . Por tanto, son propiedades duales una de la otra.

Ejemplo 1.51. 1) En **Con**, el coproducto de una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos está formado por el conjunto $C = \bigsqcup_{i \in I} A_i$, unión disjunta de los A_i , y las inclusiones canónicas μ_i .

La construcción de C es como sigue: para cada $i \in I$ se define el conjunto

$$\overline{A_i} = A_i \times \{i\} = \{(a, i) : a \in A_i\}$$

Esto fuerza que $\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces C se define como: se define como el conjunto unión de los $\overline{A_i}$. Para $i \in I$, la inclusión canónica $\mu_i : A_i \rightarrow C$ es $a \mapsto (a, i)$.

- 2) En **Grp** el coproducto de una familia de grupos se define a partir del producto libre de grupos.

Sea $\{G_d\}_{d \in I}$ una colección de grupos. Como conjunto, el producto libre de grupos $*_{d \in I} G_d$ consiste en las *palabras reducidas*, es decir, secuencias finitas de la forma $g_1 \dots g_m$, donde $m \in \mathbb{N}$ (incluyendo

$m = 0$ para la palabra vacía), cada g_i pertenece a algún grupo G_{d_i} con $d_i \in I$, y además se cumple que elementos consecutivos no provienen del mismo grupo:

$$g_i \in G_d \implies g_{i+1} \notin G_d \quad (\text{para cada } i = 1, \dots, m-1).$$

Dotamos a $*_{d \in I} G_d$ de una operación binaria definida por concatenación seguida de reducción: dadas dos palabras reducidas $w = g_1 \dots g_m$ y $w' = g'_1 \dots g'_k$, su producto es la palabra obtenida al concatenarlas,

$$w \cdot w' = g_1 \dots g_m g'_1 \dots g'_k,$$

y luego reducirla aplicando sucesivamente las siguientes operaciones hasta que no sea posible:

- Si g_m y g'_1 pertenecen al mismo grupo G_d , se reemplazan por su producto $g_m g'_1 \in G_d$ (a menos que $g_m g'_1 = e$, en cuyo caso se eliminan ambos).
- Este proceso se repite para los nuevos elementos adyacentes hasta obtener una palabra reducida válida.

La palabra vacía (caso $m = 0$) actúa como identidad, y el inverso de $w = g_1 \dots g_m$ es la palabra $w^{-1} = g_m^{-1} \dots g_1^{-1}$, donde cada g_i^{-1} es el inverso en G_{d_i} .

Mostrar la asociatividad de $*_{d \in I} G_d$ y que efectivamente este es el grupo que cumple la definición de coproducto en la categoría de **Grp** es un poco tedioso pero, sistemático.

- 3) En **Top** el coproducto de una familia de espacios $\{X_i\}_{i \in I}$ está formado por el conjunto unión disjunta, dotado de la topología más fina que hace continuas todas las inclusiones.
- 4) Dado un conjunto ordenado (P, \leq) , el coproducto es el supremo (razonamos de manera análoga al ejemplo del ínfimo).

Ejemplo 1.52. En la categoría de A -**Mod**, el producto de una familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de A -módulos está dado por el módulo producto $\prod_{i \in I} M_i$ junto con las proyecciones canónicas π_i , mientras que el coproducto es la suma $\bigoplus_{i \in I} M_i$ y los homomorfismos inclusión de cada M_i en dicha suma.

Definición 1.53. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$ dos morfismos en una categoría C . Un par (E, e) se dice que es un igualador en C de f y g si:

1. $e : E \rightarrow A$ es un morfismo en C ,
2. $f \circ e = g \circ e$,
3. (Propiedad Universal) Para todo morfismo $e' : E' \rightarrow A$ en C tal que $f \circ e' = g \circ e'$, existe un único morfismo $\bar{e} : E' \rightarrow E$ tal que $e' = e \circ \bar{e}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\
 \uparrow \bar{e} & \nearrow e' & & & \\
 E' & & & &
 \end{array}$$

Dualmente, tenemos el coigualador (c, C) en C que es simplemente un igualador en C° .

En cualquiera de las categorías **Con**, **Grp**, **Top**, el igualador de dos morfismos f y g con el mismo dominio A y el mismo codominio viene dado por el subconjunto (subgrupo, subespacio)

$$E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$$

junto con la inclusión canónica $e : E \hookrightarrow A$.

Sean ahora $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$ dos morfismos en la categoría **Con**, es decir, dos aplicaciones, y sea $R \subseteq B \times B$ la menor relación de equivalencia que contiene a todos los pares $(f(a), g(a))$ con $a \in A$. Si C es el conjunto cociente B/R y $c : B \rightarrow C$ dada por $c(b) = R(b)$, entonces el par (c, C) es un coigualador de f y g .

En la categoría **Top**, partimos de f, g aplicaciones continuas entre espacios topológicos A y B y se dota al conjunto cociente anterior C de la topología cociente. Entonces, (c, C) es un coigualador de f y g en la categoría **Top**.

Supongamos que $f : G \rightarrow H$ y $g : G \rightarrow H$ son homomorfismos de grupos. Se considera el conjunto $S = \{f(x)g(x)^{-1} \mid x \in G\} \subseteq H$ y el menor subgrupo normal N de H que contiene a S , entonces

$$\pi : H \rightarrow H/N$$

es un coigualador de f y g en **Grp**.

$$\pi \circ f : G \rightarrow H \rightarrow H/N, \quad x \mapsto f(x) \mapsto \pi(f(x)) = f(x)N$$

$$\pi \circ g : G \rightarrow H \rightarrow H/N, \quad x \mapsto g(x) \mapsto \pi(g(x)) = g(x)N$$

y observamos,

$$f(x)g(x)^{-1} \in N \Leftrightarrow f(x)g(x)^{-1}N = Ng(x) \Leftrightarrow f(x)N = g(x)N \Rightarrow \pi \circ f = \pi \circ g$$

Veamos que se verifica la propiedad universal, en **Con**, el razonamiento es análogo en **Grp** y **Top**. Sea $e' : E' \rightarrow A$ tal que $f \circ e' = g \circ e'$, luego se cumple,

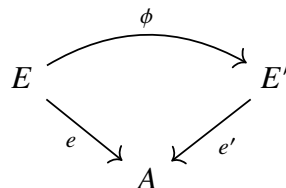
$$f(e'(x)) = g(e'(x)) \Rightarrow e'(x) \in E \quad \forall x \in E' \quad \text{por definición de } E.$$

Definimos $\bar{e} : E' \rightarrow E$ como $\bar{e}(x) = e'(x)$ para todo $x \in E'$, y además

$$e \circ \bar{e}(x) = e(e'(x)) \underset{\text{e inclusión}}{=} e'(x) \Rightarrow e \circ \bar{e} = e'$$

La unicidad se deduce del hecho de que e es una inclusión, por lo \bar{e} está completamente determinado por e' .

Lema 1.54. Si (E, e) y (E', e') son igualadores de $f, g : A \rightarrow B$ en C , existe un único isomorfismo $\phi : E \rightarrow E'$ haciendo conmutar:



Demostración. En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Proposición 1.55. Si (E, e) es un igualador de dos morfismos f, g , entonces e es un monomorfismo.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Teoría de Categorías. □

Observación. Por dualidad, toda propiedad que se cumple para los igualadores tiene una versión análoga para los coigualadores. En particular, el coigualador de un par de morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo y siempre es un epimorfismo.

Observación. Es importante mencionar que los conceptos de igualador y coigualador de un par de morfismos se pueden extender a familias arbitrarias de morfismos $\{f_i\}_{i \in I}$ donde $f_i : A \rightarrow B$.

Otro concepto clave en matemáticas es el de núcleo o kernel de un morfismo. Sea C una categoría tal que para todo $\text{Hom}_C(A, B)$, veamos que existe cierto morfismo $\circ_{AB} : A \rightarrow B$ (morfismo nulo). Se define el

kernel de $f : A \rightarrow B$ como el igualador de f y el morfismo \circ_{AB} . Luego, el kernel es un objeto K junto con un morfismo $K \xrightarrow{k} A$ cumpliendo:

$$f \circ k = \circ_{AB} \circ k = \circ_{KB}.$$

Si $K' \xrightarrow{k'} A$ es otro morfismo con $f \circ k' = \circ_{KB}$, entonces existe un único morfismo $\bar{k} : K' \rightarrow K$ cumpliendo $k \circ \bar{k} = k'$. Con los siguientes ejemplos veremos que esta noción de kernel es la misma que la que ya conocíamos:

En **Grp**, sea $\circ_{GH} : G \rightarrow H, g \mapsto e_H$, y sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. El kernel de f es el subgrupo normal de G :

$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\} =: K$$

junto con la inclusión $k : \ker(f) \hookrightarrow G$.

- Tenemos que $\forall g \in \ker(f), f \circ k(g) = f(k(g)) = f(g) = e_H = \circ_{KH}(g)$.
- Veamos que se verifica la propiedad universal del igualador: sea K' otro grupo tal que $K' \xrightarrow{k'} G$ cumple

$$f \circ k' = \circ_{K'H}.$$

En tal caso, tenemos que $\forall g \in K', f \circ k'(g) = f(k'(g)) = e_H$, luego $k'(g) \in K$.

Definimos $\mu : K' \rightarrow K = \ker(f)$, con $x \mapsto \mu(x) = k'(x) \in k \subseteq G$. Por tanto $k \circ \mu(x) = k(k'(x)) = k'(x)$, pues k es la inclusión. Además si existiera otro $\bar{\mu} : K' \rightarrow K$ cumpliendo $k \circ \bar{\mu} = k'$, dado que k es un igualador, es un monomorfismo, entonces:

$$k \circ \mu = k \circ \bar{\mu} \Rightarrow \mu = \bar{\mu}.$$

Definición 1.56. Un pullback en una categoría C es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g'} & A \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

tal que para todo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x} & A \\ y \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

existe un único morfismo $z : X \rightarrow P$ tal que $g' \circ z = x$ y $f' \circ z = y$, a esta condición la llamamos la propiedad universal del pullback.

Es decir, dado un par de morfismos $f : A \rightarrow C$ y $g : B \rightarrow C$ en una categoría \mathcal{C} , un pullback consiste en un objeto P (llamado objeto pullback o producto amalgamado), dos morfismos $f' : P \rightarrow A$ y $g' : P \rightarrow B$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow y & & & \\ & & P & \xrightarrow{f'} & B \\ & \swarrow x & \downarrow g' & & \downarrow g \\ & & A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

$\exists! z$ (dashed arrow from X to P)

Definición 1.57 (Dual de 1.56). Un pushout es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ A & \xrightarrow{g'} & P \end{array}$$

tal que para todo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & & \downarrow y \\ A & \xrightarrow{x} & X \end{array}$$

existe un único morfismo $\omega : P \rightarrow X$ tal que $\omega \circ g' = x$, $\omega \circ f' = y$, a esta condición la llamamos la propiedad universal del pushout.

Es decir, dado un par de morfismos $f : C \rightarrow A$ y $g : C \rightarrow B$ en una categoría \mathcal{C} , un pushout consiste en un objeto P (llamado objeto pushout o suma amalgamada) y dos morfismos $f' : B \rightarrow P$ y $g' : A \rightarrow P$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{g} & B & & \\ f \downarrow & & \downarrow f' & & \\ A & \xrightarrow{g'} & P & & \\ & \searrow x & & & \\ & & & & X \end{array}$$

$\exists! \omega$ (dashed arrow from P to X)

Sea **Con** la categoría de los conjuntos, su objeto final es un singulete $\{a\}$. Dados dos conjuntos A, B , objetos de **Con**, consideramos su producto $(A \times B; \pi_1, \pi_2)$ y escribimos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\pi_1} & A \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & \{a\} \end{array}$$

Observamos que f y g son únicos pues $\{a\}$ es un objeto final. Además, $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$, luego el diagrama es conmutativo. Consideramos ahora otro conjunto X y cualquier par de aplicaciones $x : X \rightarrow A$, $y : X \rightarrow B$, tales que $f \circ x = g \circ y$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x} & A \\ \exists! \Phi \swarrow & & \downarrow f \\ A \times B & \xrightarrow{\pi_1} & A \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & D_2 \\ \searrow y & & \end{array}$$

Por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo

$$\Phi : X \rightarrow A \times B \quad \text{tal que} \quad \pi_1 \circ \Phi = x, \quad \pi_2 \circ \Phi = y.$$

Por tanto, el pullback de $f : A \rightarrow \{a\}$ y $g : B \rightarrow \{a\}$ es precisamente $(A \times B; \pi_1, \pi_2)$, el producto de A y B .

Corolario 1.58. Si C tiene un objeto final L , entonces el producto de dos objetos A, B en C es un caso particular de pullback.

La demostración es análoga a lo anterior para la categoría **Con**.

Sean $f : A \rightarrow C$ y $g : B \rightarrow C$ dos morfismos en la categoría **Con**. Definimos el conjunto

$$P = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \subseteq A \times B,$$

que satisface la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_1|_P} & A \\ \pi_2|_P \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

En efecto, para todo $(a, b) \in P$ se cumple:

$$f \circ \pi_1(a, b) = f(a) = g(b) = g \circ \pi_2(a, b),$$

y por tanto $f \circ \pi_1|_P = g \circ \pi_2|_P$. Ahora, dado un objeto X en **Con** y un par de morfismos $h : X \rightarrow A$, $k : X \rightarrow B$ que hacen conmutar el diagrama ($f \circ h = g \circ k$), existe un único morfismo $\mu : X \rightarrow P$ dado por $\mu = (h, k)$. Notemos que $\mu(x) \in P$ para todo $x \in X$, pues si $f(h(x)) = g(k(x))$ entonces $(h(x), k(x)) \in P$. Además, μ satisface:

$$\pi_1 \circ \mu = h \quad \text{y} \quad \pi_2 \circ \mu = k,$$

y es único, pues si $v: X \rightarrow P$ cumple $\pi_1 \circ v = h$ y $\pi_2 \circ v = k$, entonces

$$v = (\pi_1 \circ v, \pi_2 \circ v) = (h, k) = \mu.$$

Este objeto P se denomina producto fibrado de A y B sobre C en **Con**, y se denota:

$$A \times_C B := \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}.$$

y junto con las aplicaciones, $\pi_1|_P: A \times_C B \rightarrow A$, $\pi_2|_P: A \times_C B \rightarrow B$ son un pullback de,

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow f & \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Observación. Nótese que el producto fibrado $A \times_C B$ se puede construir también como el igualador de los morfismos $f \circ \pi_1$ y $g \circ \pi_2$. El igualador de ambos morfismos es simplemente

$$(A \times_C B, e), \quad \text{donde } e: A \times_C B \hookrightarrow A \times B \text{ es la inclusión.}$$

Dadas aplicaciones continuas $f: X \rightarrow Z$ y $g: Y \rightarrow Z$, el producto fibrado en **Top** es el espacio:

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\},$$

junto con la topología de subespacio inducida por el producto $X \times Y$. Análogamente, dados homomorfismos $\phi: G \rightarrow K$ y $\psi: H \rightarrow K$, el producto fibrado en **Grp** es el subgrupo:

$$G \times_K H = \{(g, h) \in G \times H \mid \phi(g) = \psi(h)\},$$

con la operación componente a componente, como la del producto de grupos.

Dualmente a la idea antes descrita, en **Con** podemos construir el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{i_1} & B \\ i_2 \downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

donde \emptyset es el vacío, que es un objeto inicial, y las inclusiones i_1, i_2 son los únicos morfismos de $\emptyset \rightarrow A, B$. Tomando la unión disjunta $(A \amalg B, (\mu_1, \mu_2))$, tenemos un pushout. En general tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.59 (Dual de 1.58). Si C tiene objeto inicial I , entonces el coproducto de dos objetos A y B en C es un caso particular de pushout.

Dado un objeto C de **Con** y los morfismos $f: C \rightarrow A$, $g: C \rightarrow B$, el objeto que define el pushout se llama unión amalgamada y se escribe

$$A \amalg_C B = A \amalg B /_{g(c) \sim f(c)}.$$

donde la relación de equivalencia es la relación de equivalencia generada por los pares $(f(c), g(c))$.

Observamos además que el objeto $A \amalg_C B$ se puede construir como un coigualador de $\mu_1 \circ f$ y $\mu_2 \circ g$, que denotamos $(A \amalg_C B, \pi)$ con $\pi: A + B \rightarrow A \amalg_C B$ paso al cociente.

Dadas aplicaciones continuas $f: Z \rightarrow X$ y $g: Z \rightarrow Y$, la suma amalgamada en **Top** es el espacio cociente:

$$X \amalg_Z Y = (X \amalg Y)/\sim,$$

con la topología final inducida por la proyección $X \amalg Y \rightarrow X \amalg_Z Y$.

Dados homomorfismos $\phi: Z \rightarrow G$ y $\psi: Z \rightarrow H$, la suma amalgamada en **Grp** es el cociente:

$$G *_Z H = (G * H) / \langle \langle \phi(z)\psi(z)^{-1} \mid z \in Z \rangle \rangle, \quad (1.3)$$

donde $G * H$ es el producto libre.

Los conceptos definidos hasta ahora producto, igualador y pullback son casos particulares de lo que llamamos límite de un diagrama; y sus duales coproducto, coigualador y pushout de la correspondiente idea dual: el colímite.

Hay una relación que liga las tres construcciones previas.

Proposición 1.60. *Sea C una categoría en la que para cada par de objetos A, B existe un producto $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$, entonces son equivalentes:*

1. *Todo par de morfismos $f, g: A \rightarrow B$ posee un igualador.*
2. *Todo diagrama de la forma*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ g \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

puede ampliarse hasta formar un pullback

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g'} & A \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

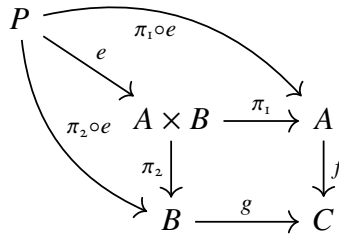
Demostración. Supongamos que (1) es cierto y tenemos un diagrama incompleto. Formamos el producto $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$. Consideramos:

$$f \circ \pi_1: A \times B \xrightarrow{\pi_1} A \xrightarrow{f} C, \quad g \circ \pi_2: A \times B \xrightarrow{\pi_2} B \xrightarrow{g} C,$$

Con esto, formamos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Si tomamos el igualador (P, e) de ambos morfismos, podemos construir.



donde definimos $g' := \pi_1 \circ e$ y $f' := \pi_2 \circ e$. Este diagrama es conmutativo porque, por ser igualador, $f \circ \pi_1 \circ e = g \circ \pi_2 \circ e$. Veamos que además (P, f', g') es un pullback. Supongamos que tenemos otro diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x} & A \\ y \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

donde $g \circ y = f \circ x$. Consideramos el siguiente morfismo:

$$(x, y) : X \rightarrow A \times B, \quad \text{tal que } \pi_1 \circ (x, y) = x, \quad \pi_2 \circ (x, y) = y.$$

Componiendo con f y g respectivamente:

$$f \circ \pi_1 \circ (x, y) = f \circ x = g \circ y = g \circ \pi_2 \circ (x, y).$$

Luego (x, y) cumple la condición de la propiedad (3) de la definición de igualador. Por tanto, por la propiedad universal del igualador, existe un único $z : X \rightarrow P$ tal que $e \circ z = (x, y)$.

De modo que:

$$f' \circ z = \pi_2 \circ e \circ z = \pi_2 \circ (x, y) = y, \quad g' \circ z = \pi_1 \circ e \circ z = \pi_1 \circ (x, y) = x.$$

Mostrar la unicidad es rutinario.

Supongamos ahora el recíproco. Si $f, g : A \rightarrow B$ son dos morfismos con el mismo dominio y codominio, consideramos:

$$(f, g) : A \rightarrow B \times B, \quad (1_B, 1_B) : B \rightarrow B \times B,$$

y construimos el diagrama pullback:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & B \\ e \downarrow & & \downarrow (1_B, 1_B) \\ A & \xrightarrow{(f, g)} & B \times B \end{array}$$

Veamos que efectivamente (E, e) es un igualador de f y g . Primero veamos que $f \circ e = g \circ e$. Del diagrama anterior:

$$(1_B, 1_B) \circ h = (f, g) \circ e.$$

Componiendo con la primera proyección π_1 :

$$\pi_1 \circ (1_B, 1_B) \circ h = \pi_1 \circ (f, g) \circ e \Rightarrow 1_B \circ h = f \circ e,$$

y análogamente, componiendo con π_2 :

$$\pi_2 \circ (1_B, 1_B) \circ h = \pi_2 \circ (f, g) \circ e \Rightarrow 1_B \circ h = g \circ e.$$

Luego:

$$f \circ e = g \circ e.$$

Sea ahora otro diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{y} & B \\ x \downarrow & & \downarrow (1_B, 1_B) \\ A & \xrightarrow{(f, g)} & B \times B \end{array}$$

Con un razonamiento análogo al hecho anteriormente con este diagrama, llegamos a $y = f \circ x = g \circ x$, veamos que existe un único morfismo z tal que $x = e \circ z$. Por la propiedad universal del pullback, existe un único $z : X \rightarrow E$ tal que $h \circ z = y$ y $e \circ z = x$, concluyendo la demostración.

□

Para una exposición más completa de ciertos resultados fundamentales de la teoría de categorías —como los límites, colímites (en general), funtores representables o el lema de Yoneda— se remite al Apéndice B.

2

Topología Algebraica

Este capítulo constituye el primer acercamiento en el estudio de la topología algebraica, abordado desde una perspectiva guiada por la teoría de categorías, a partir de las nociones desarrolladas en el capítulo anterior. Lejos de ser una exposición estándar, el enfoque adoptado busca revelar cómo la teoría de categorías simplifica demostraciones, clarifica definiciones y proporciona un marco más general para interpretar resultados clásicos. Esta perspectiva culmina con la formulación categórica del teorema de Van Kampen, que constituye la pieza central del capítulo y donde se manifiestan con claridad las ventajas de este enfoque.

La teoría del grupo fundamental, en su formulación clásica —como la que aparece, por ejemplo, en [Hato2]—, ha sido estudiada previamente por el autor, por lo que en este capítulo no se incluyen muchas de las demostraciones elementales que suelen acompañar esta presentación tradicional. Salvo algunos resultados indispensables para el desarrollo posterior, cuyas pruebas se han desplazado al Anexo.

Sin embargo, el enfoque adoptado en este capítulo es categórico. A diferencia de los textos clásicos de topología algebraica, aquí se busca mostrar cómo la teoría de categorías permite reinterpretar de forma más natural las construcciones fundamentales de esta teoría. Esta decisión metodológica recorre todo el capítulo y constituye la motivación principal de su redacción.

Desde esta perspectiva, comenzamos introduciendo algunos conceptos topológicos básicos, como los caminos, las homotopías y los lazos, que nos permiten construir una de las estructuras centrales del capítulo: el *grupoide fundamental*. Aunque puede entenderse intuitivamente como la colección de todas las curvas del espacio agrupadas por clases de homotopía, esta construcción cobra pleno sentido cuando se formula categóricamente. En efecto, el grupoide fundamental no es otra cosa que una *categoría*, en la que los objetos son los puntos del espacio y los morfismos las clases de caminos entre ellos. Esta formulación no solo es más general que la del grupo fundamental, sino que también es intuitivamente más natural.

A partir de aquí, veremos cómo el grupo fundamental clásico puede interpretarse como un *funtor*

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Grp},$$

que asigna a cada espacio topológico punteado su grupo fundamental. Como ya se introdujo en el primer capítulo, este funtor formaliza la relación entre la topología del espacio y su estructura algebraica, permitiendo deducir de forma inmediata diversas propiedades. Asimismo, trasladaremos esta construcción al contexto de la categoría cociente \mathbf{hTop}_* —también presentada anteriormente—, la cual recoge con precisión la noción de forma. Veremos que el grupo fundamental induce también un funtor

$$\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \longrightarrow \mathbf{Grp},$$

lo que nos permitirá obtener distintos resultados de forma natural y estructurada.

El capítulo culmina con la demostración del *Teorema de Van Kampen*, uno de los resultados fundamentales en el estudio del grupo fundamental. Este teorema, desde el punto de vista categórico, no es más que decir que el funtor $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ respeta *pushout*. Su demostración clásica, que puede encontrarse en [Hato2], es especialmente técnica y farragosa, lo que motiva la búsqueda de una prueba más clara y natural. Siguiendo esta perspectiva, el capítulo concluye con una demostración alternativa del teorema, inspirada en [San24b], en la que se hace uso explícito del lenguaje categórico.

Aunque el enfoque general del capítulo ha sido desarrollado desde una perspectiva categórica propia, algunos ejemplos puntuales han sido tomados de [Hato2]. Por otro lado, varias secciones se inspiran en [Nav25], un texto conciso y denso en contenido, que aquí ha sido reorganizado, completando las pruebas y razonamientos que allí se daban por supuestos, siempre guiado por la motivación conceptual que estructura el presente trabajo, dando como resultado un texto propio del autor.

En definitiva, la principal aportación de este capítulo consiste en la presentación categórica del núcleo de la topología algebraica elemental, reformulando desde esta perspectiva diferente a la clásica. Una de las partes más destacadas del capítulo es la inclusión de una demostración alternativa del teorema de Van Kampen, cuya formulación categórica permite exponerla de manera más sencilla que en los tratamientos clásicos. Aunque la demostración no es original del autor, su integración dentro del enfoque categórico adoptado constituye uno de los elementos más valiosos del capítulo.

2.1. El grupo y grupoide fundamental

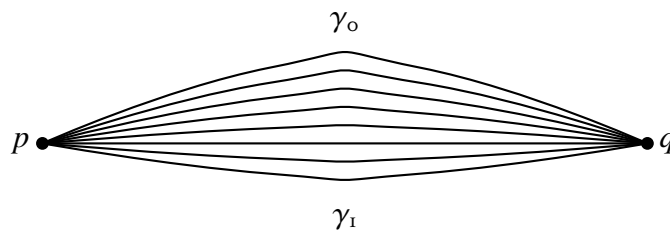
Definición 2.1. Una aplicación continua $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$ se llama un camino de p a q si $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Dado otro camino γ' con $\gamma'(0) = q$, $\gamma'(1) = r$, se define la composición o concatenación de caminos:

$$(\gamma' \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma'(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observación 1. En contra del uso habitual, interpretaremos la composición $\gamma \cdot \gamma'$ como, recorrer primero γ y después γ' , es decir, adoptamos la misma convención que en la composición de aplicaciones.

Definición 2.2. Sean γ_0, γ_1 caminos de p a q . Diremos que son homotópicos, y escribimos $\gamma_0 \equiv \gamma_1$, si existe una aplicación continua $H : I \times I \rightarrow X$, llamada homotopía, tal que $H_s(t) := H(t, s)$ satisface:

$$H_0 = \gamma_0, \quad H_1 = \gamma_1, \quad H_s(0) = p, \quad H_s(1) = q.$$

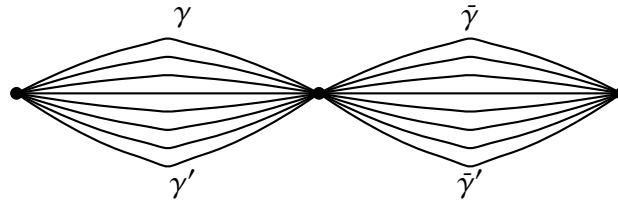


Lema 2.3. La relación \equiv es una relación de equivalencia sobre los caminos con extremos fijos.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Topología Algebraica. □

Lema 2.4. Si $H : \gamma \equiv \gamma'$ y $\bar{H} : \bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}'$, entonces $\bar{\gamma} \cdot \gamma \equiv \bar{\gamma}' \cdot \gamma'$.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Topología Algebraica. □



Proposición 2.5. Sean $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ caminos con extremos compatibles. Se verifican las siguientes igualdades en las clases de homotopía:

1. Sean $p(t) = \gamma(o)$ y $q(t) = \gamma(i)$ los caminos constantes en los extremos de γ . Entonces se tiene:

$$q \cdot \gamma \equiv \gamma \equiv \gamma \cdot p.$$

2. $\gamma^{-1} \cdot \gamma \equiv p$, donde $\gamma^{-1}(t) = \gamma(i - t)$ y $p(t) = \gamma(o)$.

3. $(\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1 \equiv \gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)$.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Topología Algebraica. □

Con todo lo anterior, dado X un espacio topológico, las clases de homotopía de caminos entre puntos de X se pueden componer siempre que los extremos coincidan, y esta composición está bien definida salvo homotopía. Existe una clase identidad en cada punto $x \in X$, representada por el camino constante $p(t) = x$, y cada clase $[\gamma] : p \rightarrow q$ posee un inverso $[\gamma^{-1}] : q \rightarrow p$. Por tanto, se obtiene una estructura de categoría en la que toda flecha es un isomorfismo y los objetos forman un conjunto: esto es, una estructura de grupoide.

Definición 2.6. Se llama grupoide fundamental de un espacio topológico X al grupoide $\pi_1 X$ cuyos objetos son los puntos de X , y cuyas flechas $[\gamma] : p \rightarrow q$ son las clases de homotopía de caminos γ que van de p a q .

Si restringimos la construcción anterior a caminos que tienen el mismo punto inicial y final $p \in X$, obtenemos los llamados lazos basados en p . Observamos que la composición de caminos definida anteriormente induce una operación sobre las clases de homotopía de lazos basados en un punto $p \in X$. Dados dos lazos $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ con $\alpha(o) = \alpha(i) = \beta(o) = \beta(i) = p$, definimos:

$$[\beta] \cdot [\alpha] = [\beta \cdot \alpha],$$

donde la composición $\beta \cdot \alpha$ se obtiene recorriendo primero α y luego β , tal como establecimos anteriormente. Esta operación está bien definida porque, si $\alpha \equiv \alpha'$ y $\beta \equiv \beta'$, entonces $\beta \cdot \alpha \equiv \beta' \cdot \alpha'$ (por el lema de compatibilidad con la composición). Además, por la proposición anterior, esta operación es asociativa (hasta homotopía), tiene elemento neutro (la clase del lazo constante en p) y cada clase $[\alpha]$ posee un inverso $[\alpha^{-1}]$. Por tanto, las clases de lazos basados en p , con esta operación, forman un grupo.

Definición 2.7. Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Se llama grupo fundamental de X en p al conjunto $\pi_1(X, p)$ formado por las clases de homotopía de lazos basados en p , con la operación inducida por la composición de caminos.

Entendiendo p como un objeto del grupoide fundamental $\pi_1 X$, la subcategoría plena $\pi_1 X_p$ cuyo único objeto es p es un grupoide con un único objeto; además, su grupo asociado es:

$$\pi_1(X, p) = \text{Hom}_{\pi_1 X}(p, p).$$

Así, $\pi_1(X, p)$ puede entenderse como el grupo asociado al grupoide $\pi_1 X_p$. En consecuencia, existe un functor inclusión

$$I : \pi_1 X_p \hookrightarrow \pi_1 X,$$

que identifica $\pi_1(X, p)$ con una subcategoría plena de $\pi_1 X$, formada por un objeto, el punto p y por las flechas que comienzan y terminan en p .

Observación 2. La construcción del grupoide fundamental $\pi_1 X$ resulta conceptualmente más natural que la del grupo fundamental clásico $\pi_1(X, p)$. En primer lugar, $\pi_1 X$ considera todos los caminos entre puntos arbitrarios de X , no sólo lazos. En segundo lugar, evita la elección arbitraria de un punto base.

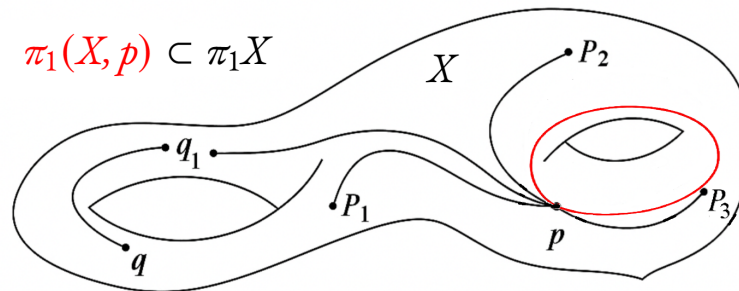


Figura 2.1. Comparativa grupo fundamental y grupoide fundamental

Veamos ahora algunos ejemplos de grupos fundamentales para diferentes espacios topológicos.

Ejemplo 2.8. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo. Entonces, para cualquier par de caminos $\gamma_o, \gamma_1 : I \rightarrow X$ con extremos $\gamma_o(o) = \gamma_1(o) = p$, $\gamma_o(1) = \gamma_1(1) = q$, la aplicación

$$H(t, s) = (1 - s)\gamma_o(t) + s\gamma_1(t)$$

define una homotopía entre γ_o y γ_1 . Esto se debe a que, por convexidad de X , la imagen de H queda contenida en X . En particular, cualquier lazo γ en X basado en un punto $p \in X$ es homótopo al lazo constante en p , por lo que

$$\pi_1(X, p) = \{[p]\}.$$

Algunos ejemplos clásicos de espacios convexos son:

- El espacio euclídeo \mathbb{R}^n .
- El disco cerrado $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.
- El intervalo unitario $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.
- Cualquier celda cerrada en \mathbb{R}^n (rectángulo, cubo, etc.).

Todos ellos tienen grupo fundamental trivial.

Cuando el grupo fundamental de un espacio topológico (X, p) es trivial, es decir, si

$$\pi_1(X, p) = \{[p]\}$$

donde $[p]$ es la clase del lazo constante en p , adoptaremos la notación:

$$\pi_1(X, p) = 0.$$

Ejemplo 2.9. Un ejemplo fundamental es el del círculo S^1 . El grupo fundamental $\pi_1(S^1, p)$ es isomorfo a \mathbb{Z} . Una intuición de este hecho es la siguiente: cada clase de homotopía de lazos en S^1 corresponde a un número entero que cuenta cuántas vueltas da el lazo alrededor del círculo. Una vuelta positiva define una clase que denotamos por $[\omega_1]$; recorrer el círculo dos veces da $[\omega_2]$. Las vueltas en sentido contrario definen elementos negativos, como $[\omega_{-1}]$. Además, concatenar un lazo que da m vueltas con otro que da n vueltas equivale a un lazo que da $m + n$ vueltas, lo que sugiere la estructura aditiva de \mathbb{Z} :

$$[\omega_m] \cdot [\omega_n] = [\omega_{m+n}].$$

Así, se induce un morfismo

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, p), \quad n \mapsto [\omega_n],$$

que más adelante veremos que es un isomorfismo de grupos.

La demostración completa puede consultarse en el libro de Hatcher [Hato2], pero veremos una más sencilla cuando introduzcamos la teoría de revestimientos (3.72).

Proposición 2.10. *Sea γ un camino de p a q en un espacio topológico X . Entonces, la aplicación*

$$\varphi_\gamma: \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q), \quad [\sigma] \mapsto [\gamma \cdot \sigma \cdot \gamma^{-1}]$$

es un isomorfismo de grupos. Este isomorfismo no es canónico, ya que depende del camino γ , salvo cuando $\pi_1(X, p)$ es abeliano, en cuyo caso todos estos isomorfismos coinciden.

Demostración. La aplicación está bien definida porque si $H: I \times I \rightarrow X$ es una homotopía entre σ_1 y σ_2 entonces $\gamma \cdot H_t \cdot \gamma^{-1}$, es una homotopía entre $\gamma \cdot \sigma_1 \cdot \gamma^{-1}$ y $\gamma \cdot \sigma_2 \cdot \gamma^{-1}$. Es un morfismo de grupos porque preserva la operación:

$$\varphi_\gamma([\sigma_1] \cdot [\sigma_2]) = [\gamma \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \gamma^{-1}] = [\gamma \cdot \sigma_1 \cdot \gamma^{-1}] \cdot [\gamma \cdot \sigma_2 \cdot \gamma^{-1}] = \varphi_\gamma([\sigma_1]) \cdot \varphi_\gamma([\sigma_2]).$$

El inverso está dado por $\varphi_\gamma^{-1}: \pi_1(X, q) \rightarrow \pi_1(X, p)$, definido por $[\tau] \mapsto [\gamma^{-1} \cdot \tau \cdot \gamma]$.

Si γ y γ' son dos caminos de p a q , entonces para todo $[\sigma] \in \pi_1(X, p)$, se tiene:

$$\gamma' \cdot \sigma \cdot \gamma'^{-1} \equiv \gamma \cdot \sigma \cdot \gamma^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad [\gamma'^{-1} \cdot \gamma] \cdot [\sigma] = [\sigma] \cdot [\gamma'^{-1} \cdot \gamma],$$

lo cual ocurre si $\pi_1(X, p)$ es abeliano. Por tanto, en ese caso, todos los isomorfismos inducidos por caminos entre p y q coinciden. \square

Si X es conexo por caminos, entonces el grupo fundamental $\pi_1(X, p)$ es, salvo isomorfismo, independiente de la elección del punto base p . En ese caso, es común abreviar la notación y escribir simplemente $\pi_1(X)$. No obstante, en este trabajo preferiremos mantener siempre explícito el punto base, ya que la notación $\pi_1(X, p)$ es más precisa desde el punto de vista categórico. En los ejemplos posteriores, simplemente notar que cuando se cumpla la conectividad por caminos y escribamos $\pi_1(X, p)$, no implicará ninguna pérdida de generalidad, por la elección de p .

2.1.1. El funtor π_1

Definición 2.11. Sea $f : (X, p) \rightarrow (Y, f(p))$ una aplicación continua entre espacios topológicos punteados. Se define la aplicación inducida en los grupos fundamentales como:

$$f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p)), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Observación 3. La aplicación f_* está bien definida y es un morfismo de grupos. De hecho, como mencionamos en el primer capítulo en la sección de funtores, la construcción π_1 define un funtor:

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp},$$

que asocia a cada espacio topológico apuntado (X, p) su grupo fundamental $\pi_1(X, p)$, y a cada aplicación continua $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ que cumple $f(p) = q$, el morfismo de grupos $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, q)$.

Si $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ es un homeomorfismo entre espacios topológicos punteados, entonces la aplicación inducida $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, q)$ es un isomorfismo de grupos. Esto se sigue directamente del hecho de que $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ es un funtor: como f es un isomorfismo en \mathbf{Top}_* , su imagen bajo el funtor también lo es. Luego, dos espacios topológicos no serán homeomorfos si tienen grupos fundamentales distintos.

Lema 2.12. Sea X un espacio topológico y sean $U_1, U_2 \subseteq X$ abiertos conexos por caminos que contienen al punto base $p \in X$, tales que $U_1 \cup U_2 = X$ y $U_1 \cap U_2$ también son conexos por caminos. Entonces, todo lazo en X basado en p es homotópico a un producto finito de lazos, cada uno de los cuales está contenido en U_1 o en U_2 .

Ejemplo 2.13. Sea $n \geq 2$. Entonces se tiene: $\pi_1(S^n, p) = 0$.

Podemos expresar S^n como la unión de dos abiertos U_1 y U_2 , cada uno homeomorfo a \mathbb{R}^n , por ejemplo tomando $U_1 := S^n \setminus \{N\}$ y $U_2 := S^n \setminus \{S\}$, donde N y S son puntos antipodales. Ambos contienen al punto base $p \in U_1 \cap U_2$, y su intersección es homeomorfa a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, que es conexa por caminos si $n \geq 2$.

Por el lema anterior, todo lazo en S^n basado en p es homotópico a un producto de lazos contenidos en U_1 o U_2 . Como $U_1 \cong \mathbb{R}^n$ y $U_2 \cong \mathbb{R}^n$, y \mathbb{R}^n es tal que $\pi_1(\mathbb{R}^n, p) = 0$, se tiene que $\pi_1(U_1, p) = \pi_1(U_2, p) = 0$. Por tanto, cualquier lazo en S^n es homotópico al lazo constante.

Proposición 2.14. Sean X, Y espacios topológicos, $x \in X$ e $y \in Y$. Si $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ son las proyecciones canónicas, entonces la aplicación

$$F : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y), \quad F([\gamma]) := ((p_1)_*([\gamma]), (p_2)_*([\gamma]))$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Dada una clase de homotopía de lazos $[\gamma] \in \pi_1(X \times Y, (x, y))$, las proyecciones p_1 y p_2 permiten obtener lazos $p_1 \circ \gamma$ en X y $p_2 \circ \gamma$ en Y , ambos basados en x e y respectivamente.

Para construir su inversa, consideramos dos lazos $\alpha : I \rightarrow X, \beta : I \rightarrow Y$, basados en x e y respectivamente. Entonces el lazo

$$\gamma(t) := (\alpha(t), \beta(t)) : I \rightarrow X \times Y$$

está basado en (x, y) , y cumple $(p_1 \circ \gamma)(t) = \alpha(t)$, $(p_2 \circ \gamma)(t) = \beta(t)$.

□

Este resultado muestra que el funtor grupo fundamental preserva productos, en el sentido de que la imagen del producto de espacios topológicos es el producto en grupos.

Ejemplo 2.15. Como consecuencia del resultado anterior, podemos obtener el grupo fundamental del toro.

$$\pi_1(T^2, (p, q)) = \pi_1(S^1 \times S^1, (p, q)) \cong \pi_1(S^1, p) \times \pi_1(S^1, q) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 2.16. Para $n \neq 2$, se tiene que \mathbb{R}^2 no es homeomorfo a \mathbb{R}^n . En efecto, supongamos que existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Consideramos el complementario de un punto:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{o\} \cong S^1 \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^n \setminus \{f(o)\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Por preservación de productos y el resultado anterior,

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{o\}, p) \cong \pi_1(S^1, p) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{f(o)\}, f(p)) \cong \pi_1(S^{n-1}, q) = o \quad \text{si } n > 2.$$

Luego los espacios no pueden ser homeomorfos, pues sus grupos fundamentales no son isomorfos.

2.2. Homotopía de espacios topológicos

Definición 2.17. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas entre espacios topológicos. Decimos que f y g son homotópicas, y escribimos $f \simeq g$, si existe una aplicación continua

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

tal que

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Observación 4. La relación de homotopía es una relación de equivalencia sobre el conjunto de aplicaciones continuas $X \rightarrow Y$, y es compatible con la composición. Por tanto, se puede definir la categoría **hTop**, llamada categoría homotópica, cuyos objetos son espacios topológicos y cuyas flechas son clases de aplicaciones continuas módulo homotopía:

$$\text{Hom}_{\mathbf{hTop}}(X, Y) = \{[f] \mid f : X \rightarrow Y \text{ continua, } f \simeq g \Leftrightarrow f \sim g\}.$$

Esta categoría se obtiene como cociente de la categoría **Top** por la relación de homotopía entre morfismos. Existe, por tanto, un funtor cociente,

$$Q : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{hTop}$$

que actúa como la identidad sobre objetos, y que envía cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ a su clase de homotopía $[f]$.

Un isomorfismo $f : X \rightarrow Y$ en **hTop** se le denomina equivalencias homotópicas. En particular, un espacio se dice contractible si es homotópicamente equivalente a un punto.

Ejemplo 2.18. Sean $C = S^1 \times [0, 1]$ el cilindro y S^1 el círculo. Consideremos las aplicaciones continuas, proyección $f : C \rightarrow S^1$ dada por $f(x, t) = x$ para todo $(x, t) \in C$ y la inclusión $g : S^1 \rightarrow C$ está dada por

$g(x) = (x, 0)$ para todo $x \in S^1$. Se verifica inmediatamente que $f \circ g = \text{id}_{S^1}$. Además, la composición $g \circ f$ es homotópica a id_C mediante la homotopía explícita:

$$H((x, t), s) = (x, (1-s)t), \quad \text{para } s \in [0, 1]$$

Esta homotopía realiza una deformación continua del cilindro sobre su base circular. Por tanto f y g son isomorfismos en **hTop**, pues $f \circ g = \text{id}_{S^1}$ y $g \circ f \simeq \text{id}_C$, por tanto podemos decir que el cilindro C es homotópicamente equivalente al círculo S^1 .

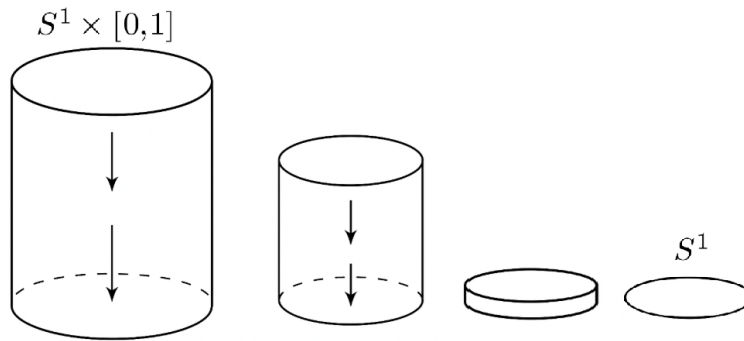


Figura 2.2. Deformación del cilindro al círculo

Sean $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ el disco unitario y $\{p\}$ un punto. Definamos la función constante $f : D^2 \rightarrow \{p\}$ por $f(x, y) = p$ para todo $(x, y) \in D^2$ y la inclusión $g : \{p\} \rightarrow D^2$ por $g(p) = (0, 0)$. Claramente $f \circ g = \text{id}_{\{p\}}$. La composición $g \circ f$ es homotópica a id_{D^2} vía la homotopía:

$$H((x, y), t) = (1-t)(x, y), \quad \text{para } t \in [0, 1]$$

que colapsa continuamente todo el disco a su centro. Por tanto f y g son isomorfismos en **hTop**, pues $f \circ g = \text{id}_{\{p\}}$ y $g \circ f \simeq \text{id}_{D^2}$, por tanto D^2 es contractible.

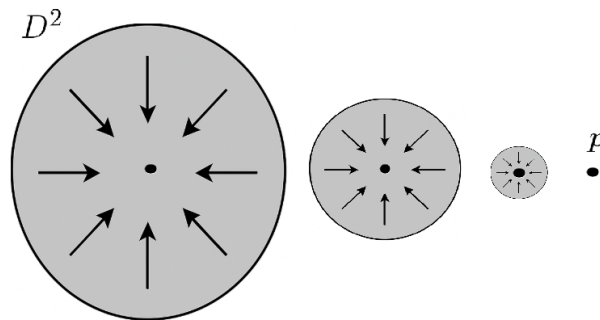


Figura 2.3. Contracción del disco a un punto

Lema 2.19. Sea $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas tal que existe una homotopía entre ambas, $H : X \times I \rightarrow Y$, y sea $\gamma(s) = H(p, s)$ el camino en Y que conecta $f(p)$ con $g(p)$. Entonces el siguiente diagrama conmuta en **Grp**:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, p) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(p)) \\ \parallel & & \downarrow \varphi_\gamma \\ \pi_1(X, p) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(Y, g(p)) \end{array}$$

Demostración. Consideramos la aplicación $F : I \times I \xrightarrow{\sigma \times 1} X \times I \xrightarrow{H} Y$ definida por:

$$F(t, s) = H(\sigma(t), s),$$

donde $\sigma : I \rightarrow X$ es un lazo en X basado en p . Entonces se tiene:

$$F(t, 0) = f(\sigma(t)), \quad F(t, 1) = g(\sigma(t)), \quad F(0, s) = H(p, s) = \gamma(s), \quad F(1, s) = \gamma(s).$$

La cara superior del cuadrado $I \times I$ es homotópica a la concatenación de los otros tres bordes, lo que implica:

$$g \circ \sigma \equiv \gamma \cdot (f \circ \sigma) \cdot \gamma^{-1},$$

y por tanto $g_*([\sigma]) = \varphi_\gamma \circ f_*([\sigma])$. □

Teorema 2.20. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p))$ es un isomorfismo para todo punto $p \in X$. En particular, si X es contractible, entonces $\pi_1(X, p) = 0$.

Demostración. Sea $g : Y \rightarrow X$ una homotopía inversa de $f : X \rightarrow Y$, es decir, $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1_X$. Consideramos las aplicaciones siguientes entre grupos fundamentales:

$$\pi_1(X, p) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(p)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(p))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(g(f(p)))).$$

La composición de las dos primeras flechas es igual a $(g \circ f)_*$, y como $g \circ f \simeq 1_X$, el lema anterior implica que:

$$g_* \circ f_* = \varphi_h$$

para algún camino h que une p con $g(f(p))$, y por tanto esta composición es un isomorfismo.

En particular, como φ_h es un isomorfismo, se deduce que f_* es inyectiva. Análogamente, al considerar las dos últimas flechas, su composición es $(f \circ g)_*$, también es un isomorfismo. Esto muestra que g_* es inyectiva.

Como la composición $f_* \circ g_*$ es inyectiva y g_* también lo es, se deduce que la primera aplicación f_* es además sobreyectiva. Por tanto, f_* es un isomorfismo. □

Ejemplo 2.21. El toro sólido $T = S^1 \times D^2$ es homotópicamente equivalente al círculo S^1 . La equivalencia está dada por la proyección $f : T \rightarrow S^1$, $f(x, y) = x$, y la inclusión $g : S^1 \rightarrow T$, $g(x) = (x, 0)$, que satisfacen $f \circ g = 1_{S^1}$ y $g \circ f \simeq 1_T$ mediante la homotopía $H((x, y), t) = (x, (1-t)y)$.

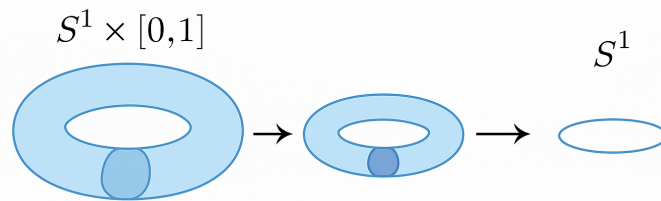


Figura 2.4. Deformación del toro sólido al círculo

Por el teorema de invariancia homotópica del grupo fundamental, $\pi_1(T) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Así, el grupo fundamental del toro sólido es isomorfo a \mathbb{Z} . Lo mismo le pasa al cilindro, por lo visto en 2.18.

Definición 2.22. Un espacio topológico X se dice simplemente conexo si es conexo por caminos y si su grupo fundamental en cualquier punto $p \in X$ es trivial, es decir, $\pi_1(X, p) = 0$.

Observación 5. Todo espacio contractible es simplemente conexo. En efecto, un espacio contractible es homotópico a un punto, cuyo grupo fundamental es trivial. Como el grupo fundamental es invariante por equivalencia homotópica, se concluye que $\pi_1(X, p) = 0$.

Sean $f, g : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ aplicaciones continuas entre espacios topológicos punteados. Decimos que f y g son homotópicas como aplicaciones punteadas, y escribimos $f \simeq g$, si existe una aplicación continua.

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

tal que:

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x), \quad H(p, s) = q \quad \text{para todo } s \in I.$$

Esta condición equivale a que $H(x, s)$ defina una homotopía cualquiera entre f y g , que además preserva el punto base; en ocasiones, para distinguirla de la homotopía entre aplicaciones definida en (2.17) la llamaremos homotopía punteada.

Denotamos por \mathbf{hTop}_* la categoría cuyos objetos son espacios topológicos punteados (X, p) , y cuyas flechas son clases de aplicaciones continuas punteadas módulo homotopía:

$$[f] : (X, p) \rightarrow (Y, q), \quad \text{donde } f : (X, p) \rightarrow (Y, q) \text{ continua y } f \simeq g \Leftrightarrow [f] = [g].$$

Con todo esto, análogamente a 3 podemos definir el funtor,

$$\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp} \tag{2.1}$$

desde la categoría de espacios topológicos punteados, módulo la homotopía antes definida, hacia la categoría de grupos. Este funtor se define de la siguiente manera:

- A cada objeto (X, p) en \mathbf{hTop}_* , le asigna el grupo fundamental $\pi_1(X, p)$.
- A cada clase de homotopía punteada $[f] : (X, p) \rightarrow (Y, q)$, le asigna el morfismo de grupos $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, q)$, dado por, $f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma]$.

Está bien definido porque, si $f \simeq g$, entonces $f_* = g_*$.

Dado que $\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ es un funtor, se sigue que preserva los isomorfismos. Por tanto, si $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ es un isomorfismo en \mathbf{hTop}_* , es decir, una equivalencia homotópica de espacios punteados, entonces la aplicación inducida

$$f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, q)$$

es un isomorfismo de grupos.

Observación 6. Las construcciones de los funtores $\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ y $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ inducen el siguiente diagrama conmutativo de funtores.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{hTop}_* & \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} & \mathbf{Grp} \\ \downarrow Q & \searrow \pi_1 & \uparrow \\ \mathbf{Top}_* & & \end{array}$$

Donde Q es el funtor paso al cociente, y demostramos por $\tilde{\pi}_1$ al funtor definido en (2.1).

2.3. El Teorema de Van Kampen desde una perspectiva categórica

El teorema de Van Kampen constituye una herramienta fundamental para el cálculo del grupo fundamental de un espacio topológico a partir de una descomposición en subconjuntos más simples. Sin embargo, su demostración tradicional, centrada únicamente en $\pi_1(X, p)$, resulta notoriamente compleja y técnica, como puede observarse en el libro de Hatcher [Hato2].

En esta sección adoptamos una estrategia alternativa a la tradicional guiada por las ideas en [San24b]. En lugar de trabajar directamente con el grupo fundamental, consideramos el grupoide fundamental (2.6), $\pi_1 X$, el cual tiene como objetos los puntos de X y como morfismos las clases de homotopía de caminos entre ellos. A partir de él podremos deducir lo que llamaremos el teorema de Van Kampen para grupoides. Este paso a grupoides no sólo generaliza la noción de grupo fundamental, sino que permite deducir el teorema de Van Kampen tradicional con un resultado categórico.

Definición 2.23. Denotamos por **Grpd** la categoría cuyos objetos son grupoides y cuyos morfismos son funtores entre grupoides.¹

El grupoide fundamental (2.6) define un funtor

$$\pi_1 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grpd}$$

tal que a cada espacio topológico X , se le asocia el grupoide fundamental $\pi_1 X$, y a cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, se le asocia un funtor $\pi_1(f) : \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$, definido sobre objetos como $f(x)$, y sobre morfismos como $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$, donde $[\gamma]$ denota la clase de homotopía de un camino con extremos fijos de γ . En particular, es fácil ver que este funtor es una inmersión. Esto nos permite identificar la imagen del funtor, con una subcategoría de **Grpd** que llamaremos categoría de grupoides fundamentales, el siguiente resultado garantiza la existencia de pushout en la citada categoría.

Teorema 2.24 (Teorema de Van Kampen para el grupoide fundamental; Brown, 1967). *Sea X un espacio topológico y sea $X = U_1 \cup U_2$ un recubrimiento por dos abiertos. Definimos $U_o := U_1 \cap U_2$. Entonces se verifica un isomorfismo canónico de grupoides:*

$$\pi_1 X = \pi_1 U_1 \amalg_{\pi_1 U_o} \pi_1 U_2,$$

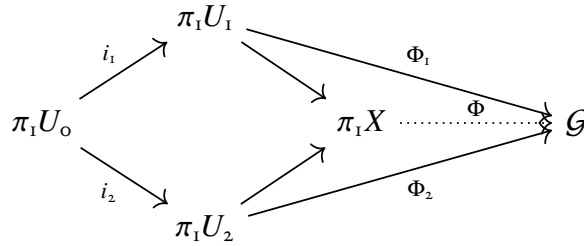
donde el miembro derecho denota el pushout (suma amalgamada) de grupoides en la categoría **Grpd**.

Demostración. Sean $\Phi_1 : \pi_1 U_1 \rightarrow \mathcal{G}$ y $\Phi_2 : \pi_1 U_2 \rightarrow \mathcal{G}$ morfismos de grupoides que coinciden sobre $\pi_1 U_o$, es decir, $\Phi_1|_{\pi_1 U_o} = \Phi_2|_{\pi_1 U_o}$. Debemos probar que existe un único morfismo de grupoides

$$\Phi : \pi_1 X \rightarrow \mathcal{G}$$

que extiende simultáneamente Φ_1 y Φ_2 , es decir, que hace conmutar el siguiente diagrama:

¹Advertimos que no es trivial demostrar que los grupoides forman efectivamente una categoría: es necesario comprobar que las transformaciones naturales entre funtores de grupoides componen correctamente y que los conjuntos de morfismos forman clases pequeñas (son conjuntos). Todo esto se deduce del hecho de que los grupoides son categorías pequeñas.



La definición de Φ sobre los objetos (es decir, sobre los puntos de X) es inmediata. Dado que $X = U_1 \cup U_2$, para todo $x \in X$ definimos:

$$\Phi(x) := \begin{cases} \Phi_1(x), & \text{si } x \in U_1, \\ \Phi_2(x), & \text{si } x \in U_2. \end{cases}$$

La definición de Φ sobre una flecha $[\sigma_o] : x \rightarrow x'$ en $\pi_1 X$, es decir la clase de homotopía de un camino $\sigma_o : I \rightarrow X$, procede del modo siguiente. Dividiendo el intervalo I en subintervalos suficientemente pequeños, podemos descomponer σ_o como una concatenación $\sigma_o = \sigma_{o_r} \cdots \sigma_{o_2} \sigma_{o_1}$, donde cada subcamino σ_{o_i} tiene su imagen contenida en alguno de los abiertos U_1 o U_2 .

Entonces definimos:

$$\Phi([\sigma_o]) := \Phi_\bullet([\sigma_{o_r}]) \cdots \Phi_\bullet([\sigma_{o_1}]),$$

donde

$$\Phi_\bullet([\sigma_{o_i}]) := \begin{cases} \Phi_1([\sigma_{o_i}]) & \text{si } \sigma_{o_i} \text{ es un camino contenido en } U_1, \\ \Phi_2([\sigma_{o_i}]) & \text{si } \sigma_{o_i} \text{ es un camino contenido en } U_2. \end{cases}$$

Esta definición es coherente, ya que si σ_{o_i} está contenido en $U_1 \cap U_2$, entonces $\Phi_1([\sigma_{o_i}]) = \Phi_2([\sigma_{o_i}])$ por hipótesis.

La definición de $\Phi([\sigma_o])$ no depende de la descomposición elegida del intervalo I , pues cualquier par de particiones finas tiene un refinamiento común.

Falta probar que $\Phi([\sigma_o])$ está bien definida respecto a la clase de homotopía. Para ello, consideramos una homotopía $H : I \times I \rightarrow X$ entre σ_o y σ_1 . Aplicando el *lema de Lebesgue*, subdividimos $I \times I$ en pequeños cuadrados cuya imagen por H esté contenida en alguno de los abiertos U_1 o U_2 .

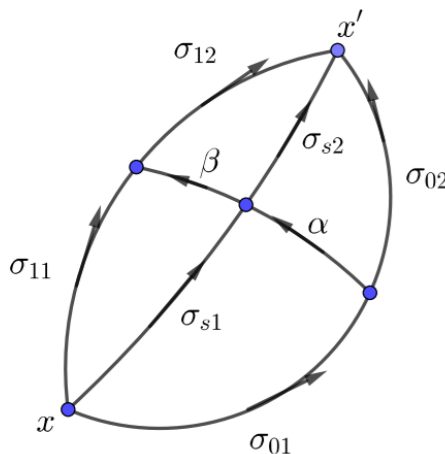


Figura 2.5. Representación de la imagen de la homotopía $H : I \times I \rightarrow X$.

La figura representa la imagen por H de la homotopía $H : I \times I \rightarrow X$ entre los dos caminos σ_0 y σ_1 cuyos extremos comunes son x y x' .

- La curva intermedia, $\sigma_s = \sigma_{s_2} \cdot \sigma_{s_1}$, es la imagen por H de la línea $I \times \{s\}$ del dominio, que divide los cuadrados en mitades superior e inferior.
- La concatenación de las curvas α y β es la imagen de la recta $\{t\} \times I$ que supone la otra división del cuadrado, en izquierda y derecha.

Por tanto se tiene:

$$\Phi([\sigma_0]) := \Phi_\bullet([\sigma_{02}]) \cdot \Phi_\bullet([\sigma_{01}]) = \Phi_\bullet([\sigma_{s_2} \cdot \alpha]) \cdot \Phi_\bullet([\alpha^{-1} \cdot \sigma_{s_1}]),$$

y por la funtorialidad:

$$= \Phi_\bullet([\sigma_{s_2}]) \cdot \Phi_\bullet([\alpha]) \cdot \Phi_\bullet([\alpha^{-1}]) \cdot \Phi_\bullet([\sigma_{s_1}]) = \Phi_\bullet([\sigma_{s_2}]) \cdot \Phi_\bullet([\sigma_{s_1}]).$$

Del mismo modo, usando ahora el arco β , se deduce que:

$$\Phi([\sigma_1]) := \Phi_\bullet([\sigma_{12}]) \cdot \Phi_\bullet([\sigma_{11}]) = \Phi_\bullet([\sigma_{s_2}]) \cdot \Phi_\bullet([\sigma_{s_1}]).$$

Por tanto,

$$\Phi([\sigma_0]) = \Phi([\sigma_1]),$$

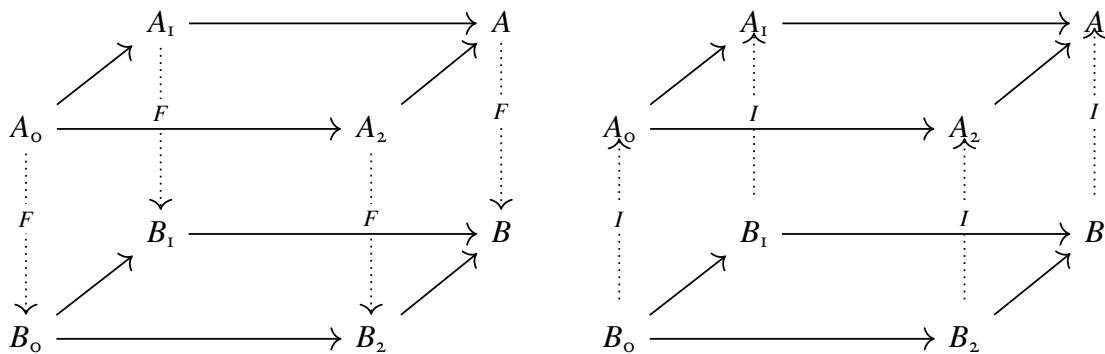
lo que demuestra que Φ está bien definida respecto a la clase del camino.

□

Lema 2.25. En una categoría \mathcal{C} consideremos dos cuadrados conmutativos \mathcal{A} y \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \uparrow \\ A_0 & \longrightarrow & A_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B_1 & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \uparrow \\ B_0 & \longrightarrow & B_2 \end{array}$$

Supongamos que entre los dos cuadrados hay flechas $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $I : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, de modo que los siguientes diagramas cúbicos son conmutativos:



y se cumplan las igualdades $F \circ I = \text{id}$.

Entonces, si el cuadrado \mathcal{A} es una suma amalgamada (pushout), el cuadrado \mathcal{B} también lo es.

Demostración. Debemos probar que, para todo par de flechas $\varphi_1 : B_1 \rightarrow T$, $\varphi_2 : B_2 \rightarrow T$ que coincidan sobre B_0 , es decir:

$$\varphi_1 \circ (B_0 \rightarrow B_1) = \varphi_2 \circ (B_0 \rightarrow B_2),$$

existe una única flecha $\varphi : B \rightarrow T$ que las extiende.

Levantamos los morfismos φ_1 y φ_2 al cuadrado \mathcal{A} tomando

$$\Phi_1 := \varphi_1 \circ F : A_1 \rightarrow T, \quad \Phi_2 := \varphi_2 \circ F : A_2 \rightarrow T.$$

Como \mathcal{A} es una suma amalgamada en \mathcal{C} , existe un único morfismo $\Phi : A \rightarrow T$ que extiende Φ_1 y Φ_2 . Entonces definimos $\varphi := \Phi \circ I : B \rightarrow T$, que es el morfismo buscado.

Sean $\varphi, \psi : B \rightarrow T$ dos morfismos que extienden el mismo par (φ_1, φ_2) . Entonces sus levantamientos:

$$\Phi := \varphi \circ F, \quad \Psi := \psi \circ F$$

extienden ambos a Φ_1, Φ_2 . Como \mathcal{A} es suma amalgamada, se tiene que $\Phi = \Psi$. Componiendo con I , se deduce:

$$\varphi = \Phi \circ I = \Psi \circ I = \psi.$$

Por tanto, \mathcal{B} es también suma amalgamada. \square

Teorema 2.26 (Van Kampen). *Sea X un espacio topológico, $X = U_1 \cup U_2$ un recubrimiento por dos abiertos, y sea $U_0 := U_1 \cap U_2$, con $p \in U_0$. Supongamos que U_0, U_1, U_2 son arcoconexos. Entonces existe un isomorfismo canónico de grupos:*

$$\pi_1(X, p) = \pi_1(U_1, p) *_{\pi_1(U_0, p)} \pi_1(U_2, p),$$

donde el miembro derecho denota el pushout (suma amalgamada) de grupos inducido por los morfismos de inclusión.

Demostración. Se tienen los funtores de inclusión:

$$I : \pi_1(X, p) \hookrightarrow \pi_1 X, \quad I_j : \pi_1(U_j, p) \hookrightarrow \pi_1 X \quad \text{para } j = 0, 1, 2.$$

Definimos funtores F en sentido opuesto, es decir:

$$F : \pi_1 X \rightarrow \pi_1(X, p), \quad F : \pi_1(U_j) \rightarrow \pi_1(U_j, p).$$

Para cada punto $x \in X$, elegimos un camino δ_x desde p hasta x . Si $x = p$, tomamos δ_x como el lazo constante. Como cada U_j es arcoconexo, podemos elegir $\delta_x \subseteq U_j$ si $x \in U_j$, para $j = 0, 1, 2$.

Definimos entonces:

$$F(x) := p, \quad F([\alpha : x \rightarrow y]) := [\delta_y^{-1} \cdot \alpha \cdot \delta_x] \in \pi_1(X, p),$$

donde la composición se toma como concatenación de caminos.

Los diagramas que involucran estos funtores se muestran a continuación:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 U_0 & \longrightarrow & \pi_1 U_1 & & \pi_1(U_0, p) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1 U_2 & \longrightarrow & \pi_1 X & & \pi_1(U_2, p) & \longrightarrow & \pi_1(X, p) \end{array}$$

Los funtores F e I satisfacen $F \circ I = \text{id}$. Por el lema categórico anterior (Lema 2.25), si el cuadrado superior es una suma amalgamada en **Grpd**, entonces el cuadrado inferior es también suma amalgamada en **Grp**. Por tanto, el cuadrado inferior define un pushout en la categoría de grupos, concluyendo la prueba. \square

Observación 7. El teorema de Van Kampen admite una generalización natural al caso de un recubrimiento arbitrario por abiertos conexos. Sea X un espacio topológico y sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos conexos que contienen un punto común $p \in X$, tal que toda intersección finita $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r}$ es también conexa. Entonces, bajo estas condiciones, se puede expresar $\pi_1(X, p)$ como un colímite llamado *suma amalgamada iterada* (en el cual no entraremos) de los grupos fundamentales $\pi_1(U_i, p)$ sobre los grupos $\pi_1(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r}, p)$, a través de los morfismos inducidos por inclusión.

Ejemplos aplicando el teorema de Van Kampen

Antes de presentar ejemplos concretos, recordamos la descripción explícita de la suma amalgamada de grupos. Sea $\varphi_1 : G_o \rightarrow G_1$ y $\varphi_2 : G_o \rightarrow G_2$ un par de morfismos de grupos. La suma amalgamada de G_1 y G_2 sobre G_o es el grupo cociente

$$G_1 *_o G_2 := (G_1 * G_2) / \langle \varphi_1(g_o)\varphi_2(g_o)^{-1} \mid g_o \in G_o \rangle,$$

donde $G_1 * G_2$ es el producto libre de G_1 y G_2 , y el cociente se toma por el subgrupo normal generado por todas las relaciones que identifican $\varphi_1(g_o)$ con $\varphi_2(g_o)$, para todo $g_o \in G_o$.

Ejemplo 2.27. Sea $X = S^1 \vee S^1$ la *suma en cuña* de dos circunferencias en un punto base común p . Consideramos un recubrimiento por dos abiertos U_1 y U_2 , donde U_1 es un entorno que cubre el primer círculo y un entorno del punto p , y U_2 es un entorno análogo que cubre el segundo círculo y también un entorno de p . Ambos abiertos son homotópicamente equivalentes a S^1 , por lo que $\pi_1(U_1, p) \cong \mathbb{Z}$ y $\pi_1(U_2, p) \cong \mathbb{Z}$. La intersección $U_1 \cap U_2$ es un entorno contráctil del punto p , por lo que $\pi_1(U_1 \cap U_2, p) = 0$. Aplicando el teorema de Van Kampen, se concluye que:

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(U_1, p) *_o \pi_1(U_2, p) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) / \langle i_{1*}([p])i_{2*}([p])^{-1} \rangle,$$

donde $[p] \in \pi_1(U_o, p) = 0$ es el único elemento, y las inclusiones inducidas i_{1*}, i_{2*} envían al neutro de cada grupo. Por tanto, no se impone ninguna relación, y el cociente queda simplemente: $\pi_1(X, p) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. El grupo libre con dos generadores, correspondientes a dar una vuelta en sentido positivo alrededor de cada uno de los dos círculos.

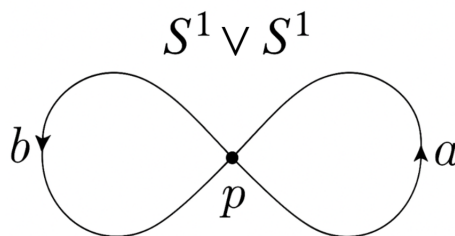
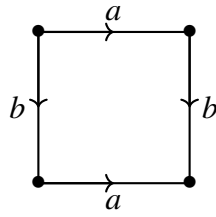
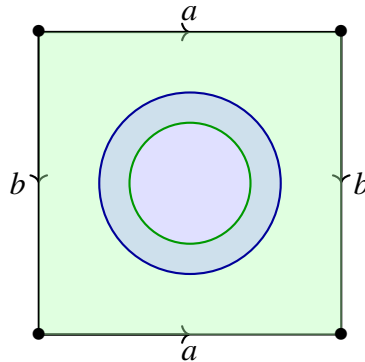


Figura 2.6. $S^1 \vee S^1$ con ambos generadores a y b uno en cada círculo

Ejemplo 2.28. Consideramos el toro T^2 en su representación plana.



Tomamos un recubrimiento por dos abiertos del toro como sigue.



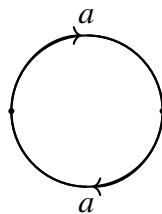
La región U_1 está representada por el disco circular más grande, coloreado en azul claro. La región U_2 es el complementario de un disco más pequeño, y está coloreada en verde claro. Esta zona representa el toro menos un disco. La intersección $U_1 \cap U_2$ está formada por el anillo entre ambos círculos. En la figura, aparece con un tono intermedio.

El abierto U_1 es contractible, por lo que $\pi_1(U_1, p) = 0$. El abierto U_2 , al ser homotópicamente equivalente a una cuña de dos círculos, tiene grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, generado por los lazos a y b . En cuanto al abierto $U_1 \cap U_2$ tiene grupo fundamental isomorfo a \mathbb{Z} ; sea c su generador; si tomamos su inclusión $i_{2*}([c])$, es un lazo en $\pi_1(U_2, p)$ y observamos que el lazo c es homotópico en U_2 al conmutador $aba^{-1}b^{-1}$, es decir, $i_{2*}([c]) = [aba^{-1}b^{-1}] \in \pi_1(U_2, p)$. De forma similar, el lazo c es trivial en U_1 , por tanto $i_{1*}([c]) = [p]$, el Teorema de Van Kampen impone la relación: $[aba^{-1}b^{-1}] = [p]$, por tanto obtenemos,

$$\pi_1(T^2, p) = (\pi_1(U_1, p) * \pi_1(U_2, p)) / \langle [aba^{-1}b^{-1}] \rangle \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Nótese que en este caso la relación dada es el conmutador del grupo libre de dos generadores.

Ejemplo 2.29. El plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 . Se puede construir a partir de un disco en el que identificamos los puntos opuestos de su borde.



Siguiendo el mismo razonamiento que hicimos en el ejemplo anterior y aplicando el teorema de Van Kampen, llegamos a que el grupo fundamental de \mathbb{RP}^2 es:

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \langle a \mid a^2 \rangle \cong (\mathbb{Z}_2, +).$$

El generador a cumple que su cuadrado es contractible.

3

Teoría de Galois para revestimientos

Este capítulo tiene como objetivo desarrollar la teoría de Galois de los espacios recubridores, estableciendo un paralelismo riguroso con la teoría algebraica de Galois. Mientras que el capítulo anterior estuvo dedicado a aspectos generales de la topología algebraica, culminando con el teorema de Van Kampen, el presente capítulo adopta una perspectiva comparativa entre topología y álgebra, guiada por el lenguaje de las categorías.

Al igual que en el capítulo anterior, se ha estudiado previamente el enfoque clásico recogido en [Hato2] en lo relativo a la teoría de revestimientos. No obstante, no se han incluido aquí resultados ni demostraciones ampliamente conocidas de esa tradición, pues se dan por supuestos y no responden al objetivo del capítulo. Las pruebas técnicas necesarias se han reunido en el Anexo.

La teoría de revestimientos, presentada aquí en azul, constituye el núcleo conceptual del capítulo. Su desarrollo se basa en la exposición no convencional de la referencia principal [San24], donde, aunque el tratamiento no está formulado en términos categóricos, se intuye que esa es la motivación subyacente. Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo ha sido precisamente reinterpretar dichos resultados desde el marco de la teoría de categorías y completar los elementos que en el texto original no estaban desarrollados en detalle.

Las definiciones, teoremas y corolarios procedentes de la teoría algebraica de Galois se presentan en rojo, con el fin de facilitar su comparación con los enunciados homólogos del contexto topológico. Estos resultados se han extraído principalmente de [Nav14], [San14] y [Cur24], y han sido seleccionados cuidadosamente para hacer explícita la correspondencia estructural entre ambas teorías. La identificación entre resultados topológicos y algebraicos —es decir, el emparejamiento entre proposiciones, observaciones y formulaciones duales— es una contribución original del autor, que ha tratado de evidenciar de forma sistemática las analogías que justifican hablar de una “teoría de Galois topológica”.

El desarrollo teórico sigue una estructura progresiva y clara, basada en bloques conceptuales, cada uno acompañado de ejemplos ilustrativos elaborados *ex profeso*. Las observaciones intercaladas que contextualizan y conectan los resultados también han sido redactadas íntegramente por el autor. En particular, se ha puesto especial atención en hacer accesibles los conceptos, ya que la exposición original en [San24] y de [Nav25] (de donde se obtiene el teorema categórico) asume un lector con experiencia previa y omite muchas demostraciones, que aquí se han completado y adaptado con mayor detalle.

En definitiva, aunque el capítulo incluye desarrollos teóricos y demostraciones relevantes, el núcleo conceptual reside en la comparación entre los resultados topológicos (en azul) y los algebraicos (en rojo). En particular, se invita al lector a prestar especial atención a las observaciones y ejemplos redactados a lo largo del texto. Este

paralelismo es el aspecto más original y significativo del capítulo. Asimismo, el ejemplo final sintetiza de forma concreta gran parte del capítulo.

3.1. El producto fibrado

Fijemos un espacio topológico S .

Definición 3.1. Un S -espacio es un par (X, f) formado por un espacio topológico X y una aplicación continua $f : X \rightarrow S$. Un morfismo de S -espacios $\varphi : (X, f) \rightarrow (Y, g)$, o simplemente un S -morfismo, es una aplicación continua $\varphi : X \rightarrow Y$ que hace conmutativo el triángulo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & S \end{array}$$

El conjunto de los morfismos de S -espacios de A en B se denota $\text{Hom}_S(A, B)$.

Dado un S -espacio $f : X \rightarrow S$, para cada $s \in S$ denotamos $X_s = f^{-1}(s)$. Un S -espacio puede interpretarse como una familia continua $\{X_s\}_{s \in S}$ de espacios topológicos parametrizada por S . Entonces, un morfismo de S -espacios $\varphi : X \rightarrow Y$ es una familia $\{\varphi_s : X_s \rightarrow Y_s\}_{s \in S}$ de aplicaciones continuas.

Definición. Sean $j : k \rightarrow B$ y $j' : k \rightarrow C$ dos k -álgebras¹. Decimos que una aplicación $f : B \rightarrow C$ es un morfismo de k -álgebras si es un morfismo de anillos y satisface $f(j(\lambda)) = j'(\lambda)$ para todo $\lambda \in k$, es decir, si $j' = f \circ j$. Equivalente a que f sea un morfismo de anillos y de k -módulos.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ & \swarrow j & \searrow j' \\ & & k \end{array}$$

El conjunto de los morfismos de A -álgebras de B en C se denota $\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, C)$.

Observación. El análogo geométrico de la definición anterior en términos del espectro es igual que la definición de S -espacio.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B & \xleftarrow{f^*} & \text{Spec } C \\ & \searrow j^* & \swarrow j'^* \\ & & \text{Spec } k \end{array}$$

Definición 3.2. Los S -espacios forman una categoría y la denotamos con $S\text{-Esp}$ que tiene por objetos los pares (X, f) con $f : X \rightarrow S$ continuo, y por morfismos los S -morfismos $\varphi : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas tales que $g \circ \varphi = f$. Asimismo, denotaremos por $\text{Hom}_S(X, Y)$ al conjunto de S -morfismos $X \rightarrow Y$.

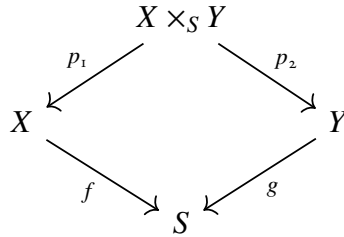
En esta categoría, el producto de dos objetos (X, f) y (Y, g) se denota $X \times_S Y$, y viene dado por el subespacio de $X \times Y$,

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\},$$

¹Recordamos: Sea k un anillo. Llamamos álgebra sobre k a todo anillo A dotado de un morfismo de anillos $j : k \rightarrow A$. Dada una k -álgebra A , el morfismo estructural j induce en A una estructura de k -módulo dada por, $\lambda \cdot a := j(\lambda) \cdot a$, con $\lambda \in k$, $a \in A$. y decimos que es finita cuando su dimensión como espacio vectorial es finita.

y lo llamamos producto fibrado junto con las proyecciones naturales $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$, $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$, que son además morfismos en $\mathcal{S}\text{-Esp}$, ya que se tiene

$$f \circ p_1 = g \circ p_2 : X \times_S Y \rightarrow S, \quad (x, y) \mapsto f(x) = g(y).$$



Por ser el producto de (X, f) y (Y, g) en la categoría $\mathcal{S}\text{-Esp}$, el espacio $X \times_S Y$, junto con las proyecciones naturales p_1 y p_2 , satisface la siguiente propiedad universal,

$$\text{Hom}_S(T, X \times_S Y) = \text{Hom}_S(T, X) \times \text{Hom}_S(T, Y), \quad \varphi \mapsto (p_1 \circ \varphi, p_2 \circ \varphi).$$

La demostración de esta propiedad consiste en una verificación directa. La biyección inversa asigna a cada par de \mathcal{S} -morfismos $\varphi_1 : T \rightarrow X$, $\varphi_2 : T \rightarrow Y$, tal que $f \circ \varphi_1 = g \circ \varphi_2$, el morfismo de \mathcal{S} -espacios $\varphi : T \rightarrow X \times_S Y$ definido por $\varphi(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

Observación 8. El producto de (X, f) y (Y, g) en $\mathcal{S}\text{-Esp}$, $X \times_S Y$, coincide con el pullback de las aplicaciones $f : X \rightarrow S$ y $g : Y \rightarrow S$ en la categoría \mathbf{Top} .

Observación. El análogo en la categoría de k -álgebras finitas, es como no podía ser de otra manera el producto tensorial $A \otimes_k B$ de dos k -álgebras finitas A y B que es el coproducto en la categoría de $k\text{-Alg}$, o lo que es lo mismo, en términos del espectro, $\text{Spec}(A \otimes_k B) = \text{Spec } A \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } B$

Proposición 3.3. *El producto fibrado satisface las siguientes propiedades.*

1. Se cumplen $X \times_S Y = Y \times_S X$ y $(X \times_S Y) \times_S Z = X \times_S (Y \times_S Z)$.
2. Se cumple $(\bigsqcup_i X_i) \times_S Y = \bigsqcup_i (X_i \times_S Y)$.
3. Se cumple $X \times_S S = X$. Con más generalidad: $(X \times_S S') \times_{S'} Z = X \times_S Z$.
4. Sean $f : X \rightarrow S$ continua y $A \subseteq S$ un subespacio. Se cumple $X \times_S A = f^{-1}(A)$.

3.2. Revestimientos: definición, grado y ejemplos

Definición 3.4. Un espacio topológico se dice localmente conexo si todo punto posee una base de entornos abiertos conexos.

En un espacio localmente conexo, cada componente conexa es abierta y cerrada.

NOTA. En adelante, todos los espacios se supondrán localmente conexos.

Definición 3.5. Sea S un espacio topológico. Un revestimiento de S es una aplicación continua suprayectiva $\pi : X \rightarrow S$ tal que para todo punto $s \in S$ existe un entorno abierto U de s (llamado entorno trivializante) para el cual $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ es la unión disjunta de abiertos de X tales que, para cada $i \in I$, la restricción $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Definición. Se dice que una k -álgebra finita A es separable si existe una extensión de cuerpos $k \hookrightarrow L$ tal que $A \otimes_k L = \prod L$. En este caso se dice que A es trivializada por L .

Observación 9. Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento. Según la propiedad 4 de (3.3), un abierto $U \subseteq S$ trivializa el revestimiento, esto es, $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup U_i \cong \bigsqcup U$, (donde es isomorfo como S -espacios), si y sólo si $X \times_S U \cong \bigsqcup U$. Es decir, un entorno trivializante U induce el siguiente producto.

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup U \cong X \times_S U & \xrightarrow{p_2} & X \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \pi \\ U & \hookrightarrow & S \end{array}$$

Observación. Observemos que la caracterización anterior nos ofrece una formulación que se asemeja estrechamente a la definición algebraica de una k -álgebra finita separable del inicio: una k -álgebra A es separable si existe una extensión de cuerpos $k \hookrightarrow L$ tal que

$$A \otimes_k L \cong \prod L.$$

En ambas situaciones, el objeto total (ya sea X o A) se vuelve trivial al realizar un cambio de base: topológico en un caso, algebraico en el otro. Es más, si tomamos el espectro de la k -álgebra, tenemos la siguiente condición equivalente.

$$\text{Spec}(A \otimes_k L) \cong \text{Spec } A \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \cong \bigsqcup \text{Spec } L.$$

Esto muestra que, al cambiar de base de k a L , el espacio topológico $\text{Spec } A$ se trivializa en una unión disjunta de copias de $\text{Spec } L$, análogamente a cómo un revestimiento topológico se trivializa sobre un entorno abierto U , es decir, al cambiar de base a U .

Definición 3.6. Dado un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$ y un punto $s \in S$, se llama fibra sobre s al conjunto $\pi^{-1}(s) \subseteq X$.

Proposición 3.7. *Todo revestimiento $\pi : X \rightarrow S$ es una aplicación abierta. En consecuencia, si π es además suprayectiva, entonces S tiene la topología final de π .*

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos □

Definición 3.8. Un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$ se dice finito si sus fibras son finitas.

Proposición 3.9. *Todo revestimiento finito $\pi : X \rightarrow S$ es una aplicación cerrada.*

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos. □

Proposición 3.10. *Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento. Si S es conexo, todas las fibras de π tienen el mismo cardinal. En consecuencia, π es suprayectiva (suponiendo $X \neq \emptyset$).*

Demostración. Sea S_α el subconjunto de los puntos de S cuya fibra tiene cardinal α . Se tiene $S = \bigsqcup S_\alpha$, donde α recorre todos los distintos cardinales de las fibras de π . Por la conexidad de S bastará ver que S_α es un abierto de S . Dado un punto $s \in S_\alpha$, sea V un entorno de s en S trivializante de π , es decir, $\pi^{-1}(V) = \bigsqcup U_i$ con $U_i \xrightarrow{\pi} V$. Es claro que todas las fibras V tienen el mismo cardinal (es el cardinal del sistema de índices $\{i\}$); en consecuencia, dichas fibras tienen el cardinal α de la fibra $\pi^{-1}(s)$. Luego $V \subseteq S_\alpha$. \square

Definición 3.11. Sea $X \rightarrow S$ un revestimiento, siendo S conexo. Al cardinal común de sus fibras se le llama grado del revestimiento y lo denotamos por:

$$[X : S] := |\pi^{-1}(s)| \quad s \in S.$$

Definición. El análogo es el grado de una k -álgebra finita $k \hookrightarrow A$, definido como la dimensión de A como espacio vectorial sobre k , esto es:

$$[A : k] := \dim_k A.$$

Observamos que en ambos casos el grado es el número de copias disjuntas en el caso topológico o componentes en el producto en el caso algebraico, que hay al trivializar. Es decir.

$$X \times_S U \cong \bigsqcup_{[X:S]} U \quad y \quad A \otimes_k L \cong \prod_{[L:k]} L.$$

En general, para los resultados más elaborados se pedirá la hipótesis de que al menos S sea un espacio topológico conexo, con el fin de no tener que trabajar con diferentes componentes conexas y así simplificar los argumentos.

Observación. El análogo en la teoría de Galois algebraica es el hecho de que la base es un cuerpo. Desde el punto de vista geométrico, decir que la base es un cuerpo k equivale a que su espectro $\text{Spec}(k)$ es un espacio topológico conexo.

Observación 10. Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento de grado $[X : S]$. Existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de S por entornos trivializantes tales que:

$$\pi^{-1}(U_i) \cong \bigsqcup_{[X:S]} U_i,$$

Definimos entonces $\mathcal{U} := \bigsqcup_{i \in I} U_i$, con su aplicación natural de inclusión $j : \mathcal{U} \hookrightarrow S$, que es suprayectiva ya que los U_i recubren S y además, j es un homeomorfismo local, es decir: para todo $x \in \mathcal{U}$, existe un entorno abierto $V \subseteq \mathcal{U}$ tal que $j|_V : V \xrightarrow{\sim} j(V)$ es un homeomorfismo sobre su imagen. Observamos además que:

$$X \times_S \mathcal{U} = \bigsqcup_{i \in I} (X \times_S U_i) \cong \bigsqcup_{i \in I} \bigsqcup_{[X:S]} U_i = \bigsqcup_{[X:S]} \mathcal{U}.$$

Esto induce el siguiente cuadrado conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{[X:S]} \mathcal{U} \cong X \times_S \mathcal{U} & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{j} & S \end{array}$$

Dado un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$, podemos generalizar la noción de trivialización anterior. En lugar de trivializar un revestimiento sobre un recubrimiento abierto de S , lo trivializaremos sobre otro revestimiento $Y \rightarrow S$, que al igual que el recubrimiento, es un homeomorfismo local y suprayectivo.

Definición 3.12. Sea $g : Y \rightarrow S$ un revestimiento con S conexo. Diremos que g es trivial sobre el revestimiento $f : X \rightarrow S$ si el producto fibrado $X \times_S Y$ es homeomorfo a una suma disjunta de $[Y : S]$ copias de X , es decir, $X \times_S Y \cong \bigsqcup_{[Y:S]} X$. Esto se traduce en que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{[Y:S]} X \cong X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{j} & S. \end{array}$$

Observación. En la teoría de Galois algebraica una k -álgebra finita y separable A se dice trivializada por una extensión $k \rightarrow L$ si $A \otimes_k L \cong \bigoplus_{[L:k]} L$, del mismo modo que en topología descomponemos $Y \times_S X$ en copias disjuntas de X . Es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo producto:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{[L:k]} L \cong A \otimes_k L & \longleftarrow & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ L & \longleftarrow & k \end{array}$$

y que, a nivel de espectros, se traduce en:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{[L:k]} \text{Spec } L \cong \text{Spec}(A \otimes_k L) & \longrightarrow & \text{Spec}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(L) & \longrightarrow & \text{Spec}(k) \end{array}$$

Esta situación refleja exactamente la caracterización topológica anterior (10), donde un recubrimiento abierto $\mathcal{U} \hookrightarrow S$ trivializa globalmente el revestimiento, es decir, $X \times_S \mathcal{U} \cong \bigsqcup_{[X:S]} \mathcal{U}$. La analogía es clara, no se trata simplemente de una trivialización local (como ocurre en la definición de revestimiento mediante entornos abiertos trivializantes), sino de una trivialización global a lo largo de todo un recubrimiento. En el contexto topológico, el recubrimiento $\mathcal{U} \rightarrow S$ permite reconstruir X como una unión disjunta de $[X : S]$ copias de \mathcal{U} . En el contexto algebraico, el cambio de base desde k a L descompone globalmente $A \otimes_k L$ como una suma directa de copias de L , y su espectro como una unión disjunta de $\text{Spec}(L)$. En ambos casos, la clave es que se obtiene una descomposición global del objeto total, no simplemente una descripción local.

Ejemplo 3.13. Veamos algunos ejemplos de revestimientos y su grado.

1. La función exponencial $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $\exp(z) = e^z$ es un revestimiento de grado infinito.
2. La aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi it}$ es un revestimiento del círculo de grado infinito.
3. Para $n \geq 1$, $p_n : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $p_n(z) = z^n$ es un revestimiento de grado n .
4. La proyección $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ que identifica puntos antípodos es un revestimiento de grado 2.

La justificación de estas afirmaciones [En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos](#). A continuación se muestran imágenes de ambos revestimientos de S^1 , es decir, de los ejemplos 2 y 3.

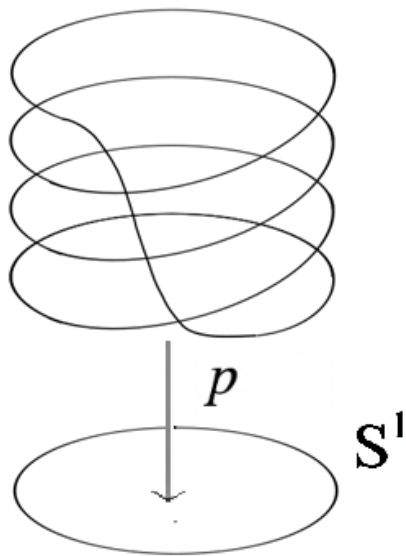


Figura 3.1. Recubrimiento de grado n

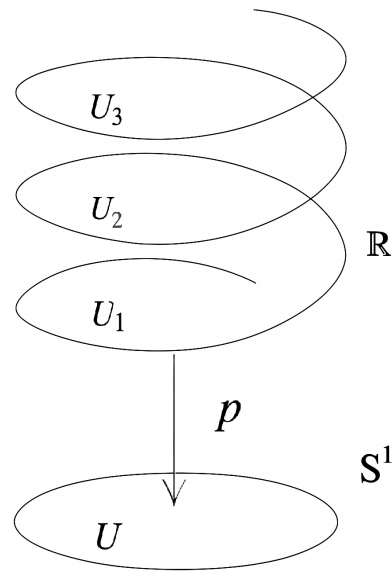


Figura 3.2. Recubrimiento de grado infinito

En la Figura 3.1 se representa un recubrimiento de grado finito n , dado por la aplicación $p_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$, donde $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Este recubrimiento envuelve el círculo sobre sí mismo n veces, de modo que cada punto del círculo de llegada tiene exactamente n preimágenes, equiespaciadas sobre el dominio.

Por su parte, la Figura 3.2 muestra el recubrimiento $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$, donde el espacio total es la recta real \mathbb{R} . Cada punto del círculo tiene infinitas preimágenes, separadas una unidad entre sí. Visualmente, este recubrimiento se representa como una hélice infinita, en la que cada vuelta completa corresponde a un valor entero de t . En la figura se representa un conjunto abierto $U \subset S^1$, y sus preimágenes disjuntas $U_1, U_2, U_3 \subset \mathbb{R}$.

Corolario 3.14. Todo revestimiento $X \rightarrow S$ de grado 1 es un homeomorfismo.

Demostración. $X \rightarrow S$ es biyectivo por ser de grado 1. Por la Proposición 3.10 es un homeomorfismo. \square

Proposición 3.15. Si $p' : X' \rightarrow X$ y $p'' : X'' \rightarrow X'$ son revestimientos finitos de grados n_1 y n_2 respectivamente, entonces la composición $X'' \rightarrow X$ es un revestimiento finito de grado $n_1 \cdot n_2$.

Demostración. Sea $x \in X$. Como p' es un revestimiento, existe un entorno abierto $U \subseteq X$ tal que $(p')^{-1}(U)$ se descompone como unión disjunta de n_1 abiertos $U'_1, \dots, U'_{n_1} \subseteq X'$, cada uno homeomorfo sobre U por p' . Para cada i , sea $x'_i \in U'_i$ el punto tal que $p'(x'_i) = x$. Como p'' es un revestimiento, existe un abierto $V_i \subseteq X'$, entorno de x'_i , sobre el que p'' se trivializa. Definimos entonces $W_i := U'_i \cap V_i$, que es abierto en X' , contiene a x'_i , y sobre el que tanto p' como p'' se comportan bien: $p'|_{W_i}$ sigue siendo un homeomorfismo sobre su imagen $p(W_i) \subseteq U$, y p'' se trivializa sobre W_i . Definimos ahora

$$U_o := \bigcap_{i=1}^{n_1} p(W_i),$$

que es un entorno abierto de x , contenido en U , sobre el que se pueden comparar todas las trivializaciones.

Porque para cada $p'^{-1}(U_\alpha) \cap W_i \subseteq W_i$ es un abierto sobre el que p' es un homeomorfismo, y sobre cada uno de ellos, p'' se trivializa en n_2 abiertos disjuntos. En total, $p^{-1}(U_\alpha) \subseteq X''$ se descompone como la unión disjunta de $n_1 \cdot n_2$ abiertos, sobre los cuales p es un homeomorfismo. Así, p es un revestimiento finito de grado $n_1 \cdot n_2$. \square

Proposición. Si $k \hookrightarrow K$ es una extensión finita de cuerpos de grado n_1 y $K \hookrightarrow \Sigma$ es una extensión finita de grado n_2 , entonces $k \hookrightarrow \Sigma$ es una extensión finita de grado $n_1 \cdot n_2$.

En particular, la composición de extensiones finitas es una extensión finita.

Proposición 3.16. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow S$ revestimientos, siendo g finito. Entonces la composición $g \circ f : X \rightarrow S$ también es un revestimiento.

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 3.15. \square

3.3. Producto fibrado de revestimientos

Proposición 3.17. El producto fibrado de dos revestimientos $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ es un revestimiento $X \times_S Y \rightarrow S$.

Demostración. Dado un punto $s \in S$, consideremos un entorno abierto V trivializante del revestimiento $X \rightarrow S$ y otro entorno abierto W trivializante del revestimiento $Y \rightarrow S$. Veamos que el abierto $U = V \cap W$, que trivializa simultáneamente a ambos revestimientos, trivializa también a $X \times_S Y \rightarrow S$. De las igualdades

$$X \times_S U = \bigsqcup_i U, \quad Y \times_S U = \bigsqcup_j U,$$

resulta

$$(X \times_S Y) \times_S U = X \times_S (Y \times_S U) = X \times_S \left(\bigsqcup_j U \right) = \bigsqcup_j (X \times_S U) = \bigsqcup_j \left(\bigsqcup_i U \right).$$

\square

Proposición. Sean A y B dos k -álgebras finitas. Entonces

$$A \otimes_k B \text{ es separable} \iff A \text{ y } B \text{ son separables.}$$

Proposición 3.18. La noción de revestimiento es estable por cambio de base: dado un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$, para toda aplicación continua $g : S' \rightarrow S$, se cumple que la proyección $p_1 : S' \times_S X \rightarrow S'$ es un revestimiento.

$$\begin{array}{ccc} S' \times_S X & \longrightarrow & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

Demostración. El espacio $S' \times_S X = \{(x, s') \in X \times S' \mid g(s') = \pi(x)\}$. Tomamos $s' \in S'$ tal que $s = g(s') \in S$. Como π es un revestimiento, existe un entorno $U \subseteq S$ de s tal que

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i, \quad \text{con } U_i \cong U.$$

Definimos $V = g^{-1}(U) \subseteq S'$, que es un entorno abierto de s' . Tomamos su preimagen por p_1 :

$$p_1^{-1}(V) = \{(s', x) \in S' \times X \mid s' \in V, \pi(x) = g(s')\} = V \times_S \pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} (V \times_S U_i).$$

Donde la última igualdad se deduce de la propiedad 3. Dado que $V = g^{-1}(U)$ y $U_i \xrightarrow{\pi} U$, se tiene:

$$V \times_S U_i \xrightarrow{\pi} V \times_S U$$

y dado que U es subespacio de S , por la propiedad 4, $V \times_S U = g^{-1}(U) = V$ luego,

$$p_1^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} V.$$

□

Proposición 3.19. Si $X \rightarrow S$ e $Y \rightarrow S$ son revestimientos finitos de grados n y m respectivamente, entonces el producto fibrado $X \times_S Y \rightarrow S$ es un revestimiento de grado nm . Si $X \rightarrow S$ es un revestimiento finito de grado n , entonces el revestimiento cambiado de base $S' \times_S X \rightarrow S'$ también es de grado n .

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos

□

3.4. Morfismos entre revestimientos

Proposición 3.20. Sean $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ revestimientos. Todo S -morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ es un revestimiento.

Demostración. Sea U un abierto conexo de S que trivializa a la vez a los dos revestimientos, esto es,

$$f^{-1}(U) = \bigsqcup_i V_i \quad \text{con } V_i \xrightarrow{f} U, \quad g^{-1}(U) = \bigsqcup_j W_j \quad \text{con } W_j \xrightarrow{g} U.$$

Veamos que cada abierto W_j trivializa a $\varphi : X \rightarrow Y$. Con ello, todo punto $y_0 \in Y$ tendrá un entorno trivializante W_j para g , sin más que tomar U entorno de $s_0 = g(y_0)$.

Todos los abiertos V_i, W_j son conexos porque son homeomorfos a U . Como una aplicación continua transforma conexos en conexos, la aplicación

$$\varphi^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}(U) = \bigsqcup_i V_i \xrightarrow{\varphi} \bigsqcup_j W_j = g^{-1}(U)$$

transforma cada V_i en algún $W_{j=\sigma(i)}$, esto es, $\varphi(V_i) \subseteq W_{\sigma(i)}$. Más aún, el triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\varphi} & W_{\sigma(i)} \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & U \end{array}$$

implica que $\varphi : V_i \rightarrow W_{\sigma(i)}$ es homeomorfismo. En conclusión, cada W_j trivializa a φ , es decir,

$$\varphi^{-1}(W_j) = \bigsqcup_{\sigma(i)=j} V_i \quad \text{con } V_i \xrightarrow{\varphi} W_j.$$

□

Corolario 3.21. Si $f : X \rightarrow S$ y $g : Y \rightarrow S$ son revestimientos, entonces todas las aplicaciones del siguiente diagrama conmutativo son revestimientos:

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times_S Y & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 X & & Y \\
 f \searrow & & \swarrow g \\
 & S &
 \end{array}$$

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 3.17 y de la proposición anterior. \square

Definición 3.22. Un morfismo de S -espacios $\varphi : X' \rightarrow X''$ se dice isomorfismo si es un homeomorfismo. Dos revestimientos $X' \rightarrow S$ y $X'' \rightarrow S$ se dicen isomorfos si existe entre ambos un isomorfismo de S -espacios.

Definición 3.23. La categoría de los revestimientos sobre un espacio S , que denotaremos por $\mathbf{Rev}(S)$, tiene por objetos los pares (X, f) , donde $f : X \rightarrow S$ es un revestimiento. Los morfismos entre dos objetos (X, f) y (Y, g) son las aplicaciones continuas $\varphi : X \rightarrow Y$ que hacen conmutar el triángulo,

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\
 f \searrow & & \swarrow g \\
 & S &
 \end{array}$$

La categoría $\mathbf{Rev}(S)$ es una subcategoría plena de la categoría $S\text{-Esp}$ de S -espacios.

Definición. La categoría de las k -álgebras finitas y separables, que denotamos $k\text{-Alg}_{\text{sep}}$, tiene por objetos las k -álgebras A finitas y separables y los morfismos entre dos objetos A y B son los morfismos de k -álgebras o, equivalentemente, tales que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi} & B \\
 f \searrow & & \swarrow g \\
 & k &
 \end{array}$$

La categoría $k\text{-Alg}_{\text{sep}}$ es una subcategoría plena de la categoría $k\text{-Alg}$ de k -álgebras. Por la motivación detrás de este texto, podemos simplemente considerar la subcategoría de $k\text{-Alg}_{\text{sep}}$

$$C = \{k \rightarrow A \text{ finita, } L\text{-trivial}\}$$

como la categoría cuyos objetos son k -álgebras finitas A tales que $A \otimes_k L \cong \bigoplus_{i=1}^n L$. Es decir, álgebras que se trivializan sobre una extensión fija L de k .

Proposición 3.24. Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento. La restricción $\pi|_{X'} : X' \rightarrow S$ a cada componente conexa X' de X es un revestimiento.

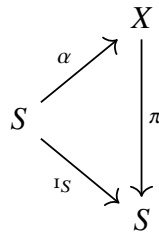
Demostración. Dado un punto $s \in S$, sea U un entorno abierto conexo que trivializa el revestimiento. Entonces

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_i U_i, \quad \text{con } U_i \cong U.$$

Nótese que cada U_i es conexo por ser homeomorfo al conexo U . Si U_i corta a X' , entonces $U_i \cap X'$ es conexo (la unión de dos subconjuntos conexos con intersección no vacía es conexa), y resulta, por la maximalidad de

X' , que $U_i \subseteq X'$. En conclusión, la antiimagen de U respecto de $\pi|_{X'} : X' \rightarrow S$ es la unión de algunas de las U_i , luego $X' \rightarrow S$ es un revestimiento. □

Recordamos la sección de una aplicación continua $\pi : X \rightarrow S$ es una aplicación continua $\alpha : S \rightarrow X$ que cumple $\pi \circ \alpha = 1_S$. Nótese que una sección $\alpha : S \rightarrow X$ es simplemente un morfismo de S -espacios:



Recordamos también que α es inyectiva porque la composición $\pi \circ \alpha = 1$ lo es.

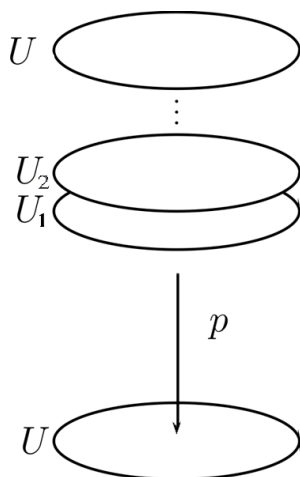
Lema 3.25 (secciones de un revestimiento). *Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento, siendo S conexo. Las secciones $\alpha : S \rightarrow X$ de π se corresponden biunívocamente con las componentes conexas de X que son homeomorfas a S vía π , es decir:*

$$\text{Hom}_S(S, X) = \{ \text{componentes conexas de } X \text{ homeomorfas a } S \text{ vía } \pi \}, \quad \alpha \mapsto \alpha(S).$$

Demostración. Si X_0 es una componente conexa de X homeomorfa a S vía π , entonces el homeomorfismo inverso $\pi^{-1} : S \rightarrow X_0 \subseteq X$ define una sección.

Recíprocamente, sea $\alpha : S \rightarrow X$ una sección de π . Veamos que $\alpha(S)$ es una componente conexa de X . Sea X_0 la componente conexa de X que contiene al conexo $\alpha(S)$. Aplicando (3.20) a los revestimientos $1_S : S \rightarrow S$, $\pi : X_0 \rightarrow S$, resulta que $\alpha : S \rightarrow X_0$ es un revestimiento. Como α es inyectiva, este revestimiento es de grado 1, luego es un homeomorfismo por el Corolario 3.14. □

Ejemplo 3.26. Consideremos el revestimiento trivial $p : \mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1$, dado por la proyección sobre la segunda componente, $p(n, z) = z$.



Claramente es un revestimiento porque para todo $z_0 \in S^1$, el abierto $U \subseteq S^1$ suficientemente pequeño,

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\} \times U, \quad \text{con } \{n\} \times U \cong U.$$

Observamos que cada conjunto $\{n\} \times S^1 \subseteq \mathbb{Z} \times S^1$ es una componente conexa homeomorfa a S^1 vía p , y por el lema anterior, cada una de ellas induce una sección

$$\alpha_n : S^1 \rightarrow \mathbb{Z} \times S^1, \quad \alpha_n(z) = (n, z),$$

satisfaciendo $p \circ \alpha_n = 1_{S^1}$. Por tanto, $\text{Hom}_{S^1}(S^1, \mathbb{Z} \times S^1) = \mathbb{Z}$.

Recubrimiento trivial

Definición 3.27. Sea $\varphi : X \rightarrow Y$ un S -morfismo. Se llama gráfica de φ al subespacio $\Gamma_\varphi \subseteq X \times_S Y$ formado por las parejas $(x, \varphi(x))$, con $x \in X$.

Proposición 3.28. *Un subespacio $\Gamma \subseteq X \times_S Y$ es la gráfica de algún S -morfismo $X \rightarrow Y$ si y sólo si la proyección natural $p_1 : \Gamma \rightarrow X$ es un homeomorfismo. Por tanto, existe una biyección*

$$\text{Hom}_S(X, Y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{subespacios } \Gamma \subseteq X \times_S Y \\ \text{homeomorfos a } X \text{ vía } p_1 \end{array} \right\}, \quad \varphi \mapsto \Gamma_\varphi.$$

Demostración. Sea $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \in X \times_S Y \mid x \in X\}$ la gráfica de un S -morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$. Construimos la inversa de la proyección:

$$p_1^{-1} : X \rightarrow \Gamma_\varphi, \quad x \mapsto (x, \varphi(x)),$$

que es continua por serlo φ . Luego p_1 es un homeomorfismo.

Recíprocamente sea $\Gamma \subseteq X \times_S Y$ un subespacio tal que $p_1 : \Gamma \rightarrow X$ es un homeomorfismo. Entonces, para cada $x \in X$, existe un único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \Gamma$. Definimos:

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \nearrow p_1^{-1} & \end{array} \quad \varphi(x) := p_2(p_1^{-1}(x)) \in Y.$$

Se tiene entonces que $\varphi : X \rightarrow Y$ es continua, y además es un S -morfismo pues se cumple $f(x) = g(\varphi(x))$ para todo $x \in X$, ya que $(x, \varphi(x)) \in X \times_S Y$. La gráfica buscada es $\Gamma = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\}$. □

Observación II. De la proposición anterior se deduce que:

$$\text{Hom}_S(X, Y) = \{ \text{subespacios } \Gamma \subseteq X \times_S Y \text{ homeomorfos a } X \text{ vía } p_1 \}.$$

Pero este último conjunto es precisamente el conjunto de morfismos $X \rightarrow X \times_S Y$ en la categoría $X\text{-Esp}$, es decir,

$$\text{Hom}_S(X, Y) = \text{Hom}_X(X, X \times_S Y).$$

Esta identificación es natural: a cada S -morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ se le asocia su gráfica $\Gamma_\varphi : X \rightarrow X \times_S Y$, que es un morfismo $X \rightarrow X \times_S Y$ que compone con la proyección p_1 como la identidad.

Teorema 3.29 (fórmula de los morfismos). *Sean $X \rightarrow S$ y $T \rightarrow S$ revestimientos, siendo T conexo. Asignar a cada S -morfismo $\varphi : T \rightarrow X$ su correspondiente gráfica $\Gamma_\varphi \subseteq T \times_S X$ establece una correspondencia biunívoca.*

$$\text{Hom}_S(T, X) = \left\{ \begin{array}{l} \text{componentes conexas de } T \times_S X \\ \text{homeomorfas a } T \text{ vía } p_1 \end{array} \right\}, \quad \varphi \mapsto \Gamma_\varphi.$$

Demostración. Por la observación anterior se verifica la igualdad:

$$\text{Hom}_S(T, X) = \text{Hom}_T(T, T \times_S X),$$

que asigna a cada S -morfismo $\varphi : T \rightarrow X$ su aplicación gráfica $(\iota_T, \varphi) : T \rightarrow T \times_S X$.

Aplicando ahora el lema 3.25 al revestimiento $p_1 : T \times_S X \rightarrow T$ se termina teniendo en cuenta que $(\iota_T, \varphi)(T) = \Gamma_\varphi$, por tanto, efectivamente p_1 es un homeomorfismo. □

Teorema (fórmula de los puntos). Sea A una k -álgebra y sea L una extensión de cuerpos de k . A cada L -punto $p : A \rightarrow L$, se le asocia el punto racional $p \otimes 1 : A_L = A \otimes_k L \rightarrow L$ de la L -álgebra A_L . Esta correspondencia establece una biyección:

$$\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, L) = [x \in \text{Spec}(A_L) \text{ tal que } A_L/\mathfrak{m}_x = L].$$

Observación. Sea $A = k[x]/(p(x))$ una k -álgebra finita, donde $p(x) \in k[x]$ es un polinomio no constante. Sea L una extensión de cuerpos de k . Entonces, por la fórmula de los puntos,

$$\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, L) = [\text{Raíces de } p(x) \text{ en } L].$$

Supongamos que al extender a L , el polinomio se descompone como:

$$p(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r) \cdot q_1(x) \cdots q_s(x),$$

donde $\alpha_i \in L$ y los $q_j(x)$ son irreducibles sobre L sin raíces simples. Entonces, al cambiar de base:

$$A \otimes_k L = L[x]/(p(x)) = \bigoplus_{i=1}^r L[x]/(x - \alpha_i) \oplus \bigoplus_{j=1}^s L[x]/(q_j(x)).$$

Las componentes $L[x]/(x - \alpha_i) \cong L$ corresponden a puntos racionales de A_L , en consecuencia, $\text{Spec}(A \otimes_k L)$ tiene exactamente r componentes racionales o, por la fórmula de los puntos, $A \rightarrow L$ (correspondientes a las raíces en L), y estas se interpretan como puntos disjuntos en $\text{Spec}(A \otimes_k L)$ iguales a $\text{Spec}(L)$.

Lo mismo ocurre en el caso de los revestimientos; la fórmula de los morfismos afirma que,

$$T \times_S X = \left(\bigsqcup_{i=1}^r T \right) \sqcup T' \dots$$

donde r es igual al cardinal de $\text{Hom}_S(T, X)$.

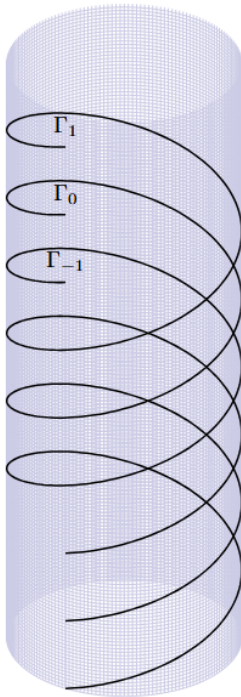
Ejemplo 3.30. Consideremos el círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ como espacio base y los siguientes revestimientos, $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dado por $t \mapsto e^{2\pi it}$ y el revestimiento de grado n dado por $p_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$. Queremos describir todos los morfismos de S^1 -espacios $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ p_n \downarrow & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{\text{id}} & S^1 \end{array}$$

El producto fibrado $S^1 \times_{S^1} \mathbb{R}$ consiste en todos los pares $(z, t) \in S^1 \times \mathbb{R}$ tales que $z^n = e^{2\pi it}$. Dado que $\arg(z^n) = n \arg(z)$, las soluciones para t son: $t = \frac{n \arg(z)}{2\pi} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

²Recordamos: Sea A una k -álgebra y sea L una extensión de cuerpos de k . Llamamos L -puntos de A a los morfismos de k -álgebras $p : A \rightarrow L$.

$$S^1 \times \mathbb{R}$$



Esto define, para cada $k \in \mathbb{Z}$, una componente conexas:

$$\Gamma_k = \left\{ \left(z, \frac{n \arg(z)}{2\pi} + k \right) \mid z \in S^1 \right\},$$

cada una homeomorfa a S^1 mediante la proyección $p_1(z, t) = z$.

Por la Fórmula de los Morfismos, cada Γ_k induce un morfismo $\varphi_k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por: $\varphi_k(z) = \frac{n \arg(z)}{2\pi} + k$.

Se verifica que $p \circ \varphi_k(z) = e^{2\pi i \left(\frac{n \arg(z)}{2\pi} + k \right)} = e^{in \arg(z)} = z^n = p_n(z)$, por lo que φ_k es un S^1 -morfismo.

$S^1 \times_{S^1} \mathbb{R}$ dentro de $S^1 \times \mathbb{R}$

3.5. Cocientes por la acción de un grupo

Recordemos que, en la categoría **Top**, los automorfismos de un espacio topológico X son los homeomorfismos $f : X \rightarrow X$, es decir, los isomorfismos en **Top** con dominio y codominio X . El conjunto de todos ellos, denotado $\text{Aut}(X) \subset \text{Hom}_{\text{Top}}(X, X)$, forma un grupo bajo la operación de composición.

Definición 3.31. Un grupo de automorfismos del espacio X es un subgrupo $G \leq \text{Aut } X$. Con más generalidad, una acción de un grupo G sobre un espacio X es un morfismo de grupos $G \rightarrow \text{Aut } X$.

Sea G un grupo de automorfismos de un espacio X . Denotamos por X/G al espacio cociente de X respecto de la relación de equivalencia:

$$x \equiv_G x' \iff \text{existe } g \in G \text{ tal que } g(x) = x'.$$

Proposición 3.32. Sea G un grupo de automorfismos de un espacio topológico X . La aplicación de paso al cociente $\pi : X \rightarrow X/G$ es abierta.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos □

Proposición 3.33. Un grupo G de automorfismos de X se dice propriadamente discontinuo si para todo punto $x \in X$ existe un entorno abierto U cuyos transformados $\{g(U)\}_{g \in G}$ son disjuntos entre sí:

$$g_1 \neq g_2 \implies g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset.$$

Un grupo de automorfismos G es propriadamente discontinuo si y sólo si $\pi : X \rightarrow X/G$ es un revestimiento.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos □

Proposición 3.34. *Un grupo G de automorfismos de X se dice que opera libremente (o sin puntos fijos) si todo automorfismo $g \in G$, $g \neq \text{id}$, carece de puntos fijos. Todo grupo propiamente discontinuo opera libremente.*

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos □

Proposición 3.35. *Sea X un espacio separado. Todo grupo finito G de automorfismos de X que opera libremente es propiamente discontinuo.*

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos □

Ejemplo 3.36. Sea $X = S^2$ y sea $G = \{\text{id}, \sigma\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donde $\sigma(x) = -x$ es la aplicación antipodal. Como S^2 es un espacio de Hausdorff y G es un grupo finito, la acción es propiamente discontinua. El espacio cociente S^2/G se obtiene identificando cada punto con su antipodal, lo que da como resultado el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$.

$$S^2/G = \{[x] \mid x \in S^2, x \sim -x\} \cong \mathbb{R}P^2.$$

Tomemos $X = \mathbb{R}$ y $G = \{g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid g_n(x) = x + n, n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. La acción es propiamente discontinua pues para cualquier $x \in \mathbb{R}$, el entorno $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ satisface que $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq \text{id}$.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x] = x + \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\} \cong [0, 1) \cong S^1.$$

Para $X = \mathbb{R}^2$, consideremos $G = \{g_{m,n} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid g_{m,n}(x, y) = (x + n, y + m), m, n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$. La acción es propiamente discontinua; para verlo, basta tomar $V = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \times (y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ entorno de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y el cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$:

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{[(x, y)] = (x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cong [0, 1) \times [0, 1) \cong S^1 \times S^1.$$

Definición 3.37. Dado un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$, es decir, un objeto (X, π) de la categoría $S\text{-Esp}$ (o de $\mathbf{Rev}(S)$, si se prefiere), un automorfismo de (X, π) es un S -morfismo $g : X \rightarrow X$ tal que $\pi \circ g = \pi$, es decir, un morfismo en $\text{Hom}_{S\text{-Esp}}(X, X)$ que es, además, un homeomorfismo. El conjunto de tales automorfismos se denota $\text{Aut}_S(X) \subset \text{Hom}_S(X, X)$, y los llamaremos automorfismo del revestimiento.

Obsérvese que un automorfismo g de un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$ define en cada fibra $\pi^{-1}(s)$ una permutación de sus puntos.

Definición. Un automorfismo de una k -álgebra A es un isomorfismo de anillos $f : A \rightarrow A$ tal que $f(\lambda \cdot \text{id}_A) = \lambda \cdot \text{id}_A$ para todo $\lambda \in k$; es decir, un isomorfismo de k -álgebras. El conjunto de todos los automorfismos de A sobre k se denota $\text{Aut}_{k\text{-alg}} A$.

Proposición 3.38. *Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento, con X conexo. Dos S -morfismos $g, g' : X \rightarrow X$ (por ejemplo, dos automorfismos) que coincidan en un punto $x_0 \in X$ son iguales.*

Demostración. Las gráficas Γ_g y $\Gamma_{g'}$ se intersecan en el punto $(x_0, g(x_0)) = (x_0, g'(x_0))$. Por la fórmula de los morfismos, las gráficas son componentes conexas de $X \times_S X$, luego $\Gamma_g = \Gamma_{g'}$, y entonces $g = g'$. □

Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento y sea $G \subseteq \text{Aut}_S X$ un subgrupo. Por la propiedad universal del cociente, la aplicación $\pi : X \rightarrow S$ se factoriza a través del cociente $p : X \rightarrow X/G$, así que se tiene un triángulo conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X/G \\ & \searrow \pi & \swarrow \bar{\pi} \\ & S & \end{array}$$

Lema 3.39. Sea $\pi : X = \bigsqcup_{i \in I} S \rightarrow S$ un revestimiento trivial, siendo S conexo, y sea $G \subseteq \text{Aut}_S X$ un subgrupo. Entonces $\bar{\pi} : X/G \rightarrow S$ es un revestimiento trivial.

Demostración. Denotemos $S \times i$ a la i -ésima copia de S en $X = \bigsqcup_{i \in I} S$, o sea $X = S \times I$. Un automorfismo $g \in G$ transforma cada componente conexa $S \times i$ en otra componente $S \times j$, cuyo índice depende de i ; escribamos $j = g(i)$. Así, cada $g \in G$ induce una biyección en el conjunto I de índices. El homeomorfismo

$$g : S \times i \rightarrow S \times g(i)$$

es la identidad en el factor S , debido al triángulo conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S \times i & \xrightarrow{g} & S \times g(i) \\ & \searrow \pi=1 & \downarrow \pi=1 \\ & & S \end{array}$$

Resulta entonces que:

$$X/G = (S \times I)/G = S \times (I/G) = \bigsqcup_{[i] \in I/G} S \xrightarrow{\bar{\pi}} S,$$

luego $\bar{\pi}$ es un revestimiento trivial con sistema de índices I/G . \square

Proposición 3.40. Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento y sea $G \subseteq \text{Aut}_S X$ un subgrupo. Entonces $\bar{\pi} : X/G \rightarrow S$ es un revestimiento (luego también $p : X \rightarrow X/G$ lo es, por la Proposición 3.20).

Demostración. Como todo revestimiento $\pi : X \rightarrow S$ es localmente trivial, la cuestión se reduce al lema anterior. \square

3.6. Revestimientos de Galois

Definición 3.41. Un revestimiento $X \rightarrow S$ entre espacios conexos se dice de Galois si el grupo $\text{Aut}_S X$ opera transitivamente en cada fibra, esto es, para todo par de puntos x_1, x_2 en la misma fibra existe un automorfismo $g \in \text{Aut}_S X$ tal que $g(x_1) = x_2$. Al grupo $G = \text{Aut}_S X$ se le llama grupo de Galois del revestimiento.

Definición. Diremos que una extensión finita de cuerpos $k \hookrightarrow L$ es una extensión de Galois si el grupo de automorfismos

$$\text{Aut}_{k\text{-alg}}(L) = \text{Aut}(L/k) := \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(L, L)$$

tiene orden igual al grado de la extensión:

$$|\text{Aut}(L/k)| = [L : k].$$

En tal caso, se dice que $G = \text{Aut}(L/k)$ es el grupo de Galois de la extensión L/k .

La siguiente proposición caracteriza a los revestimientos de Galois como aquellos que se trivializan al cambiar de base a sí mismos:

Proposición 3.42. *Un revestimiento $X \rightarrow S$ entre espacios conexos es de Galois si y sólo si*

$$X \times_S X = \bigsqcup X,$$

es decir, $X \times_S X$ es unión disjunta de componentes conexas homeomorfas a X vía la proyección natural p_1 .

Demostración. Supongamos que $X \rightarrow S$ es de Galois de grupo G . Dado un punto $(x, x') \in X \times_S X$, como x y x' están en la misma fibra de π , existe un automorfismo $g \in G$ que cumple $g(x) = x'$. Entonces (x, x') pertenece a la gráfica Γ_g , que es una componente conexa de $X \times_S X$ homeomorfa a X (por el Teorema 3.29). Luego:

$$X \times_S X = \bigsqcup_{g \in G} \Gamma_g = \bigsqcup X.$$

Recíprocamente, supongamos que $X \times_S X = \bigsqcup X$, es decir, que $X \times_S X$ es unión de gráficas de S -morfismos $X \rightarrow X$ (por la fórmula de los morfismos). Dados dos puntos x, x' de una fibra de π , el punto $(x, x') \in X \times_S X$ pertenece a la gráfica de algún S -morfismo $g : X \rightarrow X$. Veamos que g es un automorfismo del revestimiento. Sea $g' : X \rightarrow X$ el S -morfismo que cumple $g'(x') = x$. Entonces $g' \circ g$ es un S -morfismo que actúa como la identidad sobre x , así que por la Proposición 3.38, $g' \circ g = \text{id}$. Igualmente se prueba que $g \circ g' = \text{id}$, por lo que $g \in \text{Aut}_S X$, y se concluye. \square

Teorema. Sea $k \hookrightarrow L$ una extensión finita separable. Entonces L es una extensión de Galois sobre k si y solo si se tiene una descomposición de k -álgebras:

$$L \otimes_k L \cong \bigoplus_{\sigma \in \text{Aut}(L/k)} L.$$

Proposición 3.43. *Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento finito entre espacios conexos. Entonces:*

$$|\text{Aut}_S X| \leq [X : S].$$

Además, se alcanza la igualdad si y solo si el revestimiento es de Galois.

Demostración. Sea $G := \text{Aut}_S X$. Consideramos el producto fibrado $X \times_S X$, que también es un revestimiento sobre X . Podemos aplicar la fórmula de los morfismos 3.29 con $T = X$, que nos dice que los elementos de $\text{Hom}_S(X, X) = G$ se corresponden biunívocamente con las componentes conexas de $X \times_S X$ que son homeomorfas a X vía la proyección p_1 , donde estas además se corresponden con las gráficas de los automorfismos. Por tanto, existe una descomposición:

$$X \times_S X = \bigsqcup_{g \in G} \Gamma_g \sqcup X',$$

donde:

- cada Γ_g es la gráfica del automorfismo $g \in G$ (y es homeomorfa a X),
- X' es la unión de otras componentes no homeomorfas a X .

El grado del revestimiento $X \times_S X \rightarrow X$ viene dado por:

$$[X \times_S X : X] = \sum_{g \in G} [\Gamma_g : X] + [X' : X].$$

Cada $\Gamma_g \rightarrow X$ es homeomorfa vía p_1 , así que tiene grado 1. Luego:

$$[X \times_S X : X] = |G| + [X' : X] \geq |G|.$$

Pero también tenemos que (véase la Proposición 3.19):

$$[X \times_S X : X] = [X : S],$$

Así, deducimos que:

$$|G| \leq [X : S],$$

y la igualdad se da si y solo si no hay componentes extra (es decir, $X' = \emptyset$), lo cual equivale a que todas las componentes de $X \times_S X$ sean gráficas de automorfismos de X , lo que por la proposición anterior significa que el revestimiento es de Galois. \square

Observación 12. Del resultado anterior se deduce que, para un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$ entre espacios conexos, son equivalentes las siguientes condiciones:

1. El revestimiento es de Galois, es decir, el grupo $\text{Aut}_S(X)$ opera transitivamente en cada fibra.
2. Se verifica la igualdad:

$$X \times_S X = \bigsqcup_{g \in \text{Aut}_S(X)} X,$$

3. Además si el revestimiento es finito se cumple la igualdad:

$$|\text{Aut}_S(X)| = [X : S].$$

Esto nos permite reformular la definición de revestimiento de Galois de forma completamente análoga al caso de la teoría de Galois algebraica: diremos que un revestimiento finito $\pi : X \rightarrow S$ es de Galois si su grupo de automorfismos $\text{Aut}_S(X)$ tiene orden igual al grado del revestimiento, $|\text{Aut}_S(X)| = [X : S]$.

Observación. Sea $A = k[x]/(p(x))$, donde $p(x) \in k[x]$ es un polinomio separable (es decir, sin raíces múltiples) e irreducible. Entonces, la extensión mínima de cuerpos que trivializa A es el cuerpo generado por las raíces $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $p(x)$. Es decir, $L := k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, al que llamamos cuerpo de descomposición de $p(x)$, este cuerpo es una extensión de Galois de k . Definimos el grupo de Galois de $p(x)$ como:

$$G := \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L) = \text{Gal}(L/k).$$

Todo elemento $g \in G$ queda completamente determinado por sus valores sobre las raíces $g(\alpha_1), \dots, g(\alpha_n)$, y además, como g es un automorfismo de k -álgebras, necesariamente permuta las raíces de $p(x)$. Por tanto, el grupo de Galois G puede identificarse canónicamente con un subgrupo del grupo de permutaciones de las raíces de $p(x)$.

En topología, un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$ se dice de Galois si el grupo $\text{Aut}_S X$ actúa transitivamente sobre cada fibra $\pi^{-1}(s)$. En este contexto algebraico, la fibra es el conjunto de raíces del polinomio $p(x)$ en L , y el

grupo de Galois actúa sobre ella permutando las raíces. Descomponemos $p(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $L[x]$:

$$p(x) = p_1(x) \cdots p_r(x),$$

donde cada $p_i(x)$ es irreducible. Como L trivializa a A , cada $p_i(x) = x - \alpha_i$ debe ser de grado 1, y por tanto hay tantos factores p_i como el grado de p :

$$A \otimes_k L \cong \bigoplus_{i=1}^{\deg(p(x))} L$$

Esto implica que $\text{Spec}(A \otimes_k L) \cong \bigsqcup^{\deg(p(x))} \text{Spec}(L)$: hay exactamente tantos puntos como el grado de $p(x)$.

La transitividad de esta acción corresponde exactamente a la definición de revestimiento de Galois. Es decir:

$$\text{Raíces de } p(x) \longleftrightarrow \text{fibras del revestimiento}, \quad \text{Aut}(L/k) \longleftrightarrow \text{Aut}_S X.$$

Ejemplo 3.44. 1. Consideramos el revestimiento $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto e^z$, es un revestimiento de Galois de grupo $G \cong \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{C} \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C} = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid e^z = e^w\} = \{(z, z + 2\pi in) \mid n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}\}.$$

Cada componente $\Gamma_n = \{(z, z + 2\pi in) \mid n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}\}$ es disjunta de otra y homeomorfa a \mathbb{C} vía p_1 , por tanto:

$$\mathbb{C} \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma_n \cong \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

y por el teorema anterior es de Galois, veamos ahora cuál es el grupo de Galois. Por definición, un automorfismo $g \in \text{Aut}_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C})$ debe satisfacer:

$$\pi \circ g = \pi \iff e^{g(z)} = e^z \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Esto implica que $g(z) - z \in 2\pi i\mathbb{Z}$, es decir, $g(z) = z + 2\pi in$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Aut}_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}) = \{g_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}, \quad \text{con } g_n(z) = z + 2\pi in.$$

2. Consideramos ahora el revestimiento $\pi_n : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \pi_n(z) = z^n$, para $n \geq 1$. Identificamos el grupo de Galois $G = \text{Aut}_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}^*)$. Sea $g \in G$, debe cumplirse:

$$\pi_n(g(z)) = \pi_n(z) \iff g(z)^n = z^n.$$

Las soluciones de esta ecuación son las n -ésimas raíces de la unidad multiplicando a z , es decir:

$$g(z) = \xi_k z \quad \text{donde } \xi_k = e^{2\pi ik/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Por tanto, el grupo G está dado por:

$$G = \{g_k : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto \xi_k z \mid k = 0, \dots, n-1\}.$$

Además observamos $g_k \circ g_m(z) = \xi_k(\xi_m z) = \xi_{k+m} z = g_{k+m \bmod n}(z)$, por lo tanto, $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La fibra de $\pi_n : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\pi_n(z) = z^n$, está dada por:

$$\pi_n^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid z^n = w\} = \{\xi_k w^{1/n} \mid k = 0, \dots, n-1\},$$

Sean $z_1 = \xi_k w^{1/n}$, $z_2 = \xi_m w^{1/n} \in \pi_n^{-1}(w)$. Entonces:

$$g_{m-k}(z_1) = \xi_{m-k} \cdot z_1 = \xi_{m-k} \xi_k w^{1/n} = \xi_m w^{1/n} = z_2.$$

Luego el grupo de Galois G actúa transitivamente sobre las fibras y por definición es un revestimiento de Galois.

3. Ahora consideramos el revestimiento $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\pi(t) = e^{it}$. Sea $g \in \text{Aut}_{S^1}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\pi(g(t)) = \pi(t) \Leftrightarrow e^{ig(t)} = e^{it} \Leftrightarrow g(t) = t + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, $\text{Aut}_{S^1}(\mathbb{R}) = \{g_k(t) = t + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Sea $w = e^{it} \in S^1$. La fibra es, $\pi^{-1}(w) = \{t + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dados $t_1 = t + 2\pi k$ y $t_2 = t + 2\pi m$, el automorfismo g_{m-k} cumple, $g_{m-k}(t_1) = t_1 + 2\pi(m-k) = t_2$. Así, el grupo de Galois también actúa transitivamente en las fibras y es \mathbb{Z} .

Calculamos ahora el producto fibrado del recubrimiento consigo mismo,

$$\mathbb{R} \times_{S^1} \mathbb{R} = \{(t, t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid e^{it} = e^{it'}\} = \{(t, t + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

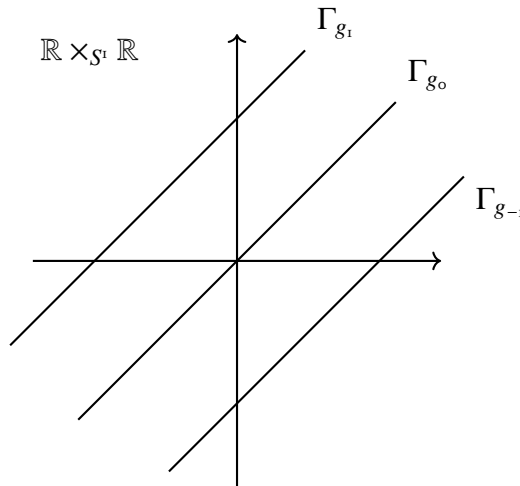
Observamos que, $\{(t, t + 2\pi k)\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{(t, g_k(t))\}_{k \in \mathbb{Z}}$, es decir, es la gráfica de los automorfismos $g_k(t) = t + 2\pi k$, luego:

$$\mathbb{R} \times_{S^1} \mathbb{R} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_k, \quad \text{donde } \Gamma_k = \{(t, t + 2\pi k) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Además cada componente Γ_k es homeomorfa a \mathbb{R} vía la proyección p_1 , así que:

$$\mathbb{R} \times_{S^1} \mathbb{R} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_k \cong \bigsqcup_{g \in G} \mathbb{R}.$$

El siguiente dibujo ilustra la situación.



4. Consideremos el revestimiento $\pi_n: S^1 \rightarrow S^1$ definido por $\pi_n(z) = z^n$. El producto fibrado de π_n consigo mismo está dado por:

$$S^1 \times_{S^1} S^1 = \{(z, z') \in S^1 \times S^1 \mid z^n = (z')^n\}.$$

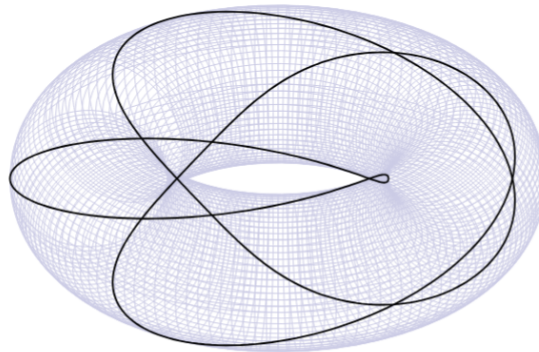
La ecuación $z^n = (z')^n$ implica que $z' = \xi_k z$. Esto nos permite descomponer el espacio como:

$$S^1 \times_{S^1} S^1 = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \Gamma_k, \quad \text{con } \Gamma_k = \{(z, \xi_k z) \mid z \in S^1\}.$$

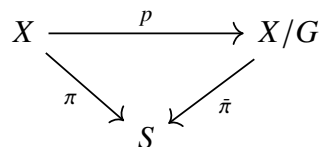
Es fácil ver que los automorfismos son las rotaciones $g_k: S^1 \rightarrow S^1$ dado por $g_k(z) = \xi_k z$ por tanto el grupo de Galois del revestimiento es, $\{g_k\}_{k=0}^{n-1} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Además cada componente Γ_k es la gráfica del automorfismo g_k . Por último el producto fibrado es homeomorfo via la primera proyección a una unión disjunta de n copias del círculo,

$$S^1 \times_{S^1} S^1 \cong \bigsqcup_{g \in G} S^1,$$

Por tanto la extensión es de Galois. En la siguiente imagen mostramos en negro $S^1 \times_{S^1} S^1$ para $k = 3$ dentro de $S^1 \times S^1$.



Teorema 3.45 (Artin). Sea $\pi: X \rightarrow S$ un revestimiento entre espacios conexos y sea $G \subseteq \text{Aut}_S X$ un subgrupo. Consideremos los revestimientos (ver 3.40):



Las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) $X/G \xrightarrow{\tilde{\pi}} S$.
- (b) $\pi: X \rightarrow S$ es un revestimiento de Galois y $G = \text{Aut}_S X$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b): Por el diagrama del enunciado, la biyección $X/G \xrightarrow{\tilde{\pi}} S$ implica que se cumple:

$$\pi(x) = \pi(x') \iff p(x) = p(x') \iff x \equiv_G x'.$$

Luego el grupo G (y con mayor razón $\text{Aut}_S X$) opera transitivamente en las fibras de π ; esto es, $\pi : X \rightarrow S$ es un revestimiento de Galois.

Para ver que $G = \text{Aut}_S X$, tomamos $\tilde{g} \in \text{Aut}_S X$ y un punto $x \in X$. Como $\tilde{g}(x)$ está en la misma fibra que x , por transitividad de G existe $g \in G$ tal que $g(x) = \tilde{g}(x)$. Entonces $g^{-1} \circ \tilde{g}(x) = x$, y por la proposición 3.38 se tiene que $g^{-1} \circ \tilde{g} = \text{id}$, luego $g = \tilde{g}$, y concluimos que $\tilde{g} \in G$, es decir, $G = \text{Aut}_S X$.

(b) \Rightarrow (a): Veamos que $\tilde{\pi} : X/G \rightarrow S$, $\tilde{\pi}([x]) = \pi(x)$, es inyectiva (pues tiene grado 1, y por tanto es un homeomorfismo).

Si $\tilde{\pi}([x]) = \tilde{\pi}([x'])$, entonces:

$$\pi(x) = \pi(x') \quad \Rightarrow \quad \exists g \in \text{Aut}_S X = G : g(x) = x' \quad \Rightarrow \quad x \equiv_G x' \quad \Rightarrow \quad [x] = [x'].$$

Así, $\tilde{\pi}$ es inyectiva y biyectiva localmente trivial, luego homeomorfismo. □

Teorema (de Artin algebraico). Sea L una extensión de Galois de k , y sea $H \subseteq G = \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L)$ un subgrupo. Entonces se cumple:

$$L^H = k \quad \iff \quad H = \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L).$$

Proposición 3.46. Sea X un espacio conexo y G un grupo propiamente discontinuo de homeomorfismos de X . El morfismo de paso al cociente $\pi : X \rightarrow X/G$ es un revestimiento de Galois de grupo de Galois G .

Demostración. En el anexo. □

Definición 3.47. Dado un revestimiento $\pi : X \rightarrow S$, consideramos una relación de equivalencia \mathcal{R} en X que verifique:

$$x_1 \equiv_{\mathcal{R}} x_2 \quad \Rightarrow \quad \pi(x_1) = \pi(x_2).$$

Esa propiedad implica que π factoriza a través del espacio cociente:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X/\mathcal{R} \\ & \searrow \pi & \swarrow \tilde{\pi} \\ & & S \end{array}$$

Si $\tilde{\pi} : X/\mathcal{R} \rightarrow S$ es un revestimiento, entonces diremos que es un revestimiento cociente (o intermedio) de $\pi : X \rightarrow S$. En tal caso, el morfismo de paso al cociente $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ es un revestimiento (por 3.20).

Por supuesto, se entiende que dos revestimientos cocientes de $\pi : X \rightarrow S$ son el mismo si están definidos por la misma relación de equivalencia en X .

Definición. Sea L una extensión de cuerpos sobre k . Un k -subextensión de L , o cuerpo intermedio, es un subcuerpo $E \subseteq L$ tal que $k \subseteq E \subseteq L$.

Ejemplo 3.48. Consideremos un revestimiento conexo $\pi : X \rightarrow S$. Sea $\pi' : X' \rightarrow S$ otro revestimiento conexo y sea $\varphi : X \rightarrow X'$ un morfismo de S -espacios:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & & S \end{array}$$

Por 3.20, φ es un revestimiento, luego X' tiene la topología final de φ (ver 3.7). Luego, fijado el morfismo φ , podemos pensar $X' \rightarrow S$ como un revestimiento cociente de $X \rightarrow S$, respecto de la relación de equivalencia:

$$x_1 \equiv x_2 \quad \iff \quad \varphi(x_1) = \varphi(x_2).$$

Proposición. Sea L una extensión de Galois de k , y sea $H \subseteq \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L)$ un subgrupo. Entonces el subcuerpo de invariantes

$$L^H := \{x \in L \mid h(x) = x \text{ para todo } h \in H\}$$

es un k -subextensión de L , es decir, $k \subseteq L^H \subseteq L$.

Lema 3.49. Sea S un espacio conexo y sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento trivial,

$$X = \bigsqcup_i S_i \quad (\text{unión disjunta de componentes conexas } S_i \cong S).$$

Sea $X' \subseteq X$ un subespacio. Si $\pi : X' \rightarrow S$ es un revestimiento, entonces es un revestimiento trivial.

Demostración. Veamos que X' es unión de algunas de las S_j . Dada una componente conexa S'_i de X' , sea S_j la componente conexa de X que contiene a S'_i . Como $S'_i \hookrightarrow S_j \hookrightarrow X \rightarrow S$ son revestimientos (por 3.24), la inclusión $S'_i \hookrightarrow S_j$ es un revestimiento por 3.20. Por ser una inclusión, este revestimiento tiene grado 1, luego es un homeomorfismo: $S'_i = S_j$. \square

Teorema 3.50 (de Galois). Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento de Galois de grupo $G = \text{Aut}_S X$. Existe una correspondencia biunívoca:

$$\{\text{subgrupos de } G\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{revestimientos } \bar{\pi} : \bar{X} \rightarrow S \\ \text{cocientes de } \pi : X \rightarrow S \end{array} \right\}$$

A cada subgrupo $H \leq G$ se le asigna el revestimiento cociente $\bar{X} := X/H \rightarrow S$.

A cada revestimiento cociente $X \xrightarrow{p} \bar{X} \xrightarrow{\bar{\pi}} S$ se le asigna el subgrupo $\text{Aut}_S \bar{X} \subseteq \text{Aut}_S X = G$.

Demostración. Veamos que la composición

$$\text{subgrupo } H \longmapsto \text{revest. cociente } \bar{X} := X/H \longmapsto \text{subgrupo } \text{Aut}_S \bar{X}$$

es la identidad.

Dado un subgrupo $H \subseteq G$, sabemos por 3.20 que $\bar{X} = X/H \rightarrow S$ es un revestimiento (luego es un revestimiento cociente). Por el teorema de Artin (3.45 $a \Rightarrow b$), aplicado a $X \rightarrow \bar{X}$, este revestimiento es de Galois y el grupo H coincide con $\text{Aut}_S \bar{X}$.

Veamos que la composición

$$\text{revest. cociente } X \xrightarrow{p} \bar{X} \rightarrow S \longmapsto \text{subgrupo } H := \text{Aut}_S \bar{X} \longmapsto \text{revest. cociente } X/H \rightarrow S$$

también es la identidad.

Probemos primero que el revestimiento $X \rightarrow \bar{X}$ es de Galois usando la caracterización 3.42. El revestimiento cambiado de base a sí mismo,

$$p_1 : X \times_{\bar{X}} X \rightarrow X,$$

está contenido en un revestimiento trivial:

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\bar{X}} X & \hookrightarrow & X \times_S X = \bigsqcup X \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_1 \\ & X & \end{array}$$

Luego, según 3.49, también es un revestimiento trivial: $X \times_{\bar{X}} X = \sqcup X$. Entonces $X \rightarrow \bar{X}$ es de Galois por 3.42.

Aplicando ahora el teorema de Artin (3.45 $b \Rightarrow a$) al revestimiento de Galois $X \rightarrow \bar{X}$ de grupo $H = \text{Aut}_{\Sigma} \bar{X}$, resulta $X/H = \bar{X}$, como queríamos. \square

Teorema (de Galois algebraico). Sea L una extensión de Galois de k , con grupo de Galois $G := \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L)$. Entonces existe una biyección entre los subgrupos de G y las k -subextensiones de L :

$$\{\text{Subgrupos de } G\} \longleftrightarrow \{k\text{-subextensiones de } L\},$$

dada por las aplicaciones:

$$H \longmapsto L^H,$$

y su inversa:

$$\Sigma \longmapsto \text{Aut}_{\Sigma\text{-alg}}(L) = \text{Aut}(L/\Sigma),$$

donde $k \subseteq \Sigma \subseteq L$ es una subextensión. (*Observación:* $\text{Aut}_{\Sigma\text{-alg}}(L) \subseteq \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L) = G$).

Ejemplo 3.51. Consideremos el revestimiento $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dado por $\pi(t) = e^{2\pi it}$. Cada punto $e^{2\pi it} \in S^1$ tiene como preimagen el conjunto $\pi^{-1}(e^{2\pi it}) = \{t + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. El grupo de automorfismos de este revestimiento es:

$$\text{Aut}_{S^1}(\mathbb{R}) = \{g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid g_n(t) = t + n, n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z},$$

donde cada automorfismo g_n corresponde a una traslación entera.

Aplicando el Teorema de Galois, los subgrupos de \mathbb{Z} (que son de la forma $n\mathbb{Z}$ para $n \geq 0$) clasifican todos los revestimientos intermedios de $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. La correspondencia es la siguiente:

Subgrupo $H \subseteq \mathbb{Z}$	Revestimiento intermedio $\mathbb{R}/H \rightarrow S^1$	Grado
$0\mathbb{Z} = \{0\}$	$\mathbb{R} \rightarrow S^1$	∞
\mathbb{Z}	$S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1, \pi_1(z) = z$	1
$2\mathbb{Z}$	$S^1 \cong \mathbb{R}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^1, \pi_2(z) = z^2$	2
$n\mathbb{Z}$	$S^1 \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow S^1, \pi_n(z) = z^n$	n

Para cada subgrupo $H = n\mathbb{Z}$, el revestimiento paso al cociente $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ viene dado por $p(t) = [t]$, donde $[t]$ lo identificamos con $e^{2\pi it/n} \in S^1$. El revestimiento intermedio $\bar{\pi}: \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ satisface:

$$\bar{\pi} \circ p(t) = \bar{\pi}([t]) = e^{2\pi it/n} = \pi(t), \text{ análogamente } \bar{\pi}(e^{2\pi it/n}) = e^{2\pi it}$$

lo que muestra que $\bar{\pi}$ puede identificarse con el mapa $z \mapsto z^n$ cuando $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ se parametriza como S^1 . Este revestimiento tiene grado n , ya que cada punto $e^{2\pi it/n} \in S^1$ tiene exactamente n preimágenes distintas:

$$\bar{\pi}^{-1}(e^{2\pi it/n}) = \{[t], [t + \frac{1}{n}], \dots, [t + \frac{n-1}{n}]\}.$$

El grupo de automorfismos del revestimiento cociente $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/H$ está formado por las transformaciones que preservan la proyección p :

$$\text{Aut}_{\mathbb{R}/H}(\mathbb{R}) = \{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p \circ g = p\}.$$

Para $H = n\mathbb{Z}$, esto se traduce en:

$$e^{2\pi ig(t)/n} = e^{2\pi it/n} \implies g(t) = t + k \text{ con } k \in n\mathbb{Z}.$$

Por tanto, $\text{Aut}_{\mathbb{R}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) = n\mathbb{Z}$, confirmando que el grupo de Galois del revestimiento cociente es precisamente el subgrupo original.

La estructura de subgrupos de \mathbb{Z} determina una jerarquía clara entre los revestimientos intermedios. La inclusión $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ ocurre si y sólo si n divide a m , lo que se refleja en la existencia de morfismos entre revestimientos:

- **Ejemplo 1:** Para $H = 2\mathbb{Z}$, el subgrupo $3\mathbb{Z}$ no está contenido en H (3 no divide a 2), por lo que no existe un revestimiento intermedio:

$$\mathbb{R}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\mathbb{Z}.$$

- **Ejemplo 2:** Para $H = 6\mathbb{Z}$, como $3\mathbb{Z} \supseteq 6\mathbb{Z}$ (3 divide a 6), existe un revestimiento intermedio de grado 2:

$$\mathbb{R}/6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/3\mathbb{Z}.$$

En general, el diagrama de extensiones intermedias es:

$$\mathbb{R}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/m\mathbb{Z} \quad \text{existe} \quad \iff \quad m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \quad \iff \quad m \mid n.$$

Lema 3.52 (levantamiento de automorfismos). *Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento de Galois de grupo G , y sean $\pi' : X' \rightarrow S$, $\pi'' : X'' \rightarrow S$ dos revestimientos cocientes. Dado un morfismo de S -espacios $g' : X' \rightarrow X''$, existe un automorfismo $g \in G$ que hace conmutar el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi'' \\ X' & \xrightarrow{g'} & X'' \end{array}$$

Demostración. Por la fórmula de los morfismos 3.29, la gráfica $\Gamma_{g'}$ es una componente conexa de $X' \times_S X''$. Consideremos la epiyección:

$$(\pi', \pi'') : X \times_S X \rightarrow X' \times_S X''.$$

Consideremos una componente conexa $\Gamma_g \subseteq X \times_S X$ que se proyecte en $\Gamma_{g'}$. De nuevo, por la fórmula de los morfismos, dicha componente Γ_g es la gráfica de un automorfismo $g \in G$. Es inmediato que la condición: $(\pi', \pi'')(\Gamma_g) \subseteq \Gamma_{g'}$ implica la conmutatividad del diagrama del enunciado. \square

Corolario 3.53. La biyección del Teorema de Galois hace corresponder los subgrupos normales de G con los revestimientos cocientes de $X \rightarrow S$ que son de Galois. Además, si H es un subgrupo normal de G , entonces el grupo de Galois del revestimiento cociente $\bar{X} = X/H \rightarrow S$ vale G/H .

Corolario. Sea L una k -extensión de Galois con grupo de Galois $G = \text{Aut}_{k\text{-alg}}(L)$, y sea $H \leq G$ un subgrupo. Entonces, la subextensión L^H es una extensión de Galois de k si y sólo si H es un subgrupo normal de G . En particular, bajo la correspondencia del teorema algebraico de Galois, el conjunto de k -subextensiones de Galois de L se corresponde biunívocamente con el conjunto de los subgrupos normales de G .

Teorema de Galois categórico

Comenzamos recordando la categoría de los G -conjuntos.

Definición 3.54. Sea G un grupo. Llamamos $G\text{-Con}$ a la categoría de G -conjuntos, cuyos objetos son conjuntos con una acción (a izquierda o a derecha) de G . Existen dos versiones:

- G -conjunto a izquierda, un objeto de $G\text{-Con}$ es un par (X, \cdot) , donde X es un conjunto y

$$\cdot : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

es una acción a izquierda que satisface:

$$\forall g, h \in G, \forall x \in X, \quad 1_G \cdot x = x, \quad (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

- G -conjunto a derecha, un objeto de $G\text{-Con}$ es un par (X, \cdot) , donde X es un conjunto y

$$\cdot : X \times G \rightarrow X, \quad (x, g) \mapsto x \cdot g$$

es una acción a derecha que satisface:

$$\forall g, h \in G, \forall x \in X, \quad x \cdot 1_G = x, \quad x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h.$$

En ambos casos, un morfismo de G -conjuntos entre (X, \cdot) y (Y, \cdot) es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que:

$$\text{acción a izquierda: } f(g \cdot x) = g \cdot f(x), \quad \text{acción a derecha: } f(x \cdot g) = f(x) \cdot g.$$

Observación 13. Denotamos por $G\text{-Con}$ la categoría de conjuntos con acción a izquierda de un grupo G . Esta categoría es equivalente a la categoría de funtores $G \rightarrow \mathbf{Con}$, al identificar el grupo G con una categoría de un solo objeto.

Por otro lado, una acción a derecha de G sobre un conjunto se puede considerar como una acción a izquierda del grupo opuesto G° , por lo que equivale a un funtor $G^\circ \rightarrow \mathbf{Con}$. Es decir, los G -conjuntos a derecha forman la categoría $G^\circ\text{-Con}$.

Observación 14. Dar una estructura de G -conjunto (a izquierda o a derecha) sobre un conjunto X es equivalente a dar un morfismo de grupos:

$$G \longrightarrow \text{Aut}(X),$$

donde $\text{Aut}(X)$ denota el grupo de automorfismos de X como conjunto.

Una acción a izquierda de un grupo G a cada $g \in G$ se le asocia una biyección $\alpha_g : X \rightarrow X$. Se define la acción como $g \cdot x := \alpha_g(x)$, y la compatibilidad con la estructura de grupo equivale a que $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$, lo que implica $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. Generalmente escribimos $g \cdot x := g(x)$, haciendo explícito que $g \in G$ se interpreta como un automorfismo de X .

Para una acción a derecha de G sobre X se define $x \cdot g := \alpha_g(x)$. En este caso, para que la acción sea compatible con la ley del grupo, se requiere que α sea un antimorfismo, es decir, que $\alpha_{gh} = \alpha_h \circ \alpha_g$, lo que equivale a $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$.

Definición 3.55. Sea X un G -conjunto. La órbita de un punto $x \in X$ se define como:

$$\mathcal{O}_x := \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Es el subconjunto de X formado por todos los puntos que pueden obtenerse a partir de x mediante la acción del grupo.

Proposición 3.56. *Todo G -conjunto X se descompone como unión disjunta de sus órbitas:*

$$X = \bigsqcup_{x \in R} \mathcal{O}_x,$$

donde $R \subseteq X$ es un conjunto de representantes (uno por cada órbita).

Demostración. La relación de pertenecer a la misma órbita define una relación de equivalencia en X :

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

Las clases de equivalencia bajo esta relación son precisamente las órbitas, y son disjuntas entre sí. Así, X se escribe como unión disjunta de sus órbitas. \square

Proposición 3.57. *Sea X un G -conjunto, $x \in X$, e $\mathcal{O}(x) \subseteq X$ su órbita. Entonces existe un subgrupo $I_x \leq G$, llamado isotropía de x , tal que*

$$\mathcal{O}(x) \cong G/I_x \text{ como } G\text{-conjuntos,}$$

donde G/I_x denota el conjunto de clases laterales izquierdas, con la acción por traslación.

Demostración. Sea $I_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$, la isotropía de x . Definimos la aplicación:

$$\varphi : G/I_x \longrightarrow \mathcal{O}(x), \quad gI_x \mapsto g \cdot x.$$

Supongamos $g_1I_x = g_2I_x$, es decir, $g_1^{-1}g_2 \in I_x$, entonces, $g_1^{-1}g_2 \cdot x = x \Rightarrow g_2 \cdot x = g_1 \cdot x$. Por tanto, $\varphi(g_1I_x) = \varphi(g_2I_x)$, luego φ está bien definida.

Si $\varphi(g_1I_x) = \varphi(g_2I_x)$, entonces $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$, lo que implica:

$$g_1^{-1}g_2 \cdot x = x \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in I_x \Rightarrow g_1I_x = g_2I_x.$$

Por definición, todo $y \in \mathcal{O}(x)$ tiene la forma $y = g \cdot x$, luego $y = \varphi(gI_x)$. Por último, para todo $h \in G$, se cumple:

$$\varphi(h \cdot gI_x) = \varphi(hgI_x) = hg \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot \varphi(gI_x).$$

Así, φ es un isomorfismo de G -conjuntos. \square

Corolario 3.58. *Sea X un G -conjunto. Si la acción de G sobre X es transitiva, es decir, si X consta de una única órbita, entonces existe un subgrupo $H \leq G$ tal que:*

$$X \cong G/H \text{ como } G\text{-conjuntos.}$$

Lema 3.59. *Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento. Entonces:*

1. *Si $f : X \rightarrow T$ es continua y constante en las fibras de π (es decir, si $\pi(x) = \pi(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$), entonces existe una única aplicación continua $\bar{f} : S \rightarrow T$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & S \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & T \end{array}$$

2. En particular, la sucesión

$$X \times_S X \rightrightarrows X \rightarrow S$$

donde las dos flechas son las proyecciones $\pi_1, \pi_2 : X \times_S X \rightarrow X$, es un coequalizador en la categoría de espacios topológicos.

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos □

Lema 3.60. Sea G un grupo que actúa sobre un revestimiento $X \rightarrow S$. Entonces, el cociente X/G es estable bajo cambio de base: para todo espacio T sobre S , se tiene un homeomorfismo natural

$$(T \times_S X)/G = T \times_S (X/G).$$

Demostración. En el anexo de demostraciones: Galois para revestimientos. □

Además tenemos que $(T \times_S X)/G = (T \times F)/G = T \times (F/G) = T \times_S (X/G)$, con F conjunto discreto.

Teorema 3.61 (Teorema de Galois según Grothendieck). Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento de Galois, con grupo $G = \text{Aut}_S(X)$. Entonces se tiene una equivalencia de categorías:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Revestimientos sobre } S \\ \text{trivializados por } X \end{array} \right] \approx [G^\circ\text{-conjuntos}],$$

Demostración. Definimos el funtor

$$F : \left[\begin{array}{c} \text{Revestimientos de } S \\ \text{trivializados por } X \end{array} \right] \longrightarrow [G^\circ\text{-Con}]$$

de la siguiente forma:

- Dado un revestimiento $Y \rightarrow S$ trivializado por X , definimos, $F(Y) := \text{Hom}_S(X, Y)$, conjunto con acción a derecha de G , dada por precomposición:

$$\text{Hom}_S(X, Y) \times G \longrightarrow \text{Hom}_S(X, Y) \quad (\varphi, g) \longmapsto \varphi \cdot g := \varphi \circ g.$$

- Dado un morfismo $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ de revestimientos trivializados por X , definimos

$$F(f) : \text{Hom}_S(X, Y_1) \rightarrow \text{Hom}_S(X, Y_2) \quad \varphi \longmapsto f \circ \varphi.$$

Esta aplicación es compatible con la acción a derecha de G , ya que

$$F(f)(\varphi \cdot g) = f \circ (\varphi \circ g) = (f \circ \varphi) \circ g = F(f)(\varphi) \cdot g.$$

Definimos el funtor inverso

$$R : [G^\circ\text{-Con}] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Revestimientos sobre } S \\ \text{trivializados por } X \end{array} \right]$$

de la siguiente forma:

- A un G° -conjunto Δ (es decir, conjunto con acción a derecha de G), asociamos el revestimiento:

$$R(\Delta) := (X \times \Delta)/G,$$

donde Δ se considera con la topología discreta, y G actúa a izquierda sobre el producto por:

$$\tau \cdot (x, \delta) := (\tau x, \delta \cdot \tau^{-1}).$$

El revestimiento $R(\Delta) \rightarrow S$ está dado por, $[(x, \delta)] \mapsto \pi(x)$.

- A un morfismo de G° -conjuntos $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$, asociamos el morfismo de revestimientos:

$$R(\varphi) : R(\Delta_1) \rightarrow R(\Delta_2) \quad [(x, \delta)] \mapsto [(x, \varphi(\delta))].$$

Este está bien definido porque φ conmuta con la acción a derecha de G , es decir, $\varphi(\delta \cdot g) = \varphi(\delta) \cdot g$.

Por el Lema 3.59 $X \times_S X \rightrightarrows X \rightarrow S$ es un coigualador, ya que $X \rightarrow S$ es un revestimiento. Por otro lado, como $X \rightarrow S$ es un revestimiento de Galois, existe una identificación natural

$$X \times G = X \times_S X, \quad (x, g) \mapsto (x, g(x)),$$

que permite suponer que todo punto de $X \times_S X$ es de la forma $(x, g(x))$, con $g \in G$. A través de esta identificación, los dos morfismos $X \times_S X \rightrightarrows X$ son $\pi_1(x, g(x)) = x$ y $\pi_2(x, g(x)) = g(x)$, de modo que X/G es también el coigualador de ambos morfismos. Por tanto, como los coigualadores de dos morfismos son siempre isomorfos, se tiene $X/G = S$.

Por tanto, cuando un revestimiento $Y \rightarrow S$ es trivial sobre un revestimiento de Galois $X \rightarrow S$, queda completamente determinado por la acción a derecha del grupo $G = \text{Aut}_S(X)$. Esto se debe a que

$$F(Y) = \text{Hom}_S(X, Y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{componentes conexas de } X \times_S Y \\ \text{homeomorfas a } X \text{ vía la primera proyección} \end{array} \right\},$$

lo cual proviene de la fórmula de los morfismos 3.29. Se tiene la cadena de igualdades:

$$Y = (X/G) \times_S Y = (X \times_S Y)/G = (X \times F(Y))/G,$$

Donde la primera igualdad es simplemente la reescritura de $S = X/G$, la segunda es el resultado del Lema 3.60 y la tercera usa la identificación $F(Y)$ como etiqueta de las componentes conexas ya que es Y trivial sobre X . Donde la acción de G sobre $X \times F(Y)$ está dada por $g \cdot (x, \varphi) := (g(x), \varphi \circ g^{-1})$.

En consecuencia, se obtiene un isomorfismo natural de revestimientos:

$$R(F(Y)) = (X \times F(Y))/G \cong Y.$$

Recíprocamente, la aplicación natural $R(\Delta) \rightarrow S$ es un revestimiento trivial sobre X , ya que se verifica la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} X \times_S R(\Delta) &= X \times_S \left(\frac{X \times \Delta}{G} \right) \quad (\text{por definición de } R(\Delta)) \\ &= \frac{(X \times_S X) \times \Delta}{G} \quad (\text{por el Lema 3.60}) \\ &= \frac{(X \times G) \times \Delta}{G} \quad (\text{ya que } X \times_S X = X \times G \text{ por ser } X \rightarrow S \text{ de Galois}) \\ &= X \times \frac{(G \times \Delta)}{G} \quad (\text{por el Lema 3.60 pues } G \times \Delta \text{ discreto}) \\ &= X \times \Delta, \quad (\text{el cociente } (G \times \Delta)/G = \Delta, \text{ pues } \Delta \text{ } G\text{-conjunto}). \end{aligned}$$

Por tanto, $X \times_S R(\Delta) \cong X \times \Delta$, lo que implica que $R(\Delta) \rightarrow S$ es un revestimiento trivializado por X . Por la fórmula de los morfismos:

$$\Delta = \text{Hom}_S(X, R(\Delta)) \cong F(R(\Delta)),$$

□

Teorema (Teorema de Galois algebraico según Grothendieck). Sea $k \rightarrow L$ una extensión de Galois finita, con grupo de Galois $G = \text{Aut}(L/k)$. Entonces, se tiene una equivalencia de categorías

$$P : \left[\begin{array}{c} k\text{-álgebras finitas} \\ \text{triviales sobre } L \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} G\text{-conjuntos} \\ \text{finitos} \end{array} \right]$$

donde el funtor P asigna a cada k -álgebra A trivial sobre L el conjunto $P(A) := \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, L)$, con la acción natural de G por precomposición.

En particular, por el lema de Yoneda, para dos k -álgebras triviales A, B sobre L , se tiene una biyección:

$$\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, B) = \text{Hom}_G(P(B), P(A)).$$

El funtor inverso asigna a cada G -conjunto finito X la k -álgebra

$$R(X) := \text{Hom}_{\text{Con}}(X, L)^G = \text{Hom}_G(X, L),$$

que es trivial sobre L , al ser una subálgebra de $\text{Hom}_{\text{Con}}(X, L) \cong \bigoplus_X L$, identificación que se justifica por la fórmula de los puntos.

Observación. Ambos resultados son ejemplos de teoremas de tipo Galois, en los que se establece una equivalencia de categorías entre una clase de objetos que se trivializan respecto a un objeto base, y una categoría de G -conjuntos.

Similitudes:

- En ambos contextos, se parte de un objeto X o L con grupo de automorfismos $G = \text{Aut}_S(X)$ o $G = \text{Aut}(L/k)$, y se consideran objetos que se trivializan respecto a ellos.
- La equivalencia de categorías se construye a partir de conjuntos de morfismos desde el objeto de referencia: $\text{Hom}_S(X, Y)$ o $\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, L)$, dotados de una acción natural del grupo G .
- En ambos casos el objeto destacado tiene el nombre de ser de *Galois*, que significa que son objetos que se trivializan así mismos.

Diferencias:

- En el teorema topológico, no se requiere que el revestimiento $X \rightarrow S$ de Galois sea finito, ni que el grupo G lo sea. De hecho, muchos ejemplos (como los revestimientos del círculo) involucran grupos infinitos como \mathbb{Z} .
- En el teorema algebraico, la extensión $k \rightarrow L$ es finita y de Galois, y por tanto también lo son el grupo $G = \text{Aut}(L/k)$ y los G -conjuntos considerados.

- En el caso topológico, la acción del grupo G es a *derecha* sobre los conjuntos de morfismos, lo que lleva a trabajar con la categoría de G° -conjuntos. En el caso algebraico, la acción es a izquierda, por precomposición.
- En el caso topológico los revestimientos trivializan por el producto en la categoría de revestimientos de S , en cambio en el caso algebraico trivializan por el coproducto en la categoría de k -álgebras finitas separables.

Podemos reformular el teorema de Galois según Grothendick mediante dar la equivalencia de categorías entre los $\text{Gal}(L/k)$ -conjuntos finitos a la categoría opuesta de las k -álgebras finitas y separables que se trivializan por L . Formulado así, las dos diferencias anteriores desaparecen: la acción del grupo es exactamente la misma (por composición a derecha en conjuntos de morfismos), y al trabajar en la categoría opuesta, los productos se convierten en coproductos.

La categoría opuesta antes mencionada es la imagen de las k -álgebras finitas y separables trivializadas por L bajo el funtor Spec . Es decir, trabajamos con los espectros de esas álgebras —que son espacios finitos— y con los morfismos que provienen de morfismos de k -álgebras $B \rightarrow A$, que inducen flechas $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$

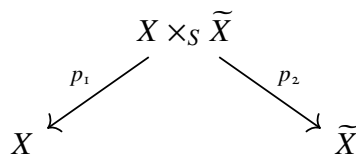
Por tanto, ambos teoremas manifiestan el mismo principio: una categoría de objetos trivializados por un objeto base se clasifica mediante conjuntos con una acción del grupo de automorfismos de ese objeto.

3.7. Revestimiento universal

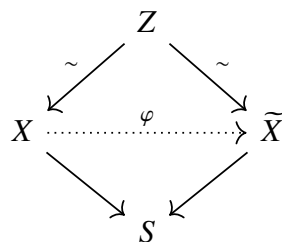
Definición 3.62. Un revestimiento $X \rightarrow S$ entre espacios conexos se dice universal si X no admite más revestimientos que los triviales (equivalentemente, todo revestimiento conexo de X es un homeomorfismo).

Proposición 3.63. *El revestimiento universal de un espacio conexo S , si existe, es único salvo S -isomorfismos.*

Demostración. Sean $X \rightarrow S, \tilde{X} \rightarrow S$ dos revestimientos universales. Las proyecciones naturales



son revestimientos que deben ser triviales, luego cada componente conexa Z de $X \times_S \tilde{X}$ es homeomorfa a X (vía p_1) y a \tilde{X} (vía p_2).



El S -isomorfismo buscado es la composición de homeomorfismos $\varphi := p_2 \circ p_1^{-1}$. □

³Esta categoría, vista en términos de espectros, es lo que en geometría algebraica se conoce como la categoría de *esquemas finitos étale* sobre $\text{Spec}(k)$ que se trivializan por $\text{Spec}(L)$.

Proposición 3.64. *El revestimiento universal $X \rightarrow S$ es de Galois.*

Demostración. Dado que X sólo admite revestimientos triviales, el revestimiento $p_1 : X \times_S X \rightarrow X$ es trivial, $X \times_S X = \bigsqcup X$, luego por la caracterización 3.42 se concluye que $X \rightarrow S$ es de Galois. \square

Proposición 3.65. *Sea $(X, x_o) \rightarrow (S, s_o)$ un revestimiento universal. Todo revestimiento conexo $(Y, y_o) \rightarrow (S, s_o)$ es intermedio (cociente) del universal de modo único.*

Demostración. El revestimiento $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$ es trivial. Por la fórmula de los morfismos, cada componente conexa de $X \times_S Y$ es la gráfica de un S -morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$. Sólo una de tales componentes conexas (gráficas) contiene al punto (x_o, y_o) , así que hay un único S -morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ verificando $\varphi(x_o) = y_o$.

Como vimos, podemos pensar Y como el cociente de X respecto de la relación de equivalencia $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. \square

La proposición anterior implica que el recubrimiento abierto que trivializa al revestimiento universal de un espacio S también trivializa cualquier otro revestimiento de S . Por lo tanto, la existencia de un recubrimiento abierto de S que trivializa a todo revestimiento es una condición necesaria para la existencia del revestimiento universal.

Esta proposición expresa que el objeto (X, π) revestimiento universal, es inicial en la subcategoría de $\mathbf{Rev}(S, s_o)$ de los revestimientos conexos punteados sobre (S, s_o) . Pues para todo objeto $(Y, \bar{\pi})$, con Y conexo y $\bar{\pi} : Y \rightarrow S$, por la proposición anterior existe un único morfismo de revestimientos $f : X \rightarrow Y$ tal que $\bar{\pi} \circ f = \pi$, y $f(x_o) = y_o$. Nótese que con esta observación la Proposición 3.63 es simplemente una consecuencia de ser objeto final.

Observación. En el contexto algebraico, el análogo categórico del revestimiento universal no es un objeto inicial, sino un objeto final en la subcategoría de categoría $k\text{-Alg}_{\text{sep}}$ de las k -álgebra que además son cuerpo, es decir, una k -álgebra Σ tal que, para toda k -álgebra finita y separable L , existe un morfismo de k -álgebras $L \rightarrow \Sigma$ que en particular es una extensión y trivializa a L .

El cierre algebraico separable \bar{k}_{sep} ,⁴ que por claridad denotaremos simplemente por \bar{k} , cumple esta propiedad, contiene a toda extensión finita separable de k , y toda k -álgebra finita y separable L se trivializa por \bar{k} .

$$L \otimes_k \bar{k} \cong \bigoplus \bar{k}$$

Así, \bar{k} satisface formalmente la propiedad universal de un objeto final en $k\text{-Alg}_{\text{sep}}$, en paralelo con el papel del revestimiento universal en topología.

Sin embargo, \bar{k} no pertenece a la categoría, ya que no es una k -álgebra finita. A diferencia del caso topológico, el objeto que debería desempeñar el papel universal está fuera de la categoría.

Una forma de resolver esta dificultad consiste en restringir la categoría. En lugar de trabajar en toda la subcategoría de $k\text{-Alg}_{\text{sep}}$ de las k -álgebra que además son cuerpo, consideramos la subcategoría formada por aquellas k -álgebras finitas y separables que se trivializan con la extensión $k \rightarrow L$, es decir, aquellas A tales que $A \otimes_k L \cong \bigoplus L$. En esta categoría, el cuerpo L cumple la propiedad universal del objeto final, si nos

⁴El *cierre algebraico* de un cuerpo k es una extensión algebraica que contiene todas las raíces de todos los polinomios con coeficientes en k . El *cierre separable* de k es la mayor subextensión de ese cierre compuesta solo por elementos separables sobre k . Ambos coinciden si k es de característica cero, como ocurre con \mathbb{Q} , y en ese caso los denotamos por $\bar{\mathbb{Q}}$. El grupo de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, llamado el *grupo de Galois absoluto de \mathbb{Q}* .

restringimos a aquellas k -álgebras A que son cuerpo, pues existe un morfismo de k -álgebras $A \rightarrow L$ que en particular es una extensión, y al cambiar de base $A \otimes_k L$ se descompone como una suma directa de copias de L . De este modo, L actúa como un análogo algebraico del revestimiento universal: es un objeto que trivializa todos los demás y que además está dentro de ella como objeto final.

Teorema 3.66. *Sea $f : X \rightarrow S$ un revestimiento entre espacios conexos. Entonces:*

$$X \text{ es un revestimiento universal} \iff f \text{ trivializa todo revestimiento } g : Y \rightarrow S.$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $f : X \rightarrow S$ es un revestimiento universal. Sea $g : Y \rightarrow S$ un revestimiento conexo cualquiera. Consideramos el producto fibrado: $X \times_S Y \xrightarrow{p_1} X$ que es un revestimiento, ya que f y g lo son. Como X es universal, todo revestimiento de X es trivial. Por tanto:

$$X \times_S Y \cong \bigsqcup_{[Y:S]} X.$$

(\Leftarrow) Supongamos ahora que $f : X \rightarrow S$ trivializa todo revestimiento $g : Y \rightarrow S$. Queremos probar que X es universal, es decir, que todo revestimiento conexo $p : Z \rightarrow X$ es trivial de grado 1.

Dado $p : Z \rightarrow X$ conexo, consideramos la composición: $Z \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} S$ que da un revestimiento $Z \rightarrow S$. Por hipótesis, f trivializa este revestimiento, es decir:

$$X \times_S Z \cong \bigsqcup_{[Z:S]} X$$

Consideramos ahora el morfismo:

$$\varphi : Z \rightarrow X \times_S Z, \quad z \mapsto (p(z), z)$$

Este morfismo es una sección de la segunda proyección $\pi_2 : X \times_S Z \rightarrow Z$, es decir, $\pi_2 \circ \varphi = \text{id}_Z$. Por el Lema 3.25, las secciones de un revestimiento entre espacios conexos se corresponden biunívocamente con las componentes conexas homeomorfas a la primera componente. En nuestro caso, la existencia de la sección φ implica que Z es homeomorfo a una componente de $X \times_S Z \cong \bigsqcup X$, y por tanto $Z \cong X$, lo que demuestra que el revestimiento es trivial. □

Observación. Este teorema caracteriza al revestimiento universal, de manera intuitiva como el objeto que trivializa a todos los demás.

Esto encaja de forma muy natural con la analogía algebraica: en lugar de buscar un objeto final en la subcategoría $k\text{-Alg}_{\text{sep}}$ de las k -álgebras finitas que además son cuerpo, buscamos un objeto en la categoría más general en $k\text{-Alg}_{\text{sep}}$, que a través del cambio de base, trivialice a todos los demás. Como ya sabemos, la k -álgebra que cumple esa propiedad es \bar{k} que no está en la categoría, no obstante esta interpretación motiva la notación habitual \tilde{S} para el revestimiento universal de un espacio S .

Consideremos la subcategoría de las k -álgebras finitas que se trivializan con la extensión $k \rightarrow L$, llamémosla C . Este nuevo punto de vista permite reformular la analogía topología-álgebra de la observación anterior de una manera más natural.

Revestimiento universal:

- $X \in \text{Ob}(\mathbf{Rev}(S))$ conexo tal que $\forall f : Y \rightarrow S$ revestimiento de S ,
- X trivializa a Y , es decir:

$$Y \times_S X \cong \bigsqcup_{[Y:S]} X$$

“Revestimiento universal” algebraico:

- $X \in \text{Ob}(C)$, cuerpo tal que $\forall K \rightarrow A$ k -álgebra,
- X trivializa a A , es decir:

$$A \otimes_k X \cong \bigoplus X \Rightarrow X = L$$

Teorema 3.67. *Sea S un espacio conexo que admite un revestimiento universal $f : X \rightarrow S$. Entonces, la categoría de revestimientos sobre S , $\mathbf{Rev}(S)$, es equivalente a la categoría de π -conjuntos, donde $\pi = \text{Aut}_S(X)^\circ$.*

Esto se deduce del Teorema de Galois categórico, que establece que si $f : X \rightarrow S$ es un revestimiento de Galois con grupo $G = \text{Aut}_S(X)$, entonces la categoría de revestimientos sobre S que son trivializados por X es equivalente a la categoría de G° -conjuntos.

Cuando $X \rightarrow S$ es universal, trivializa todos los revestimientos sobre S , de modo que la categoría completa de revestimientos sobre S queda equivalente a la categoría de π -conjuntos, donde $\pi = \text{Aut}_S(X)^\circ$.

Lema 3.68. *Si S es simplemente conexo, todo revestimiento $X \rightarrow S$ es trivial.*

Corolario 3.69. Todo revestimiento simplemente conexo $X \rightarrow S$ de un espacio conexo es universal.

Demostración. Sea X simplemente conexo y $p : X \rightarrow S$ un revestimiento de un espacio conexo S . Tomemos cualquier revestimiento $q : Y \rightarrow X$. Como X es simplemente conexo y $Y \rightarrow X$ es un revestimiento, el Lema anterior garantiza que q es trivial, es decir, $Y \cong \bigsqcup U_i$, una unión disjunta de copias de X .

Esto implica que todos los revestimientos de X son triviales. Por definición, esto significa que $X \rightarrow S$ es un revestimiento universal. \square

Lema 3.70 (Levantamiento de caminos). *Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento, y sea $\gamma : I \rightarrow S$ un camino con origen en un punto $s \in S$. Si $\pi(x) = s$, entonces existe una única aplicación continua $\tilde{\gamma} : I \rightarrow X$, llamada el levantamiento de γ , tal que:*

$$\tilde{\gamma}(0) = x, \quad \pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Además, si $\gamma \equiv \gamma'$ entonces sus levantamientos $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ cumplen $\tilde{\gamma} \equiv \tilde{\gamma}'$.

Teorema 3.71. *Sea $\pi : (X, x_0) \rightarrow (S, s_0)$ un revestimiento simplemente conexo. Se verifica un isomorfismo de grupos*

$$\pi_1(S, s_0) \cong \text{Aut}_S(X)^\circ, \quad [\gamma] \mapsto g,$$

donde g se determina por la fórmula $\tilde{\gamma}(1) = g \cdot x_0$, siendo $\tilde{\gamma} : (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$ la subida del lazo γ .

Demostración. Véase [Nav25, pág. 255] \square

Ejemplo 3.72. Consideramos el revestimiento universal

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi it},$$

con punto base $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ y $s_0 = 1 \in S^1$. Este es un revestimiento universal, ya que \mathbb{R} es simplemente conexo. El grupo de automorfismos del revestimiento π , es decir,

$$\text{Aut}_{S^1}(\mathbb{R}) = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \pi \circ g = \pi, g \text{ homeomorfismo}\},$$

está dado por las traslaciones $g_n(t) = t + n$, con $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\text{Aut}_{S^1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$. Aplicando el Teorema anterior, obtenemos un isomorfismo de grupos

$$\pi_1(S^1, \mathbf{1}) \cong \text{Aut}_{S^1}(\mathbb{R})^\circ \cong \mathbb{Z}.$$

Sea $\pi : (Y, y_o) \rightarrow (S, s_o)$ un revestimiento entre espacios conexos. El morfismo de grupos

$$\pi_* : \pi_1(Y, y_o) \rightarrow \pi_1(S, s_o)$$

es inyectivo por functorialidad, así que podemos entender $\pi_1(Y, y_o)$ como un subgrupo de $\pi_1(S, s_o)$. Más aún, veamos que existe una correspondencia biunívoca entre los revestimientos de S y los subgrupos de $\pi_1(S, s_o)$.

Teorema 3.73 (Clasificación de revestimientos). *Sea $\pi : (X, x_o) \rightarrow (S, s_o)$ un revestimiento simplemente conexo de un espacio conexo S . Entonces existe una correspondencia biunívoca:*

$$\{\text{subgrupos } H \leq \pi_1(S, s_o)\} \longleftrightarrow \{\text{revestimientos conexos punteados } (Y, y_o) \rightarrow (S, s_o)\}$$

La correspondencia es la siguiente:

$$\begin{aligned} H &\longmapsto (Y := X/H, y_o := [x_o]), \\ \pi_1(Y, y_o) = \text{Aut}_Y(X) &\longleftarrow (Y, y_o) \rightarrow (S, s_o). \end{aligned}$$

Demostración. Según el Corolario 3.69, $\pi : (X, x_o) \rightarrow (S, s_o)$ es un revestimiento universal de grupo de Galois $\pi_1(S, s_o)$.

Por el teorema de Galois para revestimientos, los subgrupos de $\pi_1(S, s_o)$ se corresponden biunívocamente con los revestimientos cocientes del revestimiento universal $X \rightarrow S$.

A su vez, por la Proposición 3.65, estos revestimientos cocientes son exactamente los revestimientos conexos $(Y, y_o) \rightarrow (S, s_o)$ punteados.

Finalmente, para un revestimiento conexo $(Y, y_o) \rightarrow (S, s_o)$, el subgrupo $\text{Aut}_Y(X)$ que aparece como grupo de Galois del revestimiento $X \rightarrow Y$ coincide con $\pi_1(Y, y_o)$ aplicando 3.71, esta vez al revestimiento $X \rightarrow Y$.

□

Teorema 3.74 (Clasificación de revestimientos según Grothendick). *Bajo las hipótesis del Teorema 3.71 y asumiendo que S es conexo (luego el revestimiento simplemente conexo es universal), el functor que asigna a cada revestimiento $f : Y \rightarrow S$ su fibra sobre el punto base:*

$$F : \mathbf{Rev}(S) \longrightarrow \pi_1(S, s_o)\text{-Con}, \quad Y \mapsto Y_{s_o} := f^{-1}(s_o)$$

define una equivalencia de categorías entre la categoría de $\mathbf{Rev}(S)$ y la categoría de conjuntos con acción a izquierda del grupo fundamental $\pi_1(S, s_o)$.

Definimos la acción del grupo fundamental $\pi_1(S, s_o)$ sobre la fibra Y_{s_o} del siguiente modo: para $[\gamma] \in \pi_1(S, s_o)$ y $y \in Y_{s_o}$, consideramos el único levantamiento (3.70) $[\tilde{\gamma}_y]$ de $[\gamma]$ con origen en y , y definimos $[\gamma] \cdot y := \tilde{\gamma}_y(\mathbf{1})$.

Está bien definida porque, al ser γ un lazo basado en s_o , se cumple que $f(\tilde{\gamma}_y(\mathbf{1})) = \gamma(\mathbf{1}) = s_o$, es decir, $\tilde{\gamma}_y(\mathbf{1}) \in Y_{s_o}$. Por tanto, la acción de $\pi_1(S, s_o)$ preserva la fibra Y_{s_o} .

Demostración. Esto se deduce de que existe una biyección natural en $\pi_1(S, s_0)$ -**Con:**

$$\text{Hom}_S(X, Y) \longrightarrow Y_{s_0}, \quad \varphi \mapsto \varphi(x_0)$$

donde $\pi : X \rightarrow S$ es el revestimiento universal y $x_0 \in X$ verifica $\pi(x_0) = s_0$. Dado un punto $y \in Y_{s_0}$, el Lema 3.70 asegura la existencia y unicidad de un morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ sobre S tal que $\varphi(x_0) = y$. Para definirlo, basta considerar un camino en X desde x_0 hasta cualquier $x \in X$, proyectarlo a S mediante π , y levantarlo en Y iniciando en y ; el punto final del levantamiento da $\varphi(x)$. Esta construcción determina de forma unívoca a φ .

Por tanto, el razonamiento del Teorema 3.61 concluye la prueba. \square

Definición 3.75 (Revestimiento universal vía clases de caminos). Sea S un espacio conexo y localmente simplemente conexo, y sea $p \in S$. Denotamos por \tilde{S} el conjunto de clases de homotopía de caminos con origen en p .

Véase construcción en [Nav25, p. 268].

Teorema 3.76 (Existencia de revestimiento universal). *Bajo las hipótesis anteriores, la aplicación,*

$$\pi : \tilde{S} \rightarrow S, \quad [\gamma] \mapsto \gamma(\mathbf{1})$$

define un revestimiento simplemente conexo; es decir, \tilde{S} es un revestimiento universal de S .

Demostración. Véase [Nav25, p. 268]. \square

3.8. Ejemplos

Comenzamos con el ejemplo prototípico de la teoría: el espacio base S^1 y sus revestimientos. La idea es ilustrar el teorema de clasificación de revestimientos mediante la correspondencia con $\pi_1(S^1, s_0)$ -conjuntos, es decir, dotar la fibra de cada revestimiento de una acción del grupo fundamental. En este caso, dado que $\pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$, la clasificación equivale a estudiar conjuntos con una acción de \mathbb{Z} , es decir, \mathbb{Z} -conjuntos.

Sea $p : Y \rightarrow S$ un revestimiento, y $s_0 \in S$ un punto base, definir una estructura de $\pi_1(S, s_0)$ -conjunto sobre la fibra $p^{-1}(s_0)$ consiste en especificar una acción.

$$\pi_1(S, s_0) \longrightarrow \text{Aut}(p^{-1}(s_0)),$$

es decir, un morfismo de grupos que asocia a cada clase de homotopía basada $[\gamma] \in \pi_1(S, s_0)$, un automorfismo de conjuntos sobre la fibra $p^{-1}(s_0)$.

Para cada clase $[\gamma] \in \pi_1(S, s_0)$ y cada punto $y \in p^{-1}(s_0)$, existe un único levantamiento del lazo γ , $\tilde{\gamma}_y : [0, 1] \rightarrow Y$, con $\tilde{\gamma}_y(0) = y$ y $p \circ \tilde{\gamma}_y = \gamma$. Entonces definimos:

$$[\gamma] \cdot y := \tilde{\gamma}_y(\mathbf{1}) \in p^{-1}(s_0).$$

Comenzamos clasificando los revestimientos conexos del círculo como ya hiciéramos en 3.51. Todo revestimiento conexo y no universal del círculo es isomorfo a

$$p_n : S^1 \longrightarrow S^1, \quad z \mapsto z^n,$$

pues todo revestimiento conexo de S^1 debe tener un grupo de automorfismos isomorfo a un subgrupo de \mathbb{Z} (por el teorema de clasificación). Sea $s_0 = 1 \in S^1$ el punto base. La fibra de p_n sobre s_0 es:

$$p_n^{-1}(1) = \{\zeta_n^k \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}\},$$

donde $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad. El grupo fundamental de S^1 en s_0 es $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, generado por el lazo

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \quad t \in [0, 1].$$

Sea $x_k = \zeta_n^k \in p_n^{-1}(1)$. El levantamiento de γ comenzando en x_k está dado por:

$$\tilde{\gamma}_k(t) = e^{2\pi i(k+t)/n}, \quad \text{donde } \tilde{\gamma}_k(0) = x_k, \quad p_n(\tilde{\gamma}_k(t)) = \gamma(t).$$

En particular, el levantamiento de γ es $\tilde{\gamma}_k(1) = e^{2\pi i(k+1)/n} = x_{k+1} \pmod n$.

Esto define una acción de \mathbb{Z} sobre la fibra $p_n^{-1}(1)$, dada por, $m \cdot x_k := x_{k+m} \pmod n$, es decir, la acción es transitiva, luego solo tiene una órbita y la isotropía de x_0 es $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Por tanto, por el Corolario 3.58:

$$p_n^{-1}(1) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{como } \mathbb{Z}\text{-conjuntos.}$$

Sea ahora $p : Y \rightarrow S^1$ un revestimiento cualquiera del círculo. Como S^1 es conexo, toda componente conexa de Y es a su vez un revestimiento conexo sobre S^1 . Entonces, podemos escribir:

$$Y = \bigsqcup_{i=1}^r Y_i,$$

además, cada $Y_i \rightarrow S^1$ es un revestimiento conexo de cierto grado $n_i \geq 1$ (3.24).

Fijamos un punto base $s_0 \in S^1$ y consideramos la fibra $F := p^{-1}(s_0)$. Por el teorema de clasificación de revestimientos, F admite una acción a izquierda del grupo fundamental $\pi_1(S^1, s_0) = \mathbb{Z}$, que se obtiene por levantamiento de lazos. Esta acción no puede conectar puntos de diferentes componentes conexas. En efecto, si existiera un lazo $\gamma \in \pi_1(S^1, s_0)$ cuyo levantamiento continuo lleva un punto $y \in Y_i$ a un punto $y' \in Y_j$, con $i \neq j$, entonces la imagen del levantamiento conectaría Y_i con Y_j , contradiciendo que son componentes conexas disjuntas. Por tanto, la acción de \mathbb{Z} preserva cada Y_i , y la fibra se descompone en una unión disjunta de subconjuntos invariantes:

$$F = \bigsqcup_{i=1}^r F_i, \quad \text{donde } F_i := Y_i \cap p^{-1}(s_0).$$

Cada F_i es una \mathbb{Z} -órbita disjunta contenida en Y_i , pues la acción de \mathbb{Z} sobre Y_i es transitiva en la fibra por ser un revestimiento conexo. Además, por la Proposición 3.56.

$$F = \bigsqcup_{x \in R} \mathcal{O}_x,$$

donde $R = \{x_i\}_{i=1}^r$ es un conjunto de representantes, uno por cada componente Y_i , y \mathcal{O}_x es la órbita de x bajo la acción. Finalmente, por la Proposición 3.57, cada órbita \mathcal{O}_x es isomorfa como \mathbb{Z} -conjunto al cociente:

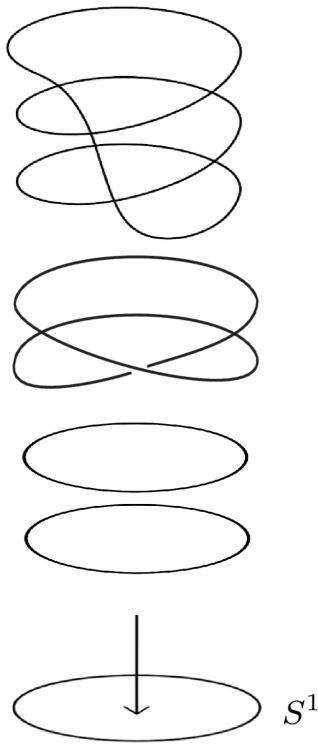
$$\mathbb{Z}/I_x, \quad \text{donde } I_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \cdot x = x\}$$

es el subgrupo de isotropía de x . En el caso de $Y_i \rightarrow S^1$ conexo de grado n_i , por lo anterior este subgrupo es $n_i\mathbb{Z}$, y se obtiene que $\mathcal{O}_x \cong \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. En conclusión, el \mathbb{Z} -conjunto asociado a la fibra $F = p^{-1}(s_0)$ es:

$$F \cong \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z},$$

donde cada n_i es el grado de la componente conexa Y_i . Esta descripción no solo clasifica el revestimiento, sino que refleja cómo el grupo fundamental actúa transitivamente sobre cada fibra componente.

Ejemplo 3.77. Consideramos un revestimiento no conexo del círculo S^1 que consta de cuatro componentes conexas: dos de grado 1, una de grado 2 y otra de grado 3.



Revestimiento no conexo de S^1 con componentes de grado 1, 1, 2 y 3.

Sea $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3 \sqcup X_4 \rightarrow S^1$ un revestimiento no conexo como el de la figura, donde:

- X_1 y X_2 son componentes de grado 1,
- X_3 es de grado 2,
- X_4 es de grado 3.

Comenzamos calculando el grupo de automorfismos $\text{Aut}_{S^1}(X) \subseteq \text{Hom}_{S^1}(X, X)$.

$$\text{Hom}_{S^1}(X, X) = \prod_{i=1}^4 \text{Hom}_{S^1}(X_i, X).$$

Ahora bien, debido a que los automorfismos de revestimientos deben enviar cada componente conexa a otra componente isomorfa como revestimiento, agrupamos las componentes objetivo según su tipo. Las componentes X_1 y X_2 , ambas de grado 1, pueden permutarse entre sí bajo un automorfismo global. Por tanto, consideramos:

$$\text{Hom}_{S^1}(X_1, X_1 \sqcup X_2) \quad \text{y} \quad \text{Hom}_{S^1}(X_2, X_1 \sqcup X_2).$$

La componente X_3 solo puede enviarse a sí misma, pues ninguna otra tiene su mismo grado: $\text{Hom}_{S^1}(X_3, X_3)$. Lo mismo ocurre con $X_4, \text{Hom}_{S^1}(X_4, X_4)$.

Así, obtenemos la descomposición:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{S^1}(X, X) = & \text{Hom}_{S^1}(X_1, X_1 \sqcup X_2) \sqcup \\ & \text{Hom}_{S^1}(X_2, X_1 \sqcup X_2) \sqcup \text{Hom}_{S^1}(X_3, X_3) \sqcup \text{Hom}_{S^1}(X_4, X_4). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$|\text{Hom}_{S^1}(X, X)| = 4 \text{ (de grado 1)} + 2 + 3 = 9.$$

Ahora bien, no todos estos 9 morfismos son automorfismos. Entre X_1 y X_2 , hay dos formas de permutarlas (identidad e intercambio). El automorfismo debe enviar X_1 a X_1 o X_2 , pero entonces también debe enviar X_2 al otro (para ser biyectivo). Por tanto, enviar $X_1 \mapsto X_1, X_2 \mapsto X_1$ no define un automorfismo global. Luego, los automorfismos válidos son las 2 permutaciones de $\{X_1, X_2\}$, los 2 automorfismos de $X_3 \rightarrow S^1$ (grado 2), los 3 automorfismos de $X_4 \rightarrow S^1$ (grado 3).

$$\Rightarrow |\text{Aut}_{S^1}(X)| = 2 + 2 + 3 = 7.$$

Análogamente siguiendo el razonamiento previo al ejemplo, la fibra del punto base $s_0 \in S^1$ bajo este revestimiento es la unión disjunta de las fibras de cada componente conexa. Como cada componente es un revestimiento conexo de grado n_i , su fibra es un \mathbb{Z} -conjunto transitivo isomorfo a $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Por el razonamiento anterior, tenemos el siguiente isomorfismo de \mathbb{Z} -conjuntos,

$$p^{-1}(s_0) \cong \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Además, este caracteriza completamente al revestimiento. Nótese que el grupo de automorfismos calculados se corresponde exactamente con las distintas clases en el \mathbb{Z} -conjunto $p^{-1}(s_0)$.

Inspirándonos en el ejemplo topológico anterior, consideramos ahora otro que intuitivamente es un análogo algebraico utilizando el enfoque de Grothendieck.

Ejemplo 3.78. Partimos de una \mathbb{Q} -álgebra finita que no es conexa (es decir, no es un cuerpo) y que se descompone en una suma de factores simples, cada uno correspondiente a una componente conexa en el lenguaje topológico.

Definimos la \mathbb{Q} -álgebra:

$$A := \mathbb{Q}[x]/((x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^3-2)).$$

Esta se descompone como suma directa de \mathbb{Q} -álgebras finitas:

$$A \cong \mathbb{Q}[x]/(x-1) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x-2) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x^3-2),$$

es decir,

$$A \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\zeta_3) \oplus \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),$$

donde $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$ es una raíz cúbica primitiva de la unidad. Observamos que, igual que en el ejemplo topológico anterior, en este caso la \mathbb{Q} -álgebra se descompone en cuatro \mathbb{Q} -álgebras, que además son cuerpos. En efecto:

- los factores $\mathbb{Q}[x]/(x-1)$ y $\mathbb{Q}[x]/(x-2)$ son isomorfos a \mathbb{Q} , y de grado 1
- el polinomio x^2+x+1 es irreducible sobre \mathbb{Q} pues el polinomio ciclotómico 3, y es de grado 2
- el polinomio x^3-2 es irreducible por el criterio de Eisenstein (en $p=2$), así que $\mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$ es un cuerpo de grado 3 sobre \mathbb{Q} .

Buscamos ahora una envolvente de Galois, es decir una extensión de Galois L/\mathbb{Q} que trivialice A y que además sea la más pequeña que lo haga. En este, basta tomar:

$$L := \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2}),$$

Por tanto, la \mathbb{Q} -álgebra A es trivial sobre L y se verifica:

$$A \otimes_{\mathbb{Q}} L \cong L \oplus L \oplus L^{\oplus 2} \oplus L^{\oplus 3},$$

donde cada sumando representa la descomposición de uno de los factores de A al extender los escalares a L .

Recordemos que el teorema de Galois según Grothendieck requiere fijar una extensión K/\mathbb{Q} finita y de Galois, a partir de la cual se define la categoría de \mathbb{Q} -álgebras finitas triviales sobre K . Fijamos entonces L antes definida.

Podemos calcular el grado de la extensión $L = \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$ sobre \mathbb{Q} mediante,

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{3} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \xrightarrow{2} \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2}) = L,$$

Donde observamos que $\zeta_3 \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Entonces se tiene que:

$$[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6.$$

Por ser una extensión de Galois de grado 6, se sigue que su grupo de Galois tiene exactamente seis elementos:

$$|\text{Gal}(L/\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = 6.$$

Los elementos de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ quedan determinados por su acción sobre los generadores $\sqrt[3]{2}$ y ζ_3 . Definimos r como el automorfismo que fija ζ_3 y envía $\sqrt[3]{2} \mapsto \zeta_3 \sqrt[3]{2}$, y σ como el que fija $\sqrt[3]{2}$ y envía $\zeta_3 \mapsto \zeta_3^2$. Estos automorfismos satisfacen:

$$r^3 = \text{I}, \quad \sigma^2 = \text{I}, \quad \sigma r \sigma^{-1} = r^{-1},$$

por lo que el grupo generado por r y σ es isomorfo al grupo simétrico S_3 . Los seis elementos del grupo de Galois pueden entonces representarse como:

$$\text{I}, \quad r, \quad r^2, \quad \sigma, \quad \sigma r, \quad \sigma r^2.$$

Su acción sobre los generadores es la siguiente:

	I	r	r²	σ	σr	σr²
√[3]{2}	√[3]{2}	ζ ₃ √[3]{2}	ζ ₃ ² √[3]{2}	√[3]{2}	ζ ₃ √[3]{2}	ζ ₃ ² √[3]{2}
ζ₃	ζ ₃	ζ ₃	ζ ₃	ζ ₃ ²	ζ ₃	ζ ₃ ²

Concretamente, esto nos dice que $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong D_3$, donde D_3 es el grupo diédrico. Por el teorema de Galois algebraico, tenemos una correspondencia entre subgrupos y cuerpos fijos, la clasificación es la siguiente.

Subgrupo $H \subseteq G$	Elementos	Subextensión fija L^H	Grado $[L^H : \mathbb{Q}]$
$\{\text{I}\}$	$\{\text{I}\}$	L	6
$\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/3$	$\{\text{I}, r, r^2\}$	$L^{\langle r \rangle}$	2
$\langle \sigma \rangle$	$\{\text{I}, \sigma\}$	$L^{\langle \sigma \rangle}$	3
$\langle \sigma r \rangle$	$\{\text{I}, \sigma r\}$	$L^{\langle \sigma r \rangle}$	3
$\langle \sigma r^2 \rangle$	$\{\text{I}, \sigma r^2\}$	$L^{\langle \sigma r^2 \rangle}$	3
$G \cong S_3$	todos	\mathbb{Q}	1

Esta clasificación recoge todas las \mathbb{Q} -álgebras finitas conexas (cuerpos) que se trivializan sobre L . Vamos ahora a calcular específicamente cómo son estas \mathbb{Q} -álgebras.

Comenzamos con el subgrupo $\langle r \rangle = \{\text{I}, r, r^2\}$, de orden 3. Por definición, el subcuerpo fijo $L^{\langle r \rangle}$ está formado por todos los elementos de L que permanecen invariantes bajo la acción de r y r^2 . Como r actúa enviando

$\sqrt[3]{2} \mapsto \zeta_3 \sqrt[3]{2}$ y deja fijo a ζ_3 , se deduce que $\zeta_3 \in L^{\langle r \rangle}$, mientras que $\sqrt[3]{2} \notin L^{\langle r \rangle}$. Por tanto, $\mathbb{Q}(\zeta_3) \subseteq L^{\langle r \rangle}$. Además, $[L^{\langle r \rangle} : \mathbb{Q}] = 2$. Como $[\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}] = 2$, se concluye que:

$$L^{\langle r \rangle} = \mathbb{Q}(\zeta_3).$$

El automorfismo σ fija $\sqrt[3]{2}$ y envía $\zeta_3 \mapsto \zeta_3^2$, por lo que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq L^{\langle \sigma \rangle}$. Como σ no fija ζ_3 , se concluye que:

$$L^{\langle \sigma \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}).$$

El automorfismo σr envía $\sqrt[3]{2} \mapsto \zeta_3^2 \sqrt[3]{2}$ y $\zeta_3 \mapsto \zeta_3^2$, por lo que fija $\zeta_3 \sqrt[3]{2}$, pero no fija ninguno de los dos generadores por separado. Así, se concluye:

$$L^{\langle \sigma r \rangle} = \mathbb{Q}(\zeta_3 \sqrt[3]{2}).$$

De forma análoga, el automorfismo σr^2 fija $\zeta_3^2 \sqrt[3]{2}$, por lo que $\mathbb{Q}(\zeta_3^2 \sqrt[3]{2}) \subseteq L^{\langle \sigma r^2 \rangle}$, y como no fija a ζ_3 ni a $\sqrt[3]{2}$, se tiene:

$$L^{\langle \sigma r^2 \rangle} = \mathbb{Q}(\zeta_3^2 \sqrt[3]{2}).$$

Entonces, todos los posibles cuerpos —es decir, todas las \mathbb{Q} -álgebras finitas conexas que se trivializan sobre L — son los siguientes:

\mathbb{Q}	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$	$\mathbb{Q}(\zeta_3 \sqrt[3]{2})$	$\mathbb{Q}(\zeta_3^2 \sqrt[3]{2})$	L
G	$\langle r \rangle$	$\langle \sigma \rangle$	$\langle \sigma r \rangle$	$\langle \sigma r^2 \rangle$	$\{1\}$

El objetivo ahora es ver que $G := \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ -conjuntos tienen asociados estas \mathbb{Q} -álgebras, según el teorema de Galois de Grothendieck, para ello recordamos.

Dado K una subextensión de L y L -trivial, por el *teorema del elemento primitivo* siempre podemos escribir $K = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$, donde $f \in \mathbb{Q}[x]$ su polinomio irreducible. El funtor de Galois $P(K) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(K, L)$ asocia a K el conjunto de puntos del espectro de $K \otimes_{\mathbb{Q}} L$, que se descompone como:

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} L \cong \bigoplus_{\alpha \in \text{Raíces}_L(f)} L.$$

Cada factor L corresponde a un punto del espectro, que denotamos por \mathfrak{p}_α , asociado a la raíz $\alpha \in L$ de $f(x)$. Es decir, cada raíz da lugar a un punto del espectro. Visualmente:

$$\text{raíz } \alpha \quad \leftrightarrow \quad \text{punto } \mathfrak{p}_\alpha \in \text{Spec}(K \otimes_{\mathbb{Q}} L)$$

Esta correspondencia permite entender el conjunto $P(K)$ como el conjunto de raíces de f , y la acción del grupo de Galois como la acción por permutación de las raíces; luego, en este caso, una acción transitiva sobre los puntos del espectro:

$$\gamma \cdot \mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{p}_{\gamma(\alpha)}$$

Por tanto, el G -conjunto $P(K)$ no es más que el conjunto de raíces de $f(x)$ en L , con la acción de G permutándolas. Volviendo a nuestro ejemplo, todas las subextensiones (cuerpos intermedios) de L están en la siguiente tabla.

Subextensión K	Polinomio	Raíces en L	G-conjunto $P(K)$	Isotropía I_α
\mathbb{Q}	—	—	trivial	G
$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	$x^2 + x + 1$	ζ_3, ζ_3^2	$G/\langle r \rangle$	$I_{\zeta_3} = \langle r \rangle$
$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$	$x^3 - 2$	$\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2}, \zeta_3^2\sqrt[3]{2}$	$G/\langle \sigma \rangle$	$I_{\sqrt[3]{2}} = \langle \sigma \rangle$
$\mathbb{Q}(\zeta_3\sqrt[3]{2})$	$x^3 - 2$	$\zeta_3\sqrt[3]{2}, \zeta_3^2\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}$	$G/\langle \sigma r \rangle$	$I_{\zeta_3\sqrt[3]{2}} = \langle \sigma r \rangle$
$\mathbb{Q}(\zeta_3^2\sqrt[3]{2})$	$x^3 - 2$	$\zeta_3^2\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2}$	$G/\langle \sigma r^2 \rangle$	$I_{\zeta_3^2\sqrt[3]{2}} = \langle \sigma r^2 \rangle$
L	—	—	G (regular)	$\{1\}$

Gracias al *teorema de Galois según Grothendieck*, las subextensiones $K \subseteq L$ de grado 3 dan lugar a G -conjuntos del tipo $G/\langle g \rangle$, donde los subgrupos $\langle \sigma \rangle, \langle \sigma r \rangle, \langle \sigma r^2 \rangle$ son *conjugados* en G . Como consecuencia, los G -conjuntos asociados son isomorfos⁵, y por tanto, las \mathbb{Q} -álgebras correspondientes también lo son.

Este tipo de razonamiento no está directamente al alcance del teorema de Galois clásico, que únicamente establece una correspondencia entre subgrupos del grupo de Galois y subextensiones intermedias. Aunque es cierto que dos subextensiones correspondientes a subgrupos conjugados son isomorfas, este hecho no se deduce de forma inmediata del teorema clásico, y requiere una demostración adicional.

En cambio, el enfoque de Grothendieck permite deducir esta isomorfía de forma mucho más directa: basta observar que los G -conjuntos correspondientes son isomorfos, esto gracias a la equivalencia de categorías entre G -conjuntos y \mathbb{Q} -álgebras separables trivializadas por L , la isomorfía entre G -conjuntos se traduce automáticamente en una isomorfía de \mathbb{Q} -álgebras.

Por tanto, las siguientes son todos los cuerpos intermedios $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ no isomorfos entre sí, junto con sus G -conjuntos asociados:

- \mathbb{Q} , asociada al G -conjunto trivial $\{*\}$.
- $\mathbb{Q}(\zeta_3)$, asociada al G -conjunto $G/\langle r \rangle$.
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ (representante de la clase de extensiones de grado 3 conjugadas), asociada a $G/\langle \sigma \rangle$.
- $L = \mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2})$, asociada al G -conjunto regular G .

Recordemos que nuestro ejemplo inicial partía de la \mathbb{Q} -álgebra A y aplicando el funtor del *teorema de Galois según Grothendieck*, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(A, L) \\
 &\cong \text{Spec}(A \otimes_{\mathbb{Q}} L) \text{ (fórmulade los puntos)} \\
 &= \text{Spec}(L[x]/((x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^3-2))) \\
 &= \{\mathfrak{p}_1\} \sqcup \{\mathfrak{p}_2\} \sqcup \{\mathfrak{p}_{\zeta_3}, \mathfrak{p}_{\zeta_3^2}\} \sqcup \{\mathfrak{p}_{\sqrt[3]{2}}, \mathfrak{p}_{\zeta_3\sqrt[3]{2}}, \mathfrak{p}_{\zeta_3^2\sqrt[3]{2}}\}. \\
 &= \{*\} \sqcup \{*\} \sqcup G/\langle r \rangle \sqcup G/\langle \sigma \rangle
 \end{aligned}$$

Este resultado reproduce la estructura del revestimiento no conexo de S^1 : dos componentes triviales, una de grado 2 y otra de grado 3, ahora vistas como D_3 -conjuntos disjuntos.

No obstante, hay una diferencia clave: en el caso topológico, el grupo que actúa es \mathbb{Z} , mientras que en el algebraico es D_3 . Aunque ambas acciones generan la misma partición en órbitas (de tamaños 1, 1, 2, 3), la

⁵Dos G -conjuntos conexos G/H_1 y G/H_2 son isomorfos si y solo si H_1 es conjugado de H_2 .

simetría interna de cada órbita es distinta, pues depende del grupo que actúa. En particular, las permutaciones entre raíces (o puntos del espectro) no coinciden con las permutaciones entre fibras del revestimiento.

Observamos además que aplicando el funtor P al morfismo estructural de $\mathbb{Q} \rightarrow A$, obtenemos:

$$P(A) = \text{Spec}(A \otimes_{\mathbb{Q}} L) \longrightarrow \text{Spec}(L) = P(\mathbb{Q}).$$

Este morfismo puede interpretarse como un *revestimiento algebraico* del punto $\mathfrak{p}_L \in \text{Spec}(L)$: la imagen del morfismo consiste en siete puntos que revisten a \mathfrak{p}_L , así, la fibra sobre \mathfrak{p}_L está formada por los puntos:

$$\{\mathfrak{p}_1\} \sqcup \{\mathfrak{p}_2\} \sqcup \{\mathfrak{p}_{\zeta_3}, \mathfrak{p}_{\zeta_3^2}\} \sqcup \{\mathfrak{p}_{\sqrt[3]{2}}, \mathfrak{p}_{\zeta_3 \sqrt[3]{2}}, \mathfrak{p}_{\zeta_3^2 \sqrt[3]{2}}\} \rightarrow \mathfrak{p}_L$$

Esto refleja el paralelismo con un revestimiento topológico: el único punto \mathfrak{p}_L de $\text{Spec}(L)$ está revestido por los siete puntos del espectro de $A \otimes_{\mathbb{Q}} L$, dotados de una estructura de D_3 -conjunto.

Proposición. Sea $k \rightarrow L$ una extensión de Galois con grupo de Galois $G = \text{Gal}(L/k)$. Entonces, para toda extensión finita separable K de k trivializada por L , tenemos la igualdad de G -conjuntos $P(K) = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(K, L) \cong G/H$, donde $H = \text{Gal}(L/K)$ es el subgrupo de G que fija K . En particular, todos los G -conjuntos que provienen de un cuerpo trivializado por L son de la forma G/H con $H \leq G$.

Una justificación rápida de este hecho es que la acción de G sobre $P(K)$ se define por poscomposición: para $g \in G$ y $\varphi \in \text{Hom}_{k\text{-alg}}(K, L)$, se tiene $g \cdot \varphi = g \circ \varphi$. Esta acción es transitiva, y el subgrupo de G que deja fija una aplicación φ es precisamente $\text{Gal}(L/K)$, ya que son los automorfismos que fijan la imagen de K . Por tanto, se tiene una identificación natural de G -conjuntos:

$$P(K) \cong G/\text{Gal}(L/K).$$

Esta proposición se verifica explícitamente en los ejemplos anteriores, donde por ejemplo observamos que las subextensiones $\mathbb{Q}(\zeta_3)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, etc., tienen como conjunto de \mathbb{Q} -morfismos a L una órbita de la forma G/H , siendo H el subgrupo de isotropía de cada morfismo o punto de $\text{Spec}(K \otimes_{\mathbb{Q}} L)$ y un subgrupo de G . Este resultado nos servirá para agilizar el análisis en los ejemplos posteriores: una vez identificado el subgrupo $H \leq G$ que fija una subextensión $K \subseteq L$, sabremos inmediatamente que el G -conjunto asociado a K es G/H . De este modo, evitamos repetir razonamientos.

Ejemplo 3.79. Queremos estudiar la extensión $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$, que es el cuerpo de descomposición del polinomio $f(x) = x^4 - 2$. Este polinomio es irreducible sobre \mathbb{Q} (por el criterio de Eisenstein), y tiene raíces

$$\sqrt[3]{2}, \quad -\sqrt[3]{2}, \quad i\sqrt[3]{2}, \quad -i\sqrt[3]{2}.$$

Por tanto, el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre \mathbb{Q} es $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$, y, como además, el polinomio es separable, L es una extensión de Galois. Para calcular su grado, consideramos,

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq L.$$

El polinomio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ sobre \mathbb{Q} es $x^3 - 2$, por lo que $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$. Como $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, y $x^2 + 1$ sigue siendo irreducible, se tiene $[L : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] = 2$, así que,

$$[L : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6.$$

Por tanto, L es una extensión de grado 6 sobre \mathbb{Q} , y su grupo de Galois $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ tiene orden 6.

Pasamos ahora a describir el grupo de automorfismos. Como $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$, sus elementos están determinados por su acción sobre los generadores $\sqrt[4]{2}$ e i . El grupo de Galois de L/\mathbb{Q} es isomorfo al grupo diédrico D_4 . Este grupo tiene 8 elementos y puede generarse por dos automorfismos: uno, r , que envía $\sqrt[4]{2} \mapsto i\sqrt[4]{2}$ y fija i ; y otro, σ , que envía $i \mapsto -i$ y $\sqrt[4]{2} \mapsto \sqrt[4]{2}$. Estos satisfacen las relaciones:

$$r^4 = \sigma^2 = 1, \quad \sigma r \sigma^{-1} = r^{-1},$$

lo que caracteriza a D_4 . En otras palabras, el grupo de Galois tiene elementos $\{1, r, r^2, r^3, \sigma, \sigma r, \sigma r^2, \sigma r^3\}$.

	1	r	r^2	r^3	σ	σr	σr^2	σr^3
$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$i\sqrt[4]{2}$	$-\sqrt[4]{2}$	$-i\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$i\sqrt[4]{2}$	$-\sqrt[4]{2}$	$-i\sqrt[4]{2}$
i	i	i	i	i	$-i$	$-i$	$-i$	$-i$

Tomamos dos subgrupos de orden 4 del grupo de Galois $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, donde $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$. En concreto, consideramos los subgrupos $H_1 = \langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3\}$ y $H_2 = \{1, r^2, \sigma, \sigma r^2\}$. A pesar de tener el mismo orden, estos subgrupos no son conjugados en G (uno es cíclico y el otro no), por lo que los cuerpos de invariantes correspondientes no son isomorfos como extensiones de \mathbb{Q} . Efectivamente, al calcular los cuerpos fijos L^{H_1} y L^{H_2} , obtenemos $L^{H_1} = \mathbb{Q}(i)$ y $L^{H_2} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Ambos son extensiones de grado 2 sobre \mathbb{Q} , pero no son isomorfos como cuerpos: $\mathbb{Q}(i) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$, y el segundo, al ser real, no puede contener la raíz de $x^2 + 1$. Este ejemplo pone de manifiesto que, a diferencia de lo que ocurría en ejemplos anteriores, no todas las subextensiones de un mismo grado trivializadas por L son necesariamente isomorfas entre sí.

Podemos concluir este ejemplo de forma particularmente ilustrativa. Consideremos la \mathbb{Q} -álgebra

$$A = \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \cong \mathbb{Q}(i) \oplus \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

la cual es finita, separable y está trivializada por $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$, en efecto, aplicando el cambio de base por L , obtenemos:

$$A \otimes_{\mathbb{Q}} L \cong \mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} L \oplus \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} L \cong L \oplus L \oplus L \oplus L.$$

Por tanto, si aplicamos el funtor $P = \text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(-, L)$, obtenemos un G -conjunto de cuatro puntos con dos órbitas:

$$P(A) = P(\mathbb{Q}(i)) \sqcup P(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \cong G/H_1 \sqcup G/H_2,$$

Ejemplo 3.80. Con el objetivo de encontrar un caso algebraico que se asemeje al comportamiento de los revestimientos de S^1 , observamos, como ya hemos visto en los ejemplos, que la clave radica en la estructura del grupo que actúa. En el caso topológico, el grupo fundamental de S^1 es \mathbb{Z} , y los recubrimientos finitos corresponden a sus cocientes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Por tanto, para imitar esta situación en el contexto algebraico, buscamos una extensión de Galois cuyo grupo de Galois sea cíclico, ya que infinito nunca va a ser.

Un ejemplo natural es el cuerpo de descomposición del polinomio:

$$(x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)\Phi_7(x),$$

donde $\Phi_7(x)$ es el séptimo polinomio ciclotómico. Su cuerpo de descomposición es $L = \mathbb{Q}(\zeta_7)$, donde ζ_7 es una raíz primitiva séptima de la unidad. Esta extensión es de Galois, con grupo

$$G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},$$

El grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}$ es cíclico de orden 6, generado por el automorfismo σ definido por $\sigma(\zeta_7) = \zeta_7^3$. En efecto, las potencias sucesivas de ζ_7^3 recorren todas las raíces primitivas séptimas de la unidad, por lo que σ genera todo el grupo. Los elementos del grupo de Galois son entonces:

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5\},$$

y satisfacen $\sigma^6 = 1$. Sea $H_3 = \langle \sigma^2 \rangle$ el subgrupo de orden 3. Entonces, su cuerpo de invariantes es la subextensión fija por H_3 , es decir,

$$\mathbb{Q}(\zeta_7)^{H_3} = \mathbb{Q}(\alpha), \quad \text{donde } \alpha = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4 \notin \mathbb{R}.$$

Se puede comprobar que α permanece fija bajo la acción de σ^2 , ya que

$$\sigma^2(\alpha) = \zeta_7^9 + \zeta_7^{18} + \zeta_7^{36} = \zeta_7^2 + \zeta_7^4 + \zeta_7 = \alpha.$$

Por tanto, $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_7)^{H_3}$, y como el grado de la extensión es 2, se concluye que $\mathbb{Q}(\zeta_7)^{H_3} = \mathbb{Q}(\alpha)$ es una subextensión de grado 2 sobre \mathbb{Q} . Sea ahora $H_2 = \langle \sigma^3 \rangle \subset \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q})$, subgrupo de orden 2. El cuerpo de invariantes asociado es

$$\mathbb{Q}(\zeta_7)^{H_2} = \mathbb{Q}(\beta), \quad \text{donde } \beta = \zeta_7 + \zeta_7^6 = \zeta_7 + \bar{\zeta}_7 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

En efecto, observamos que

$$\sigma^3(\beta) = \zeta_7^{27} + \zeta_7^{-27} = \zeta_7^6 + \zeta_7 = \beta,$$

por lo que $\beta \in \mathbb{Q}(\zeta_7)^{H_2}$, y como el índice es 3, se concluye que $\mathbb{Q}(\zeta_7)^{H_2} = \mathbb{Q}(\beta)$ es una subextensión de grado 3 sobre \mathbb{Q} .

Sea ahora la \mathbb{Q} -álgebra

$$A = \mathbb{Q}[x]/(x-1)^2 \oplus \mathbb{Q}[x]/(m_\alpha(x)) \oplus \mathbb{Q}[x]/(m_\beta(x)),$$

donde $m_\alpha(x)$ de grado 2 y $m_\beta(x)$ de grado 3 son los polinomios irreducibles mínimos sobre \mathbb{Q} de los elementos α y β . Ambos cuerpos $\mathbb{Q}(\alpha)$ y $\mathbb{Q}(\beta)$ son subextensiones de L , y por tanto A se trivializa por L , en siete copias de L . Además, aplicando el funtor P tenemos,

$$G/H_2 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/\langle 3 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad G/H_3 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/\langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Así, el G -conjunto total asociado a la \mathbb{Q} -álgebra A es,

$$P(A) \cong G/G \sqcup G/G \sqcup G/H_2 \sqcup G/H_3 \cong \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/\langle 1 \rangle \sqcup \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/\langle 1 \rangle \sqcup \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/\langle 3 \rangle \sqcup \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}/\langle 2 \rangle,$$

que equivale, como $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ -conjunto, a:

$$\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$

que no es exactamente igual (porque el grupo que acciona es distinto, \mathbb{Z} en uno y $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ en este) al del ejemplo dado en el revestimiento del círculo, pero sí, muy parecido.

Observación. Un último ejemplo ilustrativo surge al considerar el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 . Este espacio admite un recubrimiento universal de grado 2 dado por la esfera $S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, con grupo de Galois isomorfo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En consecuencia, la categoría de revestimientos finitos sobre \mathbb{RP}^2 es equivalente a la categoría de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -conjuntos finitos.

Por otra parte, consideremos las \mathbb{Q} -álgebras finitas separables por $\mathbb{Q}(i)$, y la extensión $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}(i)$ que también es de grado 2 y de Galois, con grupo de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Esto nos permite deducir que la categoría de \mathbb{Q} -álgebras finitas separables trivializadas por $\mathbb{Q}(i)$ es igualmente equivalente a la categoría de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -conjuntos finitos.

¡Pero aquí ocurre algo aún más sorprendente! La transitividad de las equivalencias de categorías nos permite concluir que:

$$\mathbf{Rev}(\mathbb{RP}^2) \approx [\mathbb{Q}\text{-álgebras finitas, separables y trivializadas por } \mathbb{Q}(i)].$$

Este resultado es extraordinario: estamos identificando, sin ambigüedad y de forma canónica, *revestimientos topológicos* del plano proyectivo real con *\mathbb{Q} -álgebras finitas separables* que se trivializan por $\mathbb{Q}(i)$. La estructura combinatoria que subyace en ambos contextos —los $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -conjuntos— actúa como puente entre geometría y álgebra, revelando la verdadera fuerza conceptual de la teoría de Galois de Grothendieck.

A

Anexo de demostraciones

A.1. Demostraciones capítulo 1: Teoría de Categorías

Demostración del Lema 1.2.

Supongamos que existen dos morfismos x y x' en $\text{Hom}_C(A, A)$ que cumplen:

$$\forall f \in \text{Hom}_C(A, B), \quad f \circ x = f \quad \text{y} \quad f \circ x' = f \quad (1)$$

$$\forall g \in \text{Hom}_C(C, A), \quad x \circ g = g \quad \text{y} \quad x' \circ g = g \quad (2)$$

Consideramos el morfismo $x \circ x'$. Por la propiedad (2) para x , sabemos que $x \circ x' = x'$, y por la propiedad (1) para x' tenemos que $x \circ x' = x$. Por tanto:

$$x = x \circ x' = x' \Rightarrow x = x'.$$

□

Demostración del Lema 1.10.

Dados las propiedades dadas para la categoría opuesta de C , véase la Definición 1.9, deducimos:

1. $\text{Ob}((C^\circ)^\circ) = \text{Ob}(C^\circ) = \text{Ob}(C)$
2. En C° los morfismos se definen como, dados A, B objetos:

$$\text{Hom}_{C^\circ}(A, B) = \text{Hom}_C(B, A)$$

y a su vez los morfismos de $(C^\circ)^\circ$ se definen como

$$\text{Hom}_{(C^\circ)^\circ}(B, A) = \text{Hom}_{C^\circ}(A, B)$$

Por lo tanto,

$$\text{Hom}_{(C^\circ)^\circ}(A, B) = \text{Hom}_C(A, B)$$

3. Dados dos morfismos en C° , si $f \in \text{Hom}_{C^\circ}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_{C^\circ}(B, C)$, entonces la composición en C° está dada por:

$$g \circ f \text{ en } C^\circ \text{ es lo mismo que } f \circ g \text{ en } C.$$

Ahora, en $(C^\circ)^\circ$, los morfismos son los mismos que en C , y la composición se define como en C° , pero aplicada a los morfismos de C° . Es decir, si f, g son morfismos en $(C^\circ)^\circ$, entonces:

$$g \circ f \text{ en } (C^\circ)^\circ, \text{ es lo mismo que } f \circ g \text{ en } C^\circ, \text{ que a su vez es lo mismo que } g \circ f \text{ en } C.$$

Por tanto, la composición en $(C^\circ)^\circ$ coincide con la de C .

□

Demostración de la Proposición 1.13.

- 1 Como f es sección, entonces existe un morfismo $f' : B \rightarrow A$ tal que $f' \circ f = 1_A$. Análogamente, existe g' para g tal que $g' \circ g = 1_B$.

Queremos encontrar un morfismo h tal que $h \circ (g \circ f) = 1_A$. Basta definir: $h = f' \circ g'$,

$$h \circ (g \circ f) = f' \circ g' \circ (g \circ f) = f' \circ (g' \circ g) \circ f = f' \circ 1_B \circ f = f' \circ f = 1_A.$$

- 2 Si $g \circ f : A \rightarrow C$ es sección, implica que existe $h : C \rightarrow A$ tal que $h \circ (g \circ f) = 1_A$. Queremos demostrar que existe $f' : B \rightarrow A$ tal que $f' \circ f = 1_A$. Definimos: $f' = h \circ g : B \rightarrow C \rightarrow A$.

Entonces:

$$f' \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = 1_A.$$

□

Demostración de la Proposición 1.15.

- (1) Tenemos por hipótesis: si $f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$ y si $g \circ h' = g \circ k' \Rightarrow h' = k'$, luego:

$$g \circ f \circ h = g \circ f \circ k \Rightarrow f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k \quad (\text{ya que } g \text{ y } f \text{ son monomorfismos}).$$

- (2) Queremos comprobar que si $f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$, tenemos que si $f \circ h = f \circ k$, componemos por g a la izquierda:

$$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) \Rightarrow (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k.$$

Como $g \circ f = 1_A$, se deduce que $h = k$, luego f es monomorfismo.

□

Demostración de la Proposición 1.18.

Sea C una categoría cualquiera, enunciamos (1.13) para C° . Tenemos:

$$\begin{aligned} f : B \rightarrow A \text{ sección, i.e. } \exists f' \text{ tal que } f' \circ f &= 1_B \\ g : C \rightarrow B \text{ sección, i.e. } \exists g' \text{ tal que } g' \circ g &= 1_C \\ \Rightarrow \exists h : C \rightarrow A \text{ tal que } h \circ g \circ f &= 1_C \quad [\text{cierta en } C^\circ] \end{aligned}$$

Por el principio de dualidad, sabemos que la propiedad opuesta es cierta en C , y dicha propiedad opuesta es:

$$\begin{aligned} f : A \rightarrow B \quad \exists f' \text{ tal que } f \circ f' &= 1_B \text{ (i.e. } f \text{ retracción)} \\ g : B \rightarrow C \quad \exists g' \text{ tal que } g \circ g' &= 1_C \text{ (i.e. } g \text{ retracción)} \\ \Rightarrow \exists h : C \rightarrow A \text{ tal que } g \circ f \circ h &= 1_C \quad [\text{cierta en } C] \end{aligned}$$

Luego esto implica que $g \circ f$ es retracción. concluimos (1). Para (2), observamos que el dual del (1.13), punto 2, es:

$$\begin{aligned} f : B \rightarrow A, g : C \rightarrow B, \exists h : h \circ g \circ f &= 1_C \\ \Rightarrow \exists f' : f' \circ f &= 1_B \quad [\text{cierta en } C^\circ] \end{aligned}$$

Luego, por dualidad, tenemos:

$$\begin{aligned} f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, \exists h : g \circ f \circ h = \mathbf{1}_C \\ \Rightarrow \exists f' : f \circ f' = \mathbf{1}_B \quad [\text{cierta en } C] \end{aligned}$$

Que es nuestro enunciado, y concluimos. □

Demostración del Lema 1.22.

Sean I, I' dos objetos iniciales en \mathcal{C} . Entonces existe un único morfismo $f : I \rightarrow I'$, pues

$$|\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I')| = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I') = \{f\}.$$

Análogamente, existe un único $g : I' \rightarrow I$. Componiendo ambos morfismos:

$$g \circ f : I \rightarrow I$$

es único, luego $g \circ f = \mathbf{1}_I$. Análogamente,

$$f \circ g : I' \rightarrow I'$$

es único, luego $f \circ g = \mathbf{1}_{I'}$. Luego f es un isomorfismo, y de acuerdo con la definición, $I \cong I'$ en \mathcal{C} . □

Demostración del Lema 1.30.

Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un functor inmersión, es decir, fiel e inyectivo en objetos por el lema anterior. Queremos comprobar que \mathcal{S} está bien definida como subcategoría de \mathcal{D} .

- Como F es inyectivo en objetos, cada objeto $S \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ proviene de un único objeto $A \in \mathcal{C}$, lo cual nos permite identificar cada objeto de \mathcal{C} , con uno único de \mathcal{D} , luego $\text{Ob}(\mathcal{S})$ es subclase de $\text{Ob}(\mathcal{D})$.
- Como F es fiel, la asignación $f \mapsto F(f)$ es inyectiva para cada par de objetos A, B , es decir cada $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ esta representado de manera única por $F(f)$ en $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$, por lo que los conjuntos $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(F(A), F(B)) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$.
- Por ser F functor se preserva la estructura de categoría.

Por tanto, \mathcal{S} es una subcategoría de \mathcal{D} en un sentido equivalente a \mathcal{C} , que podemos ver como la imagen del functor F . □

Demostración de la Proposición 1.46.

(1) \Rightarrow (2) Supongamos que \mathcal{C} y \mathcal{D} son equivalentes. Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ el functor que da la equivalencia, veamos que $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ son isomorfos.

Para cada $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$, $F(X) \in \mathcal{D}$ es isomorfo a un único $Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ (por ser esqueleto) con esto definimos $\tilde{F} : \mathcal{E}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ como $\tilde{F}(X) = Y$.

Dado $f : X \rightarrow X'$ en $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$, definimos $\tilde{F}(f)$ como el único morfismo que hace conmutar:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(X') \\ \phi_X \downarrow & & \downarrow \phi_{X'} \\ \tilde{F}(X) & \xrightarrow{\tilde{F}(f)} & \tilde{F}(X') \end{array}$$

donde $\phi_X: F(X) \xrightarrow{\sim} \tilde{F}(X)$ son isomorfismos. Explícitamente:

$$\tilde{F}(f) = \phi_{X'} \circ F(f) \circ \phi_X^{-1}.$$

Como F es equivalencia (fiel y pleno por (1.44)), \tilde{F} hereda de la definición estas mismas propiedades. Veamos que es biyectiva entre objetos.

- Inyectiva: Si $\tilde{F}(X) = \tilde{F}(X')$, entonces $F(X) \cong F(X')$ en \mathcal{D} . Aplicamos G , obteniendo $G(F(X)) \cong G(F(X'))$. Como $G \circ F \approx 1_{\mathcal{C}}$, se deduce que $X \cong G(F(X)) \cong G(F(X')) \cong X'$ por tanto, $X \cong X'$ en \mathcal{C} , como X y X' son objetos de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ que a su vez es esquelético, $X = X'$.
- Sobreyectiva: Para todo $Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}$, existe $X \in \mathcal{C}$ con $F(X) \cong Y$ por ser F denso. Como $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ es esquelético, existe $X' \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ con $X \cong X'$, luego $\tilde{F}(X') = Y$.

Por tanto, en virtud de (1.36), $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ es isomorfo a $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$.

(2) \Rightarrow (1) Si $\mathcal{E}_{\mathcal{C}} = \mathcal{E}_{\mathcal{D}}$. Como $\mathcal{C} \approx \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{D} \approx \mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ (vía inclusiones que son equivalencias), se tiene por transitividad:

$$\mathcal{C} \approx \mathcal{E}_{\mathcal{C}} \approx \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \approx \mathcal{D}.$$

□

Demostración del Lema 1.54.

Por la propiedad universal de (E, e) aplicada a e' , existe único $\psi: E' \rightarrow E$ con $e' = e \circ \psi$. Análogamente, existe único $\phi: E \rightarrow E'$ con $e = e' \circ \phi$.

Sustituyendo: $e' = e' \circ (\phi \circ \psi)$ implica $\phi \circ \psi = 1_{E'}$ por unicidad. Igualmente $e = e \circ (\psi \circ \phi)$ implica $\psi \circ \phi = 1_E$. La unicidad de ϕ sigue porque $e = e' \circ \phi$ determina ϕ unívocamente.

□

Demostración de la Proposición 1.55.

Sean $r, s: C \rightarrow E$ dos morfismos tales que $e \circ r = e \circ s$. Como (E, e) es igualador de f y g , se cumple que $f \circ e = g \circ e$. Consideremos el morfismo $e \circ r = e \circ s: C \rightarrow A$ y observemos que:

$$f \circ (e \circ r) = (f \circ e) \circ r = (g \circ e) \circ r = g \circ (e \circ r)$$

Por la propiedad universal del igualador (E, e) , existe un único morfismo $t: C \rightarrow E$ tal que $e \circ t = e \circ r$. Pero tanto r como s satisfacen esta condición:

- Para r : $e \circ r = e \circ r$ (trivialmente)
- Para s : $e \circ s = e \circ r$ (por hipótesis)

Por la unicidad en la propiedad universal, concluimos que $r = s = t$. Por lo tanto, e es un monomorfismo. □

A.2. Demostraciones capítulo 2: Topología Algebraica

Demostración del Lema 2.3.

Para la reflexividad, basta tomar $H(t, s) := \gamma(t)$; para la simetría, si H es una homotopía de γ_0 a γ_1 , se define $\tilde{H}(t, s) := H(t, 1-s)$, que es una homotopía de γ_1 a γ_0 ; y para la transitividad, si $H : \gamma_0 \equiv \gamma_1$ y $H' : \gamma_1 \equiv \gamma_2$, se define:

$$H''(t, s) := \begin{cases} H(t, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H'(t, 2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

En efecto, $H''(t, 0) = H(t, 0) = \gamma_0(t)$ y $H''(t, 1) = H'(t, 1) = \gamma_2(t)$; además, como $H(t, 1) = \gamma_1(t) = H'(t, 0)$, se garantiza la continuidad en $s = \frac{1}{2}$.

□

Demostración del Lema 2.4.

Definimos $H'_s(t)$ mediante:

$$H'_s(t) := \begin{cases} H_s(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \overline{H}_s(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esta aplicación define una homotopía entre las composiciones, ya que $H'_0 = \overline{\gamma} \cdot \gamma$ y $H'_1 = \overline{\gamma}' \cdot \gamma'$. La continuidad está garantizada porque $\gamma(1) = \overline{\gamma}(0)$ y por tanto $H_s(1) = \gamma(1) = \overline{\gamma}(0) = \overline{H}_s(0)$ para todo $s \in I$.

□

Demostración de la Proposición 2.5.

Se dan las homotopías que hacen cierto este resultado; la comprobación de que efectivamente estas son las adecuadas es rutinaria.

1. Se define:

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{2t}{1+s}\right) & 2t \leq 1+s, \\ q & 2t \geq 1+s. \end{cases}$$

y análogamente para $\gamma \cdot p$.

2. Se toma:

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(2t) & 2t \leq 1-s, \\ \gamma(1-s) & 1-s \leq 2t \leq 1+s, \\ \gamma(2(1-t)) & 2t \geq 1+s. \end{cases}$$

3. Se define:

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{4t}{1+s}\right) & t \leq \frac{1+s}{4}, \\ \gamma_2(4t-s-1) & \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4}, \\ \gamma_3\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \frac{2+s}{4} \leq t. \end{cases}$$

A.3. Demostraciones capítulo 3: Teoría de Galois para revestimientos

Demostración de la Proposición 3.7.

Sea $V \subseteq X$ un abierto. Veamos que $\pi(V)$ es abierto en S . Dado $s \in \pi(V)$, existe $x \in V$ tal que $\pi(x) = s$. Como π es un revestimiento, existe un entorno abierto $U \subseteq S$ que trivializa π , es decir, tal que

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i,$$

con cada $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ un homeomorfismo, y $x \in U_j$ para algún índice $j \in I$.

Como V es abierto, la intersección $V \cap U_j \subseteq X$ es abierta. Además, como $\pi|_{U_j}$ es un homeomorfismo, se tiene: $\pi(V \cap U_j) = \pi|_{U_j}(V \cap U_j)$ es abierto en U , luego también en S . Por tanto, para todo punto $s \in \pi(V)$, hemos encontrado un entorno abierto $\pi(V \cap U_j) \subseteq \pi(V)$, lo que prueba que $\pi(V)$ es abierto.

Supongamos ahora que π es además epiyectiva. Queremos ver que $U \subseteq S$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. Como ya hemos visto que π es abierta, basta ver que si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X , entonces U lo es en S . En efecto, como $\pi^{-1}(U)$ es abierto y π es abierta y epiyectiva, se tiene que $\pi(\pi^{-1}(U)) = U$ es abierto. \square

Demostración de la Proposición 3.9.

Sea $\pi : X \rightarrow S$ un revestimiento finito. Queremos ver que si $C \subseteq X$ es cerrado, entonces $\pi(C) \subseteq S$ también lo es. Análogamente, dado $s \in S \setminus \pi(C)$, existe un abierto $U \subseteq S$ tal que $s \in U \subseteq S \setminus \pi(C)$.

Como π es finito, la fibra $\pi^{-1}(s) = \{x_1, \dots, x_n\}$ es finita. Si $s \notin \pi(C)$, entonces $x_i \notin C$ para todo i . Como C es cerrado, para cada x_i existe un entorno abierto $V_i \subseteq X$ tal que $V_i \cap C = \emptyset$.

Tomamos ahora un entorno abierto $W \subseteq S$ que trivializa π en un entorno de s , de modo que:

$$\pi^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^n W_i, \quad \text{con } \pi|_{W_i} : W_i \rightarrow W \text{ homeomorfismo y } x_i \in W_i.$$

Definimos: $U_i := \pi(W_i \cap V_i)$. Como π es abierta y $W_i \cap V_i$ es abierto, $U_i \subseteq S$ es abierto. Además, como $V_i \cap C = \emptyset$, se tiene $\pi^{-1}(U_i) \cap C = \emptyset$.

Finalmente, tomamos:

$$\mathcal{U} := \bigcap_{i=1}^n U_i,$$

que es abierto en S , contiene a s , y por construcción $\mathcal{U} \cap \pi(C) = \emptyset$. Luego $S \setminus \pi(C)$ es abierto, y por tanto $\pi(C)$ es cerrado. \square

Demostración del Ejemplo 3.13.

1. La función \exp es continua por ser analítica en \mathbb{C} . Dado $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, escribiendo $w = re^{i\theta}$ con $r > 0$, existe $z = \ln r + i\theta$ tal que $e^z = w$, probando suprayectividad.

Sea $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tomamos $U = B_\epsilon(w_0)$ con $\epsilon < |w_0|$. La preimagen $\exp^{-1}(U)$ consiste en las soluciones de $e^z = w$ para $w \in U$. Cada $w \in U$ se escribe como $w = re^{i\phi}$, y sus preimágenes son:

$$z_k = \ln r + i\phi + 2\pi ik \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Definimos $U_k = \{\ln r + i(\phi + 2\pi k) \mid re^{i\phi} \in U\}$. Cada U_k es abierto y $\exp|_{U_k} : U_k \rightarrow U$ es un homeomorfismo, pues es biyectiva, continua y abierta. Además, los U_k son disjuntos por traslaciones verticales de $2\pi i$. Así, $\exp^{-1}(U) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$ cumple la condición de revestimiento.

2. Para $z_0 \in S^1$, tomamos $U = S^1 \setminus \{-z_0\}$. Entonces:

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right),$$

y p restringida a cada intervalo es un homeomorfismo, cada fibra $p^{-1}(z)$ tiene infinitos puntos, luego tiene grado ∞ .

3. Dado $z_0 \in S^1$, sea $U = S^1 \setminus \{\omega z_0\}$ donde $\omega^n = 1$. Entonces:

$$p_n^{-1}(U) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k/n} U^{1/n},$$

donde cada rama $U^{1/n}$ es homeomorfa a U vía p_n . Nótese que cada rama tiene exactamente n puntos.

4. Para $[x] \in \mathbb{RP}^2$, tomamos $U = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[y]\}$ donde $y \perp x$. Entonces:

$$\pi^{-1}(U) = S^2 \setminus \{y, -y\} = U_+ \sqcup U_-,$$

donde U_{\pm} son hemisferios homeomorfos a U . Además cada fibra $\pi^{-1}([x]) = \{x, -x\}$ tiene 2 puntos, luego tiene grado 2.

Demostración de la Proposición 3.19.

Sean $\pi_X : X \rightarrow S$ y $\pi_Y : Y \rightarrow S$ revestimientos finitos de grados n y m , respectivamente. Queremos ver que el producto fibrado $\pi : X \times_S Y \rightarrow S$, es un revestimiento finito de grado nm . Dado $s \in S$, existen entornos $U, V \subseteq S$ tales que U trivializa π_X y V trivializa π_Y , con

$$\pi_X^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^n U_i, \quad \pi_Y^{-1}(V) = \bigsqcup_{j=1}^m V_j,$$

donde cada $\pi_X|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ y $\pi_Y|_{V_j} : V_j \rightarrow V$ son homeomorfismos. Tomando $W = U \cap V$, un abierto de S que trivializa ambos revestimientos, se tiene:

$$\pi_X^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^n W_i, \quad \pi_Y^{-1}(W) = \bigsqcup_{j=1}^m W_j,$$

donde $W_i \cong W \cong W_j$. Entonces, por las propiedades del producto fibrado (3.3) deducimos:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(W) &= \{(x, y) \in X \times Y \mid \pi_X(x) = \pi_Y(y)\} = \pi_X^{-1}(W) \times_S \pi_Y^{-1}(W) = \\ &= \left(\bigsqcup_{i=1}^n W_i \right) \times_S \left(\bigsqcup_{j=1}^m W_j \right) \cong \left(\bigsqcup_{i=1}^n W \right) \times_S \left(\bigsqcup_{j=1}^m W \right) = \bigsqcup_{i,j=1}^{nm} W. \end{aligned}$$

□

Demostración de la Proposición 3.32.

Dada $\pi : X \rightarrow X/G$ la proyección canónica. Queremos probar que π es una aplicación abierta. Sea $V \subseteq X$ abierto. Queremos ver que $\pi(V) \subseteq X/G$ es abierto, es decir, que $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto en X .

Se tiene:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(V)) &= \{x \in X \mid [x] \in \pi(V)\} = \{x \in X \mid \exists g \in G, x' \in V \text{ tal que } g(x') = x\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{x = g(x') \mid x' \in V\} = \bigcup_{g \in G} g(V). \end{aligned}$$

Como cada $g \in G$ es un homeomorfismo, $g(V)$ es abierto.

□

Demostración de la Proposición 3.33.

(\Rightarrow) Supongamos que G es propiamente discontinuo. Dado $[x] \in X/G$, por hipótesis existe un entorno $U \subseteq X$ de x tal que los conjuntos $\{g(U)\}_{g \in G}$ son disjuntos.

Sea $V := \pi(U) \subseteq X/G$. Como π es abierta, V es abierto en X/G , y calculamos su preimagen:

$$\pi^{-1}(V) = \{x \in X \mid [x] \in \pi(U)\} = \bigcup_{g \in G} \{x = g(x') \mid x' \in U\} = \bigcup_{g \in G} g(U).$$

Por hipótesis, esta unión es disjunta. Para cada $g \in G$, definimos $W_g := g(U)$. La restricción $\pi|_{W_g} : W_g \rightarrow V$ es biyectiva porque es sobreyectiva ya que $\pi(W_g) = \pi(U) = V$, y es inyectiva porque si $\pi(g(x_1)) = \pi(g(x_2)) \Rightarrow \exists h \in G, g(x_1) = h(g(x_2)) \Rightarrow x_1 = g^{-1}hg(x_2)$, y como $g^{-1}hg \in G$ y los $g(U)$ son disjuntos, se sigue que $x_1 = x_2$.

Luego $\pi|_{W_g} : W_g \rightarrow V$ es abierta y biyectiva; por tanto, un homeomorfismo. En consecuencia $\pi : X \rightarrow X/G$ es un revestimiento.

(\Leftarrow) Sea $x \in X$. Como π es un revestimiento, existe un entorno abierto $V \subseteq X/G$ de $\pi(x)$ tal que

$$\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i \quad \text{con} \quad \pi|_{U_i} : U_i \rightarrow V \text{ homeomorfismo.}$$

Supongamos que $x \in U_k$ para algún k . Entonces, cada $g \in G$ cumple $g(U_k) \cong U_k$, y como

$$\pi(g(U_k)) = \pi(U_k) = V,$$

se deduce que $g(U_k) = U_j$ para algún j . Luego podemos escribir $\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} g(U_k)$, se concluye así que la familia $\{g(U_k)\}_{g \in G}$ es disjunta y U_k es el entorno buscado.

□

Demostración de la Proposición 3.34.

Supongamos por contradicción que G no actúa libremente. Entonces existe un automorfismo $g \in G \setminus \{1\}$ y un punto $x \in X$ tal que $g(x) = x$, es decir, x es un punto fijo de g . Como G es propiamente discontinuo, existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ con $g \neq 1$. Pero entonces $x \in U \cap g(U)$, ya que $g(x) = x \in g(U)$, lo cual contradice que $g(U) \cap U = \emptyset$.

□

Demostración de la Proposición 3.35

Sea $x \in X$. Como G actúa libremente, para cada $g \in G \setminus \{1\}$ se tiene $g(x) \neq x$.

Como X es Hausdorff, para cada $g \neq 1$ existen entornos U_g de x y V_g de $g(x)$ tales que $U_g \cap V_g = \emptyset$.

Construimos el conjunto abierto (por $|G| = n$),

$$\mathcal{U} := \bigcap_{g \in G \setminus \{1\}} U_g \cap g^{-1}(V_g).$$

Se tiene que $x \in \mathcal{U}$ y para cada $g \in G \setminus \{1\}$, se cumple que $\mathcal{U} \subseteq g^{-1}(V_g)$, lo que implica que $g(\mathcal{U}) \subseteq V_g$, y por tanto

$$g(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \subseteq V_g \cap U_g = \emptyset.$$

Así, $g(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$ para todo $g \neq 1$.

□

Demostración de la Proposición 3.46.

Dado que G es propiamente discontinuo, π es un revestimiento. Veamos primero que $G \subseteq \text{Aut}_{X/G}(X)$. Sea $g \in G$ veamos que es un automorfismo del revestimiento; lo es, pues $g : X \rightarrow X$ es homeomorfismo y $\pi \circ g = \pi$, en efecto.

$$\pi(g(x)) = [g(x)] = [x] = \pi(x).$$

Veamos ahora que $\text{Aut}_{X/G}(X) \subseteq G$. Sea $\tilde{g} \in \text{Aut}_{X/G}(X)$. Para cualquier $x \in X$, por definición $\pi(\tilde{g}(x)) = \pi(x)$, luego

$$\tilde{g}(x) \stackrel{G}{\cong} x \Leftrightarrow \exists g \in G, \tilde{g}(x) = g(x) \Rightarrow \tilde{g} = g \Rightarrow \tilde{g} \in G. \quad (\text{por prop. 3.38})$$

Y por tanto, si $\pi(x) = \pi(x')$ entonces $x \stackrel{G}{\cong} x'$, que significa $x' = g(x)$ para algún $g \in G$ (por definición de X/G). Concluimos así que es de Galois. \square

Demostración del Lema 3.59

1. Como f es constante en las fibras de π , podemos definir una función $\bar{f} : S \rightarrow T$ por:

$$\bar{f}(s) := f(x), \quad \text{para cualquier } x \in \pi^{-1}(s).$$

Esta está bien definida por hipótesis: todos los puntos de la fibra $\pi^{-1}(s)$ tienen la misma imagen por f . Queremos ver que \bar{f} es continua. Sea $U \subseteq T$ abierto. Entonces:

$$\begin{aligned} \bar{f}^{-1}(U) &= \{s \in S \mid \bar{f}(s) \in U\} \\ &= \{s \in S \mid f(x) \in U \text{ para algún (equiv. todo) } x \in \pi^{-1}(s)\} \\ &= \pi(f^{-1}(U)). \end{aligned}$$

Como f es continua, $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto, y como π es un revestimiento, es una aplicación abierta. Por tanto, $\bar{f}^{-1}(U) = \pi(f^{-1}(U))$ es abierto en S .

2. Como consecuencia, esto implica que el coequalizador de $\pi_1, \pi_2 : X \times_S X \rightarrow X$. Es decir, si $f : X \rightarrow T$ es una función tal que $f \circ \pi_1 = f \circ \pi_2$, entonces f es constante en las fibras de π , por lo que existe $\bar{f} : S \rightarrow T$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi$, y esta \bar{f} es única. \square

Demostración del Lema 3.60

La acción de G sobre el producto fibrado $T \times_S X$ está dada por $(t, x) \cdot g := (t, x \cdot g)$, donde $g \in G$. Definimos una biyección

$$f : (T \times_S X)/G \longrightarrow T \times_S (X/G),$$

enviando la clase $[(t, x)]$ al par $(t, [x])$. Esta aplicación está bien definida, pues si $(t, x) \sim (t, x \cdot g)$, entonces claramente $[x] = [x \cdot g]$ en X/G , y por tanto $(t, [x]) = (t, [x \cdot g])$. La biyección inversa es también evidente. Falta ver que f es en efecto una aplicación continua, dado que S es localmente conexo y la continuidad es una cuestión local podemos suponer que S es conexo, sino basta con restringirnos a cada componente conexa.

Dado que $\pi : X \rightarrow S$ es un revestimiento, existe un recubrimiento abierto $\{V_i\}$ de S tal que cada $\pi^{-1}(V_i)$ es homeomorfo a $V_i \times F$, con F un espacio discreto. Fijamos uno de estos abiertos $V \subseteq S$ tal que $\pi^{-1}(V) \cong V \times F$, y observamos que por ser una cuestión local, basta trabajar sobre V . Es decir, localmente sobre S , podemos identificar $X = S \times F$, donde además la acción de G es trivialmente sobre S , y por tanto solo sobre la componente discreta F . Por tanto $X/G = (S \times F)/G = S \times (F/G)$.

Ahora veamos el lado izquierdo:

$$(T \times_S X)/G = (T \times_S (S \times F))/G = (T \times F)/G,$$

Por otro lado, también tenemos:

$$T \times_S (X/G) = T \times_S (S \times (F/G)) = T \times (F/G).$$

Concluimos que $(T \times_S X)/G = (T \times F)/G = T \times (F/G) = T \times_S (X/G)$.

□

B

Apéndice

B.1. Límites y colímites

Recordad que un grafo dirigido consta de un conjunto V de vértices: i, j, k, \dots y para todo par ordenado de vértices (i, j) , un conjunto de aristas de i a j . Si α es una arista de i a j , escribimos

$$i \xrightarrow{\alpha} j$$

En una arista como la anterior, el vértice i se llama origen o fuelle de α , y se escribe $i = o(\alpha)$, mientras que j se llama blanco de α , y se pone $j = b(\alpha)$. Denotamos por A al conjunto de todas las aristas del grafo.

En otras palabras, un grafo dirigido es algo como una categoría pequeña en la que los vértices son los objetos, las aristas los morfismos, pero no hay composición de morfismos.

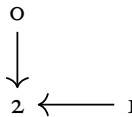
Ejemplo B.1. 1. Si I es un conjunto discreto cualquiera, se puede formar el grafo discreto cuyo conjunto de vértices es $V = I$ y cuyo conjunto de aristas es vacío.

2.



es un grafo con vértices 0 y 1 , y dos aristas entre ellos.

3.



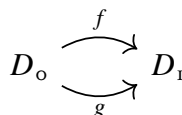
es un grafo formado por los vértices $0, 1, 2$ y las dos aristas señaladas en la imagen.

Si en un grafo sustituimos los vértices i por los objetos D_i de una categoría, y las aristas por morfismos $D_i \xrightarrow{d} D_j$, se obtiene un diagrama en la categoría en cuestión.

Por ejemplo, los grafos de antes dan lugar a los siguientes diagramas:

1. $\{D_i\}_{i \in I}$ (no hay morfismos).

2.



3.

$$\begin{array}{ccc} D_0 & & \\ \downarrow f & & \\ D_2 & \xleftarrow{g} & D_1 \end{array}$$

Si D y E son dos diagramas en C sobre un mismo grafo T , un morfismo de diagramas $D \rightarrow E$ es una aplicación φ que asigna a cada vértice i de Γ un morfismo $\varphi_i : D_i \rightarrow E_i$ de C , tal que para toda arista $i \xrightarrow{\alpha} j$ de Γ se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{\varphi_i} & E_i \\ D_\alpha \downarrow & & \downarrow E_\alpha \\ D_j & \xrightarrow{\varphi_j} & E_j \end{array}$$

es decir, $E_\alpha \circ \varphi_i = \varphi_j \circ D_\alpha$.

Los morfismos de diagramas se pueden componer, de modo que los diagramas y morfismos de diagramas sobre un grafo Γ en una categoría cualquiera C constituyen una categoría:

$$\mathbf{Dia}(\Gamma, C)$$

cuyas identidades y composición son las obvias.

Dado un grafo Γ , se puede definir una categoría $\widehat{\Gamma}$, que se llama categoría libre generada por Γ , es decir, la categoría pequeña formada por:

1. Los objetos de $\widehat{\Gamma}$ son los vértices de Γ .
2. Los morfismos del vértice i al vértice j son los caminos $(i = i_1, i_2, \dots, i_n = j)$ de i en j , es decir, las sucesiones de aristas:

$$i_r \xrightarrow{\alpha_r} i_{r+1} \quad (r = 1, \dots, n-1)$$

con $i_1 = i$ e $i_n = j$, a los cuales se añade, para cada vértice i , el camino vacío representado por (i, i) .

3. La composición de morfismos (de caminos) se obtiene por yuxtaposición, de modo que si

$$c_1 = (i, \alpha_1, \dots, \alpha_n, j), \quad c_2 = (j, \beta_1, \dots, \beta_m, h)$$

son dos caminos, entonces $c_2 \circ c_1$ existe solamente si $j = k$, en cuyo caso:

$$c_2 \circ c_1 = (i, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m, h)$$

La comprobación de que efectivamente $\widehat{\Gamma}$ es una categoría es rutinaria. Definimos ahora una nueva categoría haciendo uso de la recientemente definida, $\widehat{\Gamma}$. Comenzamos definiendo un funtor $F : \widehat{\Gamma} \rightarrow C$ que es una asignación:

- En objetos, asociamos a cada vértice $i \in \text{Ob}(\widehat{\Gamma})$ un objeto $F(i) \in \text{Ob}(C)$.
- En morfismos, a cada camino $c = (i \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_n} j) \in \text{Mor}(\widehat{\Gamma})$ asociamos un morfismo

$$F(c) : F(i) \rightarrow F(j) \quad \text{en } C.$$

Donde además, preserva identidades: para cada vértice i , $F(i, i) = \text{id}_{F(i)}$, y preserva composición: para cualesquiera dos caminos $c_1, c_2 \in \text{Mor}(\widehat{\Gamma})$ componibles,

$$F(c_2) \circ F(c_1) = F(c_2 \circ c_1).$$

Dados dos funtores $F, G : \widehat{\Gamma} \rightarrow \mathcal{C}$, una transformación natural $\eta : F \Rightarrow G$ es una aplicación $\eta : \text{Ob}(\widehat{\Gamma}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$ que no es más que una familia de morfismos

$$\eta_i : F(i) \rightarrow G(i), \quad \text{para cada vértice } i \text{ de } \widehat{\Gamma}.$$

Además, para todo camino $c = (i \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_n} j)$ en $\widehat{\Gamma}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{\eta_i} & G(i) \\ F(c) \downarrow & & \downarrow G(c) \\ F(j) & \xrightarrow{\eta_j} & G(j) \end{array}$$

Proposición B.2. Si Γ y $\widehat{\Gamma}$ son como en las construcciones anteriores y \mathcal{C} una categoría cualquiera, entonces existe un isomorfismo natural de categorías:

$$\mathbf{Dia}(\Gamma, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Fun}(\widehat{\Gamma}, \mathcal{C})$$

que se obtiene extendiendo todo diagrama D a un funtor \widehat{D} , y todo morfismo de diagramas $\varphi : D \rightarrow E$ a una transformación natural $\widehat{\varphi} : \widehat{D} \rightarrow \widehat{E}$.

Demostración. Si i es un vértice de Γ , es decir, un objeto de $\widehat{\Gamma}$, se pone $\widehat{D}(i) = D(i)$. Si (i, i) es un camino vacío, se define así:

$$\widehat{D}(i, i) = \text{id}_{D(i)} \quad (\text{morfismo identidad del objeto } D(i) \text{ en } \mathcal{C})$$

Y si $c = (i, \alpha_1, \dots, \alpha_n, j)$ es un camino cualquiera:

$$\widehat{D}(c) := D_{\alpha_n} \circ \dots \circ D_{\alpha_1} : \widehat{D}(i) \longrightarrow \widehat{D}(j)$$

Queda así definido un funtor, donde el diagrama D se obtiene restringiendo los caminos de $\widehat{\Gamma}$ a los de longitud 1.

Dado un morfismo de diagramas $\varphi : D \rightarrow E$ en $\mathbf{Dia}(\Gamma, \mathcal{C})$, es decir, una colección de morfismos

$$\{\varphi_i : D_i \rightarrow E_i\}_{i \in V},$$

definimos la transformación natural $\widehat{\varphi}$, tal que para cada $i \in \widehat{\Gamma}$, definimos $\widehat{\varphi}_i = \varphi_i : D_i \rightarrow E_i$. Luego, la transformación natural $\widehat{\varphi}$ es exactamente la misma que el morfismo φ .

Además, observamos que para cada camino $c = (i \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_n} j)$ se verifica que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{\widehat{D}(c)} & D_j \\ \widehat{\varphi}_i \downarrow & & \downarrow \widehat{\varphi}_j \\ E_i & \xrightarrow{\widehat{E}(c)} & E_j \end{array}$$

Porque,

$$\widehat{\varphi}_j \circ \widehat{D}(c) = \varphi_j \circ D_{\alpha_n} \circ \cdots \circ D_{\alpha_1} = E_{\alpha_n} \circ \cdots \circ E_{\alpha_1} \circ \varphi_i = \widehat{E}(c) \circ \widehat{\varphi}_i$$

que se deduce utilizando la conmutatividad de los φ_i en caminos de longitud 1, que es cierta por definición de los morfismos en la categoría de diagramas.

El mismo razonamiento nos muestra que esta construcción es efectivamente un isomorfismo natural de categorías; luego su comprobación es rutinaria, por tanto, la siguiente asignación define un isomorfismo de categorías.

$$D \rightarrow \widehat{D} \quad \varphi \rightarrow \widehat{\varphi}$$

□

Se dice que un diagrama D es conmutativo si

$$\widehat{D}(c_1) = \widehat{D}(c_2)$$

para todo par de caminos $c_1, c_2 : i \rightarrow j$ con el mismo origen y destino.

Esto nos da una definición precisa e independiente de cualquier “representación gráfica”.

Fijamos ahora un diagrama D del grafo Γ en la categoría C . Si A es un objeto de C , se llama cono de A en D a una familia φ_i de morfismos:

$$\varphi_i : A \rightarrow D_i$$

con $i \in V$ (conjunto de vértices de Γ) tal que, para toda arista $i \xrightarrow{\alpha} j$ del grafo Γ , se cumple:

$$D_\alpha \circ \varphi_i = \varphi_j,$$

es decir, el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \varphi_i \swarrow & & \searrow \varphi_j \\ D_i & \xrightarrow{D_\alpha} & D_j \end{array}$$

Dados dos conos $\varphi : A \rightarrow D$ y $\psi : B \rightarrow D$, llamaremos morfismo de conos $f : \varphi \rightarrow \psi$ a todo morfismo $f : A \rightarrow B$ en C tal que, para todo vértice i , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \varphi_i \searrow & & \swarrow \psi_i \\ & D_i & \end{array}$$

Los datos de los conos y los morfismos de conos constituyen una categoría.

Definición B.3. Se llama límite de un diagrama D en una categoría C a un objeto final de la categoría de conos sobre un diagrama.

Recordatorio: Un objeto final en una categoría C cualquiera es un objeto $L \in C$ tal que para cualquier otro objeto $A \in C$, existe un único morfismo $f : A \rightarrow L$.

En este contexto, el límite de un diagrama D es un objeto final en la categoría de conos, es decir, un cono $\lambda : L \rightarrow D$, con cierto objeto L en C junto con una familia de morfismos

$$\lambda_i : L \rightarrow D_i$$

cumpliendo que, para cualquier otro cono

$$\{\varphi_i : A \rightarrow D_i\}_{i \in V},$$

existe un único morfismo de conos $\bar{\varphi} : A \rightarrow L$, tal que $\lambda_i \circ \bar{\varphi} = \varphi_i$. Normalmente nombramos a esta propiedad universal del límite.

El concepto dual de cono de un objeto A en un diagrama D recibe el poco eufónico nombre de cocono de un diagrama D en un objeto A . Se adjetivan los morfismos como coconos de manera obvia, obteniendo una categoría de coconos.

Definición B.4. Se llama colímite de un diagrama D en una categoría C a un objeto inicial de la categoría de coconos del diagrama D .

Recordatorio: En una categoría C , un objeto inicial es un objeto $I \in C$ que satisface que, para cualquier objeto $A \in C$, existe un único morfismo $f : I \rightarrow A$.

Un colímite, por tanto, es un objeto C junto con una familia de morfismos $\mu_i : D_i \rightarrow C$, cumpliendo que para toda arista $i \xrightarrow{\alpha} j$ en Γ , el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{D_\alpha} & D_j \\ & \searrow \mu_i & \downarrow \mu_j \\ & & C \end{array}$$

Y dado otro cocono de D en $A \in C$, es decir, una familia de morfismos $\{\psi_i : D_i \rightarrow A\}_{i \in V}$ compatible, existe un único $\bar{\psi} : C \rightarrow A$ tal que:

$$\bar{\psi} \circ \mu_i = \psi_i \quad \text{para todo } i.$$

Ejemplo B.5. 1. En un diagrama sin morfismos (es decir, un diagrama que solo consta de vértices sin flechas), el límite sobre dicho diagrama en cualquier categoría C coincide con el producto de los objetos involucrados, mientras que el colímite corresponde al coproducto.

Concretamente, si los vértices del diagrama están indexados por un conjunto I , entonces el diagrama en C consiste en una colección de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$, sin morfismos entre ellos. Gráficamente, esto puede representarse como:

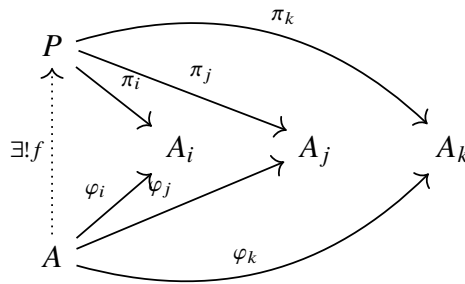
$$A_i \quad A_j \quad A_k \quad \dots$$

Un cono sobre esta familia no es más que un objeto $A \in C$ junto con una familia de morfismos $\{\varphi_i : A \rightarrow A_i\}_{i \in I}$, lo cual se ilustra:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow \varphi_i & \downarrow \varphi_j & \searrow \varphi_k & \\ A_i & & A_j & & A_k \end{array}$$

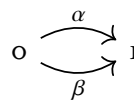
El límite del diagrama es, por tanto, otra familia de morfismos junto con un objeto P , $\{\pi_i : P \rightarrow A_i\}_{i \in I}$, tal que para cualquier otro cono (como el anterior) existe un único morfismo $f : A \rightarrow P$ tal que

$\pi_i \circ f = \varphi_i$, es decir el siguiente diagrama conmuta.

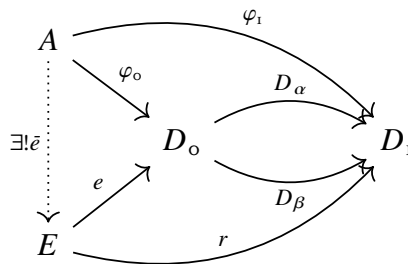


Observamos que el par $(P, \{\pi_i\}_{i \in I})$ es exactamente el producto de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$.

2. Un límite de un diagrama sobre el grafo



es precisamente un igualador; y un colímite, un coigualador. El siguiente diagrama conmutativo ilustra la construcción,

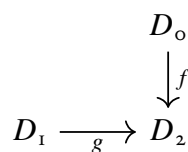


Tenemos que $(E, \{e, r\})$ y $(A, \{\varphi_0, \varphi_1\})$ son conos sobre el diagrama; el primero es el límite del diagrama. Observamos:

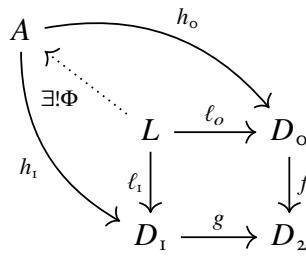
- $D_\alpha \circ \varphi_0 = \varphi_1 = D_\beta \circ \varphi_0$
- $D_\alpha \circ e = r = D_\beta \circ e$

Por último, $\varphi_0 = e \circ \bar{e}$, donde el \bar{e} es único. Luego, efectivamente, el par (E, e) es el igualador de D_α y D_β .

3. Un diagrama de la forma,



da lugar a un límite (si existe) de la forma $(L; \ell_0, \ell_1, \ell_2)$, de modo que $\ell_i : L \rightarrow D_i$ para $i = 0, 1, 2$ y cumpliendo, $f \circ \ell_0 = \ell_2 = g \circ \ell_1$, por tanto, podemos omitir ℓ_2 . Un tal límite (L, ℓ_0, ℓ_1) da lugar a un pullback, en efecto si (A, h_0, h_1) es otro cono sobre el diagrama, tenemos la siguiente construcción,



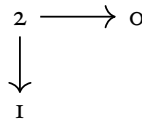
donde podemos omitir tanto h_2 como ℓ_2 , por el razonamiento previo.

Por tanto, el límite del citado diagrama es precisamente un pullback. Y viceversa, un pullback como el anterior nos dice que

$$(L, \ell_0, \ell_1, f \circ \ell_0 = g \circ \ell_1)$$

es un límite del diagrama.

Dualmente, tomando un diagrama sobre el grafo,



da lugar a un colímite (cuando existe) que se asimila a un pushout.

Ejemplo B.6. Una categoría C se llama completa o que tiene límites si todo diagrama D en C tiene límites.

De modo menos exigente, se dice que una categoría tiene productos (resp. igualadores o pullbacks) si toda familia de objetos tiene productos (resp. todo par de morfismos $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ tiene igualadores, o todo diagrama de la forma adecuada puede ampliarse hasta formar un pullback).

Dualmente, se dice cocompleta si todo diagrama tiene colímites.

Teorema B.7. *Una categoría C que tiene productos e igualadores es completa.*

Demostración. Sea Γ un grafo con conjunto de vértices V y conjunto de aristas A . Si $\alpha \in A$ se representa así:

$$o(\alpha) \xrightarrow{\alpha} b(\alpha)$$

Sea D un diagrama sobre Γ , se definen los productos:

$$P = \prod_{i \in V} D_i,$$

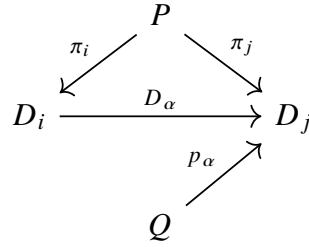
cuyas proyecciones asociadas se denotan $\pi_i : P \rightarrow D_i$. Análogamente, definimos para los blancos de las aristas el producto

$$Q = \prod_{\alpha \in A} D_{b(\alpha)}$$

con proyecciones $p_\alpha : Q \rightarrow D_{b(\alpha)}$. Para cada $\alpha \in A$ se considera el morfismo

$$\pi_{b(\alpha)} : P \rightarrow D_{b(\alpha)}.$$

Ilustramos la construcción en el siguiente diagrama,



Tenemos así una familia de morfismos $\{\pi_{b(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$ que, por la propiedad universal del producto, definen un morfismo $f : P \rightarrow Q$ tal que:

$$p_\alpha \circ f = \pi_{b(\alpha)} \quad \forall \alpha \in A.$$

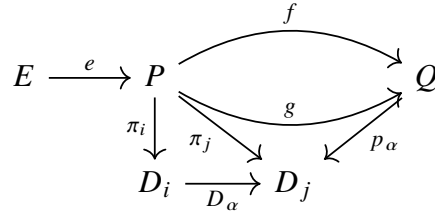
Definimos ahora para cada $\alpha \in A$ el morfismo

$$D_\alpha \circ \pi_{b(\alpha)} : P \rightarrow D_{b(\alpha)},$$

obteniendo una familia de morfismos $\{D_\alpha \circ \pi_{b(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$, y de nuevo por la propiedad del producto Q , se tiene un morfismo $g : P \rightarrow Q$ cumpliendo:

$$p_\alpha \circ g = D_\alpha \circ \pi_{b(\alpha)} \quad \forall \alpha \in A.$$

Sea $e : L \rightarrow P$ el igualador de f y g , definimos para cada $i \in V$ el morfismo, $\lambda_i := \pi_i \circ e : L \rightarrow D_i$. El siguiente diagrama recoge toda la información.



Entonces $\lambda = \{\lambda_i\}_{i \in V}$ es un cono límite. En efecto, tomando la arista,

$$i = o(\alpha) \xrightarrow{\alpha} b(\alpha) = j$$

Observamos apoyándonos en el diagrama anterior, $p_\alpha \circ f = \pi_j$, $p_\alpha \circ g = D_\alpha \circ \pi_i$ y en consecuencia,

$$D_\alpha \circ \lambda_i = D_\alpha \circ \pi_i \circ e = p_\alpha \circ g \circ e = p_\alpha \circ f \circ e = \pi_j \circ e = \lambda_j$$

Es decir, λ es un cono del diagrama D . Consideramos ahora un cono cualquiera $\zeta = (\zeta_i)_{i \in V}$ con $\zeta_i : C \rightarrow D_i$. Por definición de producto, existe un único morfismo $\psi : C \rightarrow P$ tal que:

$$\pi_i \circ \psi = \zeta_i \quad \forall i \in V \quad (\text{propiedad universal})$$

Por otro lado, tenemos que para todo $\alpha \in A$:

$$p_\alpha \circ f \circ \psi = \pi_j \circ \psi = \zeta_j = D_\alpha \circ \zeta_i = D_\alpha \circ \pi_i \circ \psi = p_\alpha \circ g \circ \psi$$

Con lo que $f \circ \psi = g \circ \psi$, y por la propiedad universal del igualador, existe un único $\bar{\zeta} : C \rightarrow L$ cumpliendo:

$$\psi = e \circ \bar{\zeta}$$

Luego, para todo $i \in V$, se tiene:

$$\lambda_i \circ \bar{\zeta} = \pi_i \circ e \circ \bar{\zeta} = \pi_i \circ \psi = \zeta_i$$

□

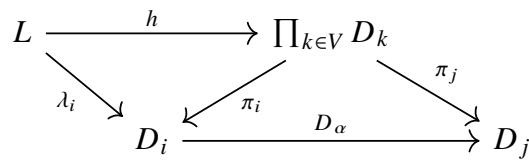
Por ejemplo, por lo visto en ejemplos anteriores, unido a este teorema, las categorías de **Con**, **Top**, **Grp** y **A-Mod** son completas y cocompletas.

En virtud del *teorema de Tychonoff*, la categoría de **Comp**, de espacios compactos Hausdorff, es completa. También es cocompleta: por ejemplo, el coproducto de una familia de tales espacios es la *compactificación de Stone-Čech* de la unión disjunta.

Veamos ahora una descripción del límite y colímite en la categoría de A -módulos. Sea D un diagrama en **A-Mod** sobre un grafo $\Gamma = (V, A)$. Escribimos $P = \prod_{i \in V} D_i$ y consideramos las proyecciones $\pi_i : P \rightarrow D_i$. Se define

$$L = \{(x_i)_{i \in V} \in P \mid D_\alpha(x_i) = x_j \text{ para toda } \alpha : i \rightarrow j \in A\}.$$

Observamos que L es un submódulo de P . La familia $\lambda_i : L \rightarrow D_i$, donde λ_i es la restricción de π_i a L , es un cono límite,



donde h es la inclusión.

Primero veamos que $(\lambda_i = \pi_i \circ h)_{i \in V}$ es un cono de D . Para toda arista $\alpha : i \rightarrow j$ en A , se cumple,

$$D_\alpha \circ \lambda_i = D_\alpha \circ \pi_i \circ h = \pi_j \circ h = \lambda_j.$$

Además verifican la propiedad universal del límite. Sea $(\varphi_i : M \rightarrow D_i)_{i \in V}$ un cono. Por la propiedad universal del producto existe

$$\bar{\Phi} : M \rightarrow \prod_{k \in V} D_k \quad \text{tal que} \quad \pi_i \circ \bar{\Phi} = \varphi_i \quad \text{para todo } i \in V.$$

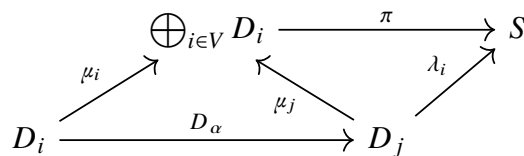
Definimos $\Phi : M \rightarrow L$ como $\Phi = \bar{\Phi} \circ h$, es decir, Φ es la restricción de $\bar{\Phi}$ a L . Observamos que $\lambda_i \circ \Phi = \lambda_i \circ \bar{\Phi} \circ h$, y como $\lambda_i = \pi_i \circ h$, obtenemos:

$$\lambda_i \circ \Phi = \pi_i \circ h \circ \bar{\Phi} \circ h = \pi_i \circ \bar{\Phi} = \varphi_i.$$

Sean ahora $S = \bigoplus_{i \in V} D_i$ y $\mu_i : D_i \rightarrow S$ las inclusiones canónicas. Se define el submódulo:

$$K = \langle \mu_j(D_\alpha(x)) - \mu_i(x) \mid x \in D_i, \alpha : i \rightarrow j \text{ en } A \rangle$$

y el cociente $C = S/K$. Si $\pi : S \rightarrow S/K$ es la proyección canónica y $\lambda_i = \pi \circ \mu_i$, entonces $(\lambda_i : D_i \rightarrow C)_{i \in V}$ es un colímite de D .



En efecto que $\{\lambda_i\}_{i \in V}$ es un cocono. se ve claramente,

$$\lambda_j \circ D_\alpha = \pi \circ \mu_j \circ D_\alpha = \pi \circ \mu_i = \lambda_i.$$

Sea $\{\varphi_i : D_i \rightarrow X\}_{i \in V}$ un cocono del diagrama. Por la propiedad universal de la suma directa, existe un único morfismo $\Psi : S \rightarrow X$ cumpliendo:

$$\Psi \circ \mu_i = \varphi_i \quad \text{para todo } i \in V.$$

Observamos que Ψ es nulo en K . Para todo generador $\mu_j(D_\alpha(x)) - \mu_i(x) \in K$, se cumple:

$$\begin{aligned} \Psi(\mu_j(D_\alpha(x)) - \mu_i(x)) &= \Psi \circ \mu_j(D_\alpha(x)) - \Psi \circ \mu_i(x) \\ &= \varphi_j(D_\alpha(x)) - \varphi_i(x) = 0 \end{aligned}$$

porque $(\varphi_i)_{i \in V}$ es un cocono. Como Ψ se anula en K , induce un único morfismo

$$\bar{\Psi} : S/K \rightarrow X \quad \text{tal que} \quad \bar{\Psi} \circ \pi = \Psi$$

por el primer teorema de isomorfía en módulos. Concluimos, para todo $i \in V$:

$$\bar{\Psi} \circ \lambda_i = \bar{\Psi} \circ \pi \circ \mu_i = \Psi \circ \mu_i = \varphi_i$$

Finalizamos la sección con dos límites de diagramas muy importantes que tienen la peculiaridad de ser sobre diagramas infinitos.

Comenzamos definiendo el concepto de conjunto dirigido, que es un conjunto I junto con una relación binaria \leq que satisface las siguientes propiedades:

- 1) Reflexividad: Para todo $i \in I$ se cumple $i \leq i$.
- 2) Transitividad: Para todo $i, j, k \in I$, si $i \leq j$ y $j \leq k$, entonces $i \leq k$.
- 3) Dirección: Para todo par $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

El conjunto dirigido se puede ver como un grafo Γ , donde los vértices del grafo son los elementos de I . Hay una arista $i \xrightarrow{\alpha} j$ si $i \leq j$. No obstante, supongamos que $i \leq k$, entonces la arista $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ no existe y tenemos simplemente $i \rightarrow k$.

Dependiendo de la dirección elegida, diremos que es un conjunto dirigido hacia arriba (el antes mencionado), o conjunto dirigido hacia abajo, donde la condición 3) se reemplaza por:

- 3') Para todo par de elementos $i, j \in I$, existe un $k \in I$ tal que $k \leq i$ y $k \leq j$. (También podemos escribir $i \geq k, j \geq k$).

Algunos ejemplos sencillos:

- (\mathbb{N}, \leq) es un conjunto dirigido hacia arriba, que además posee un ínfimo respecto a \leq . Obtenemos un grafo:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \longrightarrow \cdots$$

Análogamente, (\mathbb{N}, \geq) , es un conjunto dirigido hacia abajo, con grafo asociado:

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow \cdots \leftarrow m \leftarrow \cdots$$

que además posee un elemento maximal con respecto a la propiedad 3') el 0.

- Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ es un conjunto dirigido con respecto a \subseteq (o \supseteq) si se cumple:
Para cualesquiera A_i y A_j , existe A_k tal que $A_i \subseteq A_k$ y $A_j \subseteq A_k$; es decir,

$$A_i \cup A_j \subseteq A_k.$$

Lo cual define un conjunto dirigido hacia arriba. Análogamente, si $A_i \supseteq A_k$ y $A_j \supseteq A_k$, es decir,

$$A_i \cap A_j \supseteq A_k.$$

Se define un conjunto dirigido hacia abajo, que si además $\emptyset \in \{A_i\}_{i \in I}$, entonces es el elemento maximal respecto a 3').

Sobre un conjunto dirigido, o más bien sobre el grafo equivalente, se define un diagrama llamado sistema dirigido, que es una familia de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$ junto con una familia de morfismos $f_{ij} : A_i \rightarrow A_j$, uno para cada $i \leq j$, cumpliendo:

1. $f_{ii} = \text{I}_{A_i}$,
2. $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$.

(El conjunto de índices I y \leq son el conjunto dirigido.)

Definición B.8. Dado un sistema dirigido $\langle D_i, D_{ij} \rangle_{i \leq j \in I}$, llamamos límite directo o límite inductivo y lo representamos

$$\varinjlim D_i$$

al colímite del diagrama que define el sistema dirigido.

Análogamente se define el sistema inverso, tomando un conjunto dirigido, en este caso hacia abajo, y con su grafo equivalente. Tenemos una familia de objetos $\{B_i\}_{i \in I}$ y una familia de morfismos $f_{ij} : B_j \rightarrow B_i$ (obsérvese el orden) con las propiedades:

1. $f_{ii} = \text{I}_{B_i}$,
2. $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ para todo $i \leq j \leq k$.

Se define así el diagrama $\rangle B_i, B_{ij} \langle_{i \leq j \in I}$ llamado sistema inverso, donde el par (I, \leq) es un conjunto dirigido hacia abajo.

Definición B.9 (Dual de B.8). Sea $\rangle B_i, B_{ij} \langle_{i \leq j \in I}$ un sistema inverso. Llamamos límite inverso o límite proyectivo al límite del diagrama dado por $\rangle B_i, B_{ij} \langle_{i \leq j \in I}$. Lo denotamos como

$$\varprojlim B_i.$$

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo B.10. En **Ab** consideramos la familia $\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde consideramos (\mathbb{N}, \leq) como conjunto dirigido hacia abajo.

La familia anterior, unida a los morfismos

$$\pi_{ij} : \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, \quad x \text{ mód } p^j \mapsto x \text{ mód } p^i,$$

satisface:

1. $\pi_{ii} = \text{Id}_{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}}$,
2. Para $i \leq j \leq k$ se cumple $\pi_{ki} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$.

Escribimos de forma visual el diagrama:

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

El límite proyectivo del diagrama es

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} =: \mathbf{Z}_p,$$

el conjunto de los enteros p -ádicos. De forma intuitiva, \mathbf{Z}_p consta de todas las secuencias de enteros (m_1, m_2, \dots) que cumplen:

$$m_j \equiv m_i \pmod{p^i} \quad \text{para todo } i \leq j.$$

Cada elemento $(m_1, m_2, \dots) \in \mathbf{Z}_p$ verifica que $m_i \equiv m_j \pmod{p^i}$ para $i < j$. Por ejemplo, para cualquier p , la secuencia $(1, 1, 1, 1, \dots)$ representa el número 1, la secuencia $(0, p, p, p, \dots)$ representa el número p . Los morfismos que definen el límite del diagrama anterior son los canónicos:

$$\pi_i : \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, \quad (m_1, m_2, \dots) \mapsto m_i.$$

Y se cumple la compatibilidad, $\forall i \leq j, \pi_{ij} \circ \pi_j = \pi_i$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{Z}_p & & \\ & \swarrow \pi_j & & \searrow \pi_i & \\ \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi_{ij}} & \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} & \longrightarrow \end{array}$$

En **An**, se considera el sistema inverso dado por los anillos:

$$\dots \longrightarrow k[x]/(x^3) \longrightarrow k[x]/(x^2) \longrightarrow k[x]/(x),$$

cuyas aplicaciones son las proyecciones naturales. El límite proyectivo de este sistema es el anillo de las series formales:

$$\varprojlim k[x]/(x^n) = k[[x]].$$

Sea X un espacio topológico y $x \in X$.

En **Top**, sea X un espacio topológico y $x \in X$. Sea \mathcal{I} la familia de entornos de x , ordenada por inclusión. Consideramos el siguiente sistema directo en $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$, donde los morfismos están dados por las inclusiones.

$$\begin{array}{ccccccc} U_1 & \hookrightarrow & U_1 \cap U_2 & \hookrightarrow & U_1 \cap U_2 \cap U_3 & \hookrightarrow & \dots \\ & \nearrow & & \nearrow & & & \\ & U_2 & & U_3 & & & \end{array}$$

El límite inductivo de este sistema es el punto común a todos los entornos:

$$\varinjlim U_i = \{x\}.$$

B.2. Categorías de diagramas (Yoneda)

Recordar que si C es una categoría cualquiera, el (bifunctor 1.2)

$$\text{Hom}_C : C^{\circ} \times C \rightarrow \mathbf{Con}$$

es contravariante en la primera variable y covariante en la segunda; asocia a cada par de objetos (A, B) en C el conjunto $\text{Hom}_C(A, B)$ de todos los morfismos de A en B , y a cada par de morfismos (f, g) con $f : A' \rightarrow A$ y $g : B \rightarrow B'$ la aplicación:

$$\text{Hom}_C(f, g) : \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_C(A', B'); \quad X \mapsto g \circ X \circ f.$$

En esta sección interpretaremos $\text{Hom}_C(-, -)$ como un funtor doblemente covariante, es decir,

$$\text{Hom}_C : C^{\circ} \times C \rightarrow \mathbf{Con}.$$

En particular, fijando una de las variables, todo objeto C de C define un funtor $\text{Hom}_C(-, C) : C^{\circ} \rightarrow \mathbf{Con}$, que llamaremos functor de puntos. Dado un objeto A de C , el funtor le asocia el conjunto $\text{Hom}_C(A, C)$. A los morfismos en dicho conjunto los llamamos puntos de C parametrizados por A y a cada morfismo $f : B \rightarrow A$ en C° (es decir, $f : A \rightarrow B$ en C), el funtor le asocia la aplicación.

$$\text{Hom}_C(f, C) : \text{Hom}_C(A, C) \rightarrow \text{Hom}_C(B, C) \quad x \mapsto x \circ f.$$

El nombre funtor de puntos proviene de un ejemplo como el siguiente:

Dada la categoría de espacios afines $K\text{-Af}$, tomando el espacio afín $X = \mathbb{A}^n$ y $T = \mathbb{A}^1$,

$$\text{Hom}_{K\text{-Af}}(T, X) = \text{Hom}_{K\text{-Af}}(\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^n) = [\text{rectas de } \mathbb{A}^n].$$

Tomando unas ecuaciones paramétricas de las rectas, lo podemos interpretar como:

$$[\text{puntos de } \mathbb{A}^n \text{ parametrizados por } \mathbb{A}^1].$$

Otro ejemplo, en \mathbf{Dif} , tomamos M una variedad diferenciable e $Y = \mathbb{R}$. Entonces,

$$\text{Hom}_{\mathbf{Dif}}(\mathbb{R}, M) = [\text{curvas parametrizadas por } \mathbb{R}].$$

Sea ahora $K\text{-vect}$ la categoría de espacios vectoriales. Dado un espacio vectorial E y el espacio vectorial K ,

$$\text{Hom}_{K\text{-vect}}(K, E) = [\text{rectas de } E],$$

que se corresponde con el espacio proyectivo sobre el espacio vectorial E . Análogamente, tomando K^m , tenemos:

$$\text{Gr}(m, E) = \text{Hom}_{K\text{-vect}}(K^m, E),$$

es decir, las *Grassmannianas* de cierto espacio vectorial E no son más que calcular el funtor de puntos del espacio E sobre el esqueleto de la categoría $K\text{-vect}$.

Veamos otros ejemplos de la aplicación de este funtor:

1. Tomando la categoría **Con** de los conjuntos, dado un objeto cualquiera X y el objeto final $\{a\}$, tenemos que:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Con}}(\{a\}, X) = [\text{elementos de } X],$$

pues dada una función $f : \{a\} \rightarrow X$, ésta está completamente determinada por $f(a) \in X$. Esto nos da una correspondencia biunívoca:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Con}}(\{a\}, X) \leftrightarrow X, \quad f \mapsto f(a), \quad b \mapsto (f : f(a) = b).$$

2. Tomando la categoría de los anillos **An**, dado un anillo A y el anillo trivial $\{0\}$ (objeto final de **An**), se tiene:

$$\text{Hom}_{\mathbf{An}}(\{0\}, A), \text{ solo consta de un elemento,}$$

pues los morfismos de anillos solo pueden llevar $0 \mapsto 0$.

3. Dado el espacio topológico X y el objeto final de **Top**, el espacio topológico trivial $\{p\}$, tenemos:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\{p\}, X) = [\text{elementos de } X].$$

Esta construcción de aplicar el funtor de puntos de un objeto X en una categoría C a cierto objeto final de la misma nos da cierta intuición sobre la rama en la que se enmarca la categoría. Es decir, sea C una categoría, $X \in \text{Ob}(C)$ y T el objeto final.

- Si $|\text{Hom}_C(T, X)| = 1$, hablamos de una categoría propia de álgebra, como **Grp**, **An**, **K -vect**.
- Si $|\text{Hom}_C(T, X)| = |X|$, estamos ante una categoría más geométrica, como **K -Af**, **Dif**, **Top**, **K -Proy**.

Como último ejemplo, observamos que las propiedades universales no son más que calcular el funtor de puntos sobre el objeto. Por ejemplo, sea C una categoría, $\{X_i\}_{i \in I}$ una colección de objetos. Recordamos que la propiedad universal del producto,

$$\left\{ \prod_{i \in I} X_i, (\pi_i)_{i \in I} \right\} \text{ es que, si } f_i : Y \rightarrow X_i \text{ es una familia de morfismos en } C,$$

existe un único morfismo $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ tal que $f_i = \pi_i \circ f$ para todo $i \in I$, es decir,

$$\text{Hom}_C\left(-, \prod_{i \in I} X_i\right)(Y) = \text{Hom}_C\left(Y, \prod_{i \in I} X_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Hom}_C(Y, X_i).$$

Lema de Yoneda

Dado un morfismo $f : C \rightarrow D$, define una transformación natural de $\text{Hom}_C(-, C)$ a $\text{Hom}_C(-, D)$; es más cuando la categoría es pequeña y si definimos **Fun**(C^0 , **Con**) como la categoría de objetos $\text{Hom}_C(-, C)$ y morfismos las transformaciones naturales $\Phi : \text{Hom}_C(-, C) \rightarrow \text{Hom}_C(-, D)$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema B.11 (Lema de Yoneda). *Dados dos objetos C, D en una categoría C , hay una correspondencia biunívoca entre los morfismos $f : C \rightarrow D$ y las transformaciones naturales entre funtores $\text{Hom}_C(-, C)$ y $\text{Hom}_C(-, D)$, es decir:*

$$\text{Hom}_C(C, D) = \text{Hom}_{\mathbf{Fun}(C^0, \mathbf{Con})}(\text{Hom}_C(-, C), \text{Hom}_C(-, D)).$$

Demostración. Dada una transformación natural Φ entre los funtores $\text{Hom}_C(-, C)$ y $\text{Hom}_C(-, D)$, definimos el morfismo

$$f_\Phi := \Phi_C(\text{I}_C) \in \text{Hom}_C(C, D),$$

observamos que para cualquier objeto A y morfismo $g : A \rightarrow C$, se da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(C, C) & \xrightarrow{\text{Hom}(g, C)} & \text{Hom}_C(A, C) \\ \Phi_C \downarrow & & \downarrow \Phi_A \\ \text{Hom}_C(C, D) & \xrightarrow{\text{Hom}(g, D)} & \text{Hom}_C(A, D) \end{array}$$

$$\Phi_A(g) = \Phi_A \circ \text{Hom}(g, C)(\text{I}_C) = \text{Hom}(g, D)(\Phi_C(\text{I}_C)) = f_\Phi \circ g$$

Por tanto, Φ está completamente determinada por f_Φ .

Sea ahora $f : C \rightarrow D$, definimos la transformación natural Φ^f como:

$$(\Phi^f)_A : \text{Hom}_C(A, C) \rightarrow \text{Hom}_C(A, D), \quad g \mapsto f \circ g$$

Observamos que es natural, pues para todo $h : A \rightarrow B$ en C :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(B, C) & \xrightarrow{\text{Hom}(h, C)} & \text{Hom}_C(A, C) \\ (\Phi^f)_B \downarrow & & \downarrow (\Phi^f)_A \\ \text{Hom}_C(B, D) & \xrightarrow{\text{Hom}(h, D)} & \text{Hom}_C(A, D) \end{array}$$

Dado $x \in \text{Hom}_C(B, C)$, se verifica:

$$\begin{aligned} (\Phi^f)_A \circ \text{Hom}(h, C)(x) &= (\Phi^f)_A(x \circ h) = f \circ x \circ h, \quad y \\ \text{Hom}(h, D) \circ (\Phi^f)_B(x) &= \text{Hom}(h, D)(f \circ x) = f \circ x \circ h. \end{aligned}$$

Falta ver que ir y volver es la identidad.

Si $f \mapsto \Phi^f \mapsto f_{\Phi^f}$, entonces:

$$f_{\Phi^f} = \Phi^f_C(\text{I}_C) = f \circ \text{I}_C = f.$$

Si $\phi \mapsto f_\phi \mapsto \Phi^{f_\phi}$, entonces:

$$(\Phi^{f_\phi})_A(g) = f_\phi \circ g = \phi_C(\text{I}_C) \circ g = \phi_A(g)$$

□

Denotamos a partir de ahora al funtor $\text{Hom}_C(-, C)$ por yC , y a la transformación natural inducida por $f : C \rightarrow D$ por $yf : \text{Hom}_C(-, C) \rightarrow \text{Hom}_C(-, D)$, que en cada objeto A actúa:

$$(yf)_A : \text{Hom}_C(A, C) \rightarrow \text{Hom}_C(A, D), \quad x \mapsto f \circ x$$

Como vimos en la demostración, esto efectivamente define una transformación natural. A la doble asignación $C \mapsto yC$, $f \mapsto yf$ se le llama primera inmersión de Yoneda.

Cuando C es una categoría pequeña, permite definir un funtor

$$\mathcal{Y} : C \rightarrow \text{Fun}(C^\circ, \mathbf{Con})$$

Del mismo modo, para cada objeto A en C° se define el funtor $\text{Hom}_C(A, -) : C \rightarrow \mathbf{Con}$, con que:

- Para cada objeto C , le asociamos $\text{Hom}_C(A, C)$
- Para cada morfismo $f : C \rightarrow D$ en C , tenemos:

$$\text{Hom}(A, f) : \text{Hom}_C(A, C) \rightarrow \text{Hom}_C(A, D), \quad x \mapsto f \circ x$$

Cada morfismo $g : A \rightarrow B$ en C° (es decir, $g : B \rightarrow A$ en C) induce una transformación natural entre

$$\text{Hom}_C(A, -) \longrightarrow \text{Hom}_C(B, -)$$

donde para cada objeto C en C , la transformación natural asocia

$$\text{Hom}_C(A, C) \longrightarrow \text{Hom}_C(B, C), \quad x \mapsto x \circ g$$

A la doble asignación $y'A = \text{Hom}_C(A, -)$ y $y'g$ definida como anteriormente, se le llama la segunda inmersión de Yoneda, que si C es pequeña se tiene el funtor

$$\mathcal{Y}' : C^\circ \longrightarrow \mathbf{Fun}(C, \mathbf{Con})$$

No es trivial, aunque sí rutinario, ver que efectivamente tanto y como y' se comportan bien con identidades y la composición. Veámoslo para el segundo caso.

- 1) Dado $\text{id}_A : A \rightarrow A$, tenemos la transformación natural $y'\text{id}_A$. Dado un objeto arbitrario de C° , B , y un morfismo $x \in \text{Hom}_C(A, B)$,

$$(y'\text{id}_A)_B(x) = x \circ \text{id}_A = x,$$

es decir, $(y'\text{id}_A)_B$ es la identidad en $\text{Hom}_C(A, B)$. Análogamente, la transformación natural idéntica $\text{id}_{y'A}$ fijado el objeto B ,

$$(\text{id}_{y'A})_B = \text{id}_{\text{Hom}_C(A, B)} = (y'\text{id}_A)_B$$

- 2) Dados $g : A \rightarrow B$ y $h : B \rightarrow C$ en C° , debemos mostrar que $y'(h \circ g) = y'(h) \circ y'(g)$ (notar que en C° , $h \circ g$ se corresponde con $g \circ h$ en C).

Dado un objeto D en C° , tomamos $x \in \text{Hom}_C(A, D)$,

$$y'(h \circ g)_D(x) = x \circ g \circ h = (x \circ g) \circ h = (y'(h)_D \circ y'(g)_D)(x),$$

y como D es arbitrario, se concluye $y'(h \circ g) = y'(h) \circ y'(g)$.

Todo lo anterior queda resumido en el siguiente diagrama conmutativo en **Con**:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(A, C) & \xrightarrow{y'g_C} & \text{Hom}_C(B, C) \\ yf_A \downarrow & & \downarrow yf_B \\ \text{Hom}_C(A, D) & \xrightarrow{y'g_D} & \text{Hom}_C(B, D) \end{array}$$

$$y'_g \circ yf_A(x) = y'_g(x \circ f) = g \circ x \circ f = yf_B(g \circ x) = yf_B \circ y'_g(x)$$

donde $x : A \rightarrow C$ en C , $g : A \rightarrow B$ en C^0 , $yf : C \rightarrow D$ en C .

Teorema B.12 (Lema de Yoneda General). Sean C una categoría cualquiera, A un objeto de C , y $F : C \rightarrow \mathbf{Con}$, entonces:

1. Toda transformación natural η del funtor $y'A = \text{Hom}_C(A, -)$ en el funtor F está determinada unívocamente por el elemento $\eta_A(\mathbf{1}_A) \in F(A)$.
2. Para todo elemento $x \in F(A)$ existe una transformación natural

$$\eta : y'A = \text{Hom}_C(A, -) \rightarrow F$$

tal que $\eta_A(\mathbf{1}_A) = x$.

Demostración. 1) El objetivo es escribir para todo objeto B en C la aplicación

$$\eta_B \text{ a partir de los datos } F \text{ y } \eta_A(\mathbf{1}_A) \in F(A).$$

Veamos cómo se halla $\eta_B(f)$ con $f : A \rightarrow B$ cualquiera en $\text{Hom}_C(A, B)$. Para ello basta considerar el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(A, A) & \xrightarrow{\text{Hom}(A, f)} & \text{Hom}_C(A, B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \end{array} \quad (\text{B.1})$$

con lo que

$$\eta_B(f) := \eta_B(\text{Hom}(A, f)(\mathbf{1}_A)) = F(f)(\eta_A(\mathbf{1}_A)),$$

pues $\text{Hom}(A, f)(\mathbf{1}_A) = f \circ \mathbf{1}_A = f$, que es la descripción buscada.

2) Sea ahora $x \in F(A)$. Vamos a definir una transformación natural $\eta : \text{Hom}_C(A, -) \rightarrow F$, para ello debemos describir la aplicación $\eta_B : \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow F(B)$ para todo objeto B en C y luego comprobar que efectivamente es una transformación natural.

Sea entonces, $f \in \text{Hom}_C(A, B)$, se define $\eta_B(f) := F(f)(x)$. Si $g : B \rightarrow C$ es un morfismo en C , se considera el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(A, B) & \xrightarrow{\text{Hom}(A, g)} & \text{Hom}_C(A, C) \\ \eta_B \downarrow & & \downarrow \eta_C \\ F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) \end{array}$$

Se tiene para todo $f \in \text{Hom}_C(A, B)$:

$$\eta_C(\text{Hom}(A, g)(f)) = \eta_C(g \circ f) = F(g \circ f)(x) = F(g)(F(f)(x)) = F(g)(\eta_B(f)),$$

es decir, el diagrama es conmutativo. En definitiva, los morfismos η_B definen una transformación natural de funtores. Observa además que η_A determina al elemento $x = \eta_A(\mathbf{1}_A) \in F(A)$, que a su vez permite reconstruir η . □

Si la categoría C es pequeña, la totalidad de las transformaciones naturales $\eta : \text{Hom}_C(A, -) \rightarrow F$ es un conjunto, con lo que el lema de Yoneda permite asegurar que en este caso la asignación $\eta \rightarrow \eta_A(\mathbf{1}_A)$ es una biyección entre este conjunto de transformaciones naturales y el conjunto $F(A)$:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Fun}(C, \mathbf{Con})}(\text{Hom}_C(A, -), F) = F(A).$$

Suponer ahora que tenemos la transformación natural η de $y'A = \text{Hom}_C(A, -)$ en $y'B = \text{Hom}_C(B, -)$, esta transformación natural determina $\eta_A(\mathbf{1}_A) = x$ con $x : B \rightarrow A$. Como morfismo que es, x determina la transformación natural $y'x = \text{Hom}_C(x, -) : y'A \rightarrow y'B$. Evidentemente

$$(y'x)_A(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A \circ x = x \in y'B(A) = \text{Hom}_C(B, A),$$

con lo que η y $y'x$ determinan el mismo $x \in y'B(A)$. Por el lema de Yoneda, $\eta = y'x$. Tenemos así que toda transformación natural entre los funtores $\text{Hom}_C(A, -)$ y $\text{Hom}_C(B, -)$ es de la forma $\eta = y'f$ para un único $f : B \rightarrow A$ en $\text{Hom}_C(B, A)$, o si se prefiere un único $f : A \rightarrow B$ en $\text{Hom}_C(A, B)$.

Suponer ahora que A y B son objetos de C tales que $y'A = y'B$, entonces $\mathbf{1}_A \in \text{Hom}_C(A, A) = y'A(A) = y'B(A) = \text{Hom}_C(B, A)$, es decir, $A = B$. Esto justifica que la doble asignación

$$A \mapsto y'A \quad f \mapsto y'f$$

reciba el nombre de inmersión. Del mismo modo queda justificado el nombre de inmersión para la asignación

$$C \mapsto yC \quad f \mapsto yf.$$

Observación 15. El Lema de Yoneda clásico B.11 es un caso particular del Lema de Yoneda general B.12, aplicado al functor $F := \text{Hom}_C(-, D)$.

Corolario B.13 (Principio de Yoneda). Dados dos objetos A y B en una categoría C , entonces A y B son isomorfos si y solo si $y'A$ y $y'B$ son funtores naturalmente isomorfos (lo mismo con yA e yB).

Demostración. La demostración no es más que darle vueltas a la misma idea. Supongamos que A es isomorfo a B , en tal caso existe un isomorfismo $f : A \rightarrow B$ con inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$. Tomamos la transformación natural $y'f^{-1} : y'A \rightarrow y'B$,

$$(y'f^{-1})_C : \text{Hom}_C(A, C) \rightarrow \text{Hom}_C(B, C), \quad x \mapsto x \circ f^{-1}$$

y su inversa $y'f : y'B \rightarrow y'A$,

$$(y'f)_C : \text{Hom}_C(B, C) \rightarrow \text{Hom}_C(A, C), \quad x \mapsto x \circ f$$

Observamos que son inversas. Dado cualquier $g : A \rightarrow A$,

$$(y'f)_C((y'f^{-1})_C(g)) = (y'f)_C(g \circ f^{-1}) = g \circ f^{-1} \circ f = g \circ \mathbf{1}_A = g$$

análogamente, dado $h : B \rightarrow C$,

$$(y'f^{-1})_C((y'f)_C(h)) = (y'f)_C(h \circ f) = h \circ f \circ f^{-1} = h \circ \mathbf{1}_B = h$$

Como C es arbitrario, entonces $y'ff^{-1}$ y $y'f$ son inversas y concluimos que $\text{Hom}_C(A, -)$ y $\text{Hom}_C(B, -)$ son isomorfos como funtores.

Recíprocamente, supongamos que existe un isomorfismo natural $\eta : y'A \rightarrow y'B$ con inversa $\xi : y'B \rightarrow y'A$. Por el lema de Yoneda, η está determinada por:

$$x = \eta_A(\mathbf{1}_A) \in \text{Hom}_C(B, A)$$

Análogamente, ξ está determinada por

$$z = \xi_B(\mathbf{1}_B) \in \text{Hom}_C(A, B)$$

Tomando $\xi_A \circ \eta_A : \text{Hom}_C(A, A) \rightarrow \text{Hom}_C(A, A)$, dado que $\xi \circ \eta \approx \mathbf{1}_{y'A}$ (por hipótesis), se tiene:

$$(\xi \circ \eta)_A(\mathbf{1}_A) = \xi_A(\eta_A(\mathbf{1}_A)) = \xi_A(x) = x \circ z = \mathbf{1}_A$$

donde para la última igualdad hemos utilizado que y' es una inmersión, es decir se cumple $\xi = y'z$. Análogamente se demuestra que $\eta_B \circ \xi_B(\mathbf{1}_B) = z \circ x = \mathbf{1}_B$, y por lo tanto $z \circ x = \mathbf{1}_B$ y $x \circ z = \mathbf{1}_A$, luego $A \cong B$. \square

Si C es una categoría pequeña, los funtores de C en **Con** y sus transformaciones naturales constituyen una categoría en la que \mathcal{Y}' es un funtor que es fiel, pleno e inyectivo entre objetos. Lo mismo ocurre con \mathcal{Y} ; en este último caso se puede “sumergir” en la categoría **Fun**(C° , **Con**), que es una categoría completa.

Observación: La inmersión de Yoneda refina la inmersión $R : C \rightarrow \mathbf{Con}$ descrita en la sección 1.4. La categoría **Con** destino del funtor R , se sustituye por una categoría más estructurada como es **Fun**(C° , **Con**).

Terminamos este párrafo con un ejemplo clásico. Recordar que un monoide (M, \cdot) se puede interpretar como una categoría \mathcal{M} formada por un solo objeto $*$, de modo que $\text{hom}_{\mathcal{M}}(*, *) = M$, la composición de morfismos en \mathcal{M} es la operación binaria \cdot , y la identidad $\mathbf{1}$ es la unidad del monoide. La categoría opuesta \mathcal{M}° viene descrita por el *monoide opuesto*¹. Sea \mathcal{Y} la inmersión de Yoneda:

$$\mathcal{Y} : \mathcal{M} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{M}^\circ, \mathbf{Con}).$$

El único objeto $*$ de \mathcal{M} define el único funtor imagen por y , a saber $y_* = \text{hom}_{\mathcal{M}}(-, *)$, de modo que y transforma $*$ en el conjunto $M = \text{hom}_{\mathcal{M}}(*, *)$ y un morfismo $g : * \rightarrow *$ en \mathcal{M} en una aplicación $M \rightarrow M$. Por otro lado, todo morfismo $f : * \rightarrow *$ se convierte en una transformación natural de funtores:

$$yf : \text{Hom}_{\mathcal{M}^\circ}(-, *) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}^\circ}(-, *),$$

¹Un monoide opuesto es un monoide con la misma operación y conjunto subyacente, pero donde se invierte el orden del producto: $a \cdot^\circ b := b \cdot a$.

de modo que el diagrama toma la forma obvia requerida por la existencia de un solo objeto $*$ en la categoría \mathcal{M} :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{M}^0}(*, *) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{M}}(g, *)} & \text{Hom}_{\mathcal{M}^0}(*, *) \\ yf_* \downarrow & & \downarrow yf_* \\ \text{Hom}_{\mathcal{M}^0}(*, *) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{M}}(g, *)} & \text{Hom}_{\mathcal{M}^0}(*, *) \end{array}$$

con $g : * \rightarrow *$ morfismo en \mathcal{M}^0 y $f : * \rightarrow *$ morfismo en \mathcal{M} .

Recordar que, en definitiva, $(yf)_*$ es una aplicación de M en sí mismo unívocamente determinada por f , de modo que la conmutatividad del diagrama anterior permite escribir, por un lado:

$$x \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{M}}(g, *) (x) \mapsto x \cdot g = (yf)_*(x \cdot g) = f \cdot x \cdot g,$$

y por otro:

$$x \mapsto (yf)_*(x) = f \cdot x \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{M}}(g, *) (yf)(x) = f \cdot x \cdot g,$$

para todo $x \in M = \text{hom}_{\mathcal{M}}(*, *)$. En otras palabras, $(yf)_*$ es una aplicación de M en M dada por multiplicación a izquierda por $f: x \mapsto f \cdot x$, que verifica:

$$(yf)_*(x \cdot g) = (yf)_*(x) \cdot g \quad \forall x, g \in M.$$

Al revés, si $\varphi : M \rightarrow M$ es tal que $\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g$, entonces, por el lema de Yoneda, se tiene $\varphi = yf$, para un único $f \in M$.

En resumen, la inmersión de Yoneda representa al monoide M isomórficamente en el monoide de todas las aplicaciones $\varphi : M \rightarrow M$ que verifican $\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g$.

En el caso de grupos se obtiene así una versión refinada del *teorema de Cayley*, en el sentido de que todo grupo (G, \cdot) es isomorfo al subgrupo del grupo simétrico Σ_G del conjunto G formado por las biyecciones $g : G \rightarrow G$ que verifican $g(x \cdot y) = g(x) \cdot y \quad \forall x, y \in G$.

Funtor Representable

Definición B.14. Un funtor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Con}$ se llama representable si existe un isomorfismo natural entre dicho funtor y uno de la forma $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -)$ con A objeto de \mathbf{C} .

Si η es dicho isomorfismo natural, por el lema de Yoneda, η está determinado por el objeto A y el elemento $a = \eta_A(\mathbf{1}_A) \in F(A)$. Decimos entonces que el par (A, a) representa el funtor F . Si consideramos el diagrama conmutativo B.1 que aparece en la demostración de B.12 y le seguimos la pista al morfismo $\mathbf{1}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$, por un lado:

$$\mathbf{1}_A \mapsto (f : A \rightarrow B) \mapsto b \in F(B)$$

y por el otro camino:

$$\mathbf{1}_A \mapsto a = \eta_A(\mathbf{1}_A) \mapsto b \in F(B)$$

con lo que, teniendo en cuenta que η_B es biyectiva (en virtud de que η es isomorfismo natural), podemos asegurar que para todo objeto B en \mathbf{C} y todo $b \in F(B)$, existe $f : A \rightarrow B$ tal que $F(f)(a) = b$.

Además, si $f' : A \rightarrow B$ es tal que $F(f')(a) = b$, entonces por un lado:

$$\eta_B^{-1}(F(f')(a)) = \eta_B^{-1}(b) = f,$$

y por otro, poniendo f' en vez de f en B.1,

$$\eta_B^{-1}(F(f')(a)) = \text{Hom}(\mathbf{1}_A, f')(\eta_A(a)) = f',$$

luego $f = f'$ y es único.

Ejemplo B.15. 1. El funtor identidad $\mathbf{1}_{\mathbf{Con}} : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}$ se representa por cualquier conjunto con un solo elemento, por ejemplo $\mathbf{1} = \{o\}$. En efecto, si B es un conjunto cualquiera se define:

$$\eta_B : B \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Con}}(\mathbf{1}, B), \quad b \mapsto f_b,$$

donde $f_b : \mathbf{1} \rightarrow B, o \mapsto b$.

2. El funtor olvido $O : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Con}$ se representa por cualquier grupo cíclico infinito junto con un generador, por ejemplo $((\mathbb{Z}, +), \mathbf{1})$. En efecto, si (G, \cdot) es un grupo cualquiera, se define:

$$\eta_G : G \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}, G), \quad g \mapsto f_g,$$

donde $f_g(n) = g^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Recordar que $G = O(G, \cdot)$.

3. El funtor olvido $O : \mathbf{An} \rightarrow \mathbf{Con}$ se representa por el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[X]$ y el elemento X . Dado un anillo cualquiera A , definimos la transformación natural en A

$$\eta_A : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{An}}(\mathbb{Z}[X], A), \quad a \mapsto f_a$$

donde $f_a : \mathbb{Z}[X] \rightarrow A, f_a(X) = a$, donde X es el polinomio $p(X) = X$. Además, f_a es único en virtud de la propiedad universal de los polinomios, esto define η_A de manera biyectiva. Veamos que el elemento privilegiado es X ; para ello nótese que

$$\eta_{\mathbb{Z}[X]}^{-1} : \text{Hom}_{\mathbf{An}}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X]) \rightarrow \mathbb{Z}[X], \quad \varphi \mapsto \varphi(X)$$

luego $\eta_{\mathbb{Z}[X]}^{-1}$ lleva la identidad $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}[X]} \in \text{Hom}_{\mathbf{An}}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X]) \rightarrow \mathbf{1}_{\mathbb{Z}[X]}(X) = X$.

4. Supongamos que M es un A -módulo a derecha y N un A -módulo a izquierda. Se define el funtor $E : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Con}$ asociando a cada grupo abeliano G el conjunto $E(G)$ de las aplicaciones A -bilineales

$$\gamma : M \times N \rightarrow G$$

y a cada homomorfismo de grupos abelianos $f : G \rightarrow H$, la aplicación

$$E(f) : E(G) \rightarrow E(H) \quad \text{dada por} \quad E(f)(\gamma) = f \circ \gamma.$$

Dicho funtor es representable, con representación $(M \otimes_A N, T)$, donde

$$T : M \times N \rightarrow M \otimes_A N, \quad (m, n) \mapsto m \otimes n.$$

Recordamos que por la propiedad universal del producto tensorial, para cualquier grupo abeliano G y cualquier aplicación A -bilineal $\gamma : M \times N \rightarrow G$, existe un único homomorfismo $\tilde{\gamma} : M \otimes_A N \rightarrow G$ tal que

$$\gamma = \tilde{\gamma} \circ T.$$

Definimos el isomorfismo natural

$$\eta : E \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M \otimes_A N, -)$$

tal que

$$\eta_G : E(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M \otimes_A N, G), \quad \eta_G(\gamma) = \tilde{\gamma}$$

con inversa

$$\eta_G^{-1} : \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M \otimes_A N, G) \rightarrow E(G), \quad \eta_G^{-1}(h) = h \circ T.$$

Observación: Las transformaciones naturales η se están definiendo del funtor F al funtor $\text{Hom}(A, -)$ a diferencia de la definición original, pues en estos casos es más conveniente. No obstante, es indiferente, pues al tratarse de isomorfismos naturales basta tomar los inversos de los distintos η_B para obtener la transformación natural, $\eta' : \text{Hom}(A, -) \rightarrow F$, de la definición. Análogamente, decimos que un funtor contravariante

$F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Con}$ se dice representable si existe un objeto B y un isomorfismo natural de functores contravariantes

$$\eta : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, B) \rightarrow F.$$

Ejemplo B.16. Sea $\mathcal{P} : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}$ el funtor contravariante que asigna a cada conjunto A el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de A (también llamado booleano de A), y a cada aplicación $f : A \rightarrow B$ la aplicación

$$f^* : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \quad S \mapsto f^{-1}(S).$$

Entonces \mathcal{P} está representado por el conjunto $\mathcal{2} = \{0, 1\}$, y el subconjunto $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathcal{2})$. El isomorfismo natural es η , que a cada conjunto A asigna:

$$\eta_A : \text{Hom}_{\mathbf{Con}}(A, \mathcal{2}) \rightarrow \mathcal{P}(A), \quad X \mapsto \eta_A(X) := X^{-1}(\{1\})$$

con inversa

$$\eta_A^{-1} : \mathcal{P}(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Con}}(A, \mathcal{2}), \quad S \mapsto \chi_S : A \rightarrow \mathcal{2},$$

donde

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S, \\ 0 & \text{si } a \notin S. \end{cases}$$

Nótese que $\eta_{\mathcal{2}}(\mathbf{1}_{\mathcal{2}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{2}}^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, el elemento universal.

Teorema B.17. Si un funtor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Con}$ es representable, entonces su representación es única salvo isomorfismo. Es decir, si F está representado por (A, a) y (A', a') , entonces existe un único isomorfismo $f : A \rightarrow A'$ tal que

$$a' = F(f)(a).$$

Demostración. Como vimos para todo $b \in F(B)$, existe $f : A \rightarrow B$ tal que $F(f)(a) = b$. En este caso, tomando $B = A'$ y $b = a'$, existe un único $f : A \rightarrow A'$ tal que $F(f)(a) = a'$.

Veamos ahora que $f : A \rightarrow A'$ es un isomorfismo. Como (A, a) y (A', a') son ambos representantes de F , podemos aplicar el mismo argumento de forma simétrica, luego existe un único $f' : A' \rightarrow A$ tal que $a = F(f')(a')$ y sustituyendo una en la otra.

$$a = F(f')(a') = F(f' \circ f)(a), \quad a' = F(f \circ f')(a').$$

Por el Lema de Yoneda, los únicos morfismos que cumplen lo anterior son $\mathbf{1}_A$ y $\mathbf{1}_{A'}$, por unicidad se deduce:

$$f' \circ f = \mathbf{1}_A \quad \text{y} \quad f \circ f' = \mathbf{1}_{A'},$$

y por tanto, $f : A \rightarrow A'$ es un isomorfismo. □

Enunciar una propiedad universal de cierto objeto A en una categoría \mathcal{C} es afirmar que el functor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ es isomorfo a cierto functor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Con}$, o que el functor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ es isomorfo a cierto functor contravariante $F : \mathcal{C}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Con}$, es decir, que cierto functor es representable y está representado por el objeto A . Pero las propiedades universales no solo afirman la existencia de un isomorfismo natural entre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ y F , sino que determinan un isomorfismo concreto que además está determinado unívocamente por el elemento $a = \eta_A(\mathbf{1}_A) \in F(A)$, en virtud del Lema de Yoneda.

Por tanto, cada propiedad universal es la afirmación de que el functor F está representado por determinada pareja (A, a) . Veamos en las propiedades universales más conocidas cuál es tal objeto A , tal elemento a , y cómo se construyen las transformaciones naturales.

1. Los ejemplos 3 y 4 de B.15 ya ilustran esta idea, en los siguientes ejemplos vamos más rápido.
2. Definimos el functor $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Con}$ tal que, para cada grupo K ,

$$F(K) = \{f \in \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, K) \mid f(h) = e_K \text{ para todo } h \in H\},$$

es decir, el conjunto de homomorfismos de grupos que se anulan en el subgrupo H de G . Para cada morfismo de grupos $\varphi : K \rightarrow L$, definimos:

$$F(\varphi) : F(K) \rightarrow F(L), \quad f \mapsto \varphi \circ f.$$

La propiedad universal del cociente afirma que este functor F es representable, y está representado por el par $(G/H, \pi)$, donde

$$\pi : G \rightarrow G/H, \quad \pi(g) = gH$$

es la proyección canónica con $\pi \in F(G/H)$.

3. Definimos el functor

$$F(B) = \{f \in \text{Hom}_{\mathbf{An}}(A, B) \mid f(S) \subseteq B^*\},$$

es decir, los morfismos de anillos que envían los elementos de $S \subseteq A$ en elementos invertibles de B . La propiedad universal de la localización afirma que este funtor está representado por el par $(S^{-1}A, \varphi)$, donde

$$\varphi : A \rightarrow S^{-1}A, \quad \varphi(a) = \frac{a}{1}$$

es el morfismo canónico de localización.

4. Dado un par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, consideramos el funtor

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Con}, \quad F(X) = \{(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)\},$$

con acción sobre morfismos dada por

$$F(\varphi) : F(X) \rightarrow F(Y), \quad (f, g) \mapsto (f \circ \varphi, g \circ \varphi).$$

Este funtor es representable si existe el producto $A \times B$ en la categoría \mathcal{C} . En tal caso, el objeto que representa a F es precisamente el producto, junto con sus proyecciones canónicas $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ y $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$, que satisfacen la propiedad universal correspondiente.

5. Dado un par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, consideramos el funtor

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Con}, \quad F(X) = \{(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)\},$$

y para cada $\varphi : X \rightarrow Y$, definimos

$$F(\varphi) : F(X) \rightarrow F(Y), \quad (f, g) \mapsto (\varphi \circ f, \varphi \circ g).$$

Este funtor es representable si existe el coproducto $A \amalg B$ en la categoría \mathcal{C} . En ese caso, el objeto representador es $A \amalg B$, junto con los morfismos de inclusión $\iota_1 : A \rightarrow A \amalg B$ e $\iota_2 : B \rightarrow A \amalg B$, que verifican la propiedad universal del coproducto.

6. Dada una extensión de cuerpos $k \subseteq K$, consideramos el funtor

$$F : K\text{-Alg} \rightarrow \mathbf{Con}, \quad F(B) = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, B),$$

donde A es una k -álgebra fija. Para cada morfismo de K -álgebras $\varphi : B \rightarrow C$, definimos $F(\varphi)$ de manera análoga al resto de ejemplos. Este funtor es representable, y está representado por el par $(A \otimes_k K, j)$, donde

$$j : A \rightarrow A \otimes_k K, \quad j(a) = a \otimes 1$$

es el morfismo de cambio de base inducido por la extensión de escalares.

Bibliografía

- [Cur24] A. NAVARRO GARMENDIA, *Curso de Ecuaciones Algebraicas*. Universidad Politécnica de Madrid, Grado en Matemáticas, curso 2023–2024.
Resumen: Documentación personal del curso impartido por el profesor Alberto Navarro Garmendia. Se han utilizado los temas relativos a álgebra conmutativa y teoría de Galois.
- [Fre03] P. J. FREYD, *Abelian Categories*. Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 3, 2003.
Resumen: Reimpresión del texto clásico de Freyd sobre categorías abelianas. Se ha empleado exclusivamente como documento de consulta.
- [Hato2] A. HATCHER, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. Disponible en: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>
Resumen: Referencia estándar en topología algebraica. Se han consultado las secciones 0 y 1 (pp. 1–83), dedicadas a nociones preliminares, homotopía y grupo fundamental.
- [ML98] S. MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician*. <http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/2016-2/macLANECAT.pdf>
Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, 2ª ed., 1998.
Resumen: Referencia clásica consultada para verificar definiciones y propiedades fundamentales. No se ha citado ningún resultado de forma explícita.
- [Muro6] D. MURFET, *Abelian Categories*. Publicado el 5 de octubre de 2006.
Resumen: Utilizados como consulta para clarificar conceptos de categorías abelianas. No se han utilizado directamente.
- [Navi14] J. A. NAVARRO GONZÁLEZ, *Álgebra Conmutativa Básica*. 25 de mayo de 2014. Disponible en: <https://matematicas.unex.es/~navarro/acb.pdf>
Resumen: Se han consultado los capítulos 7 y 8, las páginas 139–141, el epílogo dedicado a la teoría de categorías y los anexos G y H sobre álgebras finitas y teoría de Galois. Texto mecanografiado en posesión del autor.
- [Nav25] J. A. NAVARRO GONZÁLEZ, *Grothendieck at the Undergraduate Level. Notes for a Licenciatura*. 13 de marzo de 2025. Disponible en: <https://matematicas.unex.es/~navarro/degree.pdf>
Resumen: Basado en clases de J. Sancho. Se han consultado las páginas 197–198, 219–221 y 248–256. El texto desarrolla ideas de la teoría de Galois desde el punto de vista de Grothendieck y la topología algebraica. Documento en posesión del autor.
- [nLab25] NLAB CONTRIBUTORS, *Entradas seleccionadas de nLab*. Disponible en: <https://ncatlab.org/>
Resumen: Enciclopedia colaborativa sobre matemáticas avanzadas. Se han consultado específicamente las entradas `(infinity, 1)-pullback`, `skeletal category`, `covering space` y `van Kampen theorem`, `G-set`, `simplicial set`, `Yoneda embedding`. Última fecha de consulta: 3 de julio de 2025.

- [San14] P. SANCHO DE SALAS, *Álgebra I*. 2ª ed., Universidad de Extremadura Disponible en: <https://matematicas.unex.es/~sancho/Asignatura.%20Algebra%20I/TeoriadeGalois.pdf>
- Resumen: Se han utilizado los capítulos 4 y 5 relativos a álgebras finitas y teoría de Galois. Obra de referencia para cursos básicos de álgebra con aplicaciones a la teoría de cuerpos.
- [San24] J. B. SANCHO, *Apuntes personales sobre Teoría de Galois para revestimientos*. 3 de diciembre de 2024.
- Resumen: Documento manuscrito centrado en el desarrollo de la teoría de Galois en el contexto topológico de revestimientos. Se ha utilizado exclusivamente el capítulo 4. Apuntes en posesión del tutor del autor.
- [San24b] J. B. SANCHO, *Teorema de Van Kampen*. 7 de diciembre de 2024.
- Resumen: Apuntes personales centrados en el enunciado, demostración y aplicaciones del teorema de Van Kampen. Se ha consultado el contenido completo del documento. Apuntes en posesión del tutor del autor.
- [Toro8] M. TORRES IGLESIAS, *Apuntes del curso Categorías y Módulos*. Universidad de Zaragoza, 2008–2013.
- Resumen: Apuntes manuscritos inéditos utilizados en el curso de Categorías y Módulos impartido en la Universidad de Zaragoza. Se han utilizado algunas nociones sobre módulos y el capítulo 2 dedicado íntegramente a categorías. Apuntes en posesión del autor.
- [Urb16] F. URBANO, *El Grupo Fundamental*. Universidad de Granada, 2016.
- Resumen: Apuntes de clase utilizados en el marco de cursos de topología algebraica. Se han utilizado definiciones y propiedades básicas del grupo fundamental.

Índice alfabético

- G -conjunto
 - isotropía de x , 93
 - órbita, 92
- S -espacio, 68
 - S -morfismo, 68
- k -álgebra
 - finita, 68
 - morfismo de k -álgebras, 68
- aplicación homotópica, 57
 - de espacios punteados, 60
- camino, 52
 - homotópico, 52
- categoría, 4
 - G -Con**, 92
 - S -Esp**, 68
 - Grpd**, 61
 - Rev(S)**, 76
 - k -Alg**, 68
 - k -Alg_{sep}**, 76
 - hTop**, 57
 - hTop***, 60
 - cocompleta, 129
 - cocono, 127
 - completa, 129
 - cono, 126
 - esqueletal, 38
 - esqueleto, 38
 - grupoide, 6
 - libre generada por Γ , 124
 - opuesta, 8
 - pequeña, 7
 - plena, 7
 - producto, 9
 - subcategoría, 7
- colímite, 48, 127
 - coigualador, 43, 128
 - coproducto, 41, 127
 - producto tensorial, 69
 - pushout, 45, 129
 - suma amalgamada, 45
 - unión amalgamada de conjuntos, 47
- congruencia
 - en una categoría, 10
- conjunto simplicial, 29
 - n -simplices, 29
 - aplicación cara, 29
 - aplicación de degeneración, 29
- cuerpo
 - de descomposición de un polinomio, 84
- diagrama, 123
 - conmutativo, 126
 - sistema dirigido, 133
 - sistema inverso, 133
- entorno trivializante, 70
- equivalencia de categorías, 34
- equivalencia homotópica, 57
 - de espacios punteados, 60
- espacio
 - contractible, 57
 - localmente conexo, 69
 - simplemente conexo, 59
- extensión
 - de Galois, 82
 - subextensión, 88
- functor, 20
 - abelianización, 21
 - bidual, 23
 - bifunctor, 24
 - canónico, 25
 - contravariante, 20
 - covariante, 20
 - de dualidad, 22
 - de puntos, 135

- denso, 24
- fiel, 24
- identidad, 20
- inclusión, 20
- inmersión, 24
- naturalmente isomorfo, 26
- olvido, 20
- pleno, 24
- representable, 142
- grupo
 - que opera libremente, 81
 - acción a derecha, 92
 - acción a izquierda, 92
 - acción de , 80
 - de automorfismos, 80
 - de Galois, 82
 - de Galois de $p(x)$, 84
 - divisible, 14
 - producto libre de, 41
 - propiamente discontinuo, 80
 - subgrupo derivado, 21
- grupo fundamental, 22, 53
- grupoide
 - fundamental, 53
- gráfica de un S -morfismo, 77
- homotopía, 52
- inmersión de Yoneda
 - primera, 137
 - segunda, 138
- isomorfismo de categorías, 32
- lazo, 53
- levantamiento de camino, 100
- límite, 48, 126
 - igualador, 42, 128
 - inductivo, 133
 - núcleo, 44
 - producto, 39, 127
 - producto amalgamado, 45
 - producto fibrado en S -Esp, 69
 - proyectivo, 133
 - pullback, 44, 128
- morfismo
 - codominio de un, 4
 - dominio de un, 4
 - automorfismo, 5, 80
 - coconstante, 19
 - constante, 18
 - de diagramas, 124
 - de una categoría, 4
 - epimorfismo, 17
 - identidad, 4
 - inverso, 5
 - isomorfismo, 5
 - monomorfismo, 13
 - nulo, 19
 - retracción, 15
 - sección, 11
- objeto
 - cero, 19
 - de una categoría, 4
 - final, 8, 19
 - inicial, 8, 19
- propiedad universal, 145
 - de la localización, 146
 - de polinomios, 143
 - del cociente, 145
 - del producto tensorial, 144
- revestimiento, 70
 - de Galois, 82
 - trivial sobre otro revestimiento, 72
 - automorfismo de, 81
 - cociente o intermedio, 88
 - fibra de un, 70
 - finito, 70
 - grado de un, 71
 - universal, 97
- transformación natural, 25
 - composición de, 28
 - idéntica, 28
 - isomorfismo natural, 26



EPES

Escuela Politécnica
de Enseñanza Superior