



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID



EPES
Escuela Politécnica
de Enseñanza Superior



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA DE ENSEÑANZA SUPERIOR (EPES)

TRABAJO FIN DE GRADO

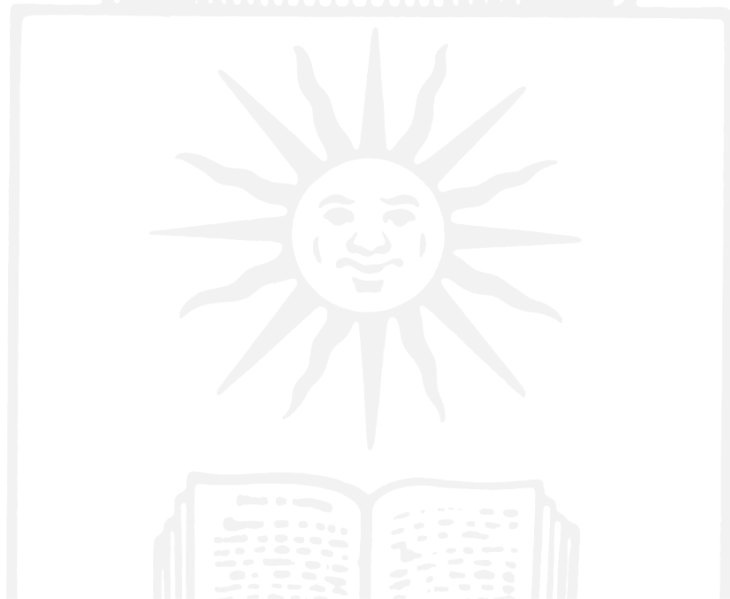
GRADO EN MATEMÁTICAS

Introducción a la Geometría Tropical: Fundamentos Algebraicos, Construcción de Variedades y Aplicaciones

Autora: Celia López Rojo

Dirigido por: Beatriz Pascual

Madrid, 20 de junio de 2025



Introducción a la Geometría Tropical: Fundamentos Algebraicos, Construcción de Variedades y Aplicaciones

Autora: Celia López Rojo

Dirigido por: Beatriz Pascual

Trabajo Fin de Grado, 20 de junio de 2025

Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)

Edificio C, Paseo Juan XXIII, 11. Madrid

Si deseas citar este trabajo, la entrada completa en Bib_TE_X es la siguiente:

```
@mastersthesis{citekey,  
title = {Introducción a la Geometría Tropical: Fundamentos Algebraicos, Construcción de  
Variedades y Aplicaciones},  
author = {López Rojo, Celia y Pascual, Beatriz},  
school = {Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)},  
year = {2025},  
type = {Trabajo Fin de Grado}  
}
```

This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International” license.

Plantilla derivada de <https://github.com/blazaid/UPM-Report-Template>.



Resumen

Este trabajo introduce la Geometría Tropical desde sus fundamentos algebraicos hasta sus aplicaciones. Se define primero el semianillo tropical y los polinomios tropicales, cuyos grafos son funciones lineales a trozos. A continuación, se construyen variedades tropicales —empleando valoraciones, formas iniciales y geometría poliédrica— y se formulan y demuestran los dos teoremas centrales: el Teorema Fundamental de Tropicalización y el Teorema de Estructura poliédrica. Finalmente, se ilustra una aplicación práctica mediante la resolución de caminos más cortos en grafos. Se incluyen ejemplos gráficos e implementaciones en Maple para facilitar la intuición y el estudio.

Palabras clave: Geometría tropical, polinomios tropicales, variedades tropicales, valoraciones, geometría poliédrica, optimización

Abstract

This work presents Tropical Geometry from its algebraic foundations to concrete applications. We first define the tropical semiring and tropical polynomials, whose graphs yield piecewise-linear functions. Next, we build tropical varieties using valuations, initial forms, and polyhedral geometry, and we state and prove the two central theorems: the Fundamental Tropicalization Theorem and the Structure Theorem describing their polyhedral complexes. Finally, we showcase a practical application by solving shortest-path problems on graphs. Throughout, graphical examples and Maple implementations are provided to foster intuition and deeper understanding.

Keywords: Tropical geometry, tropical polynomials, tropical varieties, valuations, polyhedral geometry, optimization

Índice general

1. Álgebra y geometría tropical	9
1.1. Álgebra tropical	9
1.1.1. Nociones previas: Semianillo	9
1.1.2. El semianillo tropical	11
1.1.3. Polinomios tropicales	11
1.2. Geometría tropical	17
1.2.1. Hipersuperficies tropicales: Curvas tropicales planas	18
2. Preparación algebraica y geométrica	29
2.1. Nociones previas	29
2.1.1. Anillo de polinomios de Laurent	29
2.1.2. Valoración	32
2.1.3. Forma Inicial	36
2.1.4. Geometría poliédrica	37
2.2. Hipersuperficies tropicales	40
2.2.1. Tropicalización de hipersuperficies	41
2.2.2. Teorema de Kapranov (versión del Teorema Fundamental)	43
2.2.3. Estructura poliédrica de $\text{trop}(V(f))$ (versión del Teorema de Estructura)	47
3. Teoremas principales de la geometría tropical	49
3.1. Teorema Fundamental	49
3.1.1. Nociones previas: Tropicalización	49
3.1.2. Enunciado del Teorema	51
3.1.3. Demostración del Teorema Fundamental	53
3.2. Teorema de Estructura	58
3.2.1. Nociones previas: Complejo equilibrado y ponderado	58
3.2.2. Enunciado del Teorema	61
3.2.3. Idea de la demostración del Teorema	65
4. Aplicaciones	69
4.1. Optimización: Caminos más cortos	69

5. Apéndice	71
5.1. La amebas y su relación con la geometría tropical	71
5.1.1. Descuantización de Maslov y aparición del álgebra tropical	72
5.2. Verificación de propiedades del semianillo tropical	73
5.3. Operaciones tropicales: suma, producto y ejemplos	74
5.4. Código Maple para la visualización de curvas tropicales	75
5.5. Valoración en el cuerpo de series de Puiseux	76
5.6. Morfismos monomiales entre toros algebraicos	77

Introducción a la Geometría Tropical

A finales del siglo XX comenzó a desarrollarse una nueva rama de la Geometría Algebraica: la Geometría Tropical, donde los elementos son lineales por tramos, en contraste con los objetos suaves y curvos de la primera. Poco a poco se ha establecido como una disciplina con marco teórico propio. Algunos teoremas clásicos, como el Teorema Fundamental del Álgebra o el Teorema de Bézout, tienen versión tropical, equivalente a la clásica. Además, la Geometría Tropical ha desarrollado resultados propios como el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical o el Teorema de Estructura, que conectan la Geometría Algebraica y la Tropical, y que estudiaremos en profundidad.

Uno de los principales impulsores del desarrollo de la geometría tropical ha sido el estudio de las amebas, introducidas por G.M. Bergman como una herramienta para analizar las propiedades de las variedades algebraicas complejas en el espacio de los reales. Dicho estudio se realiza mediante una transformación logarítmica de variedades algebraicas definidas en el toro complejo $(\mathbb{C}^*)^n$. La transformación para $t > 1$ y (z_1, \dots, z_n) un punto de la variedad, está dada por

$$\text{Log}_t(z_1, \dots, z_n) = (\log_t |1/z_1|, \dots, \log_t |1/z_n|).$$

La imagen resultante, llamada *ameba*, permite visualizar la variedad en \mathbb{R}^n .

Al aumentar la base t del logaritmo, la ameba se contrae y sus partes curvas tienden a conjuntos lineales a trozos que convergen en una **variedad tropical**. El estudio de estas variedades, a través de los teoremas principales de la geometría tropical, será el eje central de este trabajo.

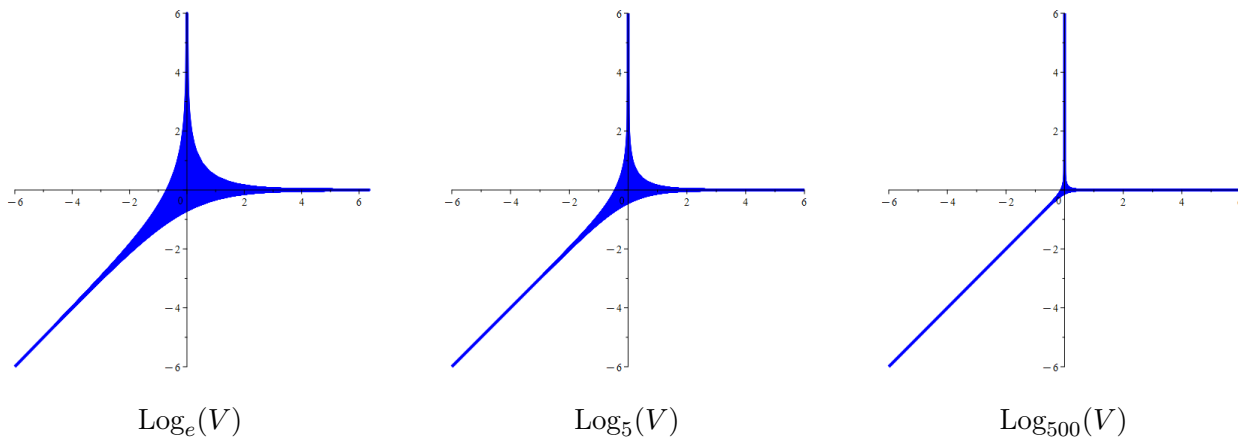


Figura 1: Ameba de $V(f)$, con $f(z, w) = z + w - 1$, para distintas bases t en Log_t

Esta transición desde la geometría clásica a la tropical requiere modificar las operaciones aritméticas tradicionales. El cambio se formaliza mediante el proceso conocido como *descuantización de Maslov*. Considerando una familia de semianillos R_t definidos sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ junto con las operaciones

$$x \oplus_t y := -\log_t(t^{-x} + t^{-y}), \quad x \odot_t y := x + y,$$

se observa que, en el límite $t \rightarrow \infty$, estas operaciones convergen a las del **semianillo tropical**:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x \oplus_t y = \min(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x \odot_t y = x + y.$$

Este semianillo tropical es la base algebraica sobre la que se construye la geometría tropical.

Para profundizar en algunos aspectos técnicos de las amebas, se puede consultar el material complementario del Apéndice 5.1.

Objetivo En este trabajo introducimos paso a paso la Geometría Tropical. Partimos de una construcción algebraica —la definición de semicuerpo— y avanzamos hacia los polinomios tropicales, hasta llegar al estudio de las variedades tropicales. Para generar intuición sobre su forma, construcción y comportamiento, comenzamos por el caso más sencillo: las hipersuperficies tropicales, es decir, aquellas definidas por un único polinomio. En este contexto, enunciarnos y demostramos los dos resultados fundamentales: el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical, que relaciona una variedad algebraica con su tropicalización, y el Teorema de Estructura, que describe su forma poliédrica y la condición de equilibrio que satisfacen. Esto sienta las bases para extender ambos teoremas al caso general de variedades definidas por ideales. El trabajo se cierra con una aplicación: la optimización de caminos cortos.

A lo largo del texto se incluyen ejemplos visuales, implementaciones en Maple y material complementario de distinto tipo: desde aspectos más técnicos, como los cuerpos valuados y la forma inicial, hasta conexiones con el álgebra clásica, mediante la reinterpretación en el contexto tropical de enunciados conocidos, como el Teorema Fundamental del Álgebra o el Teorema de Bézout.

Estructura El trabajo está dividido en cuatro capítulos y un apéndice. El primer capítulo introduce la base algebraica de la geometría tropical. El segundo recoge herramientas previas necesarias para poder enunciar y demostrar los dos teoremas principales. El tercer capítulo está dedicado por completo a estos resultados. En el cuarto se presentan algunas aplicaciones. Por último, el apéndice contiene materiales complementarios que no se desarrollan en el cuerpo principal del texto.

- El capítulo 1 comienza con la definición de semianillo y semicuerpo, centrándonos en el semianillo tropical min-plus. A partir de ahí, estudiamos los polinomios tropicales y su representación como funciones lineales a trozos. Finalmente, introducimos la noción de curva tropical plana, estudiamos la analogía con las curvas clásicas y terminamos con el Teorema de Bézout.
- El capítulo 2 recoge las herramientas algebraicas y geométricas necesarias para abordar los teoremas principales. Estudiamos el anillo de polinomios de Laurent, las valoraciones y la forma inicial de un polinomio. En este capítulo ya se enuncian dos versiones concretas del Teorema Fundamental y del Teorema de Estructura en el caso de hipersuperficies, que sirven de ejemplo ilustrativo antes de abordar el caso general.
- El capítulo 3 está dedicado a los dos teoremas principales de la geometría tropical. En primer lugar, enunciarnos y demostramos el Teorema Fundamental, que caracteriza el conjunto tropical como las valoraciones de los ceros de una variedad sobre un cuerpo valorado. Después, presentamos el Teorema de Estructura, que establece que las variedades tropicales son complejos poliédricos ponderados que verifican una condición de equilibrio.
- En el capítulo 4 se presenta una aplicación de la aritmética tropical al problema del camino más corto en grafos. Este ejemplo sirve para ilustrar el potencial práctico de la teoría desarrollada.
- El apéndice contiene material complementario: la noción de ameba y su relación con la tropicalización, el proceso de descuantización de Maslov, algunas justificaciones algebraicas que no se detallan en el cuerpo principal del texto y fragmentos de código en Maple utilizados para generar las imágenes incluidas en el texto.

Capítulo 1

Álgebra y geometría tropical

1.1. Álgebra tropical

El álgebra tropical propone una forma alternativa de operar con números: la suma se reemplaza por el mínimo y el producto por la suma. Aunque esta modificación puede parecer una simplificación, permite definir estructuras algebraicas interesantes, como semianillos y polinomios tropicales.

En esta primera sección se presentan los conceptos básicos necesarios para entender el álgebra tropical. Comenzamos con la definición del semianillo tropical y las operaciones que lo caracterizan, y se llega hasta la construcción de los polinomios tropicales, que serán fundamentales para el desarrollo del trabajo.

1.1.1. Nociones previas: Semianillo

Para definir el semianillo tropical, es necesario establecer algunas nociones básicas. En este apartado, seguiremos principalmente a [Gol99, Cap. 1].

Definición 1.1.1 Se llama *monoide* $(M, *)$ a un conjunto M dotado de una operación binaria, interna $*$ verificando que es asociativa y posee un elemento neutro. Si además $*$ es conmutativa, $(M, *)$ se dice que es un *monoide conmutativo*.

Un ejemplo de monoide que no es grupo es $(\mathbb{N}, +, 0)$, donde \mathbb{N} representa el conjunto de los números naturales, dotado de la suma usual. La operación es asociativa y el elemento neutro es el 0, pero no todos los elementos tienen inverso aditivo en \mathbb{N} , por lo que no forma un grupo.

Definición 1.1.2 Se llama *semianillo* $(S, +, \cdot)$ a un conjunto S dotado de dos operaciones binarias e internas denominadas operación de adición $(+)$ y producto (\cdot) , que verifican:

- $(S, +)$ es un monoide conmutativo con identidad 0.
- (S, \cdot) es un monoide con identidad 1.
- El producto distribuye a la adición:

$$\begin{aligned}(x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z, & \forall x, y, z \in S \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z, & \forall x, y, z \in S\end{aligned}$$

- 0 es un elemento absorbente respecto al producto, es decir, $\forall x \in S, 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

Si además (S, \cdot) es un monoide conmutativo, se dice que el semianillo es **conmutativo**. Por otro lado, si (S, \cdot) es un grupo abeliano, es decir, un monoide conmutativo en el que todo elemento distinto del cero tiene inverso, decimos que $(S, +, \cdot)$ es un **semicuerpo**

La diferencia entre un anillo con unidad y un semianillo (análogamente entre cuerpo y semicuerpo) radica en que este último no exige la existencia de inversos aditivos. En un anillo, para todo $x \in S$ existe un elemento $-x \in S$ tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Un ejemplo de semicuerpo es $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \cdot)$, donde $\mathbb{R}_{\geq 0}$ representa el conjunto de los números reales no negativos, dotado de las operaciones habituales de adición y multiplicación.

Otro ejemplo de semianillo, fundamental en el contexto de este trabajo, es el semianillo tropical $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$, donde las operaciones binarias internas están definidas por:

$$x \oplus y = \min(x, y), \quad x \odot y = x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Observación 1.1.3 Por comodidad, denotaremos a la recta real extendida en un solo extremo como

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

De manera que podemos reescribir el semianillo \mathbb{T} como $\mathbb{T} = (\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$.

En el Apéndice (véase 5.2) se presenta la demostración de que el conjunto \mathbb{T} satisface las propiedades algebraicas para ser un semianillo. Más aún, se comprueba que \mathbb{T} , con estas operaciones, forma un grupo abeliano respecto al producto tropical. Esto implica que \mathbb{T} cumple con las condiciones necesarias para ser semicuerpo. No obstante, en la mayoría de la literatura se hace referencia a \mathbb{T} como semianillo. Siguiendo este uso común, en lo que sigue nos referiremos al semicuerpo tropical simplemente como semianillo tropical.

Observación 1.1.4 Este semianillo se conoce como el semianillo tropical min-plus, ya que la suma tropical se corresponde con el mínimo y el producto tropical con la suma usual. En la literatura también es común encontrar otra convención, conocida como semianillo tropical max-plus, donde la suma tropical se define como el máximo y el producto permanece igual:

$$x \oplus' y = \max(x, y), \quad x \odot' y = x + y.$$

Ambas estructuras son isomorfas, y el isomorfismo entre ellas está dado por la aplicación:

$$\varphi : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad \varphi(x) = -x,$$

la cual es biyectiva y satisface las siguientes igualdades para todo $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$\varphi(x \oplus y) = \varphi(\min(x, y)) = \max(-x, -y) = \varphi(x) \oplus' \varphi(y),$$

$$\varphi(x \odot y) = \varphi(x + y) = -x - y = \varphi(x) \odot' \varphi(y).$$

Esto implica que los resultados pueden trasladarse del semianillo tropical min-plus a max-plus y viceversa, mediante esta correspondencia. En este trabajo se adopta la convención min-plus, que será la base de las construcciones posteriores.

1.1.2. El semianillo tropical

Definición 1.1.5 Llamamos *semianillo tropical* al semicuerpo $\mathbb{T} = (\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$, donde

$$x \oplus y = \min(x, y), \quad x \odot y = x + y, \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Estas operaciones presentan propiedades que difieren de las de la aritmética habitual. Veamos las principales características :

- Ausencia de inverso aditivo. En el semianillo tropical, la operación \oplus no admite inverso aditivo. Es decir, dado $x \in \mathbb{R}$, no existe un elemento x' tal que $x \oplus x' = 0_{\mathbb{T}}$ ya que:

$$x' \oplus x = 0_{\mathbb{T}} \iff \min(x', x) = \infty \iff x' = x = \infty$$

Por lo tanto, no es posible definir una operación de resta tropical, ni resolver ecuaciones que requieran cancelar sumas tropicales.

- División tropical. Denotada por $a \oslash b$, se define como la operación inversa del producto tropical. Es decir $a \oslash b := a - b$, donde $-b$ es el inverso aditivo usual de b en $\overline{\mathbb{R}}$. Esta definición satisface

$$a = (a + b) - b = (a \odot b) \oslash b$$

- Potencia tropical. Denotada por $a^{n\odot}$, se define como la iteración del producto tropical. Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$x^{n\odot} = x \odot \overset{n}{.} \odot x = x + \overset{n}{.} + x = n \cdot x.$$

De manera análoga, para $-n$, se define la potencia negativa mediante iteración del cociente tropical:

$$x^{-n\odot} = x \oslash \overset{n}{.} \oslash x = -(x + \overset{n}{.} + x) = -n \cdot x.$$

Como consecuencia, en el contexto tropical se satisface el “sueño del principiante”:

$$(x \oplus y)^{n\odot} = n \cdot (x \oplus y) = n \cdot x \oplus n \cdot y = x^{n\odot} \oplus y^{n\odot}$$

- Idempotente con respecto a la suma. Los elementos del semianillo satisfacen

$$x \oplus x = \min(x, x) = x \quad \text{para cada } x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1.1.3. Polinomios tropicales

En esta subsección introducimos y estudiamos los polinomios tropicales, que son objetos fundamentales en el álgebra tropical. A diferencia de los polinomios clásicos definidos sobre un anillo, los polinomios tropicales se definen sobre el semianillo tropical $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$. A lo largo de esta sección nos apoyamos principalmente en [MS21, Cap.1, §1.1] para definir formalmente los polinomios tropicales y estudiar sus propiedades básicas.

Se finaliza la subsección abordando la cuestión de la unicidad en la representación de polinomios tropicales y la formulación del Teorema Fundamental del Álgebra en el contexto tropical, inspirándonos el trabajo de Wandsnider [Wan20].

Sean $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ variables independientes sobre el semianillo tropical $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$. Definimos el **semianillo de polinomios** en n variables con coeficientes en $\overline{\mathbb{R}}$ como $\overline{\mathbb{R}}[X] = \overline{\mathbb{R}}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Definición 1.1.6 Un *monomio tropical* en las variables $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es un producto:

$$\mathbf{x}^{\alpha \odot} = x_1^{\alpha_1 \odot} \odot \cdots \odot x_n^{\alpha_n \odot}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$$

Es posible representarlos mediante la expresión reducida debido a la conmutatividad del producto:

$$x_2 \odot x_1 \odot x_3 \odot x_1 \odot x_4 \odot x_2 \odot x_3 \odot x_2 = x_1^{2 \odot} \odot x_2^{3 \odot} \odot x_3^{2 \odot} \odot x_4.$$

Si continuamos operando según las definiciones de suma y producto tropical, podemos observar que un monomio tropical se comporta como una función lineal de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} cuando se evalúa en la aritmética clásica. De esta forma, el monomio tropical anterior se corresponde con la función lineal:

$$x_1^{2 \odot} \odot x_2^{3 \odot} \odot x_3^{2 \odot} \odot x_4 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4.$$

Definición 1.1.7 Un *polinomio tropical* con coeficientes en $\overline{\mathbb{R}}$ y variables $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es una combinación lineal (tropical) finita de monomios tropicales:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\alpha \in S} a_{\alpha} \odot x^{\alpha \odot} \quad (1.1)$$

donde S es el soporte de p , es decir, un subconjunto finito de \mathbb{Z}^n que contiene los índices de los monomios con coeficiente $a_{\alpha} \in \overline{\mathbb{R}}$ no nulo.

Observación 1.1.8 Se ha mencionado “semianillo de polinomios” y no “anillo de polinomios” por la falta de un inverso aditivo para los polinomios, pues la suma tropical se define como el mínimo, lo que impide cancelar términos. Siguiendo el mismo razonamiento que se ha usado para mostrar la ausencia de inverso aditivo en \mathbb{T} : Dado un polinomio $p \in \overline{\mathbb{R}}[X]$, diferente del constante infinito, no existe un polinomio p' tal que $p' \oplus p = 0_{\mathbb{T}}$, pues

$$p' \oplus p = 0_{\mathbb{T}} \iff \min(p', p) = \infty \iff p' = p = \infty$$

Un polinomio tropical representa una función $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Cuando interpretamos esta función en aritmética clásica, este se define como el mínimo de una colección finita de funciones lineales:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \min(a_1 + \alpha_1 \mathbf{x}, \dots, a_n + \alpha_n \mathbf{x}).$$

Donde $\alpha_i \mathbf{x} = \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n$ es el producto escalar usual.

Con el objetivo de ganar mayor intuición con los polinomios tropicales, veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.1.9 Sea el polinomio tropical en una variable

$$p(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d = \min\{a + 3x, b + 2x, c + x, d\},$$

El grafo de dicho polinomio es la envolvente inferior de sus términos, pues se construye seleccionando, en cada punto, la menor de las alturas dadas por las funciones $a + 3x$, $b + 2x$, $c + x$ y d . Tomando $(a, b, c, d) = (0, 1, 3, 6)$ obtenemos la representación gráfica en la Figura 1.1.

La gráfica del polinomio tropical presentado en el ejemplo muestra propiedades características que son comunes a todos los polinomios tropicales. Estas propiedades se enuncian formalmente en la Proposición 1.1.10.

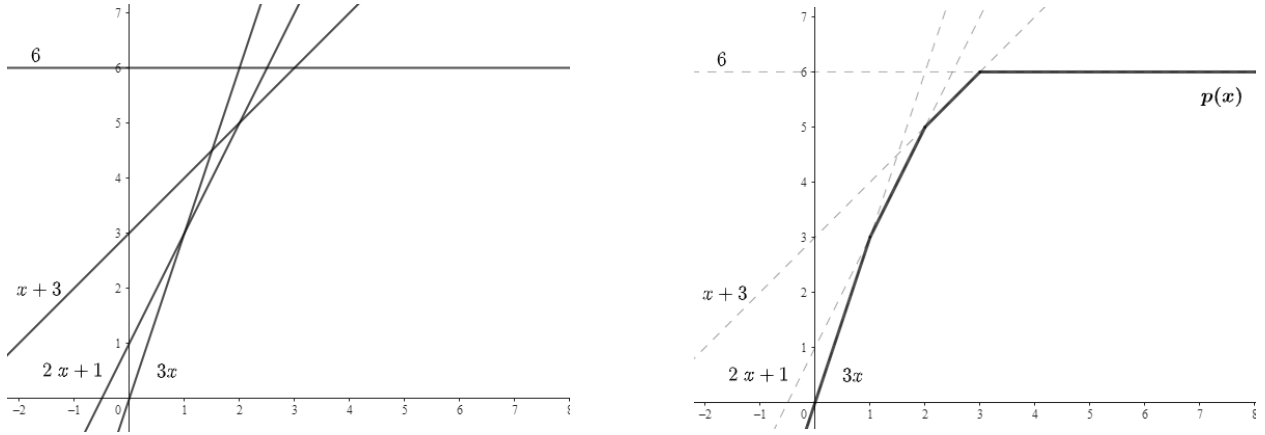


Figura 1.1: Graficas de los monomios tropicales $a + 3x$, $b + 2x$, $c + x$ y d (izquierda) y envolvente inferior que forma el grafo del polinomio tropical para $(a, b, c, d) = (0, 1, 3, 6)$ (derecha).

Proposición 1.1.10 *Sea $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio tropical, entonces satisface*

- p es continua,
- p es lineal a trozos, con un número finito de piezas
- p es cóncava:

$$p\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) \geq \frac{1}{2}(p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})) \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Es fácil ver que se satisfacen las dos primeras propiedades, pues p es el mínimo de un conjunto finito de funciones lineales continuas. Probemos la tercera propiedad.

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existen los índices k^*, l^* tales que:

$$p(\mathbf{x}) = \min_k f_k(\mathbf{x}) = f_{k^*}(\mathbf{x}), \quad p(\mathbf{y}) = \min_k f_k(\mathbf{y}) = f_{l^*}(\mathbf{y}).$$

Siendo f_k las funciones lineales derivadas de escribir en aritmética clásica los monomios tropicales. Ahora evaluamos p en $\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$:

$$p\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) = \min_k f_k\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) = \min_k \left(\frac{1}{2}f_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}f_k(\mathbf{y})\right).$$

Se tiene que el mínimo de una suma siempre es mayor o igual a la suma de los mínimos tomados por separado, es decir, para cualesquiera familias $\{a_k\}, \{b_k\}$ se cumple

$$\min_k (a_k + b_k) \geq \min_k a_k + \min_k b_k,$$

Esto se debe a que el índice que minimiza la suma puede no coincidir con los índices que minimizan los términos individuales, lo que lleva a que la suma de mínimos sea una cota inferior del mínimo de la suma.

$$\min_k \left(\frac{1}{2}f_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}f_k(\mathbf{y})\right) \geq \min_k \left(\frac{1}{2}f_k(\mathbf{x})\right) + \min_k \left(\frac{1}{2}f_k(\mathbf{y})\right) = \frac{1}{2}f_{k^*}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}f_{l^*}(\mathbf{y}).$$

Como por definición $p(\mathbf{x}) = f_{k^*}(\mathbf{x})$ y $p(\mathbf{y}) = f_{l^*}(\mathbf{y})$, esto implica:

$$p\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) \geq \frac{1}{2}p(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}p(\mathbf{y}).$$

Por lo tanto, p es cóncava. □

El recíproco de esta proposición también se satisface. Esto viene recogido en la siguiente Proposición.

Proposición 1.1.11 *Toda función que satisface las tres propiedades de la Proposición 1.1.10 puede representarse como un polinomio tropical.*

Demostración.

n=1 *Mostraremos únicamente el caso unidimensional, que contiene la idea esencial y permite una exposición más visual e intuitiva.*

Supongamos que g satisface las hipótesis de la Proposición 1.1.10. Esto es, g es lineal a trozos, es decir, está formada por un número finito de tramos con ciertos puntos de ruptura $x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1}$ y constantes $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ y $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ tales que:

$$g(x) = a_j x + b_j, \quad \text{para } x \in (x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, m,$$

La continuidad de g garantiza que los tramos están pegados sin saltos en los puntos x_j , y la cóncavidad implica que las pendientes son no crecientes:

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_m.$$

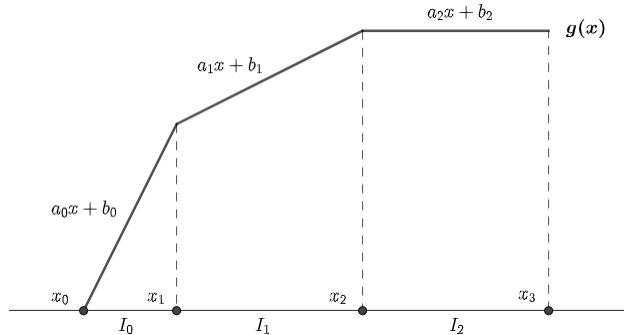


Figura 1.2: Ejemplo de una función $g(x)$ función lineal a trozos continua, cóncava

Definimos, para cada $j = 1, \dots, m$, la función afín $f_j(x) := a_j x + b_j$. Por construcción, se cumple:

$$p(x) = f_j(x), \quad \text{para todo } x \in (x_{j-1}, x_j),$$

y para todo $i \neq j$, la función f_i cumple $f_i(x) \geq p(x)$, ya que f_i se sitúa por encima de p fuera de su intervalo de linealidad. Esto se deduce de la cóncavidad de p , que impide que crezca más rápido que cualquiera de sus tramos lineales, ya que las pendientes decrecen o se mantienen constantes. Por tanto, se concluye que:

$$p(x) = \min_{1 \leq i \leq m} f_i(x).$$

□

Observación 1.1.12 *En general, consideraremos al polinomio tropical como su función asociada y emplearemos la misma notación para ambos.*

Nótese que polinomios distintos pueden representar la misma función. Esto ocurre cuando uno de los monomios no es el término de menor grado del polinomio para ningún valor de x o bien, si lo es para un valor específico, coincide con el valor de otros dos monomios en ese punto. Es lo que ocurre en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.13 *Sean los polinomios tropicales*

$$p(x) = x^{2\odot} \oplus 1 \odot x \oplus 2 = \min(2x, 1+x, 2), \quad q(x) = x^{2\odot} \oplus 2 = \min(2x, 2)$$

La diferencia entre ambos polinomios radica en el término $1+x$ que aparece en $p(x)$, pero no en $q(x)$. Para que este término influya en $p(x)$, debe ser menor o igual que $2x$ y 2 simultáneamente. Esto ocurre únicamente cuando $x = 1$, ya que:

$$1+x \leq 2x \quad \text{si y solo si} \quad x \geq 1$$

$$1+x \leq 2 \quad \text{si y solo si} \quad x \leq 1$$

Por lo tanto, $1+x$ es el mínimo de $p(x)$ únicamente en $x = 1$. De modo que no tiene una representación gráfica como segmento y los dos polinomios coinciden para cada valor de $x \in \mathbb{R}^+$:

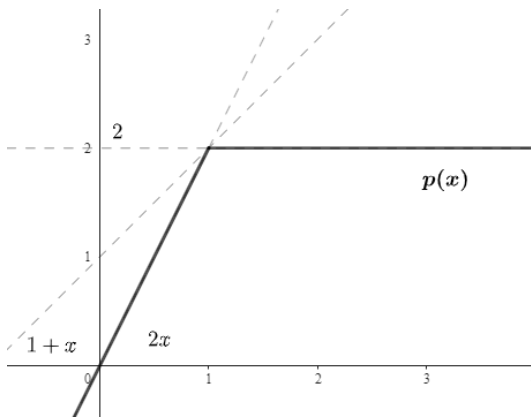


Figura 1.3: Grafo de $p(x) = x^{2\odot} \oplus 1 \odot x \oplus 2$

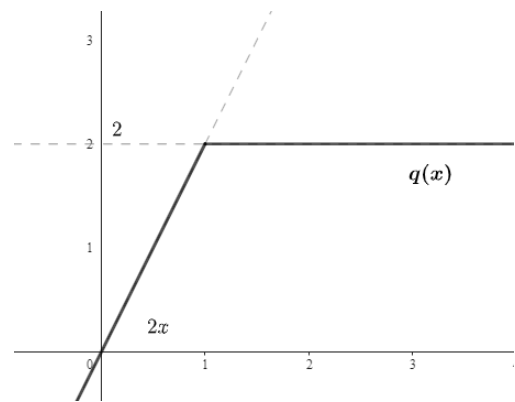


Figura 1.4: Grafo de $q(x) = x^{2\odot} \oplus 2$

Al ver que distintos polinomios pueden representar la misma función, nos preguntamos cuándo un polinomio se puede escribir como producto de factores lineales de manera única. En Álgebra clásica la respuesta viene dada por un resultado fundamental:

Teorema Fundamental del Álgebra [SV21]: Todo polinomio no constante con coeficientes complejos se puede escribir de manera única (salvo el orden de los factores) como un producto de factores lineales sobre los números complejos.

Nuestro objetivo es comprender cómo se traduce este resultado al contexto tropical. Para ello, nos hemos basado en el trabajo de Wandsnider [Wan20].

Teorema Fundamental del Álgebra

Definición 1.1.14 Sean $d, j \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq d$. Definimos la aplicación $\text{red}_j : \overline{\mathbb{R}}[x]_{\deg \leq d} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}[x]_{\deg \leq d}$ tal que para todo polinomio tropical $p \in \overline{\mathbb{R}}[x]_{\deg \leq d}$,

$$\text{red}_j(p) = \begin{cases} c_d \odot x^d \oplus \cdots \oplus c_{j-1} \odot x^{j-1} \oplus c_{j+1} \odot x^{j+1} \oplus \cdots \oplus c_0 & \text{si existen } i < j < k \text{ tales que} \\ & (j-i)c_k - (k-j)c_i \leq (k-i)c_j \\ & \text{en caso contrario.} \\ p(x) & \end{cases}$$

Llamamos a $\text{red}_j(p)$ la **reducción de p en j** .

La condición $(j-i)c_k - (k-j)c_i \leq (k-i)c_j$ es equivalente a exigir que el coeficiente c_j cumpla

$$c_j \geq \frac{k-j}{k-i}c_i + \frac{j-i}{k-i}c_k,$$

es decir, que el punto (j, c_j) esté por encima o sobre la recta que une los puntos (i, c_i) y (k, c_k) . De este modo, si c_j satisface dicha desigualdad, el punto correspondiente no interviene en la representación del polinomio tropical.

Ejemplo 1.1.15 Sea el polinomio tropical del Ejemplo 1.1.13:

$$p(x) = x^{2\odot} \oplus 1 \odot x \oplus 2 = \text{mín}(2x, 1 + x, 2),$$

cuyos coeficientes son $c_2 = 0$, $c_1 = 1$ y $c_0 = 2$. Queremos calcular $\text{red}_1(p)$, es decir, verificar si el coeficiente del término de grado 1 puede ser eliminado. Para ello tomamos $i = 0$, $j = 1$, $k = 2$, y evaluamos la condición:

$$(j-i)c_k - (k-j)c_i \leq (k-i)c_j.$$

Sustituyendo:

$$(1-0) \cdot 0 - (2-1) \cdot 2 \leq (2-0) \cdot 1 \Rightarrow 0 - 2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2,$$

lo cual se cumple. Por tanto, el término de grado 1 puede ser eliminado, y obtenemos:

$$\text{red}_1(p) = x^{2\odot} \oplus 2.$$

Definición 1.1.16 Sea $d \in \mathbb{N}$. Definimos la aplicación $\text{Red} : \mathbb{T}[x]_{\deg \leq d} \rightarrow \mathbb{T}[x]_{\deg \leq d}$ tal que, para todo polinomio tropical $p \in \mathbb{T}[x]_{\deg \leq d}$,

$$\text{Red}(p) = (\text{red}_1 \circ \text{red}_2 \circ \cdots \circ \text{red}_d)(p).$$

Llamamos a $\text{Red}(p)$ la **reducción de p** . Si $\text{Red}(p) = p$, entonces decimos que p es **reducido**.

Ejemplo 1.1.17 Consideremos el polinomio tropical del ejemplo anterior:

$$p(x) = x^{2\odot} \oplus 1 \odot x \oplus 2 = \text{mín}(2x, 1 + x, 2),$$

Aplicamos sucesivamente las reducciones en cada índice:

- $\text{red}_2(p) = p$, ya que no hay términos de mayor grado que el 2.
- $\text{red}_1(p) = x^{2\odot} \oplus 2$, como vimos anteriormente.

Entonces, $\text{Red}(p) = (\text{red}_1 \circ \text{red}_2)(p) = (\text{red}_1(\text{red}_2(p))) = x^{2\odot} \oplus 2 = \text{mín}(2x, 2)$.

Teorema 1.1.18 (Teorema Fundamental del Álgebra Tropical) *Sea p un polinomio tropical reducido de grado d , denotado por*

$$p(x) = c_{i_n} \odot x^{i_n} \oplus \cdots \oplus c_{i_0}.$$

Entonces, para todo $x \in \mathbb{T}$, se cumple que:

$$p(x) = c_{i_n} \odot \bigcirc_{j=1}^n (x \oplus \lambda_j)^{m_j},$$

donde $m_j = i_j - i_{j-1}$ y $\lambda_j = \frac{c_{i_{j-1}} - c_{i_j}}{i_j - i_{j-1}}$. Además, los valores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los únicos elementos de $\overline{\mathbb{R}}$ y m_1, \dots, m_n los únicos elementos de \mathbb{Z}^+ que satisfacen esta expresión.

Demostración. La demostración se puede consultar en [Wan20]. □

Ejemplo 1.1.19 Consideremos el polinomio tropical reducido con coeficientes $c_2 = 0$ y $c_0 = 2$.

$$p(x) = x^{2\odot} \oplus 2 = \text{mín}(2x, 2),$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Álgebra Tropical, podemos escribir:

$$p(x) = c_2 \odot (x \oplus \lambda_1)^{m_1},$$

donde

$$m_1 = i_1 - i_0 = 2 - 0 = 2, \quad \lambda_1 = \frac{c_{i_0} - c_{i_1}}{i_1 - i_0} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1.$$

Por lo tanto,

$$p(x) = 0 \odot (x \oplus 1)^{2\odot} = \text{mín}(2x, 2),$$

que coincide con la expresión original del polinomio reducido.

Cabe recalcar que no se afirma que todo polinomio se factorice en funciones lineales. Sino que todo polinomio puede ser sustituido por un polinomio equivalente que representa la misma función y que puede factorizarse en factores lineales.

La factorización única de polinomios tropicales se cumple en una variable, pero deja de ser válida en dos o más. A continuación, se presenta un ejemplo sencillo de un polinomio bivariado que admite dos factorizaciones irreducibles distintas:

$$(x \oplus 0) \odot (y \oplus 0) \odot (x \odot y \oplus 0) = (x \odot y \oplus x \oplus 0) \odot (x \odot y \oplus y \oplus 0).$$

1.2. Geometría tropical

En esta sección estudiamos las hipersuperficies tropicales, en concreto las de dimensión 2: las curvas tropicales planas, objetos que poseen estructura de grafo poligonal —grafos con vértices y aristas que cumplen una cierta condición de equilibrio—. Este resultado es una consecuencia del Teorema de Estructura (Sección 3.2), el cual constituye un eje central del trabajo.

El objetivo es desarrollar la intuición de la construcción geométrica de rectas y cónicas tropicales, analizando cómo interactúan entre sí y finalizando con el Teorema de Bézout tropical, que refleja las analogías entre la geometría clásica y la tropical.

1.2.1. Hipersuperficies tropicales: Curvas tropicales planas

Definición 1.2.1 Sea $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio tropical. Decimos que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es una **raíz tropical** de p si el valor de $p(x)$ se alcanza de manera simultánea en al menos dos de sus términos.

Esto es, las raíces corresponden a los puntos donde p , visto como función real, no es diferenciable.

Definición 1.2.2 Dado un polinomio tropical p , la **hipersuperficie tropical** asociada a p es el conjunto de todas sus raíces tropicales, denotado por

$$V(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es raíz tropical de } p\}.$$

Para ilustrar estos conceptos, consideremos el siguiente ejemplo en una variable.

Ejemplo 1.2.3 Considérese el polinomio tropical del ejemplo 1.1.9:

$$p(x) = x^{\odot 3} \oplus 1 \odot x^{\odot 2} \oplus 3 \odot x \oplus 6 = \min\{3x, 1 + 2x, 3 + x, 6\}.$$

Las raíces tropicales corresponden a los valores de $x \in \mathbb{R}$ donde al menos dos términos alcanzan simultáneamente el mínimo. Resolviendo las igualdades relevantes, obtenemos las raíces:

$$3x = 1 + 2x \Rightarrow x = 1, \quad 1 + 2x = 3 + x \Rightarrow x = 2, \quad 3 + x = 6 \Rightarrow x = 3.$$

Se han igualado los términos que alcanzan el mínimo simultáneamente. Por ejemplo, en $x = 1$

$$p(1) = \min(3, 3, 4, 6) = 3,$$

el mínimo se alcanza en los dos primeros términos. En cambio, igualdades como $3x = 3 + x$ donde se obtiene $x = 1.5$ no generan raíces, ya que:

$$p(1.5) = \min(4.5, 4, 4.5, 6) = 4,$$

y solo un término alcanza dicho mínimo. Por tanto, el conjunto de raíces tropicales de p es:

$$V(p) = \{1, 2, 3\}.$$

Variedades más interesantes surgen al considerar polinomios en más de una variable. En particular, al trabajar con polinomios tropicales en dos variables, aparecen comportamientos notablemente distintos a los de la geometría algebraica clásica. Estudiemos las hipersuperficies tropicales asociadas a polinomios tropicales en dos variables, los cuales escribiremos como

$$p(x, y) = \bigoplus_{(i,j)} c_{ij} \odot x^{\odot i} \odot y^{\odot j} = \min_{(i,j)} \{c_{ij} + ix + jy\},$$

Definición 1.2.4 Una **curva tropical plana** es la hipersuperficie tropical asociada a un polinomio tropical en dos variables, es decir,

$$V(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{al menos dos términos de } p(x, y) \text{ alcanzan el mínimo simultáneamente}\}.$$

El siguiente resultado clasifica la estructura de las curvas tropicales planas como un complejo poligonal (ver Sección 2.1.4) de dimensión uno en \mathbb{R}^2 , es decir, un grafo. Además, establece una relación algebraico-combinatoria, pues un polinomio (objeto algebraico) induce un grafo (objeto combinatorio) en el plano. Es una consecuencia clave del Teorema de Estructura 3.2.12, fundamental para entender la forma general de las curvas tropicales y con el que cerraremos este documento.

Proposición 1.2.5 [MS21, Cap. 1, § 1.3] *La curva $V(p)$ es un grafo finito representado en el plano \mathbb{R}^2 . Tiene aristas tanto acotadas como no acotadas, las pendientes de las aristas son racionales o infinitas, y el grafo satisface una condición de equilibrio alrededor de cada nodo.*

La **condición de equilibrio** en un nodo de una curva tropical establece que la suma de los vectores direccionales de las aristas que inciden en él, ponderados por su multiplicidad (consultar Sección 1.2.1; hasta entonces, asumimos multiplicidad 1 para todas las aristas), debe ser el vector cero. Es decir, si v_1, v_2, \dots, v_k son los vectores direccionales de las aristas que llegan al nodo, entonces

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = (0, 0).$$

Para ilustrar esta proposición, consideremos un ejemplo concreto de curva tropical plana.

Ejemplo 1.2.6 *Estudiamos la curva tropical definida por el polinomio tropical:*

$$p(x, y) = 1 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2 = \min(1 + x, 2 + y, 2).$$

Buscamos los puntos del plano donde al menos dos de los tres términos alcanzan el mínimo simultáneamente. Esto ocurre en los siguientes casos:

- $1 + x = 2 + y \leq 2$: corresponde a la semirrecta de ecuación $y = x - 1$ para $y \leq 0$.
- $1 + x = 2 \leq 2 + y$: corresponde a la semirrecta vertical $x = 1, y \geq 0$.
- $2 + y = 2 \leq 1 + x$: corresponde a la semirrecta horizontal $y = 0, x \geq 1$.

La curva tropical $V(p)$ resultante es un grafo con vértice en $(1, 0)$, del que parten tres aristas en las direcciones $(-1, -1)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Gráficamente, se corresponde con la Figura 1.5, donde a la izquierda se muestra la representación gráfica de p y a la derecha $V(p)$

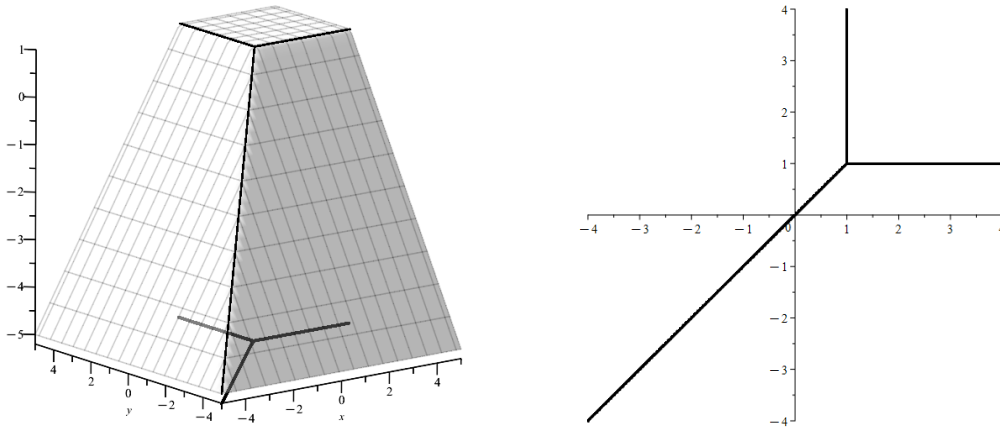


Figura 1.5: Grafo del polinomio tropical p (izquierda) y representación curva tropical $V(p)$ (derecha)

La curva tropical $V(p)$ es un grafo finito compuesto por un único vértice y tres aristas. Las aristas son no acotadas con pendientes $\infty, 0$ y 1 en la dirección norte, este y suroeste respectivamente.

Este grafo cumple la condición de equilibrio en el vértice: los vectores directores de las tres aristas que inciden en él son $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (1, 0)$, $v_3 = (-1, -1)$, y se verifica que

$$v_1 + v_2 + v_3 = (0, 0),$$

lo cual confirma que se satisface la condición de equilibrio en el vértice.

La curva tropical presentada en el ejemplo es un caso particular de lo que se denomina recta tropical.

Definición 1.2.7 Una *recta tropical* es la curva tropical plana definida por un polinomio tropical de la forma

$$p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Teorema 1.2.8 La recta tropical con la estructura de la Definición 1.2.7 es la unión de tres semirrectas con punto de origen $P(x, y) = (c - a, c - b)$.

Demostración. Consideremos la recta tropical definida por $a \odot x \oplus b \odot y \oplus c = \min(a + x, b + y, c)$. A partir de esta definición, podemos deducir las siguientes desigualdades:

$$a + x = b + y \leq c, \quad a + x = c \leq b + y, \quad b + y = c \leq a + x.$$

Resolviendo el sistema que generan las dos primeras ecuaciones $a + x = b + y$, $b + y = c$, obtenemos:

$$x = c - a, \quad y = c - b.$$

Dicho punto, $P = (c - a, c - b)$, es de hecho el origen, para todas las rectas tropicales, de las tres semirrectas definidas por las siguientes ecuaciones:

$$a + x = b + y \leq c, \quad a + x = c \leq b + y, \quad b + y = c \leq a + x.$$

□

Así, toda recta tropical tiene la estructura representada en la Figura 1.6, donde se observa claramente la unión de las tres semirrectas que parten desde el punto $P = (c - a, c - b)$.

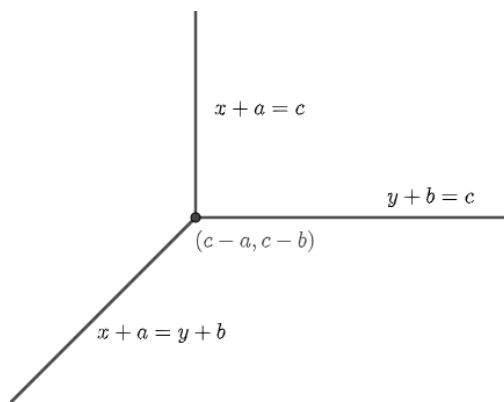


Figura 1.6: Hipersuperficie tropical $V(p)$ siendo $p = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$

Del mismo modo, podemos definir las curvas cuadráticas tropicales.

Definición 1.2.9 Llamamos *curva cuadrática tropical* al conjunto de raíces del polinomio tropical cuadrático

$$p(x, y) = a_{20} \odot x^{2\odot} \oplus a_{02} \odot y^{2\odot} \oplus a_{11} \odot (x \odot y) \oplus a_{10} \odot x \oplus a_{01} \odot y \oplus a_{00}, \quad \text{con } a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

En el caso de las curvas cuadráticas tropicales, no existe un teorema que garantice una forma determinada. Para adquirir una mejor intuición sobre su representación, partiremos de la estructura conocida de la recta tropical y observaremos cómo varía al añadirle o eliminarle términos. Aunque

la curva tropical $V(p)$ se representa en \mathbb{R}^2 , mostraremos también el grafo del polinomio tropical asociado en \mathbb{R}^3 como apoyo visual.

Las gráficas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 han sido elaboradas con ayuda del software Maple, que ofrece herramientas útiles para representar visualmente estructuras tropicales. El código utilizado se recoge en el Apéndice 5.4, con el fin de facilitar su consulta o posible reutilización.

Comenzamos graficando la recta tropical asociada al polinomio $f(x, y) = x \oplus y \oplus 1$

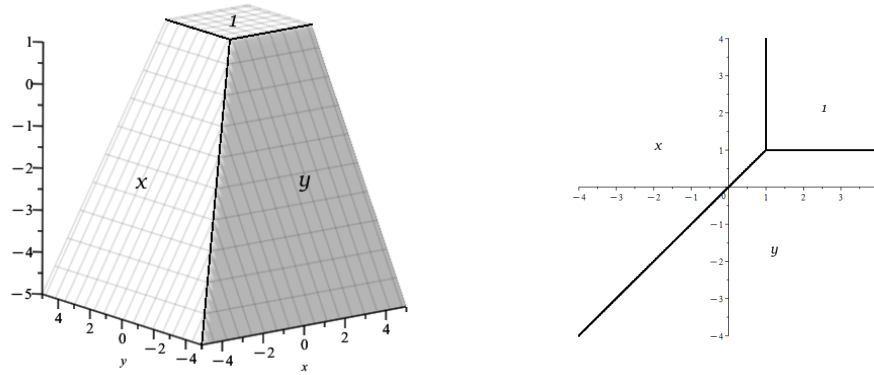


Figura 1.7: Representación de la recta tropical $f(x, y) = x \oplus y \oplus 1$

Analicemos el efecto de añadir el término cruzado a la ecuación de la recta tropical. Consideremos:

$$g(x, y) = x \oplus (x \odot y) \oplus y \oplus 1 = \min(x, x + y, y, 1) = \min(f(x, y), x + y).$$

Geoméricamente, el grafo de $g(x, y)$ corresponde a la envolvente inferior entre la superficie definida por $f(x, y) = \min(x, y, 1)$ y el plano $x + y$. Es decir, en cada punto se toma el valor mínimo:

- *Regiones donde $f(x, y) \leq x + y$:* El grafo de $g(x, y)$ coincide con el de $f(x, y)$.
- *Regiones donde $f(x, y) > x + y$:* El plano $x + y$ determina la altura de $g(x, y)$.

Las zonas donde se igualan $f(x, y) = x + y$ constituyen parte del conjunto de puntos no diferenciables de g , y, por tanto, parte de la hipersuperficie tropical asociada a dicha función.

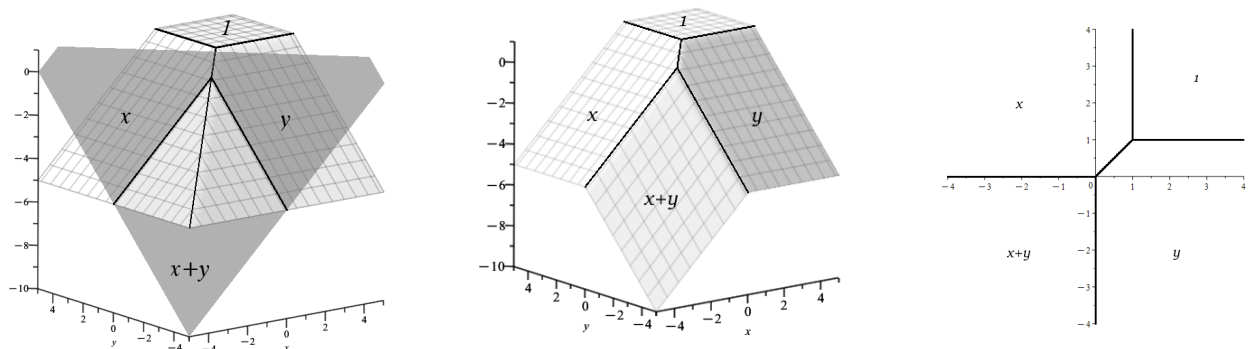


Figura 1.8: Representación de la función tropical $g(x, y) = x \oplus (x \odot y) \oplus y \oplus 1$

Al incorporar el término $x + y$, se altera el conjunto de puntos donde la función deja de ser diferenciable. Esta alteración se refleja en la hipersuperficie tropical como una nueva región que no estaba presente en la variedad asociada al polinomio tropical original $f(x, y)$.

De manera análoga, si deseamos incluir los términos cuadráticos tropicales $1 \odot x^{2\odot}$ y $1 \odot y^{2\odot}$ en el polinomio anterior, basta con representar conjuntamente el grafo de $g(x, y)$ y los planos $Z_1 = 1 + 2x$, $Z_2 = 1 + 2y$ para determinar la envolvente inferior.

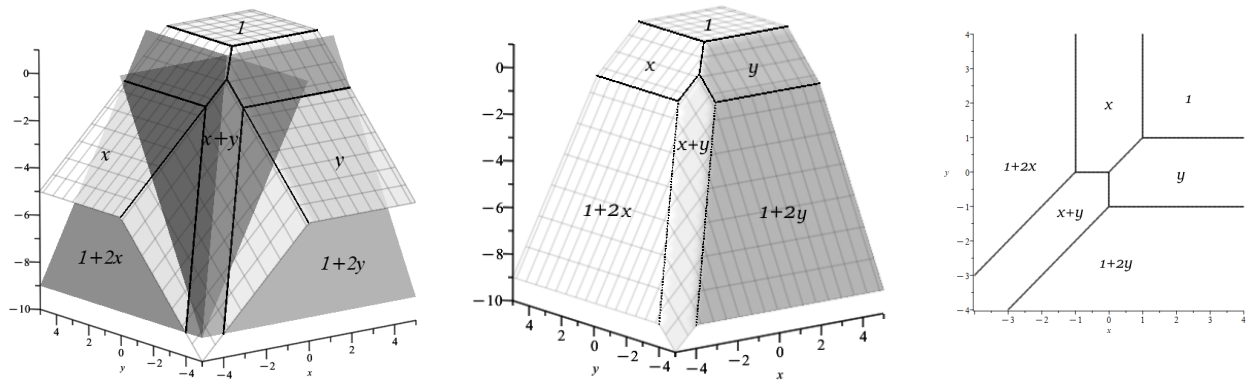


Figura 1.9: Representación de la función tropical $h(x, y) = (1 \oplus x^{2\odot}) \oplus (1 \oplus y^{2\odot}) \oplus x \oplus (x \odot y) \oplus y \oplus 1$

En dos regiones concretas, los planos Z_1, Z_2 toman alturas menores que la función $g(x, y)$, lo que da lugar a dos nuevas regiones en la hipersuperficie tropical.

Si, por el contrario, se elimina un término del polinomio tropical —por ejemplo, el término constante—, el efecto es intuitivo: desaparece la región donde dicho término imponía la cota mínima, y las regiones adyacentes se expanden indefinidamente en sus respectivas direcciones, generando un cambio en la estructura de la hipersuperficie tropical.

En nuestro caso, esas regiones se corresponden con las definidas por x y y , luego la representación de la función sin el término constante responde al grafo e hipersuperficie tropical de la Figura 1.10

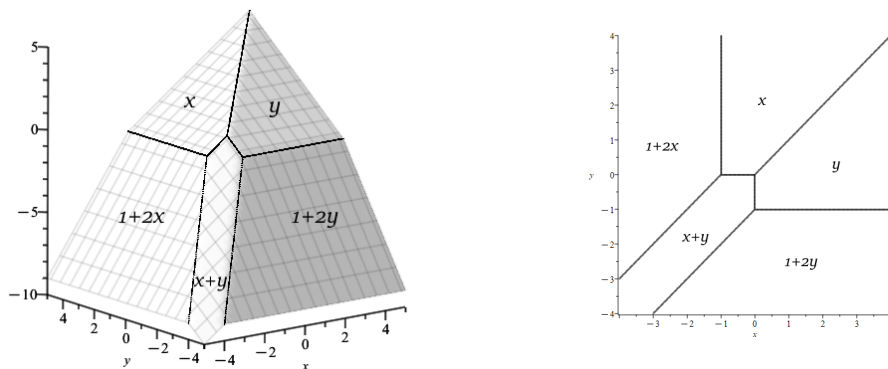


Figura 1.10: Representación de la función tropical $i(x, y) = (1 \oplus x^{2\odot}) \oplus (1 \oplus y^{2\odot}) \oplus x \oplus (x \odot y) \oplus y$

Entender las variedades tropicales como la envolvente inferior de varios planos facilita visualizar cómo varían estas regiones al cambiar sus parámetros.

Por ejemplo, variar los coeficientes tropicales de los términos de un polinomio (que corresponden a los valores constantes asociados a cada monomio) equivale a trasladar los planos correspondientes sin cambiar su inclinación. Y, cambiar los exponentes de las variables en los monomios afecta a la pendiente del plano

Para finalizar esta subsección sobre curvas tropicales planas —en particular, rectas y cónicas tropicales— mostraremos cómo interactúan entre sí, ya que su comportamiento recuerda al de las curvas algebraicas clásicas. Por ejemplo:

- Dos rectas tropicales intersecan en uno o infinitos puntos.

Ambos casos se ilustran en la Figura 1.11, donde se observa gráficamente la diferencia entre una intersección infinita y una intersección en un único punto.

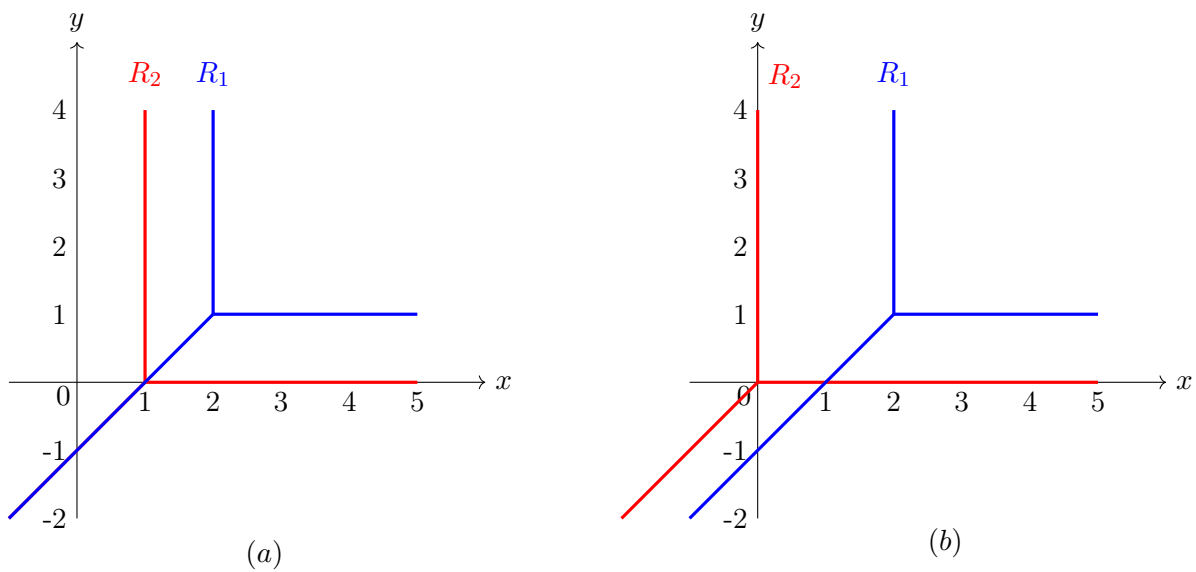


Figura 1.11: Dos rectas tropicales que intersecan en (a) infinitos puntos y (b) un único punto

Ejemplo 1.2.10 Dadas las rectas tropicales de la Figura 1.11 (a):

$$R_1 : 1 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2 = \min(x + 1, y + 2, 2), \quad R_2 : 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 4 = \min(x + 2, y + 3, 4).$$

Para encontrar la intersección, buscamos los puntos (x, y) donde ambos mínimos coinciden y se alcanzan al menos dos veces. Al comparar, notamos que las rectas se intersecan cuando:

$$x + 1 = y + 2, \quad x + 2 = y + 3, \quad \implies \quad x = y + 1.$$

Evaluando esta relación en R_2 , se encuentra que la intersección comienza en el punto $(1, 0)$ y se extiende hacia valores menores de y . Por lo tanto, la intersección de las rectas tropicales es la semirrecta $\{(x, y) \mid x = y + 1, y \leq 0\}$.

Ejemplo 1.2.11 Dadas las rectas tropicales de la Figura 1.11 (b):

$$R_1 : 2 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2 = \min(x + 2, y + 2, 2), \quad R_2 : 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 4 = \min(x + 2, y + 3, 4).$$

Buscamos los puntos en los que las expresiones tropicales coinciden, lo que resulta en:

$$y + 2 = 2, \quad x + 2 = y + 3, \quad \implies \quad y = 0, \quad x = y + 1$$

Sustituyendo, se obtiene el punto $(1, 0)$ como única solución compatible con ambas rectas.

- Dos puntos generales definen una única recta tropical.

Demostración. Supongamos dos puntos genéricos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en el plano que no coinciden en alguna de las tres semirrectas que conforman la recta tropical de ecuación:

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que (x_1, y_1) pertenece a la semirecta de dirección suroeste. De modo que se satisface:

$$y + b = x + a \implies y_1 + b = x_1 + a \implies b = a + x_1 - y_1$$

Para distintos coeficientes $(a, b, c) = (\lambda, \lambda + x_1 - y_1, c)$ con c fijo, obtengo la familia de rectas:

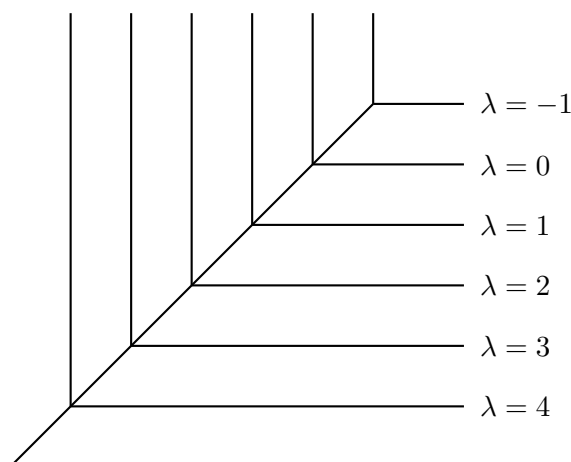


Figura 1.12: Familia de rectas tropicales cuya semirecta de dirección suroeste pasa por un punto

Para determinar completamente la recta, consideremos otro punto (x_2, y_2) y supongamos que dicho punto se encuentra, sin pérdida de generalidad en la semirecta de dirección este:

$$x + a = c \implies x_2 + a = c$$

Así, quedan determinados los valores $(a, b, c) = (\lambda, \lambda + x_1 - y_1, \lambda + x_2)$, cuya recta tropical asociada coincide para todo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto se debe a que todos los valores (a, b, c) son proporcionales en el sentido tropical:

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c = \lambda \odot x \oplus (\lambda + x_1 - y_1) \odot y \oplus (\lambda + x_2) =$$

$$\text{mín}(\lambda + x, \lambda + x_1 - y_1 + y, \lambda + x_2) = \lambda + \text{mín}(x, x_1 - y_1 + y, x_2)$$

El valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ no afecta qué monomios están involucrados en cada una de las aristas \square

- Cinco puntos generales determinan una única cónica tropical.

Demostración. Sea una cónica tropical definida como $V(p)$, siendo el polinomio

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a_{20} \odot x^{2\odot} \oplus a_{02} \odot y^{2\odot} \oplus a_{11} \odot (x \odot y) \oplus a_{10} \odot x \oplus a_{01} \odot y \oplus a_{00}. \\ &= \text{mín}(a_{20} + 2x, a_{02} + 2y, a_{11} + x + y, a_{10} + x, a_{01} + y, a_{00}), \end{aligned}$$

donde los coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $a_{00} = 0$, ya que sumar o restar la misma constante a todos los coeficientes no cambia la curva tropical que define el polinomio. Por tanto, las cónicas tropicales están determinadas por 5 parámetros reales independientes.

Consideremos ahora cinco puntos genéricos en el plano tropical:

$$P_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Cada punto P_i impone una condición sobre los coeficientes del polinomio tropical: que el mínimo en la expresión $F(x_i, y_i)$ se alcance al menos en dos términos distintos. Es decir, para cada punto existen índices $(j, k) \neq (j', k')$ tales que

$$a_{jk} + jx_i + ky_i = a_{j'k'} + j'x_i + k'y_i \leq \text{todos los demás términos}.$$

Cada una de estas igualdades representa una ecuación lineal (en el sentido clásico) entre los coeficientes a_{ij} , al evaluar en el punto (x_i, y_i) . En total, los cinco puntos generan cinco ecuaciones lineales independientes en los seis coeficientes.

Como hemos fijado uno de los coeficientes (por ejemplo $a_{00} = 0$), nos quedan cinco variables libres. Las cinco ecuaciones impuestas por los puntos determinan entonces un único valor posible para estos coeficientes, y por lo tanto, una única cónica tropical que pasa por los cinco puntos dados. \square

- Una recta tropical y una cónica tropical se encuentran en dos puntos.
- Dos cónicas tropicales se encuentran en cuatro puntos.

Los dos últimos puntos son casos particulares de resultado clásico de la geometría algebraica que también tiene su análogo en la geometría tropical: *El Teorema de Bézout*. En la siguiente subsección explicamos cómo se formula este teorema en geometría tropical.

Teorema de Bezout

En geometría algebraica clásica, el Teorema de Bézout [CLO07] afirma que dos curvas planas sin componentes comunes, de grados c y d , se intersectan en exactamente $c \cdot d$ puntos, contando multiplicidades y puntos en el infinito. En geometría tropical, esta afirmación requiere una reformulación cuidadosa, pues las curvas tropicales pueden presentar comportamientos de intersección distintos a los de su análogo clásico. Concretamente, es posible encontrar casos en los que dos curvas tropicales diferentes, no intersecan en un conjunto finito de puntos (véase la Figura 1.11(a)), lo cual no ocurre en el caso clásico si las curvas son irreducibles y no comparten componentes. De modo que para enunciar el teorema en este contexto, es necesario introducir previamente algunas definiciones.

Definición 1.2.12 *Dos curvas tropicales C y D **intersecan transversalmente** si ningún vértice de C ni de D está contenido en $C \cap D$. En caso contrario, la intersección es **no transversal**.*

En la Figura 1.11(a) se observa una intersección no transversal, donde las rectas comparten una región con infinitos puntos en común. Por otro lado, la Figura 1.11(b) presenta una intersección transversal.

Definición 1.2.13 *Sea $p(x, y)$ un polinomio tropical y $V(p)$ su curva tropical asociada. Cada arista de $V(p)$ está determinada por un par de monomios. Sean (i, j) y (k, l) los exponentes de los dos monomios implicados. Entonces, **el peso o multiplicidad de la arista** se define como:*

- $|i - k|$ si $j = l$,
- $|j - l|$ si $i = k$,
- $\gcd(|i - k|, |j - l|)$ en otro caso.

Multiplicidad de intersección. Para calcular la multiplicidad de intersección entre dos curvas tropicales en un punto común, consideramos las aristas de ambas curvas que se cruzan en ese punto. Sea $v = (a_1, a_2)$ y $w = (b_1, b_2)$ los *vectores de dirección primitivos* de esas aristas (es decir, los vectores más cortos en módulo con coordenadas enteras coprimas que indican la dirección de la arista), y sean m_v y m_w sus respectivas multiplicidades. Entonces, la multiplicidad de intersección en ese punto se define como:

$$\text{mult}(v, w) = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \cdot m_v \cdot m_w.$$

Este valor es el determinante en valor absoluto de los vectores de dirección, multiplicado por las multiplicidades de las aristas. Si los vectores son paralelos, el determinante es cero y no hay una intersección transversal.

Con estas nociones, el Teorema de Bézout también se cumple en el sentido tropical:

Teorema 1.2.14 (Bézout tropical) *Sean C y D dos curvas tropicales de grados c y d en \mathbb{R}^2 . Si las curvas intersecan transversalmente, entonces intersecan en $c \cdot d$ puntos, contados con multiplicidades.*

Ejemplo 1.2.15 *Consideremos las rectas tropicales del ejemplo anterior correspondiente a la Figura 1.11(b). Estas rectas intersecan en el punto $(1, 0)$, que pertenece a la arista con dirección este de R_1 y de dirección suroeste de R_2 . A continuación calculamos la multiplicidad de intersección:*

- *Arista este de R_1 : Definida por los monomios $y + 2, 2$ con vector de dirección primitiva $v = (1, 0)$. La multiplicidad de la arista es 1, pues los exponentes asociados a la variable x coinciden.*
- *Arista suroeste de R_2 : Los monomios $x + 2, y + 3$ definen la arista con vector de dirección primitiva $w = (-1, -1)$ La multiplicidad de la arista es $\gcd(1, 1) = 1$.*

De modo que la multiplicidad de la intersección en ese punto es

$$\text{mult}(v, w) = |1 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1)| \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Intersección de una recta tropical y una cónica tropical Estudiamos a continuación los puntos de intersección entre una cónica tropical y una recta tropical. Consideramos los siguientes polinomios tropicales:

$$C(x, y) = 1 \oplus x \oplus y \oplus (x \odot y) \oplus (1 \odot x^{\odot 2}) \oplus (1 \odot y^{\odot 2}) = \min(1, x, y, x + y, 1 + 2x, 1 + 2y),$$

$$R(x, y) = -1.5 \oplus x \oplus y = \min(-1.5, x, y).$$

La representación gráfica de las curvas tropicales correspondientes a $C(x, y)$ y $R(x, y)$, es decir, las hipersuperficies tropicales definidas por estos polinomios, se muestra a continuación:

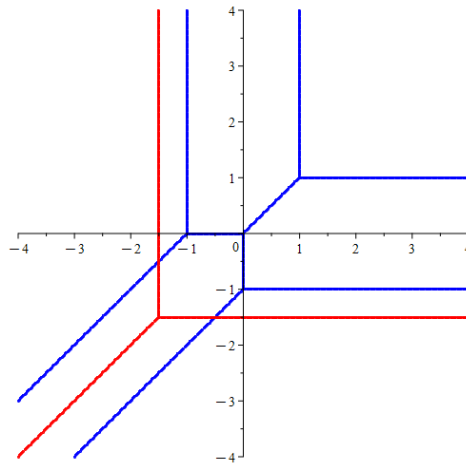


Figura 1.13: Representación de una recta tropical (rojo) y una cónica tropical (azul).

Observamos que las curvas tropicales se intersecan transversalmente, por lo que es aplicable el Teorema de Bézout en el contexto tropical. En este caso, identificamos dos puntos de intersección. Procedemos a calcular las multiplicidades asociadas a cada uno de ellos:

- Intersección izquierda:

La arista de la recta involucrada tiene dirección norte, con vector director $v_{IR} = (1, 0)$, y está determinada por los monomios x y -1.5 , por lo que su multiplicidad es $m_{IR} = 1$.

Por parte de la cónica, interviene una arista con vector director $w_{IC} = (-1, -1)$, determinada por los monomios $x^{\odot 2}$ y $x \odot y$, lo que también le otorga multiplicidad $m_{IC} = 1$.

- Intersección derecha:

Interviene la arista de la recta con dirección oeste, con vector director $v_{DR} = (0, 1)$, asociada a los monomios y y -1.5 , y multiplicidad $m_{DR} = 1$.

La cónica, nuevamente, presenta una arista con dirección $w_{DC} = (-1, -1)$, formada por los monomios $y^{\odot 2}$ y $x \odot y$, luego posee una multiplicidad $m_{DC} = 1$.

De manera que las multiplicidades de intersección son las siguientes:

$$\text{mult}(v_{IR}, w_{IC}) = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right| \cdot m_{IR} \cdot m_{IC} = 1, \quad \text{mult}(v_{DR}, w_{DC}) = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right| \cdot m_{DR} \cdot m_{DC} = 1.$$

Por tanto, la suma de las multiplicidades en los puntos de intersección es:

$$1 \cdot \text{mult}(v_{IR}, w_{IC}) + 1 \cdot \text{mult}(v_{DR}, w_{DC}) = 1 + 1 = 2.$$

Al igual que en la geometría clásica, una recta tropical y una cónica tropical se intersecan, contando multiplicidades y puntos en el infinito, en exactamente dos puntos.

Intersección de dos cónicas tropicales Estudiamos a continuación los puntos de intersección entre dos cónica tropicales. Consideramos los polinomios tropicales:

$$C_1(x, y) = 1 \oplus x \oplus y \oplus (x \odot y) \oplus (1 \odot x^{\odot 2}) \oplus (1 \odot y^{\odot 2}) = \text{mín}(1, x, y, x + y, 1 + 2x, 1 + 2y),$$

$$C_2(x, y) = 1 \oplus x^{2\odot} \oplus (1.5 \odot y) = \text{mín}(1, 2x, 1.5 + y).$$

La representación gráfica de las curvas tropicales asociadas a $C_1(x, y)$ y $C_2(x, y)$ se observa en la Figura 1.14:

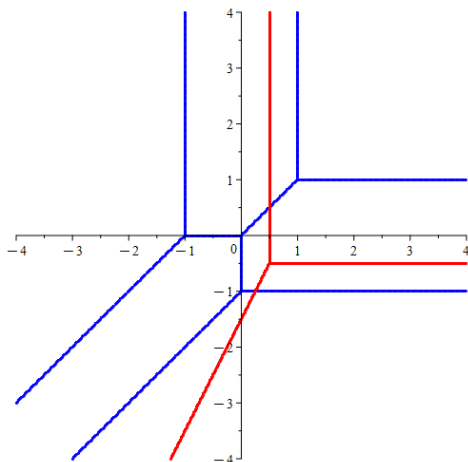


Figura 1.14: Representación de dos curvas cuadráticas tropicales.

De nuevo las curvas tropicales intersecan transversalmente, por lo que podemos aplicar el Teorema de Bézout tropical. Observamos dos puntos de intersección, calculamos las multiplicidades asociadas a cada uno de ellos:

■ **Intersección izquierda:**

Por parte de C_1 , interviene una arista con vector director $w_{IC_1} = (1, 0)$, correspondiente a los monomios $x^{\odot 2}$ y 1 , con multiplicidad $m_{IC_1} = 1$.

La arista de C_2 involucrada tiene dirección suroeste, con vector director $v_{IC_2} = (-1, -2)$, pues está determinada por los monomios $x^{\odot 2}$ y $1.5 \odot y$. Su multiplicidad es $m_{IC_2} = \text{gcd}(2, 1) = 1$.

■ **Intersección derecha:**

La arista de C_2 tiene dirección norte, con vector director $v_{DC_2} = (0, 1)$, determinada por los monomios 1 y $y^{\odot 2}$. La multiplicidad correspondiente es $m_{DC_2} = 2$.

La arista de C_1 involucrada posee vector director $w_{DC_1} = (1, 1)$, formada por los monomios $1.5 \odot y$ y $x^{\odot 2}$, con multiplicidad $m_{DC_1} = 1$.

Calculamos las multiplicidades de intersección utilizando

$$\text{mult}(v_{IC_1}, w_{IC_2}) = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \right| \cdot m_{IC_1} \cdot m_{IC_2} = 2, \quad \text{mult}(v_{DC_1}, w_{DC_2}) = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| \cdot m_{DC_1} \cdot m_{DC_2} = 2.$$

Por tanto, la suma de las multiplicidades en los puntos de intersección es:

$$1 \cdot \text{mult}(v_{IC}, w_{IC}) + 1 \cdot \text{mult}(v_{DC}, w_{DC}) = 2 + 2 = 4.$$

Al igual que en la geometría clásica, dos cónicas tropicales se intersecan, contando multiplicidades, en exactamente cuatro puntos.

Capítulo 2

Preparación algebraica y geométrica para los resultados principales

En este capítulo recogemos las herramientas algebraicas y geométricas necesarias para poder formular y demostrar los dos grandes resultados de la geometría tropical: el Teorema Fundamental y el Teorema de Estructura. El enfoque aquí es más técnico que en el capítulo anterior, pero nos permitirá formalizar muchas de las intuiciones visuales que ya hemos visto y dar el salto a una teoría general de variedades tropicales.

A lo largo de las secciones iremos introduciendo conceptos clave como el anillo de Laurent, las valoraciones, la forma inicial o la geometría poliédrica, todos ellos fundamentales para entender cómo se define y se estructura una variedad tropical. Esta preparación culminará con el estudio de la tropicalización de hipersuperficies, el enunciado del Teorema de Kapranov, primer paso hacia la versión general del Teorema Fundamental de la Geometría Tropical y el caso para hipersuperficies del Teorema de Estructura.

2.1. Nociones previas

Antes de poder enunciar y demostrar los teoremas fundamentales de la geometría tropical, necesitamos introducir algunas herramientas básicas. Esta sección no pretende ser un repaso, sino una primera toma de contacto con varios conceptos algebraicos y geométricos que serán fundamentales en lo que sigue.

A lo largo del capítulo iremos construyendo el lenguaje necesario para trabajar en el contexto tropical: introduciremos los cuerpos valorados, el anillo de polinomios de Laurent, la noción de forma inicial y las definiciones básicas de la geometría poliédrica, que veremos más adelante cómo rigen el comportamiento de las variedades tropicales.

2.1.1. Anillo de polinomios de Laurent

Los ideales asociados a las variedades tropicales se definen a partir de elementos del anillo de Laurent, por lo que el estudio de sus propiedades resulta fundamental para comprender su comportamiento.

A lo largo de esta sección seguiremos diversas referencias que iremos citando, aunque en gran medida se ha basado en [Nav14].

Definición 2.1.1 *El anillo de polinomios de Laurent en n variables sobre un cuerpo conmutativo \mathbb{K} se denota como*

$$\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}],$$

Los elementos del anillo son combinaciones finitas de monomios con exponentes enteros, es decir

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} a_{\mathbf{k}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},$$

donde $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, cada $k_i \in \mathbb{Z}$, y $a_{\mathbf{k}} \in \mathbb{K}$, con la condición de que solo un número finito de coeficientes $a_{\mathbf{k}}$ son distintos de cero.

Algunas de las propiedades más importantes son:

- Invertibilidad de monomios: Todo monomio $\alpha \mathbf{x}^\alpha$ tiene inverso multiplicativo $\beta \mathbf{x}^\beta$, donde $\beta_i = \alpha_i^{-1}$. Esto implica que todo ideal que posea un monomio, es el total.
- Geometría algebraica: Las variedades definidas por ideales en este anillo se estudian naturalmente en el **toro algebraico** $(\mathbb{K}^*)^n = T^n$, donde $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Esto evita singularidades en los ceros de las variables.
- Localización: Puede verse como la localización del anillo de polinomios estándar respecto al sistema multiplicativo generado por la función $f = x_1 \cdots x_n$.

Definición 2.1.2 *Sea S sistema multiplicativo de un anillo A (i.e., $1 \in S$ y $s, s' \in S \implies ss' \in S$). Llamamos anillo de fracciones o **localización de A respecto a S** , denotada $S^{-1}A$ ó A_S , al conjunto cociente $(A \times S)/\equiv$ con la estructura de anillo que definen las operaciones:*

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

donde $\frac{a}{s} = \pi(a, s)$ y $\pi : A \times S \rightarrow (A \times S)/\equiv$ es la proyección canónica.

Observación 2.1.3 *Sea \mathfrak{p} un ideal primo del anillo A . Denotaremos $A_{\mathfrak{p}}$ la localización de A por el sistema multiplicativo $S = A - \mathfrak{p}$*

Ejemplo 2.1.4 *Sea $A = \mathbb{Z}$, el anillo de los enteros, y sea $\mathfrak{p} = (5)$, el ideal primo generado por 5. El sistema multiplicativo $S = A \setminus \mathfrak{p} = \mathbb{Z} \setminus (5)$ está formado por los enteros que no son múltiplos de 5. La localización de A por S , es el anillo formado por los elementos de la forma*

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad 5 \nmid b,$$

es decir, los números racionales cuyos denominadores no son divisibles entre 5.

Observación 2.1.5 *Sea A un anillo de polinomios y el sistema multiplicativo $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ para algún $f \in R$, escribimos $A_f = S^{-1}A$. A_f permite expresar inversos de f como $\frac{1}{f}$.*

Tomando A un anillo de polinomios y el sistema multiplicativo $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ para algún $f \in R$, escribimos $A_f := S^{-1}A$. En este caso, A_f permite expresar inversos de f como $\frac{1}{f}$.

Ejemplo 2.1.6 Sea $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo \mathbb{K} . La localización en el elemento $f = x_1 \cdots x_n$ es:

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n} := \left\{ \frac{g}{(x_1 \cdots x_n)^k} \mid g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], k \geq 0 \right\} = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}],$$

La igualdad $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n} = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ se explica porque al invertir $x_1 \cdots x_n$, podemos obtener inversos para cada x_i :

$$\frac{1}{x_i} = \frac{x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n}{(x_1 \cdots x_n)} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}.$$

Al considerar el anillo de Laurent como la localización del anillo de polinomios sobre \mathbb{K} , podemos aplicar ciertas propiedades de los anillos que se conservan con la localización.

Definición 2.1.7 Un anillo A se dice **noetheriano** si satisface alguna (y por tanto todas) de las siguientes condiciones equivalentes:

1. Todo ideal de A es finitamente generado.
2. Toda cadena ascendente de ideales de A se estabiliza; es decir, para toda sucesión de ideales

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots,$$

existe un entero n tal que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$.

3. Todo conjunto no vacío de ideales de A tiene un elemento maximal con respecto a la inclusión.

Proposición 2.1.8 Sea S un sistema multiplicativo de un anillo Noetheriano A . Entonces, la localización $S^{-1}A$ también es un anillo Noetheriano.

Demostración. La idea de la demostración es que cada ideal \mathfrak{b} de $S^{-1}A$ es la localización del ideal $A \cap \mathfrak{b}$ de A , así que \mathfrak{b} es finitamente generado cuando lo es $A \cap \mathfrak{b}$. \square

Proposición 2.1.9 [Kap70, Cap. 1, §4] Sea S un sistema multiplicativo no nulo de un dominio de factorización única A . Entonces, la localización $S^{-1}A$ también es un DFU.

Proposición 2.1.10 [Sal01, §3.1] Sea S un sistema multiplicativo no nulo de un dominio de ideales principales A . Entonces, la localización $S^{-1}A$ también es un DIP.

Demostración. Sea $q \subset S^{-1}A$ un ideal primo. Su preimagen $p = q \cap A$ es un ideal primo de A . Como A es un dominio de ideales principales, existe $\pi \in A$ tal que $p = (\pi)$. Por tanto, $\frac{\pi}{1} \in q$, y $(\frac{\pi}{1}) \subset q$. Basta probar que el ideal $(\frac{\pi}{1}) \subset S^{-1}A$ es primo.

Tomemos $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}A$ y tales que $\frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \in (\frac{\pi}{1})$. Entonces existe $c \in A$ y $u \in S$ tal que $uab = c\pi$. Como A es un dominio y π es primo, se tiene que $\pi \mid a$ o $\pi \mid b$. Por tanto, $\frac{a}{s} \in (\frac{\pi}{1})$ o $\frac{b}{t} \in (\frac{\pi}{1})$.

Esto prueba que el ideal $(\frac{\pi}{1}) \subset S^{-1}A$ es primo. Como todo ideal primo de $S^{-1}A$ es principal, se concluye que $S^{-1}A$ es un dominio de ideales principales. \square

De manera que llegamos a los siguientes resultados:

1. El anillo de Laurent $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es Noetheriano.
Observamos primero que \mathbb{K} es un anillo Noetheriano, ya que en un cuerpo los únicos ideales son $\langle 0 \rangle$ y $\langle 1 \rangle$, ambos finitamente generados. Por el Teorema de la Base de Hilbert, se deduce que el anillo de polinomios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ también es Noetheriano. Finalmente, aplicando la Proposición 2.1.8, se concluye que el anillo de Laurent $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, también lo es.
2. El anillo de Laurent $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es un dominio de factorización única.
Como $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es un dominio de factorización única se concluye, por la Proposición 2.1.9, que $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ también es un dominio de factorización única.
3. El anillo de Laurent en una variable $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ es un dominio de ideales principales (DIP).
Sabemos que $\mathbb{K}[x]$ es un dominio de ideales principales, por ser un anillo de polinomios en una variable sobre un cuerpo. Se deduce por la Proposición 2.1.10 que $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ también lo es.

Recordamos el concepto de *altura* de un ideal primo \mathfrak{p} , que es el tamaño de la cadena ascendente de ideales primos más larga que se puede hacer hasta llegar a \mathfrak{p} . Formalmente:

Definición 2.1.11 Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo de A , definimos la **altura** de \mathfrak{p} , y la denotamos como $\text{ht}(\mathfrak{p})$, como el supremo de los $n \in \mathbb{N}$ tales que existe una cadena

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$$

de longitud n . Si el supremo no existe, decimos que la altura es infinita.

Lema 2.1.12 [Mat89, §20.1] Sea R un dominio de tipo Noetheriano. Entonces R es un dominio de factorización única si y sólo si todo ideal primo de altura 1 es principal.

Demostración. Demostraremos únicamente la implicación “ \Rightarrow ”, que es la que utilizaremos en este trabajo. La recíproca puede encontrarse, en la referencia.

\Rightarrow Supongamos que A es un DFU y que P es un ideal primo de altura 1. Tomemos un elemento no nulo $a \in P$, y expresemos a como un producto de elementos primos,

$$a = \prod \pi_i.$$

Entonces al menos uno de los π_i pertenece a P ; si $\pi_i \in P$ entonces $\langle \pi_i \rangle \subset P$, pero $\langle \pi_i \rangle$ es un ideal primo no nulo y la altura de P es 1, por lo tanto $P = \langle \pi_i \rangle$. \square

Proposición 2.1.13 [Mat89, Cap. 5, §14] Sea k un cuerpo y B un dominio de integridad que es una k -álgebra finitamente generada. Entonces, para cualquier ideal primo \mathfrak{p} en B , se cumple

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) + \dim B/\mathfrak{p} = \dim B.$$

2.1.2. Valoración

En esta sección introduciremos el concepto de valoración, fundamental para la tropicalización de polinomios y variedades algebraicas. Se seguirán principalmente las referencias [Nav14] y [MS21, Cap. 2].

Definición 2.1.14 Sea K un cuerpo. Una **valoración** sobre K es una función sobreyectiva

$$\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

que satisface los siguientes axiomas:

- I) $\text{val}(a) = \infty$ si y solo si $a = 0$,
 II) $\text{val}(ab) = \text{val}(a) + \text{val}(b)$,
 III) $\text{val}(a + b) \geq \text{mín}(\text{val}(a), \text{val}(b))$ para todo a, b .

La imagen de la función se denota Γ_{val} y recibe el nombre de grupo de valores. Este conjunto, sin el infinito, es un subgrupo aditivo de los números reales \mathbb{R} . Verificamos los axiomas de subgrupo:

- Cerrado bajo suma: Dados $a, b \in K$, se tiene $\text{val}(a) + \text{val}(b) = \text{val}(ab) \in \Gamma_{\text{val}}$.
- Elemento neutro: $\text{val}(1) = 0 \in \Gamma_{\text{val}}$. Dado $a \in K$, se satisface:

$$\text{val}(a) = \text{val}(1 \cdot a) = \text{val}(1) + \text{val}(a) \implies \text{val}(1) = 0$$

- Inversos aditivos: Para $a \in K$, su inverso multiplicativo verifica $\text{val}(a^{-1}) = -\text{val}(a) \in \Gamma_{\text{val}}$:

$$\text{val}(a) + \text{val}(a^{-1}) = \text{val}(aa^{-1}) = \text{val}(1) = 0 \implies \text{val}(a^{-1}) = -\text{val}(a)$$

En la mayoría de los contextos, se asume que el grupo de valores Γ_{val} contiene al número 1. Esta suposición no impone una restricción significativa, ya que si val es una valoración, entonces para cualquier número real positivo $\lambda > 0$, la función $(\lambda \cdot \text{val}) : K \rightarrow \mathbb{R}$ también define una valoración. Es decir, podemos escalar la valoración sin perder su validez.

Proposición 2.1.15 *Sea K un cuerpo con una valoración. Entonces, para todo $b \in K$, se cumple*

$$\text{val}(-b) = \text{val}(b)$$

Demostración. Partiendo de la identidad algebraica $(-1)^2 = 1$ obtenemos:

$$0 = \text{val}(1) = \text{val}((-1)^2) = 2 \cdot \text{val}(-1)$$

Como $\text{val}(1) = 0$, se deduce que $\text{val}(-1) = 0$. Ahora, sea $b \in K$ arbitrario. Entonces, utilizando el segundo axioma de la valoración:

$$\text{val}(-b) = \text{val}((-1) \cdot b) = \text{val}(-1) + \text{val}(b) = 0 + \text{val}(b) = \text{val}(b).$$

Por lo tanto, $\text{val}(-b) = \text{val}(b)$, como se quería demostrar. □

Lema 2.1.16 *Si $\text{val}(a) \neq \text{val}(b)$, entonces $\text{val}(a + b) = \text{mín}(\text{val}(a), \text{val}(b))$.*

Demostración. Sean $a, b \in K$ y sin pérdida de generalidad, supongamos $\text{val}(b) > \text{val}(a)$. Dado que $a = (a + b) + (-b)$, aplicando el tercer axioma de la valoración, llegamos a:

$$\text{val}(a) \geq \text{mín}(\text{val}(a + b), \text{val}(-b)) = \text{mín}(\text{val}(a + b), \text{val}(b)) = \text{val}(a + b)$$

Por lo tanto, $\text{val}(a) \geq \text{val}(a + b)$. Por otro lado, al aplicar nuevamente el axioma (3)

$$\text{val}(a + b) \geq \text{mín}(\text{val}(a), \text{val}(b)) = \text{val}(a).$$

De ambas desigualdades se deduce que $\text{val}(a + b) = \text{val}(a)$. □

A continuación, se presentan algunos ejemplos de valoraciones con el fin de facilitar su comprensión:

Ejemplo: Valoración trivial

Definición 2.1.17 Sea K un cuerpo. La **valoración trivial** en K es la función

$$\text{val} : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

definida por

$$\text{val}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 0, \\ \infty & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Esta valoración asigna el mismo valor a todos los elementos no nulos de K .

Es fácil comprobar que satisface los axiomas de valoración: En primer lugar, $\text{val}(a) = \infty$ si y solo si $a = 0$ por definición. Además, para $a, b \in K$, se cumple $\text{val}(ab) = \text{val}(a) + \text{val}(b)$ ya que si alguno es cero, el producto es cero y la igualdad se mantiene; en caso contrario, ambas valoraciones son cero y su suma también. Finalmente, $\text{val}(a + b) \geq \min(\text{val}(a), \text{val}(b))$ se cumple porque salvo que $a + b = 0$, la valoración de la suma es cero, igual al mínimo de las valoraciones de a y b .

Ejemplo: Valoración p -ádica. Sea p un número primo fijo. Para cualquier número racional no nulo $x \in \mathbb{Q}^*$, existe una descomposición única de la forma

$$x = p^n \frac{a}{b},$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ y los enteros a, b son tales que p no divide ni a a ni a b , es decir, $\text{gcd}(p, a) = \text{gcd}(p, b) = 1$.

Esta unicidad es fundamental porque garantiza que la valoración p -ádica que se definirá a continuación esté bien definida, es decir, que asigne un único valor a cada número racional.

Definición 2.1.18 La valoración p -ádica es una función $\text{val}_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definida por:

$$\text{val}_p(x) := \begin{cases} n, & \text{si } x = p^n \frac{a}{b} \text{ con } \text{gcd}(p, a) = \text{gcd}(p, b) = 1 \text{ y } x \neq 0, \\ \infty, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta valoración mide la potencia máxima de p que divide a x . En particular:

- Si $\text{val}_p(x) > 0$, entonces p divide a x al menos n veces (aparece en el numerador).
- Si $\text{val}_p(x) < 0$, entonces p divide más veces al denominador que al numerador.

Veamos que se satisfacen los axiomas de valoración. Para ello tomamos $a, b \in \mathbb{Q}^*$

$$a = p^n \frac{a_1}{a_2}, \quad b = p^m \frac{b_1}{b_2}, \quad \text{con } p \nmid a_1, a_2, b_1, b_2.$$

I) Por definición, $\text{val}_p(0) = \infty$.

II) La valoración del producto es la suma de las valoración ya que,

$$\text{val}_p(ab) = \text{val}_p\left(p^{n+m} \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}\right) = n + m = \text{val}_p(a) + \text{val}_p(b).$$

- III) Supongamos sin pérdida de generalidad que $n \leq m$. Entonces $a + b = p^n \left(\frac{a_1}{a_2} + p^{m-n} \frac{b_1}{b_2} \right)$. Como el término entre paréntesis no es divisible por p si $m > n$, obtenemos

$$\text{val}_p(a + b) = n = \min(\text{val}_p(a), \text{val}_p(b)),$$

y si $m = n$ entonces el término entre paréntesis puede ser divisible por p , así que

$$\text{val}_p(a + b) \geq n = \min(\text{val}_p(a), \text{val}_p(b)).$$

Ejemplo 2.1.19 *Fijamos como número primo $p = 3$.*

Para $x = \frac{81}{70}$, como $81 = 3^4$ y 70 no es divisible por 3 , entonces $\text{val}_3(x) = 4$.

Para $y = \frac{14}{27}$ como $27 = 3^3$, resulta $\text{val}_3(y) = 0 - 3 = -3$.

Definición 2.1.20 *Sea K un cuerpo dotado de una valoración $\text{val} : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, donde Γ es un subgrupo ordenado de \mathbb{R} . Se definen:*

- *El anillo de valoración es el conjunto de los elementos de K cuya valoración es no negativa:*

$$R := \{a \in K \mid \text{val}(a) \geq 0\}.$$

- *Su único ideal maximal está formado por los elementos no invertibles:*

$$\mathfrak{m} := \{a \in K \mid \text{val}(a) > 0\}.$$

- *El cuerpo residual:*

$$k := R/\mathfrak{m}.$$

La imagen de $a \in R$ en k mediante la proyección canónica $\pi : R \rightarrow k$ se denota por \bar{a} .

Si f es un polinomio con coeficientes en R , escribimos \bar{f} para el polinomio obtenido al sustituir cada coeficiente a por su clase $\bar{a} \in k$.

Ejemplo 2.1.21 *Consideremos el cuerpo de series de Laurent formales con la valoración:*

$$\text{val} \left(\sum_{n \geq N} a_n t^n \right) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}.$$

Entonces:

- *El anillo de valoración es $R = \mathbb{C}[[t]]$, las series de potencias formales.*
- *El ideal maximal es $\mathfrak{m} = t\mathbb{C}[[t]]$. Pues los elementos no invertibles en son aquellos cuya parte constante es cero.*
- *El cuerpo residual es:*

$$k = \mathbb{C}[[t]]/t\mathbb{C}[[t]] \cong \mathbb{C}.$$

La aplicación $R \rightarrow k$ simplemente asigna a cada serie su coeficiente constante:

$$\sum_{n \geq 0} a_n t^n \mapsto a_0.$$

Para mantener la fluidez y claridad del desarrollo en esta sección, el ejemplo detallado de la valoración de Puiseux se presenta en el Apéndice 5.5, por su extensión.

2.1.3. Forma Inicial

Para pasar de un polinomio clásico a su imagen tropical, es necesario identificar los términos que dominan con respecto a una valoración dada. La **forma inicial** de un polinomio nos permite aislar estos términos dominantes en una dirección específica, y resulta fundamental para definir la variedad tropical asociada. Nos basaremos esencialmente en Maclagan y Sturmfels [MS21, Cap. 2, § 2.6].

Definición 2.1.22 Dado un polinomio de Laurent $f = \sum c_u x^u \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ y un vector de pesos $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, la **forma inicial de f con respecto a w** se define como:

$$\text{in}_w(f) = \sum_{\substack{u \text{ tal que} \\ \text{val}(c_u) + w \cdot u = \min_{u \in \mathbb{Z}^n} (\text{val}(c_u) + u \cdot w)}} \overline{t^{-\text{val}(c_u)}} c_u x^u,$$

La forma inicial respecto a un vector de pesos w está formada por los términos que minimizan la suma $\text{val}(c_u) + w \cdot u$. Estos términos dominan en el sentido de ser los más pequeños según la dirección de w . Identificarlos permite estudiar cómo se comporta el polinomio en esa proyección.

Sea I un ideal cualquiera en $K[x_1, \dots, x_n]$, entonces su forma inicial con respecto a un vector de pesos $w \in \mathbb{R}^n$ se define como

$$\text{in}_w(I) = \langle \text{in}_w(f) : f \in I \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n].$$

Para ciertas elecciones del vector de pesos $w = (w_1, \dots, w_n)$, la forma inicial $\text{in}_w(f)$ de un polinomio f es invertible en el anillo de Laurent. En tal caso, el ideal inicial $\text{in}_w(I)$ coincide con todo el anillo, lo que implica que no aporta información algebraicamente significativa. La geometría tropical se interesa precisamente en aquellos vectores $w \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $\text{in}_w(I)$ es un ideal propio.

Lema 2.1.23 Sea I un ideal en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, y fijo un vector de pesos $w \in \mathbb{R}^n$.

1. Si $g \in \text{in}_w(I)$, entonces $g = \text{in}_w(h)$ para algún $h \in I$.
2. Si $f, g \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, entonces $\text{in}_w(fg) = \text{in}_w(f)\text{in}_w(g)$.

Demostración. La demostración de este resultado se omite, ya que se escapa del alcance del presente trabajo. Para una exposición detallada, véase [MS21, Cap. 2, § 2.6]. \square

Proposición 2.1.24 Sea $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un ideal. Entonces para todo $w \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{in}_w(I) = \langle 1 \rangle \iff \text{in}_w(\sqrt{I}) = \langle 1 \rangle$$

Demostración.

La implicación \Rightarrow es inmediata, ya que $I \subset \sqrt{I}$ implica $\text{in}_w(I) \subset \text{in}_w(\sqrt{I})$ y, por tanto, si $\text{in}_w(I) = \langle 1 \rangle$, también $\text{in}_w(\sqrt{I}) = \langle 1 \rangle$.

Para la implicación \Leftarrow , supongamos que $\text{in}_w(\sqrt{I}) = \langle 1 \rangle$. Entonces existe un polinomio $f \in \sqrt{I}$ tal que $\text{in}_w(f) = 1$. Como $f \in \sqrt{I}$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r \in I$. Por el lema de la forma inicial (véase Lemma 2.1.23), se cumple:

$$\text{in}_w(f^r) = (\text{in}_w(f))^r = 1.$$

Entonces $1 \in \text{in}_w(I)$, lo que implica $\text{in}_w(I) = \langle 1 \rangle$, como queríamos demostrar. \square

2.1.4. Geometría poliédrica

La geometría tropical traduce objetos algebraicos en objetos combinatorios, que típicamente tienen estructura poliédrica [MS21, Cap. 2.3]. Por ello, es esencial contar con las herramientas básicas de la geometría poliédrica: conos, poliedros y complejos poliedrales. Estas nociones serán clave para enunciar y demostrar el teorema de estructura de variedades tropicales.

Definición 2.1.25 Un **cono poliédral** en \mathbb{R}^n es la envolvente de un subconjunto finito de \mathbb{R}^n :

$$C = \text{pos}(v_1, \dots, v_r) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \mid \lambda_i \geq 0\},$$

donde $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$. Decimos que C es **racional** si los v_i pueden elegirse en \mathbb{Z}^n .

Definición 2.1.26 Un **abanico** Σ en \mathbb{R}^n es una colección de conos racionales tal que:

1. si $P \in \Sigma$, entonces toda cara de P pertenece a Σ ,
2. la intersección de dos conos en Σ es cara de cada uno.

La generalización de estas dos definiciones son poliedro y complejo respectivamente, las cuales definiremos a continuación. Comenzamos con la noción de poliedro, teniendo en cuenta que un conjunto convexo es, por definición, la intersección de semiespacios en algún \mathbb{R}^d (Consultar [Gra]).

Definición 2.1.27 Un **poliedro** $P \subset \mathbb{R}^n$ es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Es decir, existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^d$ tales que:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Cuando P es además un acotado, se denomina un **politopo**.

Decimos que un poliedro P es **Γ -racional** si todas las entradas de A son racionales y el vector $b \in \Gamma^d$, donde $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$. Si además, $\Gamma = \mathbb{Q}$, diremos simplemente que P es **racional**.

Observación 2.1.28 Existe una definición alternativa de los politopos, basada en la envolvente convexa. Dado un conjunto finito $U = \{u_1, \dots, u_r\} \subset \mathbb{R}^n$, su **envolvente convexa**, denotada $\text{conv}(U)$, es el conjunto convexo más pequeño que contiene a U . Se puede describir como:

$$\text{conv}(U) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}.$$

Todo conjunto de esta forma es un politopo.

Definición 2.1.29 Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ y $w \in \mathbb{R}^{n*}$ una función lineal, definimos la **cara** de P inducida por w como el subconjunto

$$\text{face}_w(P) := \{x \in P : w \cdot x \leq w \cdot y \text{ para todo } y \in P\}.$$

Una **faceta** es una cara de P que no está contenida estrictamente en ninguna otra cara propia.

Ejemplo 2.1.30 Consideramos el politopo $P \subset \mathbb{R}^2$ definido como

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b\}, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que $P = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, un triángulo (simplex) en \mathbb{R}^2 .

- *Faceta (cara de dimensión 1):* Tomemos la función lineal $\mathbf{w} = (1, 1)$. Entonces $\mathbf{w} \cdot (x, y) = x + y$, y en P el valor máximo de $x + y$ es 1. Por tanto

$$\text{face}_{(1,1)}(P) = \{(x, y) \in P : x + y = 1\} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1\},$$

que es un segmento de extremos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Es una faceta del triángulo.

- *Vértice (cara de dimensión 0):* Con $\mathbf{w} = (1, 0)$ buscamos maximizar x . En P , el máximo ocurre en $x = 1$, con y forzado a 0. Así, obtenemos un vértice del triángulo.

$$\text{face}_{(1,0)}(P) = \{(x, y) \in P : x = 1\} = \{(1, 0)\},$$

El poliedro P es un conjunto acotado, luego es un politopo. Como A tiene coeficientes enteros, luego racionales y $b = (0, 0, 1)$ es racional, P es un politopo racional.

Definición 2.1.31 El **espacio de linealidad** de un poliedro P es el mayor subespacio lineal $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que si $x \in P$ y $v \in V$, entonces $x + v \in P$. Formalmente:

$$\text{lin}(P) = \{v \in \mathbb{R}^n : x + v \in P \text{ para todo } x \in P\}.$$

El **espacio afín** generado por P , denotado $\text{aff}(P)$, es el menor subespacio afín que contiene a P . La **dimensión** de P se define como $\dim(P) = \dim(\text{aff}(P))$.

Definición 2.1.32 El **interior relativo** de P , denotado por $\text{relint}(P)$, se define como

$$\text{relint}(P) = \{x \in P : \exists \text{ entorno abierto } U \subseteq \text{aff}(P) \text{ con } x \in U \subseteq P\}.$$

Definición 2.1.33 Un **complejo poliédrico** $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto finito de poliedros en \mathbb{R}^n tal que

- Cada cara de un poliedro P de Σ pertenece también a Σ
- La intersección de dos poliedros P, Q de Σ es vacía o bien una cara común a ambos

Decimos que Σ es Γ -**racional** si todo poliedro en Σ es Γ -racional.

Los poliedros en un complejo poliédrico Σ que no son caras de ningún poliedro mayor se llaman **facetas** del complejo. Las caras de codimensión 1 de una faceta se denominan **crestas** del complejo

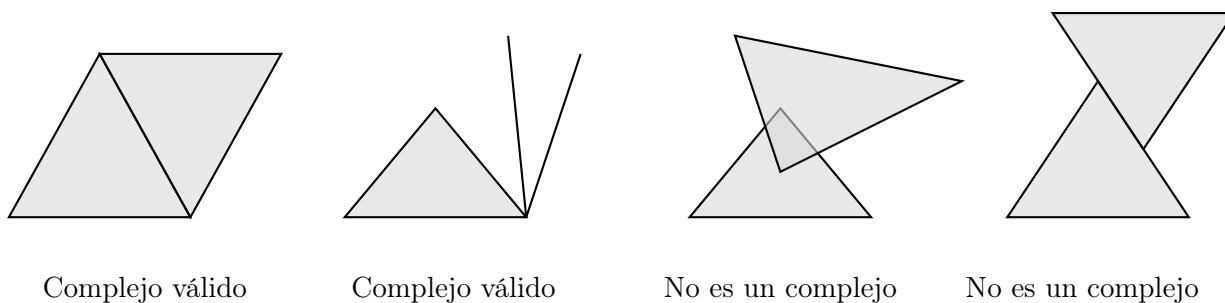


Figura 2.1: Ejemplos visuales de complejos poliédricos válidos y no válidos

Definición 2.1.34 El **soporte** $|\Sigma|$ de un complejo poliédrico Σ es el conjunto

$$|\Sigma| = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in P \text{ para algún } P \in \Sigma\}.$$

es decir, la unión de todos los puntos de los poliedros.

Definición 2.1.35 Definimos la **dimensión** de un complejo poliédrico Σ como la dimensión máxima de los poliedros en Σ (equivalente a la dimensión del soporte $|\Sigma|$). En particular, un complejo poliédrico Σ se dice **puro de dimensión** d si todas sus facetas tienen dimensión d .

Observación 2.1.36 La Figura 2.1.1 muestra un ejemplo de un **complejo poliédrico puro de dimensión 2**, ya que todas sus caras maximales (es decir, aquellas que no son cara propia de ningún otro poliedro en el complejo) tienen dimensión 2.

En cambio, la Figura 2.1.2 representa un complejo que no es puro, ya que contiene poliedros maximales de dimensiones distintas: el triángulo (dimensión 2) y dos aristas (dimensión 1).

Concluimos esta sección con las definiciones que serán útiles para entender la conexión entre la geometría tropical y la combinatoria.

Politopo de Newton y poliedro valuado El contenido de esta subsección se inspira en el Capítulo 3 de Maclagan y Sturmfels, así como en la referencia [Zie95].

Definición 2.1.37 Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un politopo. El **abanico normal** de P , denotado \mathcal{N}_P , es el abanico poliédrico formado por los conos

$$\mathcal{N}_P(F) = \overline{\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n*} \mid \text{face}_{\mathbf{w}}(P) = F\}},$$

donde F recorre las caras de P , y $\overline{(\cdot)}$ denota el cierre en la topología euclídea.

Observación 2.1.38 El conjunto \mathcal{N}_P es efectivamente un abanico poliédrico: es finito, cada uno de sus elementos es un cono poliédrico, y la intersección de dos conos en \mathcal{N}_P es una cara común.

En la Figura 2.2 se representa un politopo de cuatro lados y su abanico normal asociado:

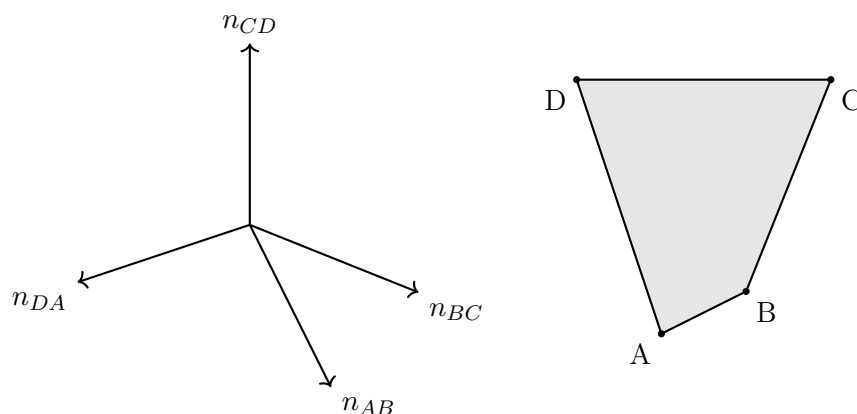


Figura 2.2: Abanico normal (izquierda) asociado a un polígono (derecha)

Definición 2.1.39 Sea $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un polinomio de Laurent, donde solo un número finito de coeficientes $c_{\mathbf{u}} \neq 0$. Definimos el **politopo de Newton** de f como

$$\text{Newt}(f) := \text{conv} \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n : c_{\mathbf{u}} \neq 0\}.$$

El politopo de Newton $N(f)$ es, por construcción, un politopo, ya que se define como la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^n .

Definición 2.1.40 Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^d$ y sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector cualquiera. La **subdivisión regular** de V inducida por α se define del siguiente modo:

1. Sea $\tilde{v}_i = (v_i, \alpha_i)$ para cada i , y calcúlese las facetas del conjunto $\tilde{V} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$.
2. Proyectar las facetas inferiores de \tilde{V} sobre \mathbb{R}^d .

Aquí, una **faceta inferior** de \tilde{V} es una faceta que está contenida en un hiperplano cuya normal tiene última coordenada positiva y que deja todos los demás puntos en el semiespacio superior determinado por dicho hiperplano.

Se observa que el paso de *proyección* es trivial. Para cada faceta inferior $\{\tilde{v}_{i_1}, \dots, \tilde{v}_{i_k}\}$ de \tilde{V} , simplemente tomamos $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ como una celda en la subdivisión.

Ejemplo 2.1.41 Sea el conjunto de puntos

$$V = \{v_1 = (0, 0), v_2 = (1, 0), v_3 = (0, 1), v_4 = (1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

y consideremos el vector de alturas $\alpha = (1, 2, 1, 0)$. Para cada i definimos $\tilde{v}_i = (v_i, \alpha_i)$, es decir,

$$\tilde{V} = \{\tilde{v}_1 = (0, 0, 1), \tilde{v}_2 = (1, 0, 2), \tilde{v}_3 = (0, 1, 1), \tilde{v}_4 = (1, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Tomemos el triángulo $\text{conv}\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4\}$. Definimos

$$u = \tilde{v}_1 - \tilde{v}_3 = (0, -1, 0), \quad w = \tilde{v}_4 - \tilde{v}_3 = (1, 0, -1), \quad n = u \times w = (0, -1, 0) \times (1, 0, -1) = (1, 0, 1).$$

- La tercera componente es $1 > 0$, luego n apunta hacia arriba.
- El punto $\tilde{v}_2 = (1, 0, 2)$ se encuentra por encima del plano definido por u, v .

$$n \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1) = (1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) = 2 > 0,$$

Al proyectar estas la faceta sobre el plano $z = 0$ obtenemos el cuadrado junto con la subdivisión entre v_1, v_4 , dada por $\text{conv}\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

Definición 2.1.42 Sea K un cuerpo con una valoración no trivial, y sea $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un polinomio de Laurent. Definimos su **poliedro valuado** como

$$P_{\text{val}}(f) := \text{conv} \{(\mathbf{u}, \text{val}(c_{\mathbf{u}})) \in \mathbb{R}^{n+1} : c_{\mathbf{u}} \neq 0\}.$$

2.2. Hipersuperficies tropicales

Una vez introducidas las herramientas algebraicas y geométricas necesarias, estamos en condiciones de estudiar uno de los objetos fundamentales de la teoría: las hipersuperficies tropicales. Comenzaremos definiendo qué significa tropicalizar una hipersuperficie y veremos cómo esta operación permite traducir información algebraica en estructuras poliédricas dentro del espacio real. En este marco introduciremos el Teorema de Kapranov, que proporciona una descripción explícita de la tropicalización en términos del polinomio tropical asociado. Este resultado puede considerarse una primera versión del Teorema Fundamental de la Geometría Tropical, al que se generalizará más adelante. También presentaremos, en este contexto particular, la versión para hipersuperficies del Teorema de Estructura, que describe la geometría combinatoria de $\text{trop}(V(f))$ y nos permitirá entender cómo se organiza su estructura poliédrica.

Esta sección, por tanto, constituye un primer contacto con la forma en que los conceptos desarrollados hasta ahora se integran para definir y estudiar variedades tropicales concretas

2.2.1. Tropicalización de hipersuperficies

En esta subsección nos centramos en el proceso de asignar a una función polinómica sobre un cuerpo valorado un *conjunto tropical* en el espacio real. Para ello suponemos que:

1. K es un cuerpo algebraicamente cerrado.
2. La valoración $\nu: K^\times \rightarrow \mathbb{R}$ es no trivial.

Estas hipótesis, no limitan la validez de los resultados ya que se puede trabajar con extensiones de K y valoraciones no triviales sin afectar los resultados. Son condiciones técnicas que facilitan la construcción y el estudio de variedades tropicales.

Definición 2.2.1 Dado un polinomio de Laurent $f = \sum c_u x^u \in K[x^\pm]$, llamamos **tropicalización** de f a la función real definida en \mathbb{R}^n por:

$$\text{trop}(f)(w) = \min_{u \in \mathbb{Z}^n} (\text{val}(c_u) + \sum_{i=1}^n u_i w_i) = \min_{u \in \mathbb{Z}^n} (\text{val}(c_u) + u \cdot w). \quad (2.1)$$

En palabras, se obtiene reemplazando cada coeficiente c_u por su valoración y realizando todas las sumas y productos en el semianillo tropical. El polinomio tropical $\text{trop}(f)$ es, por tanto, una función lineal a trozos, cóncava y de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} (Véase la Proposición 1.1.10)

Si consideramos la variedad clásica del polinomio de Laurent f , esta se define como su hipersuperficie en el toro algebraico T^n sobre el cuerpo K :

$$V(f) = \{v \in T^n : f(v) = 0\}.$$

Definición 2.2.2 La **hipersuperficie tropical** $\text{trop}(V(f))$ es el conjunto de puntos $w \in \mathbb{R}^n$ donde el mínimo en la ecuación (2.1) se alcanza al menos en dos términos:

$$\text{trop}(V(f)) = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \text{el mínimo en } \text{trop}(f) \text{ se alcanza al menos dos veces}\}.$$

Esto es, $\text{trop}(V(f))$ es el lugar en \mathbb{R}^n donde la función lineal a trozos $\text{trop}(f)$ deja de ser lineal.

Observación 2.2.3 Se utiliza la misma notación V para denotar distintos operadores, cuya interpretación depende del tipo de objeto sobre el que actúan:

- Para un polinomio de Laurent $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, $V(f)$ representa la variedad algebraica (o hipersuperficie) definida por f , es decir, el conjunto de ceros de f .
- Para un polinomio tropical p , $V(p)$ representa la hipersuperficie tropical asociada a p , según la Definición 1.2.2, es decir, el conjunto de raíces tropicales de p .

Si aplicamos a V , en su segunda interpretación, la tropicalización de un polinomio, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\text{trop}(V(f)) = V(\text{trop}(f)),$$

Otra forma de representar dicho conjunto sin emplear la tropicalización es a partir de la forma inicial. Pues como se mencionó en la Sección 2.1, esencialmente, selecciona los términos “dominantes” del polinomio con respecto a un vector de pesos.

Dado que esta relación puede no ser inmediata, la ilustramos a continuación con un ejemplo.

Ejemplo 2.2.4 Consideremos el polinomio de Laurent:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2x_2 + 4x_1x_2^3 + 5x_1^3 + 7x_2^2,$$

y tomemos la valoración 2-ádica, de tal manera que la valoración de los coeficientes es:

$$\text{val}_2(2) = 1, \quad \text{val}_2(4) = 2, \quad \text{val}_2(5) = 0, \quad \text{val}_2(7) = 0.$$

Entonces, la tropicalización de $f(x_1, x_2)$ es:

$$\text{trop}(f)(w_1, w_2) = \text{mín}(1 + 2w_1 + w_2, 2 + w_1 + 3w_2, 3w_1, 2w_2)$$

La relación entre la gráfica de dicha función y su hipersuperficie se ilustra en la Figura 2.3.

Estudiamos ahora la forma inicial de f con respecto a dos vectores de pesos distintos

- Sea $w = (1, 2)$. Al evaluar la función tropicalizada en el vector $\text{trop}(f)(1, 2) = \text{mín}(5, 9, 3, 4) = 3$. De tal manera que el mínimo en $(1, 2)$ se alcanza en el tercer término de $f(x_1, x_2)$ es decir, en el término $5x_1^3$. Por lo tanto, la forma inicial es $\text{in}_w(f) = 5t^0x_1^3 = 5x_1^3$.
- Sea $v = (0, -2)$. Al evaluarlo se obtiene $\text{trop}(f)(0, -2) = \text{mín}(-1, -4, 0, -4) = -4$. El mínimo se alcanza en el segundo y cuarto término, luego, $\text{in}_v(f) = t^{-1}2x_1^2x_2 + 7x_2^2$

En la Figura 2.3 se muestra, a la izquierda, el grafo de $\text{trop}(f)(w_1, w_2)$ en negro, junto con los puntos $w = (1, 2)$ (en rojo) y $v = (0, -2)$ (en azul), ambos sobre el grafo de $\text{trop}(f)$. A la derecha se presenta la hipersuperficie tropical asociada, junto con dichos puntos.

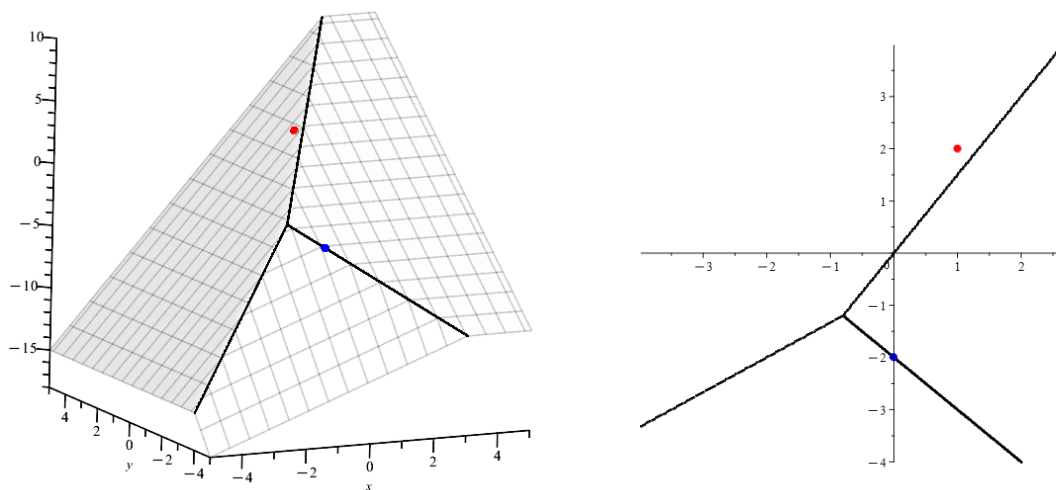


Figura 2.3: Visualización del caso $f(x_1, x_2) = 2x_1^2x_2 + 4x_1x_2^3 + 5x_1^3 + 7x_2^2$. A la izquierda, el grafo de $\text{trop}(f)(w_1, w_2)$, destacando los puntos $w = (1, 2)$ (en rojo) y $v = (0, -2)$ (en azul) sobre el grafo. A la derecha, la hipersuperficie tropical $\text{trop}(V(f))$ y los puntos w, v .

En la figura, se observa cómo el punto $v = (0, -2)$, al estar sobre una región donde el mínimo se alcanza en más de un término, pertenece a la hipersuperficie tropical. Esto concuerda con el hecho de que $\text{in}_v(f)$ no es un monomio.

El ejemplo ilustra que el conjunto de puntos $w \in \Gamma_{\text{val}}^n$ tales que $\text{in}_w(f)$ no es un monomio coincide con $\text{trop}(V(f))$. Sin embargo, este no es un resultado inmediato, sino que forma parte de un teorema importante que demostraremos a continuación: el Teorema de Kapranov 2.2.5, el cual, además, establece una relación con las valoraciones de los puntos de la variedad algebraica asociada.

2.2.2. Teorema de Kapranov (versión del Teorema Fundamental)

El Teorema de Kapranov establece un vínculo entre la geometría algebraica clásica con la tropical; concretamente, bajo la aplicación de la valoración, una hipersuperficie coincide con su hipersuperficie tropical. Esto permite estudiar objetos algebraicos a través de la geometría tropical.

Se trata de un caso particular del Teorema Fundamental de la Geometría Tropical 3.1.8, que estudiaremos en profundidad más adelante. El Teorema de Kapranov para hipersuperficies será muy útil en la demostración.

Teorema 2.2.5 ([MS21, Teorema 3.1.3]) *Teorema de Kapranov.* Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado con una valoración no trivial. Fijemos un polinomio de Laurent $f = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} c_u x^u$ en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Los siguientes tres conjuntos coinciden:

1. La hipersuperficie tropical $\text{trop}(V(f))$ en \mathbb{R}^n .
2. El conjunto de puntos $\mathbf{w} \in \Gamma_{\text{val}}^n$ tales que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ no es un monomio.
3. La clausura del conjunto $\{(\text{val}(v_1), \dots, \text{val}(v_n)) \mid v \in V(f)\}$

Observación 2.2.6 En el trabajo de Yaghtmayi [Yag16], se introduce una definición de la topología tropical de Zariski considerando como cerrados los conjuntos tropicales, es decir, los conjuntos de la forma $\text{trop}(V(I))$, donde $I \subseteq K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es un ideal. Esta construcción es análoga a la topología de Zariski clásica, donde los cerrados son los conjuntos de ceros de ideales polinomiales. En este sentido, la topología de Zariski tropical puede entenderse como la imagen bajo la aplicación de valoración de la topología de Zariski clásica.

Demostración. (Teorema 2.2.5)

$(1) \subseteq (2)$ Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \text{trop}(V(f))$. Por definición, $\text{trop}(f)$ alcanza el mínimo al menos dos veces en \mathbf{w} . Esto se corresponde con la existencia de al menos dos términos de f con la misma contribución mínima en la tropicalización. Lo que implica que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ no es un monomio.

$(2) \subseteq (1)$ Sea $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ tal que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ no es un monomio, entonces el mínimo en $\min_{u: c_u \neq 0} (\text{val}(c_u) + u\mathbf{w})$ se alcanza al menos dos veces para \mathbf{w} , lo que por definición implica que $\mathbf{w} \in \text{trop}(V(f))$.

$(3) \subseteq (1)$ El conjunto (1) es cerrado, lo que significa que contiene todos sus puntos límite. Por esto es suficiente considerar puntos en (3) de la forma

$$\text{val}(\mathbf{y}) := (\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) \mid f(\mathbf{y}) = 0$$

Esto significa que $\sum_{u \in \mathbb{Z}^n} c_u \mathbf{y}^u = 0$. Aplicando la valoración a ambos lados, obtenemos

$$\text{val} \left(\sum_{u \in \mathbb{Z}^n} c_u \mathbf{y}^u \right) = \text{val}(0) = \infty.$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que para todo $u_i, u_j \in \mathbb{Z}^n$, $\text{val}(c_{u_i} \mathbf{y}^{u_i}) \neq \text{val}(c_{u_j} \mathbf{y}^{u_j})$. Entonces, por el Lema 2.1.16 se tiene que

$$\infty = \text{val} \left(\sum_{u \in \mathbb{Z}^n} c_u \mathbf{y}^u \right) = \min \{ \text{val}(c_{u_1} \mathbf{y}^{u_1}), \dots, \text{val}(c_{u_n} \mathbf{y}^{u_n}) \}$$

donde $c_{u_1}, \dots, c_{u_n} \neq 0$. Llegamos a una contradicción por el primer axioma de las valoraciones. Por lo tanto, concluimos que el mínimo en el conjunto, se alcanza al menos dos veces.

$\boxed{(2) \subseteq (3)}$ Es la parte difícil del teorema de Kapranov. Será el contenido de la Proposición 2.2.7. \square

La Proposición 2.2.7, que finaliza la demostración anterior, establece que cada cero de una forma inicial da lugar a un cero del polinomio de Laurent, es decir, un punto de la variedad.

Proposición 2.2.7 Sea $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, y sea $\mathbf{w} \in \Gamma_n^{\text{val}}$. Supongamos que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ no es un monomio y sea $\alpha \in (K^*)^n$ satisface $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha) = 0$. Entonces, existe $\mathbf{y} \in (K^*)^n$ tal que $f(\mathbf{y}) = 0$, $\text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$ y $\overline{t^{-w_i} y_i} = \alpha_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Procedemos por inducción en n .

$\boxed{n=1}$ Como K es algebraicamente cerrado, todo polinomio en $K[x^{\pm 1}]$ se factoriza en factores lineales tras multiplicar por una potencia adecuada de x . Formalmente existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x^m f(x) = \prod_{j=1}^s (a_j x - b_j), \quad \text{con } a_j, b_j \in K^*.$$

Sin pérdida de generalidad, asumiremos f ya en esta forma (redefiniendo $f(x)$ como $x^m f(x)$ si es necesario). Por el Lema 2.1.23 sobre el producto formas iniciales se tiene que para todo w :

$$\text{in}_w(f) = \text{in}_w\left(\prod_{j=1}^s (a_j x - b_j)\right) = \prod_{j=1}^s \text{in}_w(a_j x - b_j).$$

Como $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha) = 0$, al menos uno de los factores se anula en α . Luego, existe un índice j tal que

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(a_j x - b_j)(\alpha) = 0 \implies \text{in}_{\mathbf{w}}(a_j) \alpha = \text{in}_{\mathbf{w}}(b_j) \quad (2.2)$$

Por otro lado, la hipótesis de que $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ no es un monomio implica que para dicho j , tampoco lo es $\text{in}_{\mathbf{w}}(a_j x - b_j)$. Por definición de forma inicial,

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(a_j x - b_j) = \begin{cases} \text{in}_{\mathbf{w}}(a_j) x & \text{si } \text{val}(a_j) + \mathbf{w} < \text{val}(b_j), \\ -\text{in}_{\mathbf{w}}(b_j) & \text{si } \text{val}(a_j) + \mathbf{w} > \text{val}(b_j), \\ \text{in}_{\mathbf{w}}(a_j) x - \text{in}_{\mathbf{w}}(b_j) & \text{si } \text{val}(a_j) + \mathbf{w} = \text{val}(b_j). \end{cases}$$

Para que no sea monomial se debe dar el tercer caso. Esto junto con la ecuación (2.2) implica:

$$\alpha = \frac{\text{in}_{\mathbf{w}}(b_j)}{\text{in}_{\mathbf{w}}(a_j)} = \frac{\overline{t^{-\text{val}(b_j)} b_j}}{\overline{t^{-\text{val}(a_j)} a_j}} = \frac{\overline{t^{-(\text{val}(b_j) - \text{val}(a_j))} b_j}}{a_j} = \overline{t^{-\mathbf{w}} \frac{b_j}{a_j}}.$$

Por tanto, definiendo

$$y := \frac{b_j}{a_j} \in K^*$$

se verifica que $f(y) = 0$, $\text{val}(y) = \text{val}(b_j) - \text{val}(a_j) = \mathbf{w}$ y $\overline{t^{-\mathbf{w}} y} = \alpha$, como queríamos demostrar.

$n > 1$ Ahora asumimos que $n > 1$ y que la Proposición se cumple para dimensiones menores.

Abordamos primero el caso en el que no hay dos o más monomios en f con la misma potencia de x_n . Esto implica que, al considerar f como un polinomio en x_n con coeficientes en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$, todos los coeficientes son monomios de la forma cx^u para $c \in K$ y $u \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

Considere el conjunto de todos $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in T^{n-1}$ con $\text{val}(y_i) = w_i$ y $\overline{t^{-w_i}y_i} = \alpha_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Además, para todas estas elecciones, $g(x_n) = f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)$, no es el polinomio cero.

Si $f = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n}$, entonces g se puede escribir como $g(x_n) = \sum_{\mathbf{u}} c_{\mathbf{u}} y_1^{u_1} \cdots y_{n-1}^{u_{n-1}} x_n^{u_n}$. Dado que suponemos que no hay dos monomios con el mismo exponente u_n , para cada entero i hay a lo sumo un \mathbf{u} con $u_n = i$. Definimos el coeficiente asociado a x_n^i en g como

$$d_i = c_{\mathbf{u}} y^{\mathbf{u}'}$$

donde $y^{\mathbf{u}'} = y_1^{u_1} \cdots y_{n-1}^{u_{n-1}}$,

Así, $g(x_n) = \sum_i d_i x_n^i$. Definiendo $\mathbf{w}' = \text{val}(y) \in \mathbb{R}^{n-1}$, llegamos a la siguiente igualdad:

$$\text{val}(d_i) + w_n i = \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \text{val}(y^{\mathbf{u}'}) + w_n i = \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w}' \cdot \mathbf{u}' + w_n u_n = \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}.$$

Por lo tanto $\text{trop}(g)(w_n) = \text{trop}(f)(\mathbf{w})$, y

$$\begin{aligned} \text{in}_{w_n}(g) &= \sum_{i: \text{val}(d_i) + w_n i = \text{trop}(g)(w_n)} \overline{t^{-\text{val}(d_i)} d_i x_n^i} \\ &= \sum_{\mathbf{u}: \text{val}(c_{\mathbf{u}} y^{\mathbf{u}'}) + w_n u_n = \text{trop}(g)(w_n)} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} t^{-\mathbf{u}' \cdot \mathbf{w}'} c_{\mathbf{u}} y^{\mathbf{u}'} x_n^{u_n}} \\ &= \sum_{\mathbf{u}: \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \text{trop}(f)(\mathbf{w})} \overline{t^{-\text{val}(c_{\mathbf{u}})} c_{\mathbf{u}} \cdot \alpha^{\mathbf{u}'} x_n^{u_n}} \\ &= \text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Así $\text{in}_{w_n}(g) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x_n)$ y aplicando la hipótesis de la proposición de que la forma inicial de f se anula para cierto α , llegamos a

$$\text{in}_{w_n}(g)(\alpha_n) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha) = 0$$

Por el caso $n = 1$, que ya hemos demostrado, existe $y_n \in K^*$ con $\text{val}(y_n) = w_n$ y $\overline{t^{-w_n}y_n} = \alpha_n$ para el cual $g(y_n) = 0$, y por lo tanto $f(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = 0$. Concluimos que $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in V(f)$ es el punto requerido.

Finalmente, justificamos que esta reducción al caso “especial” es válida para cualquier polinomio f . Para ello definimos el siguiente automorfismo $\phi_{\ell} : K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \rightarrow K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ dado por

$$\phi_{\ell}(x_j) = \begin{cases} x_j x_n^{\ell^j}, & \text{si } 1 \leq j < n, \\ x_n, & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Esto se debe a que para $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{n-1}$, se tiene $\phi_{\ell}(x^{\mathbf{u}} x_n^i) = x^{\mathbf{u}} x_n^{i + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \ell^j}$.

Para $\ell \gg 0$ (ℓ suficientemente grande), cada monomio es divisible por potencias distintas de x_n . Esto garantiza que cada monomio de $\phi_\ell(f)$, visto como elemento de $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}][x_n^{\pm 1}]$, posee exponente único en x_n . Tomando la transformación de los vectores \mathbf{w}, α del caso anterior,

$$\mathbf{w}' = (w_1 - \ell^1 w_n, \dots, w_{n-1} - \ell^{n-1} w_n, w_n), \quad \alpha' = (\alpha_1 \alpha_n^{-\ell^1}, \dots, \alpha_{n-1} \alpha_n^{-\ell^{n-1}}, \alpha_n)$$

Se obtiene,

$$\text{in}_{\mathbf{w}'}(\phi_\ell(f))(\alpha') = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha) = 0,$$

y tampoco es monomio. Por tanto, aplicando el “caso especial”, existe un punto $\mathbf{y}' \in (K^*)^n$ tal que:

$$\begin{aligned} \phi_\ell(f)(\mathbf{y}') &= 0 \\ \text{val}(\mathbf{y}') &= \mathbf{w}' \\ \overline{t^{-\mathbf{w}'}} \mathbf{y}' &= \alpha' \end{aligned}$$

Se define $\mathbf{y} \in (K^*)^n$ como $\mathbf{y} = (y'_1 (y'_n)^{\ell^1}, \dots, y'_{n-1} (y'_n)^{\ell^{n-1}}, y'_n)$, un cálculo directo verifica:

$$\begin{aligned} \text{val}(y_j) &= \text{val}(y'_j (y'_n)^{\ell^j}) = \text{val}(y'_j) + \ell^j \text{val}(y'_n) = (w_j - \ell^j w_n) + \ell^j w_n = w_j \\ \overline{t^{-w_j}} y_j &= \overline{t^{-w_j}} y'_j (y'_n)^{\ell^j} = (\alpha_j \alpha_n^{-\ell^j}) (\alpha_n^{\ell^j}) = \alpha_j \\ f(\mathbf{y}) &= \phi_\ell(f)(\mathbf{y}') = 0 \end{aligned}$$

□

Dado que se trata de la primera demostración más técnica y larga, se proporciona un guion a modo de resumen. El objetivo es que, dado $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, $\mathbf{w} \in \Gamma_n^{\text{val}}$ y una raíz α de $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$, el cual se supone no monomial, construir $\mathbf{y} \in (K^*)^n$ con

$$f(\mathbf{y}) = 0, \quad \text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}, \quad \overline{t^{-w_i}} y_i = \alpha_i.$$

La prueba se lleva a cabo por inducción en la dimensión n .

- Para $n = 1$, se factoriza el polinomio como producto de términos lineales y se muestra que si la forma inicial no es monomial y se anula en α , entonces uno de los factores también cumple esta propiedad. A partir de esto se construye el punto $y \in K^*$ que buscamos.
- Para $n > 1$, se reduce el problema al caso donde los monomios de f tienen potencias distintas en x_n , de modo que al evaluar los primeros $n - 1$ componentes se obtiene un polinomio univariado en x_n no nulo. Se comprueba que la forma inicial de este nuevo polinomio coincide con la de f , evaluada en los valores dados de α , lo cual nos reduce al caso univariado. Aplicando el caso base, se obtiene el último componente del punto buscado.

Finalmente, se justifica que esta reducción al caso especial es válida en general mediante un cambio de variables dado por un automorfismo ϕ_ℓ del anillo de polinomios. Este cambio permite transformar cualquier f en uno que cumpla la hipótesis del caso especial. Revirtiendo el cambio, se obtiene el punto deseado que anula f .

A continuación estudiamos la combinatoria de hipersuperficies tropicales. Esto utiliza el concepto de subdivisiones regulares de la Sección 2.1. Por k -esqueleto de un complejo poliédrico Σ , se entiende el complejo poliédrico donde las celdas $\sigma \in \Sigma$ tienen $\dim(\sigma) \leq k$.

2.2.3. Estructura poliédrica de $\text{trop}(V(f))$ (versión del Teorema de Estructura)

Esta proposición se puede considerar como una versión preliminar del teorema de estructura tropical para variedades, en el caso de hipersuperficies. Describe la forma poliédrica de la tropicalización de $\text{trop}(V(f))$, que luego será generalizada para el caso de variedades definidas por varios polinomios.

Su importancia radica en que la tropicalización de una hipersuperficie no es un subconjunto arbitrario de \mathbb{R}^n , sino un complejo poliédrico racional y puro de dimensión $n - 1$, directamente relacionado con la geometría del politopo de Newton y las valuaciones de los coeficientes.

Teorema 2.2.8 ([MS21, Teorema 3.1.6]) *Sea $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un polinomio de Laurent. La hipersuperficie tropical $\text{trop}(V(f))$ es el soporte de un complejo poliédrico Γ_{val} -racional puro de dimensión $n - 1$ en \mathbb{R}^n . Esto es, el $(n - 1)$ -esqueleto del complejo poliédrico dual, tras aplicar el isomorfismo $\varphi(x) = -x$, a la subdivisión regular del politopo de Newton de $f = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ dada por los pesos $\text{val}(c_{\mathbf{u}})$*

Demostración. Sea $f = \sum c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un polinomio de Laurent. Consideramos el politopo de Newton P y el poliedro valuado P_{val} , según la Definición 2.1.42. La subdivisión regular de P inducida por los pesos $\text{val}(c_{\mathbf{u}})$ se obtiene proyectando las caras inferiores de P_{val} mediante la proyección $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre las primeras n coordenadas.

Para cada cara inferior $F \subset P_{\text{val}}$, sea $\mathcal{N}(F)$ su cono normal. Nos interesa su sección sobre el hiperplano $x_{n+1} = 1$, que denotamos por

$$\tilde{\pi}(\mathcal{N}(F)) := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{w}, 1) \in \mathcal{N}(F)\}.$$

Entonces $\mathbf{w} \in \tilde{\pi}(\mathcal{N}(F))$ si y solo si $(\mathbf{w}, 1)$ define F como cara de P_{val} , es decir,

$$F = \text{face}_{(\mathbf{w}, 1)}(P_{\text{val}}) = \{\mathbf{u} : \text{val}(c_{\mathbf{u}}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \min_{\mathbf{u}'}(\text{val}(c_{\mathbf{u}'}) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}')\}.$$

Esta condición se traduce en que $F = \text{face}_{(\mathbf{w}, 1)}(P_{\text{val}})$ no es vértice si y solo si $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ no es un monomio, esto es, $\mathbf{w} \in \text{trop}(V(f))$. Es decir, $\text{trop}(V(f))$ es la unión de los conos $\tilde{\pi}(\mathcal{N}(F))$ donde F son caras inferiores no triviales (que no sean vértices). Como estos conos forman el complejo dual a la subdivisión regular de P , concluimos que $\text{trop}(V(f))$ es el soporte del $(n - 1)$ -esqueleto. \square

Veamos a continuación un ejemplo en detalle:

Ejemplo 2.2.9 *Consideramos el polinomio en dos variables $f(x, y) = 1 + 2x + 3y + 4xy^2$.*

Los exponentes de los monomios de f se denotan $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2$, y sus correspondientes coeficientes $c_{\mathbf{u}}$. Calculamos la valoración de estos mediante la valoración 2-ádica, $\text{val}_2(c_{\mathbf{u}})$:

$$\begin{array}{llll} (0, 0) & \text{con coeficiente asociado} & c_{(0,0)} = 1 & \Rightarrow \text{val}_2(1) = 0, \\ (1, 0) & \text{con coeficiente asociado} & c_{(1,0)} = 2 & \Rightarrow \text{val}_2(2) = 1, \\ (0, 1) & \text{con coeficiente asociado} & c_{(0,1)} = 3 & \Rightarrow \text{val}_2(3) = 0, \\ (1, 2) & \text{con coeficiente asociado} & c_{(1,2)} = 4 & \Rightarrow \text{val}_2(4) = 2. \end{array}$$

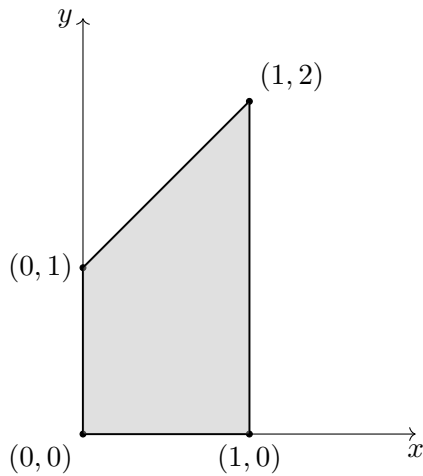
- El polígono de Newton se representa en la Figura 2.4 (izquierda) y viene dado por

$$\text{Newt}(f) = \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$$

- El poliedro valuado P_{val_2} se encuentra en la Figura 2.4 (derecha) y es de la forma:

$$P_{\text{val}_2}(f) = \text{conv}\{A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 1), C = (0, 1, 0), D = (1, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Polígono de Newton $\text{Newt}(f) \subset \mathbb{R}^2$



Poliedro valuado $P_{\text{val}_2}(f) \subset \mathbb{R}^3$

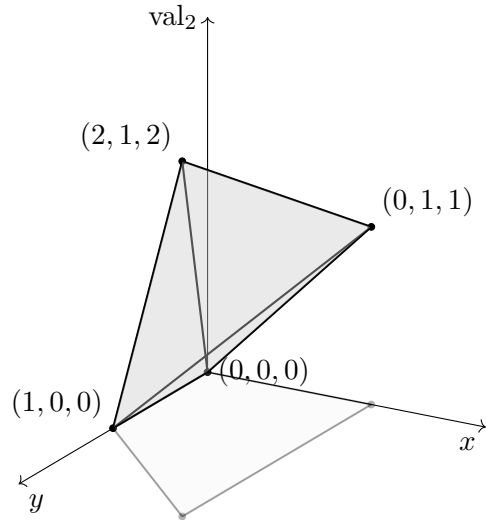


Figura 2.4: Polígono de Newton $\text{Newt}(f)$ (izquierda) y poliedro valuado $P_{\text{val}_2}(f)$ (derecha).

Veamos que la faceta determinada por el triángulo ABC es cara inferior. Para ello, observemos que el vector normal al plano tiene la componente z positiva

$$n = AB \times AC = (1, 0, 1) \times (0, 1, 0) = (-1, 0, 1).$$

Finalmente comprobamos que D está por encima del plano $n \cdot (D - A) = 1 > 0$

De modo que el triángulo ABC es la única cara inferior, y su proyección sobre las dos primeras coordenadas produce la subdivisión regular de P mostrada en la Figura 2.5 (izquierda). La Figura 2.5 (derecha) representa el complejo dual, formado por los conos $\tilde{\pi}(\mathcal{N}(F))$ correspondientes a las caras no triviales, que coincide con $\text{trop}(V(f))$.

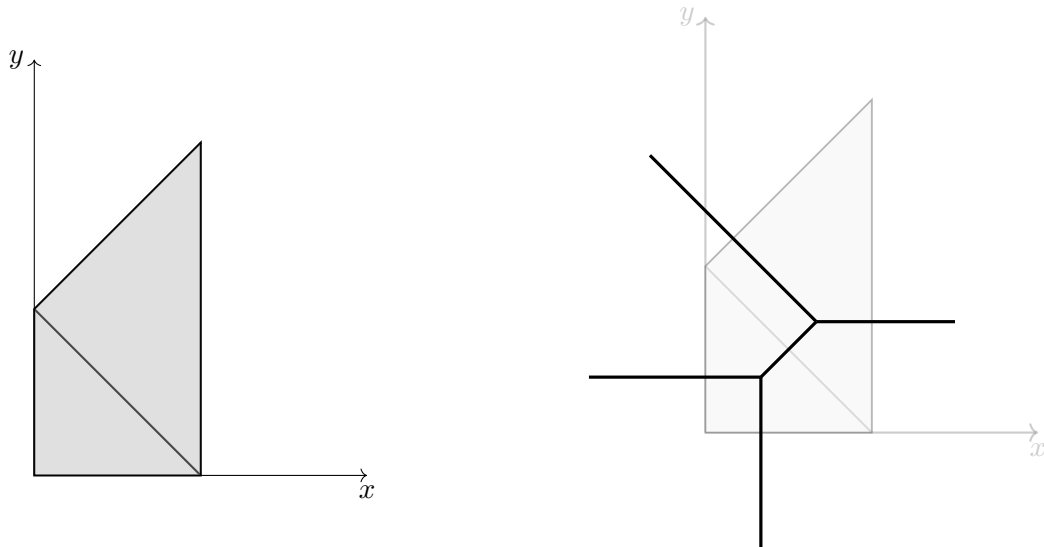


Figura 2.5: Subdivisión regular de P (izquierda) y abanico normal $\tilde{\pi}(\mathcal{N}(F))$ (derecha).

Esta construcción describe la variedad tropical $\text{trop}(V(f))$ en la convención tropical $(\text{máx}, +)$. Al componer con el isomorfismo $\varphi(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, se obtiene la tropicalización en la convención $(\text{mín}, +)$, que es la que estamos utilizando durante el trabajo.

Capítulo 3

Teoremas principales de la geometría tropical

3.1. Teorema Fundamental

El objetivo de esta sección es presentar y demostrar el Teorema Fundamental de la Geometría Algebraica Tropical, el cual establece una conexión entre las variedades clásicas y las variedades tropicales. Este teorema puede entenderse como una generalización del Teorema de Kapranov (véase Sección 2.2.5), enunciado y demostrado previamente.

En la Sección 3.1.1 se introduce la definición de variedad tropical, así como las nociones necesarias para comprender el enunciado y la demostración del teorema. En la Sección 3.1.2 se formula el Teorema Fundamental y se incluye un ejemplo ilustrativo. Finalmente, en la Sección 3.1.3 se desarrolla la demostración completa del resultado.

La principal referencia que se ha seguido para desarrollar este contenido es [MS21, Cap. 3, §3.2].

3.1.1. Nociones previas: Tropicalización

Definición 3.1.1 Sea I un ideal en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, donde K es cualquier cuerpo con valoración y sea $X = V(I)$ su variedad en T^n . La **tropicalización** $\text{trop}(X)$ de la variedad X es la intersección de todas las hipersuperficies tropicales definidas por elementos de I :

$$\text{trop}(X) = \bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)) \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Observación 3.1.2 A diferencia de lo que ocurre en geometría algebraica clásica, en geometría tropical no basta con considerar un conjunto cualquiera de generadores de un ideal para describir su variedad tropical. Ya que, en general, la tropicalización no conmuta con la intersección sobre un subconjunto de I :

$$\text{trop} \left(\bigcap_{i=1}^n V(f_i) \right) \neq \bigcap_{i=1}^n \text{trop}(V(f_i)), \quad \text{para cualquier subconjunto generador } \{f_1, \dots, f_n\} \subset I.$$

Es decir, si simplemente obtenemos las raíces tropicales de cada generador tropicalizado y luego los intersecamos, lo que obtenemos no es necesariamente una variedad tropical, sino una **prevariedad**

tropical. Estas prevariedades se definen como intersección finita de hipersuperficies tropicales, pero pueden no cumplir las condiciones necesarias para ser una variedad tropical (véase Ejemplo 3.1.3).

En cambio, en geometría algebraica clásica una variedad está completamente determinada por cualquier conjunto de generadores del ideal, pues se cumple que:

$$V(\langle f_1, \dots, f_n \rangle) = V(f_1, \dots, f_n) = \bigcap V(f_i).$$

La primera igualdad se obtiene porque todo polinomio del ideal es combinación de los generadores, así que se anula en cualquier punto en el que estos se anulan.

Ejemplo 3.1.3 Sea $K = \mathbb{C}(\{t\})$, el cuerpo de series de Laurent en t con una valoración no trivial, y sea el ideal $I = \langle x + y + 1, x + 2y \rangle$. Entonces, la variedad algebraica definida por I es

$$X = V(I) = \{(-2, 1)\}.$$

Podemos calcular su tropicalización considerando la imagen de este punto bajo la aplicación de la valoración. Esta idea está respaldada por el Teorema Fundamental de la Geometría Tropical, que proporciona tres caracterizaciones equivalentes de la tropicalización de una variedad. En este caso concreto, utilizamos la caracterización basada en las valoraciones de los puntos de la variedad. El enunciado completo del teorema, junto con su demostración, se presentará más adelante.

$$\text{trop}(X) = \{(\text{val}(v_1), \text{val}(v_2)) \mid v \in V(f)\} = \{(\text{val}(-2), \text{val}(-1))\} = \{(0, 0)\}.$$

Sin embargo, la intersección de las dos líneas tropicales dadas por los generadores del ideal es:

$$\begin{aligned} \text{trop}(V(x + y + 1)) \cap \text{trop}(V(x + 2y)) &= V(\min(x, y, 0)) \cap V(\min(x, y)) = \\ &= \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_1 = w_2 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Dado que este semirrayo no puede ser representado como el conjunto de puntos en los que el mínimo se alcanza en más de un término, no es una variedad tropical, sino una prevariedad tropical.

Este ejemplo motiva la introducción de la siguiente definición:

Definición 3.1.4 Sea I un ideal en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, donde K es cualquier cuerpo con valoración. Un conjunto finito de generadores τ de I se llama **base tropical** si

$$\text{trop}(V(I)) = \bigcap_{f \in \tau} \text{trop}(V(f))$$

Ejemplo 3.1.5 Volviendo al ejemplo anterior, notemos que los polinomios $f = x + y + 1$ y $g = x + 2y$ no forman una base tropical de $I = \langle f, g \rangle$. Sin embargo, si añadimos el polinomio $h = y - 1 \in I$ al sistema de generadores, entonces el conjunto $\tau = \{f, g, h\}$ sí es una base tropical de I :

$$\text{trop}(V(f)) \cap \text{trop}(V(g)) \cap \text{trop}(V(h)) = V(\min(x, y, 0)) \cap V(\min(x, y)) \cap V(\min(y, 0)) = \{(0, 0)\}$$

Entonces se verifica la igualdad de dicho conjunto con $\text{trop}(X)$.

Teorema 3.1.6 Sea K un cuerpo con valoración. Todo ideal en $K[x^{\pm}]$ tiene una base tropical finita.

Demostración. No se incluye la demostración de este resultado, ya que excede el alcance de este trabajo; una presentación detallada puede encontrarse en [MS21, Cap. 2, § 2.6] \square

Lema 3.1.7 *La definición de base tropical, puede ser reescrita de la siguiente manera:*

Sea I un ideal en el anillo de polinomios de Laurent $K[\mathbf{x}^\pm]$ sobre un cuerpo K con una valoración. Un conjunto generador finito τ de I es una **base tropical** si, para todos los vectores de peso $w \in \Gamma_{\text{val}}^n$

$$\text{in}_w(I) \text{ contiene una unidad} \iff \text{in}_w(\tau) = \{\text{in}_w(f) : f \in \tau\} \text{ contiene una unidad}$$

Demostración. El Teorema Fundamental 3.1.8 afirma que $w \in \text{trop}(V(I))$ si y solo si el ideal inicial $\text{in}_w(I)$ no contiene ninguna unidad. Así que, se puede caracterizar el complemento como:

$$w \notin \text{trop}(V(I)) \iff \text{in}_w(I) \text{ contiene una unidad.}$$

$\boxed{\implies}$ Supongamos que $\text{in}_w(I)$ contiene una unidad. Entonces $w \notin \text{trop}(V(I))$ y por definición de base tropical, $w \notin \text{trop}(V(f))$ para algún $f \in \tau$. Esto significa que $\text{in}_w(f)$ es una unidad para algún $f \in \tau$, y por lo tanto $\text{in}_w(\tau)$ contiene una unidad.

$\boxed{\impliedby}$ Es inmediata, ya que $\tau \subset I$ implica $\text{in}_w(\tau) \subseteq \text{in}_w(I)$. □

3.1.2. Enunciado del Teorema

Teorema 3.1.8 ([MS21, Teorema 3.2.3]) **Teorema Fundamental de la Geometría Algebraica Tropical** Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado con una valoración no trivial, sea I un ideal en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, y sea $X = V(I)$ su variedad en el toro algebraico $T^n \cong (K^*)^n$. Entonces, coinciden los siguientes tres subconjuntos de \mathbb{R}^n :

1. La variedad tropical $\text{trop}(X)$ como se definió en la ecuación (3.1).
2. El conjunto de todos los vectores $w \in \mathbb{R}^n$ tales que $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$;
3. El cierre del conjunto de valuaciones coordinadas de puntos en X ,

$$\text{val}(X) = \{(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) : (y_1, \dots, y_n) \in X\}.$$

Ejemplo 3.1.9 Sea $K = \mathbb{C}(\{\{t\}\})$, el cuerpo de series de Laurent en t , dotado de una valoración que asigna a cada serie formal el menor exponente que aparece en su desarrollo. Consideramos el ideal $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subseteq K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ donde

$$f_1 = x + y + 1, \quad f_2 = x + 2y.$$

- El ideal I coincide con el del Ejemplo 3.1.5, donde se calculó $\text{trop}(X) = \{(0, 0)\}$.

Visualmente, esto corresponde a la gráfica de la Figura 3.1 que muestra la superposición de los tres elementos de la base tropical. Observamos que la intersección ocurre en el origen.

- Determinamos los vectores $w = (w_1, w_2)$ tales que la forma inicial del ideal respecto a w no es el ideal trivial. Recordemos que en esta valoración se cumple $\text{val}(1) = \text{val}(-2) = 0$. Entonces:

a) Para $f_1 = x + y + 1$, la tropicalización está dada por $\text{trop}(f_1)(w_1, w_2) = \min(w_1, w_2, 0)$.

En consecuencia, las posibles formas iniciales de f_1 que no son monomios son:

$$\text{in}_w(f_1) = \begin{cases} x + y & \text{si } w_1 = w_2 < 0, \\ x + 1 & \text{si } w_1 = 0 < w_2, \\ y + 1 & \text{si } w_2 = 0 < w_1, \\ x + y + 1 & \text{si } w_1 = w_2 = 0. \end{cases}$$

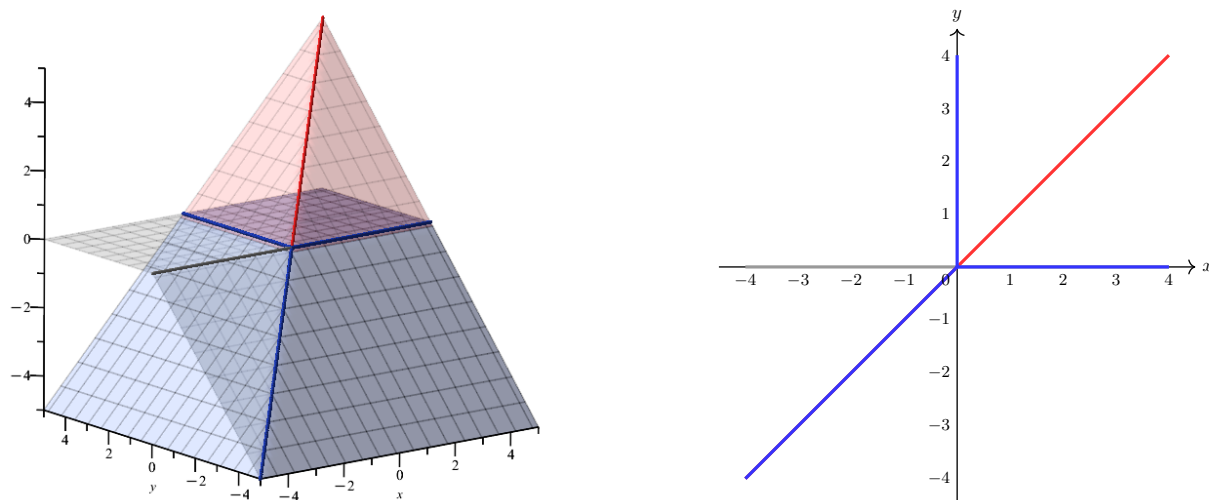


Figura 3.1: A la izquierda, representación gráfica de $\text{trop}(x + y + 1)$, $\text{trop}(x + 2y)$ y $\text{trop}(y - 1)$, en azul, rojo y gris respectivamente. A la derecha, sus variedades tropicales.

b) Para $f_2 = x + 2y$, se tiene $\text{trop}(f_2)(w_1, w_2) = \min(w_1, w_2)$, y la única forma inicial diferente de la unidad es:

$$\text{in}_w(f_2) = \begin{cases} x + 2y & \text{si } w_1 = w_2. \end{cases}$$

c) Para $f_3 = y - 1$, la tropicalización es $\text{trop}(f_3)(w_1, w_2) = \min(w_2, 0)$, y la única forma inicial posible que no es un monomio es:

$$\text{in}_w(f_3) = \begin{cases} y - 1 & \text{si } w_2 = 0. \end{cases}$$

Así, el único vector $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ para el cual las tres formas iniciales no son constantes es $(0, 0)$, lo cual confirma que

$$\text{trop}(X) = \{(0, 0)\}.$$

• Finalmente, determinamos el conjunto de valores

$$\text{val}(X) = \{(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) \in \mathbb{R}^n : (y_1, \dots, y_n) \in X\}.$$

Como ya se ha comentado, en geometría algebraica no es necesario disponer de una base concreta para determinar la variedad; basta un conjunto de generadores del ideal. De modo que, resolviendo el siguiente sistema obtenemos los puntos de la variedad

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + 2y = 0, \end{cases} \implies (x, y) = (-2, 1).$$

Como estamos trabajando sobre $K = \mathbb{C}(\{t\})$, se tiene que $\text{val}(-2) = \text{val}(1) = 0$, por tanto:

$$\text{val}(X) = \{(0, 0)\}.$$

Hemos demostrado, mediante distintos métodos, que $\text{val}(X) = \{(0, 0)\}$, lo que pone de manifiesto la utilidad del Teorema Fundamental de la Geometría Tropical.

El Teorema Fundamental de la Geometría Tropical 3.1.8 generaliza y profundiza lo que vimos en el Teorema de Kapranov. Mientras que ese establecía la correspondencia para hipersuperficies, este teorema amplía el marco a variedades definidas por ideales arbitrarios.

En particular, presenta la relación entre los ideales iniciales, la valoración de la variedad algebraica y la tropicalización. Muestra cómo las propiedades locales de los ideales iniciales para diferentes pesos w determinan la forma global de la variedad tropical $\text{trop}(X)$ y la relación con la variedad algebraica $V(I)$.

3.1.3. Demostración del Teorema Fundamental

La demostración del Teorema Fundamental es extensa y presenta cierta complejidad técnica. Por ello, a continuación se presenta una idea general que servirá como guía. El argumento completo se desarrollará con detalle a lo largo de esta sección. Esta demostración se organiza en tres bloques:

En primer lugar, para comprobar que

$$\overline{\text{val}(X)} \subseteq \text{trop}(X),$$

se toma $\mathbf{y} \in X$ y, aplicando el Teorema de Kapranov (2.2.5) a cada $f \in I$, se obtiene $\text{val}(\mathbf{y}) \in \text{trop}(V(f))$ para todo f . Por tanto $\text{val}(\mathbf{y}) \in \bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)) = \text{trop}(X)$, y al ser $\text{trop}(X)$ cerrado se concluye.

A continuación, para ver que

$$\text{trop}(X) \subseteq \{w : \text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle\},$$

se recurre al Lema de formas iniciales (Lema 2.1.23.1) si $w \in \text{trop}(X)$, entonces en cada $f = \sum c_u x^u \in I$ el mínimo $\min_u \{\text{val}(c_u) + w \cdot u\}$ se alcanza al menos dos veces, de modo que $\text{in}_w(f)$ no es monomial, lo cual fuerza $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$.

El paso más técnico consiste en demostrar la inclusión

$$\{w : \text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle\} \subseteq \overline{\text{val}(X)}.$$

Primero reducimos al caso I primo (si $I = \bigcap P_i$ es radical, entonces $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$ obliga $\text{in}_w(P_j) \neq \langle 1 \rangle$ en alguna componente). Acto seguido, razonamos por inducción sobre n . Los casos base $n = 1$ y $\dim X = n - 1$ se resuelven con la Proposición 2.2.7 y la teoría de dominios recogida en la sección 2.1.1. Para el paso inductivo elegimos una proyección monomial

$$\varphi: T^n \longrightarrow T^{n-1}$$

cuya tropicalización es inyectiva sobre cada poliedro del complejo con soporte $\{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle\}$. La Proposición 3.1.12 garantiza que dicho conjunto es el soporte de un complejo poliédrico, y la existencia del morfismo φ se justifica mediante la Proposición 3.1.11. El Lema de Recuperación Única (Lema 3.1.16) garantiza que w puede recuperarse a partir de $\text{trop}(\varphi)(w)$.

Aplicando la hipótesis inductiva a $\varphi(X)$, la proyección de la variedad, obtenemos un punto y' tal que $\text{val}(y') = \text{trop}(\varphi)(w)$. A continuación, construimos un polinomio de Laurent en una sola variable $g \in k[x_n^\pm]$, cuyos coeficientes dependen de y' . Las propiedades de su forma inicial nos permiten

construir un valor y_n con valoración w_n , completando así el punto $y = (y', y_n) \in X$ que satisface $\text{val}(y) = w$.

A continuación se recopilan los resultados que se emplearán en la demostración. Muchos de ellos ya han sido mencionados en la idea general, el resto completa ciertos aspectos técnicos necesarios para el desarrollo riguroso de la prueba. Las demostraciones de estos resultados no serán abordadas en este trabajo, pues exceden el alcance del mismo, pero pueden consultarse en la referencia [MS21, Cap. 3, § 3.2].

Una parte fundamental del tercer punto de la demostración es entender cómo se comportan las formas iniciales al aplicar una proyección monomial. En este contexto, el siguiente lema nos permite comparar las formas iniciales de un ideal y su imagen por una aplicación monomial. Este resultado es clave para garantizar que la información de $\text{in}_w(I)$ no se pierde al proyectar sobre una dimensión inferior, lo cual es fundamental al aplicar la hipótesis inductiva.

Para una explicación complementaria de morfismos monomiales inducidos por homomorfismos, así como de la proyección y tropicalización de morfismos, puede consultarse el Apéndice 5.6.

Lema 3.1.10 *Sea un homomorfismo monomial $\varphi^* : K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}] \rightarrow K[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$. Sea I un ideal en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}]$, y sea $I' = \varphi^*(I)$. Entonces*

$$\varphi^*(\text{in}_{\text{trop}(\varphi)(w)}(I')) \subseteq \text{in}_w(I) \quad \text{para todo } w \in \mathbb{R}^n.$$

Así, en particular, si $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$, entonces también tenemos $\text{in}_{\text{trop}(\varphi)(w)}(I') \neq \langle 1 \rangle$.

La demostración del Teorema Fundamental, como se ha comentado, procederá proyectando sobre las primeras $n - 1$ coordenadas y aplicando la hipótesis de inducción. El siguiente resultado garantiza la existencia de una proyección suficientemente buena.

Proposición 3.1.11 *Fijada una subvariedad X en T^n y $m \geq \dim(X)$, existe un morfismo monomial $\varphi : T^n \rightarrow T^m$ cuya imagen $\varphi(X)$ es cerrada en la topología de Zariski en T^m y satisface $\dim(\varphi(X)) = \dim(X)$. Este mapa puede elegirse de manera que:*

1. *Fijada una familia finita de subespacios m -dimensionales $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_k\}$ de \mathbb{R}^n , el núcleo de $\text{trop}(\varphi)$ satisface $\ker(\text{trop}(\varphi)) \cap W_i = \{0\}$ para todo i .*
2. *Cuando $n > m$, si cambiamos las coordenadas de manera que φ sea la proyección sobre las primeras m coordenadas, entonces el ideal I de X está generado por polinomios en las variables x_{m+1}, \dots, x_n cuyos coeficientes son monomios en las variables x_1, \dots, x_m .*

Los dos resultados que se presentan a continuación describen la estructura del conjunto

$$\{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle\},$$

mostrándolo como el soporte de un complejo poliédrico racional (Proposición 3.1.12) y acotando la dimensión de sus poliedros por la dimensión de la variedad (Lema 3.1.13). Estos van a ser claves para aplicar argumentos inductivos y elegir proyecciones monomiales adecuadas en la demostración.

Proposición 3.1.12 *Sea I un ideal en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. El conjunto $\{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle\}$ es el soporte de un complejo poliédrico Γ_{val} -racional.*

Lema 3.1.13 *Sea $X \subset T^n$ una variedad de dimensión d , con ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Entonces, todo poliedro en el complejo poliédrico Δ cuyo soporte es el conjunto*

$$\{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle\}$$

tiene dimensión a lo sumo d .

Concluimos con el siguiente lema, que muestra la condición de “recuperación única”: si dos vectores w y w' tienen la misma imagen por una proyección monomial tropical y ambos están en el mismo poliedro P , entonces deben ser iguales.

Definición 3.1.14 *Sea Σ un complejo poliédrico, $P \in \Sigma$ un poliedro y $w \in \mathbb{R}^n$ un vector. Denotemos por L_P el subespacio vectorial generado por $P - w$. En otras palabras*

$$L_P = \text{span}\{p - w \mid p \in P\} \subset \mathbb{R}^n$$

Observación 3.1.15 *El subespacio afín generado por P y w es la traslación de L_P que pasa por w y contiene a P . Se denota $w + L_P$.*

Lema 3.1.16 (Recuperación única) *Sea un ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ y $X \subset T^n$ la variedad asociada de dimensión $d < n - 2$. Sea $\varphi : T^n \rightarrow T^{n-1}$ una proyección monomial sobre las primeras $n - 1$ coordenadas que satisface las hipótesis de la Proposición 3.1.11, tomando como familia de subespacios d -dimensionales, L_P , donde $P \in \Sigma$ tiene soporte*

$$\{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle\}$$

Si $w, w' \in \{v \in \mathbb{R}^n : \text{in}_v(I) \neq \langle 1 \rangle\}$ satisfacen

$$\text{trop}(\varphi)(w') = \text{trop}(\varphi)(w),$$

y ambos pertenecen a un mismo poliedro $P \in \Sigma$ del complejo poliédrico inducido, entonces $w = w'$.

Demostración. Por el Lema 3.1.13 cada poliedro P en Σ tiene dimensión a lo sumo $d = \dim(X)$, luego el subespacio vectorial L_P satisface

$$\dim(L_P) \leq d + 1 < n$$

Tomemos como la familia finita de subespacios m -dimensionales de la Proposición 3.1.11 los subespacios vectoriales L_P , de tal manera que

$$\ker(\text{trop}(\varphi)) \cap L_P = \{0\}$$

Dado que suponemos $w, w' \in P$ para algún poliedro $P \in \Sigma$, esto implica que $w' \in w + L_P$, luego existe $v \in L_P$ tal que $w' = w + v$. Además, como $\text{trop}(\varphi)(w') = \text{trop}(\varphi)(w)$, se tiene por linealidad que $\text{trop}(\varphi)(v) = 0$, es decir, $v \in \ker(\text{trop}(\varphi)) \cap L_P$. Por hipótesis esta intersección es trivial, así que $v = 0$, y por lo tanto $w = w'$. \square

A continuación presentamos la demostración del Teorema Fundamental de la Geometría Tropical.

Demostración. Demostración del Teorema 3.1.8

$\boxed{(3) \subseteq (1)}$ Todo punto en (3) es de la forma $(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n))$, donde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in V(I)$. Como $\mathbf{y} \in V(f)$ para todo $f \in I$, se puede aplicar el Teorema de Kapranov 2.2.5 a un f fijo, obteniendo:

$$(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) \in \text{trop}(V(f))$$

Dado que esto se cumple para todo $f \in I$, el vector de valuaciones pertenece a la intersección de todas las variedades tropicales asociadas a los polinomios en I :

$$(\text{val}(y_1), \dots, \text{val}(y_n)) \in \bigcap_{f \in I} \text{trop}(V(f)) = \text{trop}(X).$$

Así, $\text{val}(X) \subseteq \text{trop}(X)$. Como $\text{trop}(X)$ es cerrado por construcción, contiene al cierre $\overline{\text{val}(X)}$.

$\boxed{(1) \subseteq (2)}$ El punto $w \in \mathbb{R}^n$ pertenece a (1) si para cualquier $f = \sum c_u x^u \in I$, el mínimo de $\{\text{val}(c_u) + w \cdot u\}$ se alcanza al menos dos veces. Por lo tanto, $\text{in}_w(f)$ no es un monomio.

Por el Lema 2.1.23(1), para todo $g \in \text{in}_w(I)$, $g = \text{in}_w(f)$ para algún $f \in I$, así que g no es un monomio. Luego $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$. Concluimos que w pertenece al conjunto (2).

$\boxed{(2) \subseteq (3)}$ Vamos a reducir la prueba al caso en que el ideal I es primo. Por el Lema 2.1.24 podemos suponer que I es radical, de modo que escribimos $I = \bigcap_{i=1}^s P_i$, donde cada P_i es primo y

$$X = V(I) = V\left(\bigcap_{i=1}^s P_i\right) = \bigcup_{i=1}^s V(P_i).$$

Luego, $V(P_1), \dots, V(P_s)$ son las componentes irreducibles de X . Esto implica que si tomamos un punto de (2), esto es $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$, entonces existe $j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $\text{in}_w(P_j) \neq \langle 1 \rangle$. De no ser así, por el lema 2.1.23, existirían polinomios f_1, \dots, f_s con $f_i \in P_i$ tales que $\text{in}_w(f_i) = 1$. Si ponemos $f = \prod_{i=1}^s f_i$, entonces $\text{in}_w(f) = 1$ y $f \in I$, así que $\text{in}_w(I) = \langle 1 \rangle$, en contradicción con $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$.

Hemos demostrado que si w pertenece al conjunto (2) para X , entonces w pertenece al conjunto (2) para alguna componente irreducible $V(P_j)$ de X . Por lo tanto, para demostrar que $w = \text{val}(y)$ para algún $y \in X$, bastará con probar que $w = \text{val}(y)$ para algún $y \in V(P_j)$. La prueba de esto último está incluida en la Proposición 3.1.17. \square

Proposición 3.1.17 Sea X una subvariedad irreducible de T^n , con ideal primo $I \subset K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Sea $w \in \Gamma_{\text{val}}^n$ con $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$, y sea $\alpha \in V(\text{in}_w(I)) \subset (k^*)^n$. Entonces existe un punto $y \in X$ tal que $\text{val}(y) = w$ y $t^{-w}(y) = \alpha$.

Demostración.

Sea $d = \dim(X)$. Los casos $n = 1$ y $d = n - 1$ se reducen a la Proposición 2.2.7.

- Si $n = 1$, entonces $I \subseteq \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$. Por la Proposición 2.1.10, sabemos que este anillo es un dominio de ideales principales, luego, existe un polinomio de Laurent $f \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ tal que $I = \langle f \rangle$.

- Si $\dim(X) = n - 1$, el ideal primo $I \subseteq \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ también es principal. Dado que $A = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es dominio de integridad y es una k -álgebra finitamente generada (los generadores son $x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}$), aplicando el Teorema 2.1.13, tenemos:

$$\text{ht}(I) + \dim(A/I) = \dim(A) \implies \text{ht}(I) + (n - 1) = n \implies \text{ht}(I) = 1.$$

Dado que A es un anillo Noetheriano y un dominio de factorización única, y que I es un ideal primo de altura 1, por el lema 2.1.12 se concluye que I es un ideal principal. Por lo tanto, I está generado por un único polinomio irreducible $f \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$.

Por lo tanto, podemos suponer $0 \leq d \leq n - 2$, y vamos a demostrar el resultado por inducción sobre n . Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$ variables y veamos que se verifica para n . Por la Proposición 3.1.12, el siguiente conjunto es el soporte de un complejo poliédrico Σ :

$$\{v \in \mathbb{R}^n : \text{in}_v(I) \neq \langle 1 \rangle\}$$

Definamos $L_P = \text{span}\{p - w \mid p \in P\} \subset \mathbb{R}^n$ al igual que en la demostración del Lema 3.1.16 y elegimos una proyección monomial

$$\varphi : T^n \rightarrow T^{n-1}$$

de modo que el mapa lineal

$$\text{trop}(\varphi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

satisfaga

$$\ker(\text{trop}(\varphi)) \cap L_P = \{0\}$$

para todo $P \in \Sigma$. Esto es posible por la Proposición 3.1.11. También podemos asumir, tras un cambio de coordenadas, que φ proyecta sobre las primeras $n - 1$ coordenadas, y que la imagen $\varphi(X)$ es cerrada en T^{n-1} . Estas suposiciones aseguran que podemos recuperar w a partir de su imagen bajo $\text{trop}(\varphi)$ por el Lema 3.1.16.

Dado que asumimos $\varphi(X) \subset T^{n-1}$ es cerrado, el ideal que define su imagen es la contracción de I al subanillo $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$. Es decir $I' := I \cap K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n-1}^{\pm 1}]$ y entonces $X' := V(I') = \varphi(X)$. Por el Lema 3.1.10, dado que asumimos $\text{in}_w(I) \neq \langle 1 \rangle$, entonces también $\text{in}_{\text{trop}(\varphi)(w)}(I') \neq \langle 1 \rangle$. Por hipótesis de inducción,

- Existe $y' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in X'$
- $\text{val}(y_i) = w_i$ para $1 \leq i \leq n - 1$
- $t^{-w_i} y_i = \alpha_i$ para $1 \leq i \leq n - 1$

Sea $J = \langle f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) : f \in I \rangle \subset K[x_n^{\pm 1}]$. Como $K[x_n^{\pm 1}]$ es un DIP, el ideal J es principal y está generado por un único polinomio no nulo que podemos tomar mónico. Por la Proposición 3.1.11, podemos suponer que el ideal I está generado por polinomios en x_n con coeficientes monomiales en las demás variables $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, lo que nos permite asumir que dicho generador es

$$f = x_n^l + f' = \sum_i c_i x^{u_i} x_n^i, \quad \text{para } u_i \in \mathbb{Z}^{n-1},$$

donde $l > 0$ y ningún monomio de f' es divisible por x_n^l . En particular, como f no es una unidad en $K[x_n^{\pm 1}]$, se concluye que $J \neq \langle 1 \rangle$, lo que implica que la variedad de ceros $V(J) \subset T^1$ no es vacía.

Sea $g = f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) = \sum_i c_i y^{u_i} x_n^i \in K[x_n^{\pm 1}]$. Como $\text{val}(y_i) = w_i$, se tiene, tomando $u_n = i$

$$\text{trop}(g)(w_n) = \min_i \{\text{val}(c_i y^{u_i}) + i w_n\} = \min_i \{\text{val}(c_i) + u_i \cdot w\} = \text{trop}(f)(\mathbf{w}).$$

los mismos índices i alcanzan el mínimo en $\text{trop}(f)(\mathbf{w})$ y en $\text{trop}(g)(w_n)$, de modo que

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \sum_{i \in I_{\min}} c_i x^{u_i} x_n^i, \quad \text{in}_{w_n}(g) = \sum_{i \in I_{\min}} c_i y^{u_i} x_n^i.$$

Al evaluar la primera forma inicial en $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, se obtiene

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x_n) = \sum_{i \in I_{\min}} c_i \alpha^{u_i} x_n^i = \text{in}_{w_n}(g)(x_n).$$

$$\text{in}_{w_n}(g)(x_n) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x_n) \implies \text{in}_{w_n}(g)(\alpha_n) = \text{in}_{\mathbf{w}}(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0,$$

por hipótesis del enunciado. Dado que $\alpha_n \neq 0$, pues $\alpha \in V(\text{in}_{\mathbf{w}}(I)) \subset (k^*)^n$ el polinomio $\text{in}_{w_n}(g)$ no es un monomio. Por el caso $n = 1$ en la Proposición 2.2.7, existe $y_n \in K^*$ tal que $g(y_n) = 0$, $\text{val}(y_n) = w_n$ y $t^{-w_n} y_n = \alpha_n$. Entonces, tenemos $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in X$ con $\text{val}(\mathbf{y}) = \mathbf{w}$, y $t^{-w_i} y_i = \alpha_i$ para todo i , como se requería. Este último paso utiliza el Lema 3.1.16.

□

3.2. Teorema de Estructura

3.2.1. Nociones previas: Complejo equilibrado y ponderado

En esta subsección presentamos el concepto de *equilibrio* para abanicos y complejos poliédricos. Comenzamos con el caso unidimensional —para comprender la idea de “equilibrio de fuerzas”— y progresivamente extendemos la definición a abanicos de dimensión superior y, finalmente, a complejos poliédricos.

Definición 3.2.1 Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ un abanico racional ponderado de dimensión 1, formado por rayos P_1, \dots, P_s con pesos $m(P_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Para cada $i = 1, \dots, s$, sea $u_i \in \mathbb{Z}^n$ el vector primitivo de P_i . Diremos que Σ es un **abanico unidimensional equilibrado** si

$$\sum_{i=1}^s m(P_i) u_i = 0.$$

Esta condición equivale a que la suma vectorial de las “fuerzas” $m(P_i)u_i$ sea nula, reflejando la simetría entre rayos opuestos y sus pesos.

El siguiente ejemplo, acompañado de la Figura 3.2, presenta un abanico unidimensional equilibrado en \mathbb{R}^2 , con cuatro rayos y los pesos correspondientes.

Ejemplo 3.2.2 Los vectores primitivos de los rayos son:

$$u_1 = (0, 1), \quad u_2 = (2, 1), \quad u_3 = (1, -2), \quad u_4 = (-1, -1),$$

con pesos respectivos $m(P_1) = 4$, $m(P_2) = 1$, $m(P_3) = 1$, $m(P_4) = 3$. Comprobamos que:

$$4(0, 1) + 1(2, 1) + 1(1, -2) + 3(-1, -1) = (0 + 2 + 1 - 3, 4 + 1 - 2 - 3) = (0, 0),$$

por lo tanto, el abanico está equilibrado.

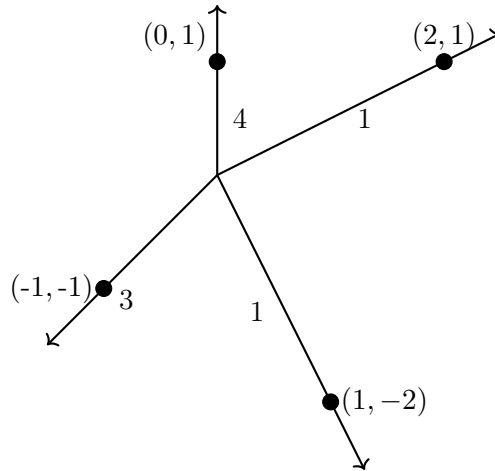


Figura 3.2: Abanico unidimensional equilibrado con cuatro rayos y pesos tales que la suma ponderada de los vectores primitivos es nula.

Observación 3.2.3 *No siempre es posible asignar pesos que hagan que un conjunto de rayos forme un abanico equilibrado. Por ejemplo, si consideramos rayos dirigidos por los vectores canónicos e_i , entonces cualquier asignación de pesos $m(P_i)$ da lugar a la suma*

$$\sum_{i=1}^s m(P_i) e_i = (m(P_1), \dots, m(P_s)),$$

que sólo puede anularse si todos los pesos son cero.

A continuación queremos generalizar esta definición a abanicos racionales de dimensión $d > 1$, manteniendo la intuición de equilibrio local en cada cresta.

Definición 3.2.4 *Sean $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ dos poliedros (o conos). La **suma de Minkowski** se define como*

$$P + Q = \{x + y \mid x \in P, y \in Q\}.$$

En particular, la suma de Minkowski de poliedros (o de conos) es nuevamente un poliedro (o un cono), lo cual permitirá interpretar proyecciones y construcciones posteriores.

Definición 3.2.5 *Sea Σ un abanico racional puro de dimensión $d > 1$, al cual se le asignan pesos $m(P) \in \mathbb{N}$ a cada celda d -dimensional $P \in \Sigma$. Diremos que Σ es un **abanico equilibrado** si, para toda celda $Q \in \Sigma$ de dimensión $d - 1$, se cumple la siguiente condición de equilibrio:*

$$\sum_{P \supset Q} m(P) u_{P_Q} = 0 \quad \text{en } N_Q \otimes \mathbb{R},$$

donde $L_Q = \text{span}(Q)$ es el subespacio vectorial generado por Q , y

$$N_Q := \mathbb{Z}^n / (L_Q \cap \mathbb{Z}^n)$$

es el grupo cociente que contiene las direcciones enteras normales a Q . Para cada celda $P \supset Q$, el cociente $(P + L_Q)/L_Q$ define un rayo unidimensional en $N_Q \otimes \mathbb{R}$, y u_{P_Q} denota su generador primitivo. La condición de equilibrio exige que la suma ponderada de estos vectores normales se anule.

Observación 3.2.6 La racionalidad del complejo implica que $L_Q \cap \mathbb{Z}^n$ es un subgrupo libre de rango $d-1$, de modo que

$$N_Q = \mathbb{Z}^n / (L_Q \cap \mathbb{Z}^n) \cong \mathbb{Z}^{n-d+1}.$$

Así, el espacio vectorial $N_Q \otimes \mathbb{R}$ describe las direcciones normales a Q , y los vectores u_{P_Q} son los generadores primitivos de los rayos determinados por las celdas d -dimensionales P que contienen a Q . Esta formulación permite interpretar geoméricamente la condición de equilibrio como la cancelación de las “fuerzas normales” en cada cresta del complejo.

Cada condición local en una cresta produce un abanico. El equilibrio global es sencillamente el equilibrio de todos esos abanicos.

Definición 3.2.7 Sea Σ un complejo poliédrico puro de dimensión d y racional respecto a una valoración. Para cada cresta Q consideramos la **estrella**

$$\text{star}_\Sigma(Q),$$

que es el abanico formado por los vectores primitivos u_{P_Q} asociados a las celdas d -dimensionales que contienen a Q , con los pesos heredados. Si $\text{star}_\Sigma(Q)$ es equilibrado para toda cresta Q , entonces Σ es un **complejo poliédrico equilibrado**.

Observación 3.2.8 Esta definición generaliza la de abanico: en cada celda de codimensión 1 se impone un equilibrio de vectores normales, asegurando coherencia en todo el complejo.

Ejemplo 3.2.9 Consideremos el complejo Σ en \mathbb{R}^2 formado por dos triángulos adyacentes que comparten la arista Q entre los puntos $A = (0,0)$ y $B = (0,1)$. Sea $C = (-1,0)$, $D = (1,1)$, entonces:

$$P_1 = \text{triángulo } ABC, \quad P_2 = \text{triángulo } ABD$$

Visualmente, el complejo poliédrico racional corresponde con la Figura 3.3:

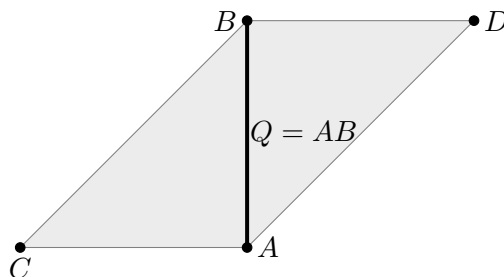


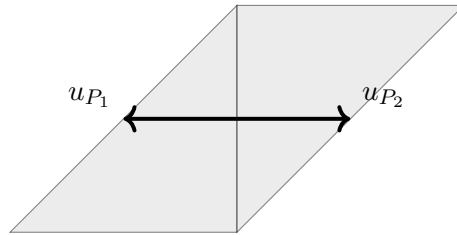
Figura 3.3: Dos triángulos que comparten la arista común $Q = AB$

Observamos que la condición de equilibrio se verifica únicamente en las caras de dimensión $d-1$ que son comunes a dos o más poliedros de dimensión d , pues solo en estas caras la suma $\sum m(P)u_{P_Q}$ involucra varios términos, luego, impone una restricción significativa. Luego, se calculará para Q :

El subespacio vectorial paralelo a Q es el eje y , entonces $L_Q = \mathcal{L}\{(0,1)\}$, y el cociente $N_Q = \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(0,1)$, de modo que $N_Q \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Las proyecciones $(P + L_Q)/L_Q$ de los triángulos sobre el cociente equivale a ignorar la componente en la dirección de L_Q , en este caso, ignorar la componente y . De modo que: $u_{P_1Q} = (-1,0)$, $u_{P_2Q} = (1,0)$, y se verifica, asignando los pesos $m(P_1) = m(P_2) = 1$:

$$\sum_{P \supset Q} m(P) u_{P_Q} = (-1,0) + (1,0) = (0,0),$$

cumpléndose la condición de equilibrio.



Definición 3.2.10 Un complejo poliédrico puro Σ de dimensión d se dice **conexo por codimensión 1** si su grafo de adyacencia de facetas es conexo. Es decir, dadas dos facetas arbitrarias p y p' en Σ , existe una secuencia de facetas $P = P_0, P_1, \dots, P_m = P'$ tal que cada par consecutivo P_i, P_{i+1} comparte una cara de codimensión 1.

Ejemplo 3.2.11 En la Figura 3.4 se muestran tres complejos poliédricos puros de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 . El primero es conexo por codimensión 1: las dos facetas se conectan mediante una cara de dimensión 1 (una arista). El segundo complejo no lo es ya que sólo se intersectan en un vértice (un punto), entonces su intersección tiene codimensión 2. El último tampoco lo es, ya que hay facetas que no pueden conectarse.

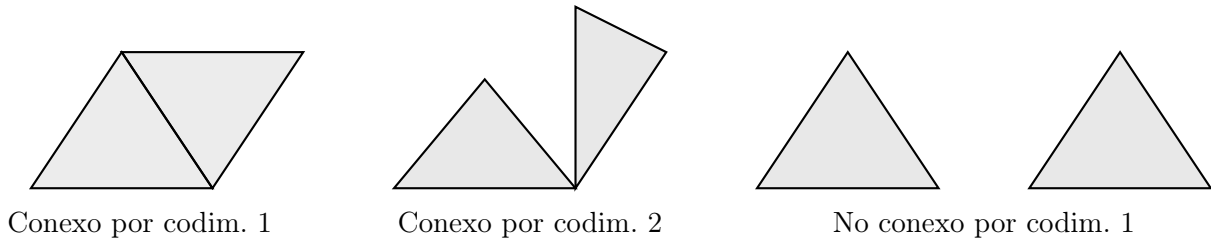


Figura 3.4: Ejemplos ilustrativos de conexión por codimensión para complejos poliédricos puros

3.2.2. Enunciado del Teorema

Teorema 3.2.12 ([MS21, Teorema 3.3.5]) **Teorema de la Estructura para variedades tropicales** Sea X una subvariedad irreducible de dimensión d dentro de T^n . Entonces, $\text{trop}(X)$ es el soporte de un complejo poliédrico ponderado, equilibrado, Γ_{val} -racional, puro de dimensión d . Además, dicho complejo poliédrico es conexo a través de codimensión 1.

La importancia de este Teorema radica en que describe con precisión las propiedades geométricas y combinatorias de la tropicalización de una variedad algebraica irreducible. En concreto, nos asegura

- Es el soporte de un complejo poliédrico puro, es decir, está formado por piezas poliédricas que encajan de forma ordenada y tienen todas la misma dimensión.
- Este complejo está ponderado y equilibrado, lo que implica que los pesos asignados a las piezas satisfacen condiciones de equilibrio heredadas de la variedad original.
- Es Γ_{val} -racional, lo que significa que la estructura del complejo está definida con respecto a una valoración
- Es conexo a través de codimensión 1, luego, se puede ir de una pieza a otra pasando siempre por caras de dimensión un paso menor, facilitando su estudio y comprensión.

Este teorema transforma el estudio de variedades tropicales en un problema combinatorio y geométrico más accesible, pudiendo aplicar técnicas ya estudiadas para analizar dichos objetos.

Ejemplo 3.2.13 Consideramos la variedad algebraica $X = V(\langle f \rangle) \subseteq (\mathbb{K}^*)^3$, donde $f = x+y+z+1$.

Dado que f es un polinomio lineal e irreducible, la variedad X es irreducible. Además, al ser la intersección de un hiperplano con un espacio de dimensión 3, la dimensión de X es $\dim X = 2$.

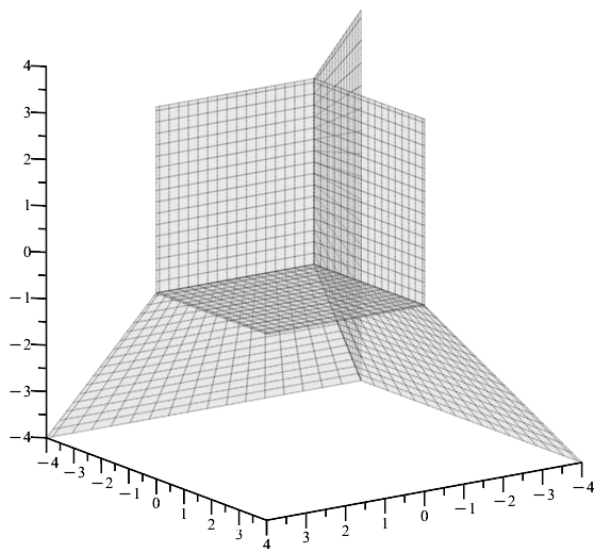
La tropicalización de la hypersuperficie $X = V(f) \subset T^3$ es el conjunto:

$$\text{trop}(X) = \{w \in \mathbb{R}^3 : \min(w_1 + \text{val}(1), w_2 + \text{val}(1), w_3 + \text{val}(1), \text{val}(1)) \text{ se alcanza al menos dos veces}\}$$

Por definición de valoración se cumple $\text{val}(1) = 0$. Por tanto, la tropicalización resulta ser:

$$\text{trop}(X) = \{w \in \mathbb{R}^3 : \min(w_1, w_2, w_3, 0) \text{ se alcanza al menos dos veces}\},$$

que geoméricamente consiste en seis poliedros de dimensión 2.



Mostremos que $\text{trop}(X)$ satisface todas las propiedades del Teorema de la Estructura:

1. Estructura de complejo poliédrico.

Observamos que $\text{trop}(X)$ es la unión de subconjuntos de \mathbb{R}^3 definidos por condiciones del tipo:

$$w \in \mathbb{R}^3 : w_i = w_j \leq \min(w_k, w_\ell), \quad \{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad w_4 := 0.$$

Cada una de estas regiones es un poliedro, ya que puede describirse como la solución de un sistema de desigualdades lineales. Por ejemplo, la región

$$\sigma_{12} = \{w \in \mathbb{R}^3 : w_1 = w_2 \leq \min(w_3, 0)\} = \{w \in \mathbb{R}^3 : w_1 = w_2 \leq w_3, w_1 \leq 0\}$$

se puede expresar como:

$$\sigma_{12} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Y de forma similar, para cada uno de los $\binom{4}{2} = 6$ poliedros maximales. Esto se debe a que estamos seleccionando pares de índices entre las cuatro entradas $\{w_1, w_2, w_3, 0\}$. Además:

- *Las caras de cada poliedro también son intersecciones de semiespacios cerrados, por lo que pertenecen a la colección.*
- *La intersección de dos poliedros es vacía o bien una cara común.*

Así, $\text{trop}(X)$ es un complejo poliédrico.

2. Γ_{val} -racional.

Cada uno de los poliedros involucrados está definido por un sistema de desigualdades:

$$Aw \leq b, \quad \text{donde } A \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbb{Q}) \text{ y } b = (0, 0, 0, 0)^T.$$

Como la función de valoración satisface $\text{val}(1) = 0$ para cualquier cuerpo con valoración, se tiene que $0 \in \Gamma_{\text{val}}$. Por tanto, el vector $b \in \Gamma_{\text{val}}^4$. Concluimos que cada uno de estos poliedros es Γ_{val} -racional, y en consecuencia, $\text{trop}(X)$ es un complejo poliédrico Γ_{val} -racional.

3. Puro de dimensión 2.

Observamos que cada poliedro maximal σ_{ij} está definido por la igualdad $w_i = w_j$ junto con las desigualdades, lo que implica que σ_{ij} está contenido en un hiperplano de \mathbb{R}^3 . Por tanto, cada σ_{ij} es un poliedro de dimensión 2. Dado que $\text{trop}(X)$ es la unión de estos poliedros maximales de dimensión 2, concluimos que $\text{trop}(X)$ es un complejo poliédrico puro de dimensión 2.

4. Ponderado y equilibrado.

Estudiemos la condición de equilibrio tropical en una arista concreta del complejo. Por ejemplo

$$Q = \{(0, s, 0) \in \mathbb{R}^3 : s > 0\},$$

que se corresponde con la arista resaltada en la gráfica de la Figura 3.5:

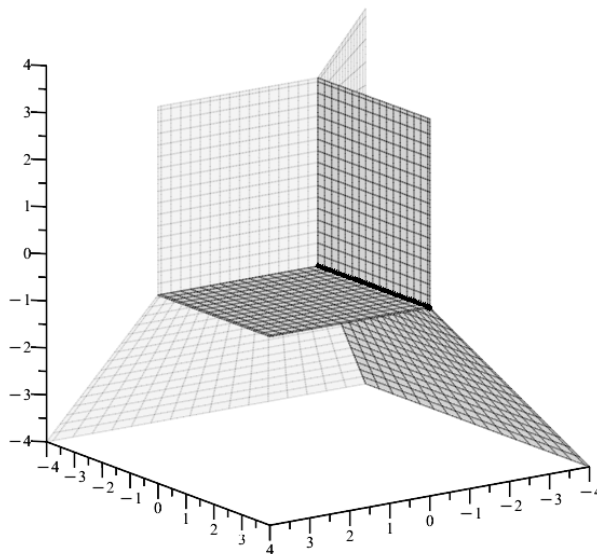


Figura 3.5: Variedad tropical con arista común $Q \text{ trop}(X)$ y sus celdas adyacentes resaltadas.

Dicha arista es común a las siguientes tres celdas bidimensionales:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, 0 < \min(y, z)\}, \\ P_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, 0 < \min(x, y)\}, \\ P_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z, x < \min(y, 0)\}. \end{aligned}$$

El subespacio generado por Q es $L_Q = \text{span}\{(0, 1, 0)\}$, y por tanto el espacio cociente

$$N_Q = \mathbb{Z}^3 / (L_Q \cap \mathbb{Z}^3) \cong \mathbb{Z}^2$$

describe las direcciones normales a la arista. Podemos proyectar \mathbb{R}^3 a $N_Q \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ eliminando la dirección de Q , es decir, la segunda coordenada.

Para determinar los vectores u_{P_i} , observamos cómo se extienden los poliedros P_i desde la arista Q , y tomamos sus direcciones transversales normalizadas a vectores primitivos enteros en N_Q .

- P_1 contiene a Q y se extiende en la dirección positiva del eje z . Así, su dirección transversal es $(0, 0, 1)$, que proyecta en N_Q como $u_{P_1} = (0, 1)$.
- P_2 contiene a Q y se extiende en la dirección positiva del eje x , es decir, en $(1, 0, 0)$, cuya proyección es $u_{P_2} = (1, 0)$.
- P_3 está contenido en el plano $x = z$, con $x < \min(y, 0)$. Desde Q , se extiende en dirección $(1, 0, 1)$, que proyecta como $u_{P_3} = (1, 1)$.

Por tanto, en $N_Q \cong \mathbb{Z}^2$, la estrella de Q está formada por los vectores:

$$u_{P_1} = (0, 1), \quad u_{P_2} = (1, 0), \quad u_{P_3} = (-1, -1),$$

donde hemos ajustado el signo de u_{P_3} para que todos apunten hacia fuera de Q en la estrella.

La condición de equilibrio tropical en Q se verifica si

$$m(P_1) u_{P_1} + m(P_2) u_{P_2} + m(P_3) u_{P_3} = 0.$$

Tomando pesos unitarios $m(P_i) = 1$, se cumple

$$(0, 1) + (1, 0) + (-1, -1) = (0, 0),$$

lo que prueba que el complejo tropical es equilibrado en la arista Q .

5. Conexo a través de codimensión 1.

Basta observar el complejo para comprobar que es conexo por codimensión 1.

Observación 3.2.14 El Teorema de la Estructura proporciona condiciones necesarias que debe cumplir un complejo poliédrico para poder ser la variedad tropical de un ideal. Sin embargo, es importante subrayar que dichas condiciones no son suficientes: es posible que existan complejos poliédricos —e incluso grafos— que satisfacen todas las hipótesis del teorema (puereza, racionalidad, equilibrio y conectividad en codimensión 1), pero que no se corresponden con la variedad tropical de ningún ideal.

3.2.3. Idea de la demostración del Teorema

La demostración se sigue de una concatenación de teoremas. El hecho de que $\text{trop}(X)$ sea un complejo poliédrico racional por valores, puro de dimensión d , se demuestra en el Teorema 3.2.15. Que dicho complejo es equilibrado se establece en el Teorema 3.2.22. Finalmente, el Teorema 3.2.23 prueba que $\text{trop}(X)$ es conexo por codimensión 1.

A continuación exponemos los teoremas con las ideas de la demostración

Teorema 3.2.15 *Sea X una subvariedad irreducible de dimensión d en el toro algebraico T^n sobre el cuerpo K . La variedad tropical $\text{trop}(X)$ es el soporte de un complejo poliédrico Γ_{val} -racional puro de dimensión d en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Sea I el ideal de definición de X . Por la segunda caracterización de la tropicalización de una variedad, dada por el Teorema 3.1.8, junto con la proposición 3.1.12 se concluye que la variedad tropical $\text{trop}(X)$ es soporte de un complejo poliédrico Γ_{val} -racional. Se trata de la generalización de la demostración del Teorema 2.2.8, que establece que la hipersuperficie tropical $\text{trop}(V(f))$ es soporte de un complejo poliédrico Γ_{val} -racional puro de dimensión $n - 1$

El Lema 3.1.13 muestra que la dimensión de cada celda en Σ es a lo sumo d . Por lo tanto, solo queda demostrar que cada celda maximal en Σ tiene dimensión al menos d .

Por complejidad, no se aborda aquí la demostración de que cada celda maximal tenga dimensión al menos d , que corresponde a la pureza del complejo poliédrico. \square

La segunda parte de la demostración del Teorema de Estructura utiliza las siguientes nociones. Comenzamos con la localización de M -módulos, que dado que se utiliza únicamente en la definición 3.2.17, se ha optado por incluirla en esta sección en lugar de presentarla en la Sección 2.1.

Definición 3.2.16 *Sea S un sistema multiplicativo de un anillo A y M un A -módulo, denotaremos por M_S la **localización** de M por S :*

$$M_S = \left\{ \frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S, \text{ de modo que } \frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \text{ si existe } s'' \in S \text{ tal que } s''(s'm - sm') = 0 \right\}$$

Además, M_S tiene estructura de A_S -módulo con las siguientes operaciones:

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} := \frac{s'm + sm'}{ss'} \quad , \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} := \frac{am}{ss'}$$

Definición 3.2.17 *Sea $S = k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Un ideal $Q \subset S$ es **primario** si para todo $f, g \in S$, se cumple que si $fg \in Q$ entonces o bien $f \in Q$ o bien existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m \in Q$. El radical de un ideal primario Q es un ideal primo $P \subset S$.*

Dado un ideal $I \subset S$, existe una descomposición $I = \bigcap_{i=1}^s Q_i$, donde cada Q_i es un ideal primario con radical $P_i = \sqrt{Q_i}$, y con primos P_i distintos. Aunque esta descomposición no es única, el conjunto $\{P_1, \dots, P_s\}$ está determinado y se llama el conjunto de los **primos asociados** de I , denotado por $\text{Ass}(I)$.

La **multiplicidad** de un primo $P_i \in \text{Ass}(I)$ es el entero positivo

$$\text{mult}(P_i, I) := \ell((S/Q_i)_{P_i}).$$

Aquí, $\ell(M)$ denota la longitud de un S_{P_i} -módulo M . Esta es la longitud s de la cadena más larga de submódulos

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_s.$$

Observación 3.2.18 Tanto Q como S son S -módulos. Por un lado, todo ideal $Q \subseteq S$ es un S -módulo con la suma heredada y la multiplicación por elementos de S . Por otro lado, S es un S -módulo de manera inmediata al considerar la multiplicación interna del anillo. Por tanto, Q es un submódulo de S . Esto permite definir el módulo cociente

$$S/Q = \{ \bar{m} : m \in S \text{ tal que } \bar{m} = \overline{m'} \iff m - m' \in Q \},$$

donde la acción de S sobre S/Q está dada por

$$a \cdot \bar{m} := \overline{am},$$

para $a \in S$ y $m \in S$, dotando así a S/Q de estructura de S -módulo. Finalmente la localización de un módulo por P es un S_P -módulo, de modo que la multiplicidad está bien definida.

Ejemplo 3.2.19 Consideremos el anillo de Laurent $S = k[x^{\pm 1}]$, y el ideal $I = (x - 1)^2 \subset S$.

Este ideal es primario, ya que es una potencia de un ideal primo. En particular, si $f, g \in S$ y $fg \in (x - 1)^2$, entonces se cumple que $f \in (x - 1)^2$ o bien existe un entero $m \geq 1$ tal que $g^m \in (x - 1)^2$, lo cual caracteriza a los ideales primarios.

El radical de I es el ideal primo $\sqrt{I} = (x - 1)$, por lo que el conjunto de primos asociados de I es

$$\text{Ass}(I) = \{(x - 1)\}.$$

Denotamos $Q = (x - 1)^2$ y $P = (x - 1)$. Aplicando la propiedad de localización de módulos, se tiene

$$(S/Q)_P = S_P/Q_P = S_{(x-1)}/(x-1)^2 S_{(x-1)}.$$

Este S_P -módulo tiene la siguiente cadena de submódulos:

$$S_{(x-1)}/(x-1)^2 S_{(x-1)} \supset (x-1)S_{(x-1)}/(x-1)^2 S_{(x-1)} \supset 0,$$

lo que muestra que su longitud es 2. Por tanto, la multiplicidad de $P = (x - 1)$ respecto de I es

$$\text{mult}((x - 1), (x - 1)^2) = 2.$$

Definición 3.2.20 Sea I un ideal (no necesariamente radical) en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Sea Σ un complejo poliédrico con soporte $|\Sigma| = \text{trop}(V(I))$ tal que $\text{in}_w(I)$ es constante para $w \in \text{relint}(\sigma)$ y para toda $\sigma \in \Sigma$. Para una celda $\sigma \in \Sigma$ de dimensión máxima, la **multiplicidad** $\text{mult}(\sigma)$ se define como:

$$\text{mult}(\sigma) = \sum_{P \in \text{Ass}(\text{in}_w(I))} \text{mult}(P, \text{in}_w(I))$$

para cualquier $w \in \text{relint}(\sigma)$.

Ejemplo 3.2.21 Sea K un cuerpo con valoración trivial. Consideremos el ideal

$$I = (x + y + 1)^2 \subset K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}].$$

El soporte del complejo poliédrico asociado es $\text{trop}(V(I))$, la tropicalización del polinomio $x + y + 1$: la unión de tres semirrectas que se intersectan en un punto (véase el Teorema 1.2.8). Se satisface que la forma inicial $\text{in}_w(I)$ es constante para cada celda σ del complejo poliédrico Σ y para $w \in \text{relint}(\sigma)$. Por tanto, que podemos pasar a calcular la multiplicidad para una celda maximal.

El ideal de forma inicial es $\text{in}_w(I) = (\text{in}_w(x + y + 1))^2$, el cual no es radical. Su único primo asociado es el ideal $(\text{in}_w(x + y + 1))$, por tanto, la multiplicidad algebraica

$$\text{mult}(P, \text{in}_w(I)) = \text{mult}((\text{in}_w(x + y + 1)), (\text{in}_w(x + y + 1)^2)) = 2,$$

coincide con la potencia del primo, de acuerdo con el razonamiento del ejemplo anterior. Por tanto, la multiplicidad tropical $\text{mult}(\sigma)$ es igual a 2 para cada celda máxima σ en Σ .

Teorema 3.2.22 Sea I un ideal en $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ tal que todas las componentes irreducibles de $V(I)$ tienen la misma dimensión d . Fijemos un complejo poliédrico Σ con soporte $\text{trop}(V(I))$ donde $\text{in}_w(I)$ es constante para w en el interior relativo de cada celda de Σ . Entonces, Σ es un complejo poliédrico equilibrado ponderado con la función de peso mult de la Definición 3.2.20

Teorema 3.2.23 Sea X una subvariedad irreducible de T^n de dimensión d . Entonces, $\text{trop}(X)$ es el soporte de un complejo poliédrico puro de dimensión d que está conectado a por codimensión 1.

Esta propiedad es fundamental para el cálculo algorítmico de variedades tropicales. Para una variedad $X \subset T^n$ de dimensión d , consideramos un grafo cuyos nodos son las celdas de dimensión d de $\text{trop}(X)$, y donde dos nodos están conectados si las celdas correspondientes comparten una cara. El Teorema 3.2.23 garantiza que este grafo es conexo, lo que significa que se puede pasar de cualquier celda máxima a otra a través de una cadena de celdas vecinas.

Esto es clave para el cálculo práctico de $\text{trop}(X)$: empezando desde una celda, podemos identificar todas las celdas vecinas usando técnicas de ideales iniciales, y así recorrer todo el complejo. La demostración del teorema se realiza por inducción en la dimensión d , siendo el caso base $d = 1$ nada trivial. La demostración en detalle se puede consultar en [MS21, Cap. 6]

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Optimización: Caminos más cortos

Un ejemplo clásico donde la aritmética tropical resulta especialmente útil es en el problema de encontrar caminos más cortos en grafos dirigidos ponderados.

Consideremos un grafo dirigido G con n nodos etiquetados del 1 al n , donde cada arista (i, j) tiene una longitud no negativa d_{ij} . En caso de que no exista la arista, asignamos $d_{ij} = +\infty$. El objetivo es determinar la distancia mínima entre dos nodos dados, es decir, el camino con menor suma total de pesos. Este problema se puede plantear algebraicamente usando la matriz de adyacencia

$$D_G = (d_{ij}),$$

donde la diagonal contiene ceros y los valores fuera de la diagonal son las longitudes de las aristas (o infinito si no existe). La aritmética tropical redefine la suma y el producto tradicionales para que la operación de “multiplicación tropical” (que combina sumas y mínimos) aplicada a esta matriz permita calcular de manera eficiente las distancias más cortas entre todos los pares de nodos.

Concretamente, la operación tropical repetida

$$D_G^{\odot(n-1)} = D_G \odot \cdots \odot D_G,$$

calcula, en su entrada (i, j) , la distancia del camino más corto desde el nodo i al nodo j .

Proposición 4.1.1 *Sea G un grafo dirigido ponderado con n nodos y matriz de adyacencia D_G de tamaño $n \times n$. Entonces, la entrada de la matriz $D_G^{\odot(n-1)}$ en la fila i y columna j es igual a la longitud del camino más corto desde el nodo i al nodo j en G .*

Demostración. Sea $d_{ij}^{(r)}$ la longitud mínima de cualquier camino desde el nodo i al nodo j que utilice a lo sumo r aristas en G . Tenemos que

$$d_{ij}^{(1)} = d_{ij}$$

para cualesquiera nodos i y j .

Dado que los pesos de las aristas d_{ij} son no negativos, un camino más corto desde i a j visita cada nodo de G como máximo una vez. En particular, cualquier camino más corto en el grafo dirigido G usa a lo sumo $n - 1$ aristas dirigidas. Por tanto, la longitud de un camino más corto desde i a j coincide con

$$d_{ij}^{(n-1)}.$$

Para $r \geq 2$, se cumple la siguiente fórmula recursiva para las longitudes de estos caminos más cortos:

$$d_{ij}^{(r)} = \min_{k=1, \dots, n} (d_{ik}^{(r-1)} + d_{kj}).$$

Usando la aritmética tropical, esta fórmula puede reescribirse como

$$d_{ij}^{(r)} = d_{i1}^{(r-1)} \odot d_{1j} \oplus d_{i2}^{(r-1)} \odot d_{2j} \oplus \dots \oplus d_{in}^{(r-1)} \odot d_{nj},$$

es decir,

$$d_{ij}^{(r)} = (d_{i1}^{(r-1)}, d_{i2}^{(r-1)}, \dots, d_{in}^{(r-1)}) \odot \begin{pmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix}.$$

De esto se deduce, por inducción en r , que $d_{ij}^{(r)}$ coincide con la entrada en la fila i y columna j de la matriz $D_G^{\odot r}$. En efecto, el lado derecho de la fórmula recursiva es el producto tropical de la fila i de $D_G^{\odot (r-1)}$ por la columna j de D_G , que es precisamente la entrada (i, j) de $D_G^{\odot r}$.

En particular, $d_{ij}^{(n-1)}$ coincide con la entrada en la fila i y columna j de $D_G^{\odot (n-1)}$. Esto prueba la afirmación. \square

Ejemplo 4.1.2 Sea la matriz de adyacencia asociada a un grafo dirigido ponderado:

$$D_G = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 & \infty \\ 1 & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 \\ 1 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}.$$

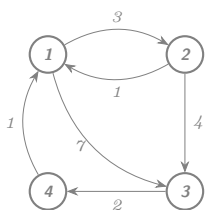
Calculamos el camino más corto de 1 a 4 para diferente número de pasos

- Un paso: No hay arista directa, $d_{14}^{(1)} = d_{14} = \infty$.
- Dos pasos: Se obtiene con el camino $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

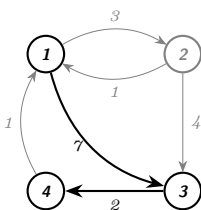
$$d_{14}^{(2)} = \min_k (d_{1k}^{(1)} + d_{k4}) = \min (0 + \infty, 3 + \infty, 7 + 2, \infty + 0) = 9,$$

- Tres pasos: Un camino con 3 aristas es $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ con coste $3 + 4 + 2 = 9$.

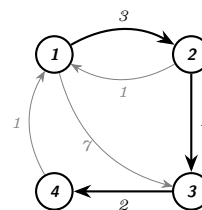
$$d_{14}^{(3)} = \min_k (d_{1k}^{(2)} + d_{k4}) = \min (0 + \infty, 3 + \infty, 7 + 2, 9 + 0) = 9.$$



Camino de 1 arista



Camino de 2 aristas



Camino de 3 aristas

Capítulo 5

Apéndice

5.1. La amebas y su relación con la geometría tropical

Comenzamos definiendo las variedades algebraicas complejas en el anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, siendo \mathbb{K} un cuerpo conmutativo. Los elementos de este anillo son de la forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad \text{con } a_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{K}$$

Definición 5.1.1 Sea I un ideal en $S = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Definimos su **variedad algebraica** como:

$$V(I) = \{z \in (\mathbb{C}^*)^n \mid f(z) = 0, \forall f \in I\}.$$

Definición 5.1.2 Sea I un ideal en S y V su variedad algebraica. Llamamos **ameba de I** a

$$A(I) = \text{Log}_t(V) \subset \mathbb{R}^n.$$

donde $\text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la aplicación logarítmica con $t > 1$ dada por

$$\text{Log}_t(z_1, \dots, z_n) = (\log_t |1/z_1|, \dots, \log_t |1/z_n|),$$

Ejemplo 5.1.3 Veamos un ejemplo para una curva plana compleja C , que tienen dimensión real dos. Su imagen bajo la transformación Log también es un subconjunto bidimensional de \mathbb{R}^2 .

Consideremos el polinomio $f(z, w) = z + w - 1$, cuya variedad asociada está dada por

$$V(f) = \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid z_1 + z_2 - 1 = 0\} = \{(z, 1 - z) \mid z \in \mathbb{C}^*\}.$$

Aplicamos la transformación logarítmica sobre los elementos de la variedad, obteniendo

$$A(f) = \text{Log}_t(V(f)) = \{(-\log_t |z|, -\log_t |1 - z|) \mid z \in \mathbb{C}^*\}.$$

Aunque $V(f)$ no contiene un punto $(0, 1)$, se aproxima a él, de manera que cuando se aplica la transformación logarítmica de un vecindario cercano a ese punto se genera lo que llamamos **tentáculo de la ameba apuntando hacia la derecha**. De manera similar, la transformación de un pequeño vecindario del punto $(1, 0) \in V(f)$ forma parte del tentáculo que apunta hacia arriba, y los puntos de la forma $(z, 1 - z)$ con $|z| \rightarrow \infty$ corresponden al tentáculo que apunta hacia el suroeste.

Variando los valores de la base del logaritmo llegamos a las representaciones de la Figura 5.1 :

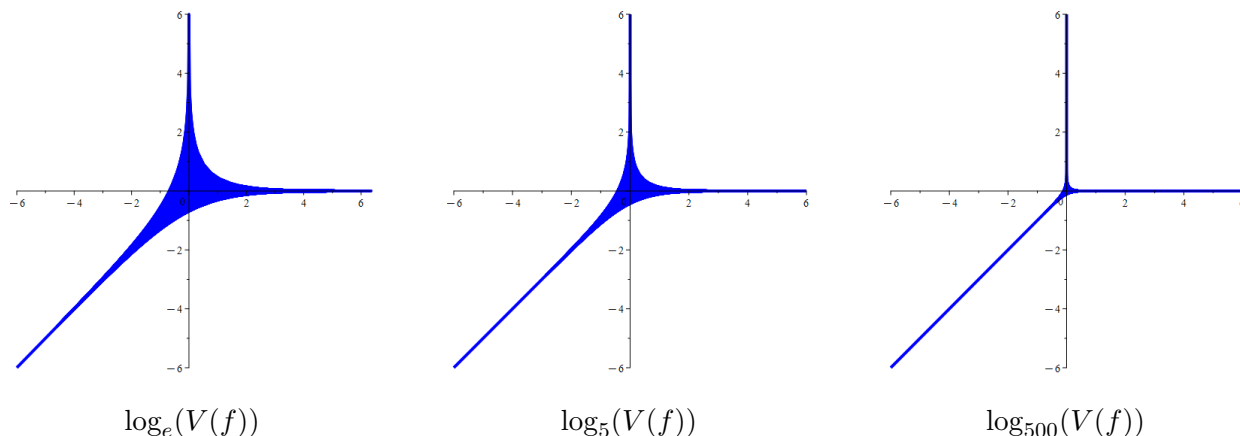


Figura 5.1: Amebas de $V(f)$, con $f(z, w) = z + w - 1$, para distintas bases t en \log_t .

Observamos que, a medida que la base del logaritmo crece, la ameba se contrae y sus tentáculos convergen hacia un conjunto de rayos rectilíneos. Esta figura límite, conocida como la **espina de la ameba**, coincide con una variedad tropical, en este caso, una recta tropical.

Para justificar el paso de estructuras algebraicas clásicas a tropicales, introducimos el proceso conocido como descuantización de Maslov. En esta sección seguiremos la primera parte de [Lit10]

5.1.1. Descuantización de Maslov y aparición del álgebra tropical

Con el fin de motivar la aparición del semianillo tropical, consideraremos una familia de semianillos R_t para $t > 1$ cuya estructura depende de operaciones deformadas. El proceso de descuantización de Maslov consiste en estudiar el comportamiento de esta familia en el límite $t \rightarrow \infty$ de dicha familia.

Sea $t \in \mathbb{R}_{>1}$, definimos $R_t = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus_t, \odot_t)$, donde las operaciones se definen como:

$$x \oplus_t y := -\log_t(t^{-x} + t^{-y}), \quad x \odot_t y := x + y$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Además, se define $t^{-\infty} := 0$ y $-\log_t(0) := \infty$.

Propiedades algebraicas: Se puede comprobar que R_t es un semicuerpo:

- (R_t, \oplus_t) es un monoide conmutativo con elemento identidad $0_t = \infty$. La clausura, asociatividad y conmutatividad de \oplus_t se debe a que la suma real es conmutativa y asociativa, y por tanto \oplus_t también lo es. Por otro lado, el elemento neutro es $+\infty$ ya que:

$$x \oplus_t (+\infty) = -\log_t(t^{-x} + t^{-\infty}) = -\log_t(t^{-x} + 0) = -\log_t(t^{-x}) = x$$

- (R_t, \odot_t) es un monoide con elemento identidad $1_t = 0$. Más aún, al estar definido como la suma usual, forma un grupo abeliano con neutro 0.
- Distributividad: Se verifica que \odot_t distribuye a \oplus_t :

$$x \odot_t (y \oplus_t z) = x + (-\log_t(t^{-y} + t^{-z})) = -\log_t(t^{-y}t^{-x} + t^{-z}t^{-x}) = (x \odot_t y) \oplus_t (x \odot_t z)$$

Proposición 5.1.4 *Se verifica que el límite de esta familia de semianillos es el semianillo tropical:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_t = \mathbb{T}$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Queremos probar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x \oplus_t y = \min(x, y) \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x \odot_t y = x + y.$$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que $x \leq y$, se tiene:

$$x \oplus_t y = -\log_t(t^{-x} + t^{-y}) = x - \log_t(1 + t^{x-y}).$$

Como $x - y \leq 0$, se tiene que t^{x-y} tiende a cero cuando t crece, y por continuidad del logaritmo se concluye que $\log_t(1 + t^{x-y})$ también tiende a cero. Luego:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x \oplus_t y = x = \min(x, y).$$

Para la segunda, basta notar que $x \odot_t y = x + y$ para todo t , por lo que su límite es $x + y$. □

5.2. Verificación de propiedades del semianillo tropical

Verificaremos que efectivamente \mathbb{T} cumple las propiedades de un semianillo:

1. $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus)$ es un monoide conmutativo con identidad $0_{\mathbb{T}} = +\infty$.

- Clausura: El mínimo de dos elementos del conjunto siempre pertenece a él.
- Asociatividad: Para todo $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ se verifica que:

$$(x \oplus y) \oplus z = \min(\min(x, y), z) = \min(x, y, z) = \min(x, \min(y, z)) = x \oplus (y \oplus z).$$

- Conmutatividad: Se sigue directamente de la conmutatividad de la operación \min .
- Elemento identidad: Existe $0_{\mathbb{T}} = +\infty$ tal que $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$x \oplus (+\infty) = \min(x, +\infty) = x \quad y \quad (+\infty) \oplus x = \min(+\infty, x) = x.$$

2. $(\overline{\mathbb{R}}, \odot)$ es un monoide con elemento identidad $1_{\mathbb{T}} = 0$.

Dado que \odot coincide con la suma usual, se tiene que $(\overline{\mathbb{R}}, \odot) = (\overline{\mathbb{R}}, +)$. Como $(\mathbb{R}, +)$ es un monoide conmutativo con elemento neutro 0, y la operación se extiende naturalmente a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces $(\overline{\mathbb{R}}, \odot)$ también es un monoide conmutativo con identidad $1_{\mathbb{T}} = 0$.

3. El producto se distribuye sobre la adición. Dado que se satisface la distribución por la izquierda

$$x \odot (y \oplus z) = x + \min(y, z) = \min(x + y, x + z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z), \quad \forall x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$$

Al haber probado previamente la conmutatividad de \oplus y \odot , la validez de la distribución por la izquierda implica la distribución por la derecha.

4. $0_{\mathbb{T}}$ es absorbente en T . Para todo $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ se satisface $0_{\mathbb{T}} \odot x = x \odot 0_{\mathbb{T}} = 0_{\mathbb{T}}$:

$$0_{\mathbb{T}} \odot x = \infty + x = \infty = 0_{\mathbb{T}}$$

Solo se ha probado $0_{\mathbb{T}} \odot x = x$, ya que por conmutatividad del producto, se verifica $x \odot 0_{\mathbb{T}} = 0_{\mathbb{T}}$

5.3. Operaciones tropicales: suma, producto y ejemplos

Para comprender mejor el comportamiento de las operaciones del álgebra tropical, presentamos a continuación las tablas de adición y producto para los números del 1 al 8. En la primera tabla, cada celda muestra el mínimo entre la fila y la columna correspondiente, mientras que en la segunda tabla, cada celda representa la suma usual de ambos valores.

\oplus	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5	5	5
6	1	2	3	4	5	6	6	6
7	1	2	3	4	5	6	7	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8

\odot	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

Con esta notación, evitamos ciertos errores que podrían asumirse debido a las convenciones de la aritmética clásica. En particular, en la aritmética tropical, las siguientes igualdades no se cumplen:

$$1 \odot x \neq x, \quad -1 \odot x \neq -x, \quad 0 \odot x \neq 0$$

Operaciones con vectores y matrices en el semianillo tropical

Las operaciones del álgebra lineal, como la suma y el producto de vectores y matrices, tienen sentido en el semianillo tropical. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Suma tropical de vectores: $(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})_i = \min(u_i, v_i)$. Ejemplo: $\mathbf{u} = (3, 7, 2)$, $\mathbf{v} = (5, 4, 6)$

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = (\min(3, 5), \min(7, 4), \min(2, 6)) = (3, 4, 2).$$

- Producto por escalar: $(\lambda \odot \mathbf{u})_i = \lambda + u_i$. Ejemplo: $\lambda = 2$, $\mathbf{u} = (3, 7, 2)$

$$\lambda \odot \mathbf{u} = (2 + 3, 2 + 7, 2 + 2) = (5, 9, 4).$$

- Producto escalar tropical: $\mathbf{u} \odot \mathbf{v}^T = \min_i(u_i + v_i)$. Ejemplo con \mathbf{u}, \mathbf{v} anteriores:

$$\mathbf{u} \odot \mathbf{v}^T = \min(3 + 5, 7 + 4, 2 + 6) = \min(8, 11, 8) = 8.$$

- Suma tropical de matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $(A \oplus B)_{ij} = \min(A_{ij}, B_{ij})$. Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A \oplus B = \begin{bmatrix} \min(1, 2) & \min(2, 3) \\ \min(3, 1) & \min(4, 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Multiplicación tropical de matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$:

$$(A \odot B)_{ij} = \min_k (A_{ik} + B_{kj}).$$

Ejemplo con A, B anteriores:

$$c_{11} = \min(1 + 2, 2 + 1) = 3, \quad c_{12} = \min(1 + 3, 2 + 5) = 4,$$

$$c_{21} = \min(3 + 2, 4 + 1) = 5, \quad c_{22} = \min(3 + 3, 4 + 5) = 6,$$

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

5.4. Código Maple para la visualización de curvas tropicales

Código para visualización en \mathbb{R}^2

```

1 GraficarPuntos := proc(F)
2   local k, h, m, nummin, P, puntos, i, n, Fval;
3   puntos := [];
4   n := nops(F);
5   for k from -4 by 0.05 to 4 do
6     for h from -4 by 0.05 to 4 do
7       Fval := [seq(evalf(subs(x = k, y = h, F[i])), i = 1 .. n)];
8       m := min(op(Fval));
9       nummin := add(`if`(evalb(Fval[i] <= m), 1, 0), i = 1 .. n);
10      P := evalb(2 <= nummin);
11      if P then
12        puntos := [op(puntos), [k, h]];
13      end if;
14    end do;
15  end do;
16  display(pointplot(puntos, symbol = solidcircle,
17                  symbolsize = 8, color = black));
18 end proc;

```

Código para visualización en \mathbb{R}^3

```

1 GraficarPuntos3d := proc(F)
2   local k, h, m, nummin, P, puntos, i, n, Fval, f, superf;
3   puntos := [];
4   n := nops(F);
5   f := (x, y) -> min(seq(F[i], i = 1 .. n));
6   for k from -5 by 0.1 to 5 do
7     for h from -5 by 0.1 to 5 do
8       Fval := [seq(evalf(subs(x = k, y = h, F[i])), i = 1 .. n)];
9       m := min(op(Fval));
10      nummin := add(`if`(evalb(Fval[i] <= m), 1, 0), i = 1 .. n);
11      P := evalb(2 <= nummin);
12      if P then
13        puntos := [op(puntos), [k, h, m]];
14      end if;
15    end do;
16  end do;
17  superf := plot3d(f(x, y), x = -5 .. 5, y = -5 .. 5,
18                color = lightgrey, transparency = 0.5);
19  display([superf, pointplot3d(puntos, symbol = solidcircle,
20                              symbolsize = 6, color = black)]);
21 end proc;

```

5.5. Valoración en el cuerpo de series de Puiseux

Antes de comenzar, debemos conocer las siguientes definiciones:

Definición 5.5.1 Sea A un anillo conmutativo con unidad. El **anillo de serie de potencias formales** sobre A en la variable t , denotado $A[[t]]$, es el conjunto de todas las expresiones formales de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

donde $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.5.2 El conjunto $A[[t]]$ es un anillo con las operaciones de suma y producto definidas término a término (producto convolutivo).

Demostración. Dado que las operaciones de suma y multiplicación están bien definidas, heredan la asociatividad y conmutatividad de A , al ser A un anillo conmutativo. El elemento neutro aditivo es la serie nula

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot t^n,$$

mientras que el elemento unidad multiplicativa es la serie

$$1 = t^0,$$

que tiene coeficiente 1 en la potencia cero y coeficientes cero en todas las demás potencias. Además, la suma en $A[[t]]$ tiene inversos aditivos, obtenidos simplemente cambiando el signo de cada coeficiente de la serie. La multiplicación es distributiva respecto a la suma, completando así la estructura de anillo conmutativo unitario. \square

La generalización de series de potencias formales a exponentes $n < 0$ resulta en la siguiente noción:

Definición 5.5.3 Sea K un cuerpo. El **cuerpo de series de Laurent** en una variable t sobre K , denotado $K((t))$, es el conjunto de todas las expresiones formales de la forma:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n t^n,$$

donde $N \in \mathbb{Z}$, $a_n \in K$, y solo un número finito de coeficientes a_n con $n < 0$ son distintos de cero.

Con las mismas operaciones definidas para la serie de potencias formales, $K((t))$ es un cuerpo: toda serie no nula tiene inverso multiplicativo.

Definición 5.5.4 Sea K un cuerpo. El **cuerpo de series de Puiseux** sobre K , denotado $K\{\{t\}\}$, es el conjunto de todas las series formales de la forma:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n t^{n/r},$$

donde $r \in \mathbb{N}_{>0}$ es un denominador fijo (que puede variar entre series), $N \in \mathbb{Z}$, y $a_n \in K$, con la condición de que solo un número finito de coeficientes con $n < 0$ son distintos de cero.

Existe una relación entre el cuerpo de series de Laurent y el de Puiseux: este último puede expresarse como la unión creciente de los cuerpos de series de Laurent en la variable $t^{1/n}$:

$$K\{\{t\}\} = \bigcup_{n \geq 1} K((t^{1/n})),$$

En este contexto, surge una valoración natural

$$\text{val} : K\{\{t\}\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

que asigna a cada serie formal no nula $f(t) \in K\{\{t\}\}$ el menor exponente que aparece en su desarrollo. Es decir, si

$$f(t) = a_n t^{n/r} + \text{términos de mayor exponente}, \quad a_n \neq 0,$$

entonces $\text{val}(f(t)) = n/r$. Por convención, $\text{val}(0) = \infty$.

La valoración val indica el orden del cero o del polo en $t = 0$. En particular, para una función racional $c(t)$, el valor de $\text{val}(c(t))$ es un entero positivo si tiene un cero en $t = 0$, y un entero negativo si tiene un polo. Esta valoración es importante porque permite medir cómo de singular es una serie o función cerca del origen.

Ejemplo 5.5.5 Consideremos la siguiente función racional, la cual tiene un cero en $t = 0$. Nuestro objetivo es determinar el orden de dicho cero utilizando la valoración.

$$c(t) = \frac{t^3 + 2t^4}{5 + t} = \frac{(1 + 2t)}{5 + t} t^3 = \left(\frac{1 + 2t}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{5}} \right) t^3.$$

Su desarrollo en serie de Laurent en torno a $t = 0$ comienza como:

$$c(t) = \left(\frac{1 + 2t}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{5} \right)^n \right) t^3 = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}t - \frac{1}{25}t^2 + \dots \right) t^3 = \frac{1}{5}t^3 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25} \right) t^4 + \dots$$

La serie resultante es:

$$c(t) = \frac{1}{5}t^3 + \frac{9}{25}t^4 + \dots,$$

por lo tanto, el menor exponente que aparece es 3, y se tiene:

$$\text{val}(c(t)) = 3.$$

Esto indica que la función $c(t)$ tiene un cero de orden 3 en $t = 0$.

5.6. Morfismos monomiales entre toros algebraicos

En esta sección se estudian las aplicaciones entre variedades definidas en el toro algebraico. En concreto, vamos a estudiar de los morfismos monomiales, que son un caso particular. Para esto, nos hemos basado principalmente en dos referencias: [Cut02] y [Sal01].

Definición 5.6.1 Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, y sea $T^n = (K^*)^n$ el toro algebraico de dimensión n . Un **morfismo monomial** es una aplicación

$$\varphi : T^n \longrightarrow T^m$$

dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_n^{a_{1n}}, \dots, x_1^{a_{m1}} x_2^{a_{m2}} \dots x_n^{a_{mn}}),$$

donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ es una matriz de exponentes enteros.

Intuitivamente, en un morfismo monomial cada coordenada es un monomio en las variables x_1, \dots, x_n .

Ejemplo 5.6.2 *Un ejemplo particularmente simple e importante de morfismo monomial es la **proyección monomial**, que se obtiene tomando A como una submatriz identidad. Por ejemplo, la aplicación*

$$\pi : T^n \longrightarrow T^r, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_r)$$

es un morfismo monomial, dado por una matriz $A \in \mathbb{Z}^{r \times n}$ en la que las r primeras columnas forman la matriz identidad y el resto son ceros.

Sea K un cuerpo. Sean A y B dos K -álgebras de tipo finito. Un homomorfismo de K -álgebras

$$f^* : A \longrightarrow B$$

induce un morfismo de variedades afines de manera contravariante.

$$f : \text{Spec}(B) \longrightarrow \text{Spec}(A), \quad f(\mathfrak{p}) = (f^*)^{-1}(\mathfrak{p})$$

Observación 5.6.3 *En el caso de $A = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}]$, $B = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, anillos de polinomios de Laurent, entonces $\text{Spec}(A) \cong T^m$ y $\text{Spec}(B) \cong T^n$. De modo que un homomorfismo*

$$\phi^* : K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}] \longrightarrow K[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$$

induce un morfismo de toros

$$\phi : T^n \longrightarrow T^m$$

Ejemplo 5.6.4 *Sea el homomorfismo $\phi^* : K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}] \longrightarrow K[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$, dado por*

$$\phi^*(x_i) = y_1^{a_{i1}} y_2^{a_{i2}} \cdots y_n^{a_{in}} = y^{\mathbf{a}_i}, \quad \mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{Z}^n,$$

De manera contravariante se induce un morfismo entre variedades afines en la dirección opuesta:

$$\begin{aligned} \phi : \text{Spec}(K[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]) &\longrightarrow \text{Spec}(K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}]), \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto (y_1^{a_{11}} \cdots y_n^{a_{1n}}, \dots, y_1^{a_{m1}} \cdots y_n^{a_{mn}}). \end{aligned}$$

Definición 5.6.5 *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado dotado de una valoración no trivial. La **tropicalización** de un morfismo monomial $\varphi : T^n \rightarrow T^m$, con matriz de exponentes $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, es la aplicación*

$$\text{Trop}(\varphi) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

dada por

$$\text{Trop}(\varphi)(w) = A \odot w,$$

donde $w = (\text{val}(x_1), \dots, \text{val}(x_n))$ y \odot denota la multiplicación tropical de matrices.

Bibliografía

- [CLO07] David A. Cox, John B. Little y Donal O’Shea. Ideals, Varieties, and Algorithms. 3rd. Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-35651-8.
- [Cut02] S.D. Cutkosky. Monomialization of Morphisms from 3-Folds to Surfaces. Lecture Notes in Mathematics n.º 1786. Springer, 2002. ISBN: 9783540437802. URL: https://books.google.es/books?id=Yh6z_xvSZNQC.
- [Gol99] J.S. Golan. Semirings and their Applications. Springer Netherlands, 1999. ISBN: 9780792357865. URL: https://books.google.es/books?id=DNdTF_4PzpoC.
- [Gra] Universidad de Granada. Conjuntos convexos. <https://www.ugr.es/~jperez/docencia/GeomConvexos/cap1.pdf>. [PDF]. Consultado el 7 de junio de 2025.
- [Kap70] Irving Kaplansky. Commutative Rings. Available at <https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/kaprings.pdf>. University of Chicago Press, 1970.
- [Lit10] G. L. Litvinov. Tropical mathematics, classical mechanics and geometry. 2010. arXiv: 1001.4247 [math.RA]. URL: <https://arxiv.org/abs/1001.4247>.
- [MS21] D. Maclagan y B. Sturmfels. Introduction to Tropical Geometry. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2021. ISBN: 9781470468569. URL: <https://books.google.es/books?id=c6ZaEAAAQBAJ>.
- [Mat89] H. Matsumura. Commutative Ring Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989. ISBN: 9780521367646. URL: <https://books.google.es/books?id=yJwNrABugDEC>.
- [Nav14] Juan A. Navarro. Álgebra Conmutativa Básica. Fecha de publicación: 25 de mayo de 2014. Mayo de 2014.
- [Sal01] Pedro Sancho de Salas. Álgebra Conmutativa. Dic. de 2001. URL: <https://matematicas.unex.es/~sancho/AlgebraConmutativa/alco0.pdf>.
- [SV21] Gabriela Sansigre Vidal. Reducción de endomorfismos. Apuntes de Álgebra Lineal, Tema 4. Documento interno, Universidad / curso. 2021.
- [Wan20] Ryan Wandsnider. «The Fundamental Theorem of Algebra over the Tropical Semiring». Undergraduate REU paper, University of Chicago, August 29, 2020. 2020. URL: <https://math.uchicago.edu/~may/REU2020/REUPapers/Wandsnider.pdf>.
- [Yag16] Keyvan Yaghmayi. Geometry over the tropical dual numbers. 2016. arXiv: 1611.05508 [math.AG]. URL: <https://arxiv.org/abs/1611.05508>.
- [Zie95] Günter M. Ziegler. Lectures on Polytopes. Vol. 152. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.



EPES
Escuela Politécnica
de Enseñanza Superior