



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID



EPES
Escuela Politécnica
de Enseñanza Superior



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA DE ENSEÑANZA SUPERIOR (EPES)

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

Visión Algebraica: Problemas minimales punto-recta en reconstrucción de modelos 3D

Autor: Javier Rodríguez Carrasquilla

Dirigido por: Beatriz Pascual Escudero

Juan Viu Sos

Madrid, 4 de junio de 2025

Visión Algebraica: Problemas minimales punto-recta en reconstrucción de modelos 3D

Autor: Javier Rodríguez Carrasquilla

Dirigido por: Beatriz Pascual Escudero
Juan Viu Sos

Trabajo Fin de Grado, 4 de junio de 2025

Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)

Edificio C, Paseo Juan XXIII, 11. Madrid

Si deseas citar este trabajo, la entrada completa en Bib_TE_X es la siguiente:

```
@mastersthesis{citekey,  
title = {Visión Algebraica: Problemas minimales punto-recta en reconstrucción de modelos 3D},  
author = {Rodríguez Carrasquilla, Javier y Pascual Escudero, Beatriz y Viu Sos, Juan},  
school = {Escuela Politécnica de Enseñanza Superior (EPES)},  
year = {2025},  
type = {Trabajo Fin de Grado}  
}
```

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons «Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional»](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Plantilla derivada de <https://github.com/blazaid/UPM-Report-Template>.



Resumen

El objetivo del trabajo será comprender las herramientas de Geometría Algebraica Proyectiva necesarias para poder definir los problemas punto-recta minimales en Visión por Computador y exponer los resultados principales que permiten obtener una clasificación completa de estos. El primer capítulo expone las cámaras como principal aplicación entre espacios proyectivos del trabajo, las variedades proyectivas como estructura principal de los objetos geométricos del trabajo y las Grassmannianas, para dotar a los subespacios proyectivos de estructura de variedades proyectivas. El segundo capítulo expone los tipos principales de aplicación entre variedades, relaciones entre ellas, la dimensión de una variedad y su relación con el anillo cociente y resultados sobre dimensión de fibras de aplicaciones, con objetivo de enunciar y demostrar el teorema de la dimensión de las fibras. El tercer capítulo trata los problemas punto-recta usando el lenguaje de la geometría algebraica proyectiva presentado en las secciones anteriores, define los problemas minimales y balanceados, clasifica los balanceados y expone algoritmos para comprobar si un problema balanceado es minimal, usando las herramientas teóricas expuestas en el capítulo anterior, y computar su número de soluciones.

Palabras clave: Visión por computador; Geometría algebraica proyectiva; Geometría computacional; Grassmannianas; Dimensión de las fibras

Abstract

The objective of the work will be to understand the necessary tools of Projective Algebraic Geometry to be able to define minimal point-line problems on Computer Vision and expose the principal results that enable us to obtain a complete classification of them. The first chapter exposes the cameras as the principal application between projective spaces of this work and Grassmannians, to give projective subspaces structure of projective variety. The second chapter exposes the main types of application between varieties and results on dimension of fibers, with the objective of announce and prove the Theorem of dimension of fibers. The third chapter discusses point-line problems using the language of projective algebraic geometry previously exposed, defines minimal and balanced problems, classifies balanced ones and exposes algorithms to verify if a balanced problem is minimal, by using the theoric tools exposed in the previous chapter, and compute its number of solutions.

Keywords: Computer vision; projective algebraic geometry; Computational geometry; Grassmannians; Dimension of fibers

Índice general

I	Introducción	I
2	Geometría algebraica proyectiva: nociones previas	7
2.1	Variedades proyectivas	7
2.2	Grassmannianas	16
3	Aplicaciones regulares y dimensión de variedades	29
3.1	Aplicaciones dominantes	30
3.2	Independencia algebraica y dimensión	34
3.3	Aplicaciones suaves	35
3.4	Fibras de aplicaciones regulares	39
3.5	Teorema de la dimensión de las fibras	45
4	Problemas punto-recta en visión por computador	51
4.1	Cámaras proyectivas	51
4.2	Problemas punto-recta	56
4.3	Problemas punto-recta balanceados	76
4.4	Eliminación del arreglo punto-recta tridimensional	94
4.5	Planteamiento en función de rectas y condiciones polinomiales	96
4.6	Algoritmos de minimalidad y grado	105
A	Variedades algebraicas, topología de Zariski y bases de Gröbner	109
B	Variedades algebraicas de dimensión 0	113
C	Espacios proyectivos, coordenadas homogéneas y aplicaciones proyectivas	119
D	Polinomios homogéneos	127
	Bibliografía	129

1

Introducción

La Visión Algebraica por Computador es la rama de la Geometría Algebraica que estudia el comportamiento de subconjuntos de espacios proyectivos tridimensionales bajo ciertas aplicaciones llamadas *cámaras*. Esta rama tiene como objetivo establecer una relación entre un espacio tridimensional y su proyección (fotografía) sobre un espacio bidimensional. Un ejemplo de esto es fotografiar o pintar un paisaje, ya que estamos tomando una configuración de un espacio tridimensional y formando a partir de ella una representación bidimensional. Entre los problemas más clásicos de esta rama, está el *problema de reconstrucción del arreglo 3D*. Este consiste en recuperar la estructura tridimensional original y las cámaras que la han transformado a partir solamente de las distintas imágenes. Esto tiene multitud de aplicaciones. Por ejemplo, si se tuvieran varias fotos o cuadros de un monumento, esto permitiría recuperar la estructura 3D del monumento, e incluso los puntos desde donde se han tomado las fotografías o pinturas (ver Agarwal et al., 2010). Una de las primeras consideraciones de los problemas de reconstrucción es qué objetos tomar en el espacio tridimensional que sean útiles de cara a plantear el problema, no podemos tomar objetos demasiado complejos porque el problema será imposible de resolver.

Dentro de los problemas de reconstrucción en visión por computador, los más sencillos, que serán el objeto de estudio del trabajo, son los conocidos como problemas *punto-recta*, que como su propio nombre indica, son problemas en los que la estructura tridimensional viene compuesta únicamente por puntos, rectas e incidencias fijadas entre estos. Por *incidencias* entendemos las relaciones de qué rectas se cortan y en qué puntos lo hacen. En la práctica, estos problemas son de gran utilidad ya que dadas varias *imágenes*, se puede representar en muchos casos la esencia del objeto que se busca reconstruir, y de hecho existen algoritmos que permiten hallar estos puntos y rectas. Por ejemplo, si el objeto a reconstruir es una casa, hay algoritmos (ver Meng et al., 2020) que permiten detectar las aristas del tejado, las ventanas y los límites de las paredes y considerar las rectas

y puntos detectadas para realizar la reconstrucción es un buen método porque se consideran estructuras sencillas que son representativas del objeto. Matemáticamente, estos problemas son interesantes por involucrar tanto puntos de espacios proyectivos como rectas: ambos se transforman en puntos o rectas respectivamente bajo aplicaciones proyectivas, como son las cámaras. Se pueden plantear preguntas interesantes acerca de la estructura del espacio de soluciones de los problemas. Por ejemplo, ¿existe siempre una solución? ¿son un número finito o infinito? y de ser finito ¿podemos estimar este número?.

El tipo de problema punto-recta donde para un conjunto de imágenes genérica siempre existe solución y además es un conjunto finito se denomina *minimal*, es decir dado un conjunto de imágenes a menudo voy a encontrar puntos y rectas tridimensionales y conjuntos de cámaras que los transformen en las imágenes y además los puntos, rectas y cámaras solución serán un conjunto finito. De cara a realizar una clasificación, definiremos los problemas *balanceados*, problemas en los que se cumple una condición más concreta en términos algebraicos, lo que nos facilitará dicha clasificación. Este tipo de problema será además minimal bajo ciertas condiciones adicionales. Esto nos permitirá dada una clasificación de los problemas balanceados derivar una para los problemas minimales.

El objetivo del trabajo será estudiar el marco teórico y los resultados presentados en el Artículo Duff et al., 2020. Esto requerirá: primeramente, comprender las herramientas de geometría algebraica proyectiva necesarias para poder definir los problemas punto-recta minimales; luego, dar una clasificación de los problemas balanceados; y finalmente, exponer los resultados principales que permiten comprobar la minimalidad de cada uno de los problemas balanceados y algoritmos para determinar su grado.

Se puede encontrar a lo largo del trabajo contenido sobre: variedades proyectivas, por ser la estructura principal de los arreglos de puntos tridimensionales y bidimensionales; Grassmannianas, por ser una representación de los subespacios proyectivos, y codificar información relevante sobre estos para los problemas punto recta; aplicaciones regulares y dimensión de variedades, para poder enunciar y demostrar el *Teorema de la dimensión de las fibras*; el propio Teorema de la dimensión de las fibras, que es el teorema central del trabajo por ser el puente entre los problemas minimales (objeto principal de estudio del trabajo) y problemas balanceados (el tipo de problema que clasificaremos). También se encontrará en el trabajo la construcción de las aplicaciones de cámara, por ser el tipo principal de aplicación proyectiva que consideraremos, y problemas punto-recta minimales y balanceados, así como la clasificación de estos últimos, la determinación de problemas ba-

lanceados minimales y finalmente algunos algoritmos para poder verificar la minimalidad y, si corresponde, el grado de los problemas balanceados clasificados.

La estructura de este Trabajo de Fin de Grado es como sigue: En el Capítulo 2 se abordarán las nociones previas sobre geometría algebraica proyectiva necesarias para definir los problemas punto-recta. En la Sección 2.1 se definirán las variedades proyectivas y se abordarán cuestiones cómo qué tipo de polinomios las definen, que tipo de ideales y cómo englobar las variedades algebraicas afines en las variedades proyectivas. Finalmente en la Sección 2.2 se definirán las Grassmannianas, que dan estructura de variedad proyectiva al conjunto de subespacios proyectivos de una cierta dimensión fijada y por tanto permiten asignar puntos a subespacios y determinar la dimensión de este conjunto visto como variedad.

En el Capítulo 3 estudiaremos varios tipos de aplicaciones entre variedades algebraicas, entre ellas las *regulares*, las *dominantes* y las *suaves* y se definirá dimensión de las variedades de forma algebraica y geométrica. El objetivo es enunciar y demostrar el Teorema de la dimensión de las fibras. Para ello se definirán las aplicaciones dominantes y sus propiedades (Sección 3.1), el concepto de base de transcendencia (Sección 3.2), y se estudiarán tanto el plano tangente a una variedad en un punto, la dimensión de una variedad, su relación con las bases de transcendencia y las aplicaciones suaves (Sección 3.3) y se presentarán resultados previos a poder enunciar y demostrar dicho teorema (Sección 3.4). Finalmente en la Sección 3.5 se enunciará y se dará una demostración completa del Teorema de la dimensión de las fibras y se expondrán sus implicaciones.

Todo el trabajo previo culminará en el Capítulo 4, donde se definirán los problemas punto-recta en función de variedades afines y proyectivas, para lo que se utilizarán las Grassmannianas. En primer lugar se construirán las aplicaciones de cámara, su representación matricial y el tipo de cámara con el que trabajaremos, las cámaras *calibradas* (Sección 4.1). Después, se definirán los problemas punto-recta minimales y balanceados y la equivalencia entre estos gracias al Teorema de la dimensión de las fibras y se dará una clasificación completa de los balanceados (Sección 4.3). Acto seguido se allanará el terreno para las computaciones mediante la definición de una variedad nueva con un número menor de parámetros y se derivará la equivalencia entre problemas minimales y balanceados en función de dicha variedad (Sección 4.4). Seguidamente, (Sección 4.5) de nuevo de cara a las computaciones, se replanteará el problema en función únicamente de rectas y se proporcionarán ecuaciones que definan la variedad de la sección anterior. Por último en la Sección 4.6 se utilizarán las ecuaciones de la sección anterior para diseñar algoritmos que

permitan verificar si un problema minimal es balanceado y, en tal caso, calcular su grado.

Adicionalmente, y con objetivo de que el trabajo sea autocontenido, se han incluido en forma de apéndice algunos conceptos estudiados durante la carrera en las asignaturas *Geometría II* y *Álgebra y Geometría computacional* del grado en Matemáticas, que son el punto de partida para el contenido desarrollado en el capítulo 2. En el apéndice A se presentarán los contenidos previos de la asignatura de *Álgebra y Geometría computacional* en relación a variedades algebraicas y bases de Gröbner. En el B se definirán conceptos de la asignatura de *Álgebra y Geometría computacional* en relación a variedades de dimensión 0, lo que será útil para la creación de los algoritmos de minimalidad y grado. En el C se presentarán los de la asignatura *Geometría II* en relación a espacios proyectivos, coordenadas homogéneas, subespacios proyectivos y aplicaciones proyectivas. Finalmente en el D se presentarán definiciones y notaciones básicas sobre polinomios homogéneos.

Notaciones:

$\mathbb{K}$	Un cuerpo no necesariamente algebraicamente cerrado.
$\mathbb{K}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$	El $\mathbb{K}$ -espacio afín de dimensión n .
$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$	El $\mathbb{K}$ -espacio proyectivo n dimensional.
$M _{\{i_1, \dots, i_{m'}\} \times \{j_1, \dots, j_{n'}\}}$	La submatriz de M resultante de intersectar las filas $i_1, \dots, i_{m'}$ con las columnas $j_1, \dots, j_{n'}$.
$M _{\{i_1, \dots, i_k\}}$	La submatriz resultante de tomar solo las filas o columnas (si hay mas filas que columnas se toman filas, sino columnas) $i_1, \dots, i_k$ de M .
$\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_k\}$	El subespacio vectorial generado por los vectores $v_1, \dots, v_k$ de un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.
$\mathcal{L}\{p_1, \dots, p_k\}$	El subespacio proyectivo generado por los puntos $p_1, \dots, p_k$ de un $\mathbb{K}$ -espacio proyectivo.
$\mathrm{GL}(k, \mathbb{K})$	El grupo general lineal de orden k sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (es decir el conjunto de matrices $M \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{K})$ invertibles).
$\mathrm{SO}(k, \mathbb{K})$	El subgrupo especial ortogonal de $\mathrm{GL}(k, \mathbb{K})$ (es decir el conjunto de matrices $M \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{K})$ tales que $M^{-1} = M^T$).

2

Geometría algebraica proyectiva: nociones previas

En primer lugar debemos definir los objetos con los que trabajaremos en los problemas punto-recta: los puntos y las rectas. Con objetivo de establecer relaciones entre puntos del espacio tridimensional, puntos de las imágenes y cámaras, definiremos las variedades proyectivas. Para las rectas, definiremos los conceptos básicos de la teoría de Grassmannianas, y las dotaremos también de estructura de variedades proyectivas.

2.1. Variedades proyectivas

A continuación se definirán las variedades proyectivas y se expondrá su equivalencia con ideales de polinomios y la manera en la que engloban a las variedades algebraicas. A no ser que se diga lo contrario, cuando no se especifique la referencia proyectiva asociada a las coordenadas homogéneas de un punto de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ la referencia proyectiva será la estándar. Este capítulo usará como referencia el capítulo 8 de Cox et al., 2015

Definición 2.1. Sean $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos de grados $d_1, \dots, d_s$, se define

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : f_i(p) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, s\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

la *variedad proyectiva* definida por $f_1, \dots, f_s$.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}^1$ la referencia estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$. Consideremos los polinomios $f_1 = x_0 - 2x_1$ y $f_2 = x_0x_1 - 2x_1^2$ de $\mathbb{K}[x_0, x_1]$ y la variedad $\mathbb{V}(f_1, f_2)$. Tenemos que f_1 solo se anula en el punto $(2 : 1)$, mientras que f_2 se anula en $(2 : 1)$ y $(1 : 0)$, por tanto tenemos

$$\mathbb{V}(f_1, f_2) = \{(2 : 1)\}$$

Si consideramos $(6 : 3)$ coordenadas homogéneas distintas, asociadas al mismo punto, al sustituir en los polinomios tenemos

$$x_0 - 2x_1 = 6 - 2 \cdot 3 = 0 \quad \checkmark$$

$$x_0x_1 - 2x_1^2 = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 0 \quad \checkmark$$

Proposición 2.3. Sean $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos y sea $V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$ una variedad proyectiva. Entonces $W_i = V \cap \mathcal{U}_i$ puede identificarse con la variedad afín $\mathbb{V}(g_1, \dots, g_s) \subseteq \mathbb{K}^n$, donde

$$g_i = f_i(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{K}[y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n], \quad \forall i = 1, \dots, s$$

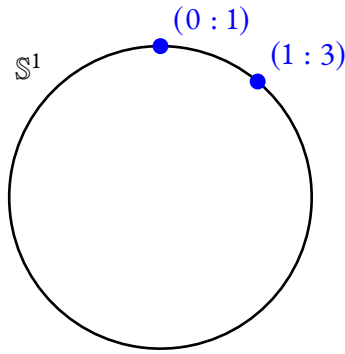
Ejemplo 2.4. Sea $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^1 = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ la referencia proyectiva estándar en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, sea $f = -3x_0^2 + x_0x_1 \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$ y consideremos la variedad proyectiva $V = \mathbb{V}(f) = \{(0 : 1), (1 : 3)\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Veamos la variedad afín $V_0 = \mathcal{U}_0 \cap V$, tenemos que $f(1, x_1) = x_1 - 3$, por lo que

$$V_0 = \mathbb{V}(x_1 - 3) = \{3\} \subseteq \mathbb{R}$$

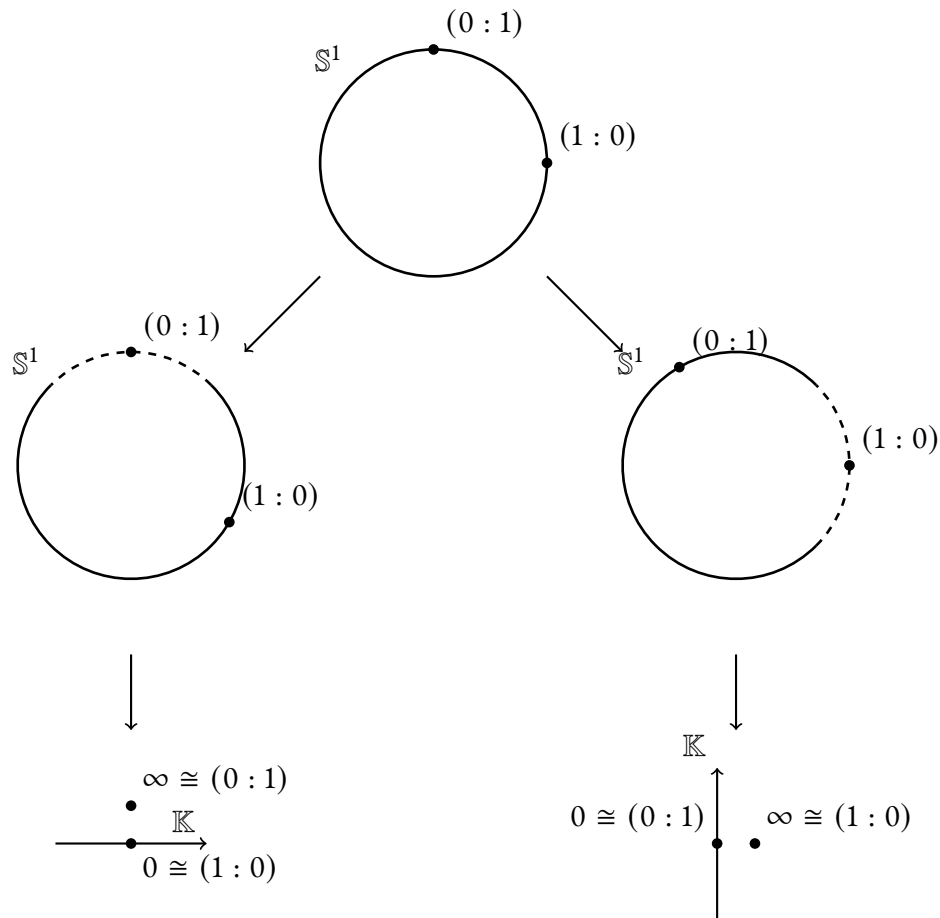
tomamos ahora la variedad $V_1 = \mathcal{U}_1 \cap V$, tenemos que $f(x_0, 1) = -3x_0^2 + x_0$, por lo que

$$V_1 = \mathbb{V}(-3x_0^2 + x_0) = \{0, 1/3\} \subseteq \mathbb{R}$$

Tenemos que $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \cong \mathbb{S}^1$, por lo que podemos ver los puntos $(0 : 1), (1 : 3) \in \mathbb{V}(f)$ como



Por la Proposición C.17 y sus observaciones posteriores, podemos ver $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{K} \times \{\infty\}$, por lo que cuando tomamos la variedad afín intersecando la proyectiva con los abiertos $\mathcal{U}_i$, lo que estamos haciendo es ver una representación afín del espacio proyectivo mandando ciertos puntos al infinito. En el caso de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, podemos ver $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathcal{U}_0 \cup H_0$, donde lo que no se ve en $\mathcal{U}_0$ es el punto del infinito $(0 : 1)$, ó $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathcal{U}_1 \cup H_1$, donde lo que no se ve en $\mathcal{U}_0$ es el punto del infinito $(0 : 1)$.



Por lo que las variedades afines resultantes son



2.1.1. Diccionario álgebra-geometría

Una vez se tienen definidas las variedades proyectivas, queremos al igual que con las algebraicas relacionarlas con ideales de polinomios. Sin embargo, y al contrario que con las variedades afines, no cualquier ideal va a definir una variedad proyectiva.

Observación. Ser homogéneo no se preserva bajo la suma, el ideal $I = \langle x^2 - xy, x + y \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y]$ está definido por dos polinomios homogéneos y el polinomio $(x^2 - xy) + (x + y) \in I$ no es homogéneo.

Observación. Sea $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal definido por polinomios homogéneos. Si $g \in I$, polinomio de grado total d , entonces $g(x) = 0$, para cualquier $x \in \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, ya que si $g \in I$, entonces existen $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tales que $g = \sum_{i=1}^s b_i f_i$, por lo que

$$g(x) = \sum_{i=1}^s b_i(x) f_i(x) = \sum_{i=0}^n b_i(x) \cdot 0 = 0$$

Además, si escribimos $b_i = \sum_{j=0}^d b_{i,j}$ como la suma de sus componentes homogéneas, donde $b_{i,j}$ es homogéneo de grado j , tenemos que

$$g = \sum_{i=1}^s b_i f_i = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^d b_{i,j} f_i = \sum_{j=0}^d \sum_{i=1}^s b_{i,j} f_i$$

lo que significa que todas las componentes homogéneas de g están en I .

Motivados por este comportamiento, definimos los ideales que relacionaremos con las variedades proyectivas.

Definición 2.5. Un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ se denomina *homogéneo* si para cualquier $g = \sum_{i=0}^d g_i \in I$ polinomio de grado total d , donde $g_i \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ son polinomios homogéneos, se tiene que $g_i \in I$, para todo $i = 0, \dots, d$.

Teorema 2.6. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal, entonces son equivalentes:

1. I es un ideal homogéneo de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.
2. $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, donde $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ son polinomios homogéneos.
3. Fijado un orden monomial en $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, existe una base de Gröbner reducida de I con respecto de ese orden está formada por polinomios homogéneos.

Ejemplo 2.7. Sea el ideal $I = \langle 2x_0 + 2x_1, 2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x_0, x_1]$. Veamos que es homogéneo. Sea $f \in I$ polinomio de grado d , $f = \sum_{i=0}^d f_i$ con $f_i \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$ homogéneo de grado i , hay que ver que $f_i \in I$. Como $f \in I$, existen $g, h \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$ tales que $f = g(2x_0 + 2x_1) + h(2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1)$. Sean $g = \sum_{i=0}^d g_i$ y $h = \sum_{i=0}^d h_i$ con $g_i, h_i \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$

homogéneos de grado i , tenemos

$$\begin{aligned}
 f &= g(2x_0 + 2x_1) + b(2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^d g_i \right) (2x_0 + 2x_1) + \left(\sum_{j=0}^d b_j \right) (2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1) \\
 &= \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^d g_i (2x_0 + 2x_1) + b_j (2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1) \\
 &= \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^d g_i (2x_0 + 2x_1) + b_j (2x_0^2) + b_j (-3x_0 - 3x_1) \\
 &= \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^d g_i (2x_0 + 2x_1) + b_j (2x_0^2) - \frac{3}{2} b_j (2x_0 + 2x_1) \\
 &= (2x_0 + 2x_1) \sum_{i=0}^d \left(g_i - \frac{3}{2} b_i \right) + (2x_0^2) \sum_{j=0}^d b_j,
 \end{aligned}$$

de manera que la componente $f_i = (2x_0 + 2x_1) (g_i - \frac{3}{2} b_i) + (2x_0^2) b_{i+1}$. Se tiene que $f_i \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$ ya que $(2x_0 + 2x_1) \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$ por ser igual al primer generador y $(2x_0^2) \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$ ya que $2x_0^2 = (2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1) + \frac{3}{2}(2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1)$. Tenemos por tanto que el ideal es homogéneo. Se tiene además que se puede encontrar un conjunto de generadores homogéneos, ya que $I = \langle 2x_0 + 2x_1, 2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1 \rangle = \langle 2x_0 + 2x_1, 2x_0^2 \rangle$. Además una base de Göbner reducida con respecto al orden lexicográfico es $\{2x_0 + 2x_1, 2x_1^2\}$, formada por polinomios homogéneos.

Definición 2.8. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal, se define

$$\mathbb{V}(I) := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : f(p) = 0, \quad \forall f \in I\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

Proposición 2.9. Sea $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo definido por $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos. Entonces

$$\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n,$$

es decir $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ es una variedad proyectiva.

Ejemplo 2.10. Sea $I = \langle 2x_0 + 2x_1, 2x_0^2 - 3x_0 - 3x_1 \rangle = \langle 2x_0 + 2x_1, 2x_0^2 \rangle$ un ideal homogéneo, veamos la variedad $\mathbb{V}(I)$. Tenemos en primer lugar que $2x_0^2 = 0$, por lo que $x_0 = 0$. Por

su parte el primer polinomio nos define $2x_0 + 2x_1 = 0$; $x_0 = -x_1$, lo que implica que $x_1 = 0$, esto no define ningún punto en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, la variedad es vacía y por tanto trivialmente proyectiva.

Proposición 2.11. Sea $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ una variedad proyectiva. Si $\mathbb{K}$ es infinito, se tiene que

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] : f(a_0, \dots, a_n) = 0, \quad \forall (a_0, \dots, a_n) \in V\}$$

es un ideal homogéneo de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$

Definición 2.12. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo, entonces

$$\sqrt{I} = \{f \in I : f^N \in I, \quad N \in \mathbb{N}\}$$

es un ideal homogéneo

Teorema 2.13. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo infinito, $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo y $V \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ una variedad proyectiva. Entonces $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ es una variedad proyectiva e $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ es un ideal homogéneo. Tenemos por tanto una correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \text{Ideal homogéneo} & \xrightarrow{\mathbb{V}} & \text{Variedad proyectiva} \\ & \xleftarrow{\mathbb{I}} & \end{array}$$

que revierte inclusiones. Además $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = V$ y $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Al igual que para variedades afines, podemos definir la topología de Zariski, esta vez sobre el espacio $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ definiendo como cerrados las variedades proyectivas.

Definición 2.14. Se define la *topología de Zariski* sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ de manera que un subconjunto se considera cerrado si es una variedad proyectiva. Es decir si $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal homogéneo, un cerrado de Zariski tiene la forma $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Como consecuencia, un abierto de Zariski tiene la forma $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \mathbb{V}(I)$.

Definición 2.15. Sea $S \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ un subconjunto cualquiera. Se define la *clausura de Zariski* de S a la variedad proyectiva más pequeña que contiene a S . La clausura de Zariski de S se denota $\overline{S}$.

Observación. Los conjuntos

$$\mathcal{U}_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

definidos en la Proposición C.17 son abiertos de Zariski por ser de la forma

$$\mathcal{U}_i = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \setminus \mathbb{V}(x_i)$$

2.1.2. Clausura proyectiva de una variedad afín

Por último, queremos englobar las variedades afines como “porciones” de variedades proyectivas y recíprocamente que variedades proyectivas se pueden construir a dada una variedad afín. Esto será de utilidad para derivar ecuaciones para definir una variedad proyectiva viéndola en cartas como variedad afín.

Definición 2.16. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ un ideal. Se define la *homogeneización de I respecto de x_i* como el ideal

$$I^{h, x_i} := \langle f^{h, x_i} : f \in I \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n].$$

Proposición 2.17. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ un ideal. La homogeneización I^{h, x_i} es un ideal homogéneo

Observación. Dado un ideal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$, se tiene que $\langle f_1^{h, x_i}, \dots, f_s^{h, x_i} \rangle \subseteq I^{h, x_i}$, pero en general no se tiene la igualdad, como se ve en el siguiente ejemplo. Para encontrar polinomios que generen el ideal homogéneo, serán de utilidad las bases de Gröbner, cuya definición y resultados principales vienen expuestos en el Apéndice A.

Ejemplo 2.18. Sea $I = \langle x_1 + x_2^2, x_1 - x_2^3 \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2]$ un ideal. Tenemos que el elemento $x_0x_1 + x_1 \in I$ ya que $x_1x_2 + x_1 = x_2(x_1 + x_2^2) - (x_1 - x_2^3)$. Sea I^{h, x_0} la homogeneización de I respecto de la variable x_0 , tenemos que $(x_1x_2 + x_1)^{h, x_0} = x_0x_1 + x_1x_2 \in I^{h, x_0}$. Sea $J = \langle (x_1 - 1 + x_2^2)^{h, x_0}, (x_1 - x_2^3)^{h, x_0} \rangle = \langle x_0x_1 + x_2^2, x_0^2x_1 - x_2^3 \rangle$, veamos si $x_0x_1 + x_1x_2 \in J$, tenemos que encontrar $g, h \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ tales que

$$x_0x_1 + x_1x_2 = g(x_0x_1 + x_2^2) + h(x_0^2x_1 - x_2^3).$$

Como el grado de $x_0x_1 + x_1x_2$ es 2 y el de $x_0^2x_1 - x_2^3$ es 3, $h = 0$, lo que nos deja con $x_0x_1 + x_1x_2 = g(x_0x_1 + x_2^2)$. Ahora como $x_0x_1 + x_1x_2$ no es múltiplo de $x_0x_1 + x_2^2$ se tiene que no existen g y h que cumplan $x_0x_1 + x_1x_2 = g(x_0x_1 + x_2^2) + h(x_0^2x_1 - x_2^3)$ y por tanto $x_0x_1 + x_1x_2 \notin J$, es decir $J \neq I^{h, x_0}$.

Definición 2.19. Un orden monomial en un anillo de polinomios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ se dice *graduado* si

$$x^\alpha > x^\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n : |\alpha| > |\beta|$$

Observación. Se utilizarán bases de Gröbner para encontrar generadores de ideales homogéneos, sin embargo se tendrán que construir con respecto a ordenes monomiales específicos, los graduados. Los ordenes *grlex* y *grevlex* son graduados, pero *lex* no lo es.

Teorema 2.20. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ un ideal y $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ una base de Gröbner de I con respecto a un orden monomial graduado en $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$. Entonces $G^{h, x_i} = \{g_1^{h, x_i}, \dots, g_s^{h, x_i}\}$ es una base de Gröbner de $I^{h, x_i} \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

Ejemplo 2.21. (Continuación de 2.18). Se tiene que $G = \{x_1^2 + x_1, x_1x_2 + x_1, x_2^2 + x_1\}$ es una base de Gröbner del ideal $I = \langle x_1 + x_2^2, x_1 - x_2^3 \rangle$. Podemos construir la homogeneización de I con respecto a la variable x_0 como el ideal generado por la homogeneización respecto de x_0 de los elementos de la base de Gröbner:

$$I^{h, x_0} = \langle x_1^2 + x_0x_1, x_1x_2 + x_0x_1, x_2^2 + x_0x_1 \rangle$$

y aquí si tenemos $x_1x_2 + x_0x_1 \in \langle x_1^2 + x_0x_1, x_1x_2 + x_0x_1, x_2^2 + x_0x_1 \rangle$ (es el segundo generador del ideal de hecho).

Una vez definida la homogeneización de un polinomio, veremos el significado que tiene geoméricamente por medio de tomar la variedad definida por ese ideal.

Definición 2.22. Sea $W \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad afín, se define la *clausura proyectiva* de W como la variedad proyectiva

$$\overline{W} = \mathbb{V}(I(W)^{h, x_i}) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n,$$

donde $I(W)^{h, x_i} \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ es la homogeneización del ideal $I(W) \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$.

Algunas propiedades importantes de la clausura proyectiva de una variedad son las siguientes.

Proposición 2.23. Sea $W \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad afín y $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ su clausura proyectiva (realizando la homogeneización con la variable x_i). Entonces se tiene

1. $\overline{W} \cap U_i = W$.
2. $\overline{W}$ es la variedad proyectiva más pequeña en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ que contiene a W .
3. Si W es irreducible, también lo es $\overline{W}$.
4. Ninguna componente irreducible de $\overline{W}$ está en el hiperplano del infinito $\mathbb{V}(x_i) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Teorema 2.24. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_n]$ un ideal. Entonces $\mathbb{V}(I^{h, x_i}) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ es la clausura proyectiva de $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{K}^n$.

2.1.3. Variedades multiproyectivas

Un factor importante a tener en cuenta de cara a nuestro trabajo, es que se trabajará con subconjuntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, para los que son útiles las variedades proyectivas, pero también con subconjuntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_s}$ definidas por polinomios que codifiquen relaciones entre sus puntos. El producto de espacios afines es un espacio afín, por lo que se puede seguir trabajando con variedades afines, sin embargo esto no pasa para los espacios proyectivos. Definiremos a continuación la generalización de variedades proyectivas para subconjuntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_s}$ definidos por relaciones polinomiales: las variedades multiproyectivas.

Definición 2.25. Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_{ij} : i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, n_i]$ se dice *multihomogéneo* si para todo $k = 0, \dots, r$, el polinomio visto como

$$f \in \mathbb{K}(x_{ij} : i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, r, j = 0, \dots, n_i)[x_{kj} : j = 0, \dots, n_k]$$

es homogéneo.

Proposición 2.26. Sea $f \in \mathbb{K}[x_{ij} : i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, n_i]$ un polinomio multihomogéneo. Si f se anula para ciertas coordenadas homogéneas de $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_r}$, entonces f se anula para todas. En concreto:

$$\mathbb{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_r} : f(p) = 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_r}$$

es un conjunto bien definido de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_r}$.

Definición 2.27. Sean $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_{ij} : i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, n_i]$ polinomios multihomogéneos, se define

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_r} : f_i(p) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, s\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n_r}$$

la *variedad multiproyectiva* definida por $f_1, \dots, f_s$.

Ejemplo 2.28. Consideremos el polinomio $c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2; c_0, c_1, c_2]$. Se tiene que visto como polinomio en las variables x_0, x_1, x_2 es homogéneo (lineal de hecho) y visto como polinomio en c_0, c_1, c_2 también. Por tanto se tiene que el polinomio es multihomogéneo y

$$\mathbb{V}(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

es una variedad multiproyectiva. si consideramos c_0, c_1, c_2 como los coeficientes de la ecuación de una recta proyectiva (nótese que si se escalan definen la misma recta y si son todos nulos no definen ninguna recta, por lo que tiene sentido verlos como puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$), podemos ver un punto de la variedad como unos coeficientes c_0, c_1, c_2 que definen una recta a la que pertenece el punto (x_0, x_1, x_2) .

2.2. Grassmannianas

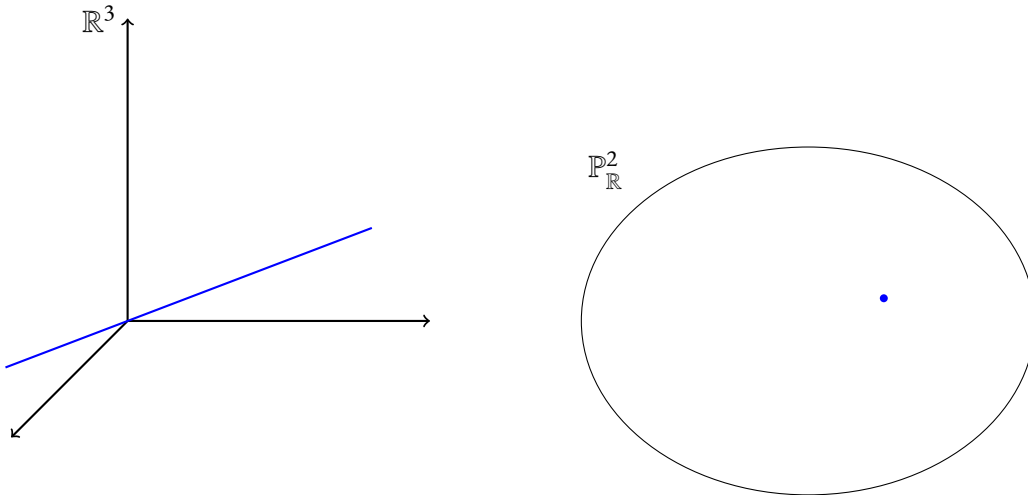
Por último, se definirán las Grassmannianas, se las dotará de estructura de variedad diferenciable y de variedad proyectiva y se darán algoritmos para hallar polinomios generadores de su ideal de definición. Este capítulo usará como referencias el capítulo 5 de Michałek y Sturmfels, 2021 y el capítulo 5 sección 4 de Smith et al., 2000.

Definición 2.29. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $n, k \in \mathbb{N}$ con $k < n$, se denomina *Grassmanniana* $\mathbb{G}(k, n)$ al conjunto de subespacios vectoriales de dimensión k contenidos en $\mathbb{K}^n$.

Observación. Hemos visto anteriormente que podemos identificar cada recta de $\mathbb{K}^{n+1}$ con un punto de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. De manera similar podemos identificar cada subespacio vectorial $V \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ con un subespacio proyectivo $\mathbb{P}(V) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Esto nos da una interpretación alternativa de las Grassmannianas, podemos ver $\mathbb{G}(k, n)$ como el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión k contenidos en $\mathbb{K}^n$ o como el conjunto de subespacios proyectivos de dimensión $k - 1$ contenidos en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$.

La importancia de la representación de las Grassmannianas como subconjunto de un espacio proyectivo es la de poder darlas estructura de variedades proyectivas, y así poder asignar a cada subespacio proyectivo un punto en una Grassmanniana.

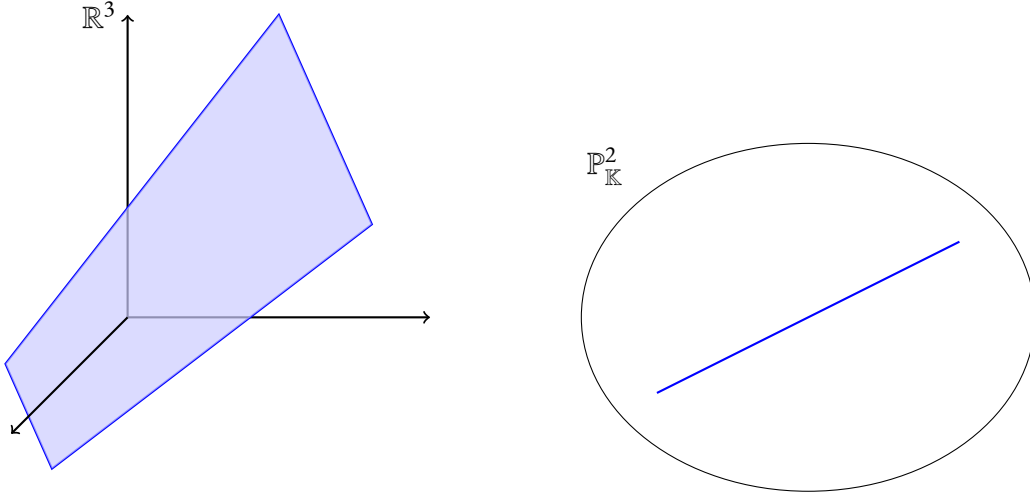
Ejemplo 2.30. Consideremos el cuerpo ambiente $\mathbb{R}$ la Grassmanniana $\mathbb{G}(1, 3)$ se puede ver como los subespacios vectoriales de dimensión 1 (las rectas) de $\mathbb{R}^3$ o como los subespacios proyectivos de dimensión 0 (los puntos) de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.



Sean la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $(e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$ y la referencia estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$, $([e_1], [e_2], [e_3]; [e_1 + e_2 + e_3])$. Tenemos por ejemplo que $\mathcal{L}(1, 2, -1) \subseteq \mathbb{R}^3$

es un punto de $\mathbb{G}(1, 3)$. Equivalentemente $[1 : 2 : -1]$ también es un punto de $\mathbb{G}(1, 3)$.

La Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 3)$ se puede ver como los subespacios vectoriales de dimensión 2, los planos, de $\mathbb{R}^3$ o como los subespacios proyectivos de dimensión 1, las rectas, de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.



Considerando de nuevo la base canónica y la referencia estándar. Tenemos por ejemplo que $\mathcal{L}\{(1, 2, -1), (2, 3, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es un punto de $\mathbb{G}(2, 3)$. Equivalentemente $\mathcal{L}\{[1 : 2 : -1], [2 : 3 : 1]\}$ también es un punto de $\mathbb{G}(2, 3)$.

Una vez tenemos definidas las Grassmannianas, buscamos dotarlas de estructura de variedad diferenciable. Podemos considerar en primer lugar que cualquier punto (objeto) de la Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$ (que recordemos que no es más que un subespacio vectorial de dimensión k), se puede construir a partir de k vectores linealmente independientes que generen dicho subespacio vectorial. Esta información se puede codificar en una matriz de $\mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ como sigue:

Sea $W := \mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{G}(k, n)$ donde $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n})$, consideramos su representación matricial de la manera siguiente:

$$M_W := \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{k,1} & v_{k,2} & \dots & v_{k,n} \end{pmatrix}$$

No obstante, esta representación no es única, ya que si consideramos cualquier combinación lineal de los vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$, que genere un subespacio vectorial de la misma

dimensión, el subespacio no cambia. Esto sería equivalente a multiplicar por la izquierda M_W por un elemento $P \in \text{GL}(k, \mathbb{K})$. Buscamos por tanto unos elementos que codifiquen la información de los vectores que generen el subespacio W y sean invariantes (en este caso salvo escalado) bajo acción de elementos de $\text{GL}(k, \mathbb{K})$. Esos elementos son los menores de la matriz M_W , los cuales inducen un embebimiento en un espacio proyectivo suficientemente grande.

Teorema 2.31 (Embebimiento de Plücker). *La Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$ se puede embeber dentro de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$ como subvariedad diferenciable de dimensión $k(n-k)$.*

Demostración.

Sea W es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ de dimensión k , M_W es la matriz formada por k vectores generadores de ese subespacio en fila. Definimos $\sim$ como la relación de equivalencia de manera que dadas dos matrices $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes si existe una matriz invertible que lleva una en otra bajo multiplicación por la izquierda

$$M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow \exists P \in \text{GL}(k, \mathbb{K}) : M_1 = P M_2$$

y consideramos la aplicación $\Phi : \mathbb{G}(k, n) \rightarrow \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})/\sim$ donde $\Phi(W) = [M_W]$. Se tiene que esta aplicación es biyectiva.

Es inyectiva ya que dados dos subespacios $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ si tenemos que

$$\Phi(W_1) = \Phi(W_2) \Leftrightarrow [M_{W_1}] = [M_{W_2}] \Leftrightarrow \exists P \in \text{GL}(k, \mathbb{K}) : M_1 = P M_2$$

Para dos matrices $M_1 = (v_{ij})_{i=1, \dots, k, j=1, \dots, n}$ y $M_2 = (v'_{ij})_{i=1, \dots, k, j=1, \dots, n}$ representando W_1 y W_2 respectivamente, la igualdad anterior nos indica que los $(v'_{i1}, \dots, v'_{ik})$ son una combinación lineal de los $(v_{i1}, \dots, v_{ik})$ con el mismo rango que estos, por lo que generan el mismo espacio. Se concluye que $W_1 = W_2$.

Por otro lado, la sobreyectividad es trivial ya que dada una $[M_W] \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})/\sim$ siempre vamos a tener un $W \in \mathbb{G}(k, n)$ tal que $\Phi(W) = [M_W]$. Basta tomar un representante de $[M_W]$ y tomar W como el espacio generado por sus filas.

Una vez hecha esta identificación consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} i : \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})/\sim &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1} \\ M_W &\mapsto (\det(M_W|_{\{1, \dots, k\}}) : \dots : \det(M_W|_{\{n-k, \dots, n\}})) \end{aligned}$$

dónde $M_W|_{\{i_1, \dots, i_k\}}$ es la submatriz de M_W formada por las k columnas $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Se toma el orden de los menores de acuerdo al algoritmo siguiente:

Algoritmo 1 Cálculo de las coordenadas de Plücker

Input: M_W , matriz que representa un subespacio vectorial

Output: $i(M_W)$, las coordenadas de Plücker del punto de la Grassmanniana asociado

$i(M_W) \leftarrow ()$, inicializamos el vector de coordenadas vacío

for $i_1 = 1, \dots, n - k$ **do**

for $i_2 = i_1 + 1, \dots, n - k + 1$ **do**

$\vdots$

for $i_k = i_{k-1} + 1, \dots, n$ **do**

$i(M_W) \leftarrow i(M_W) + (\det(M_W|_{\{i_1, \dots, i_k\}}))$, se añade la coordenada

$\det(M_W|_{\{i_1, \dots, i_k\}})$ al final

end for

$\vdots$

end for

end for

return $i(M_W)$

El conjunto de llegada de la aplicación es $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1} = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{\binom{n}{k}})$ porque $\binom{n}{k}$ es el número de menores maximales distintos en una matriz en $\mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$, de las n columnas hay $\binom{n}{k}$ maneras de tomar una fila.

Veamos en primer lugar que está bien definida. Sean $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ tales que $[M_1] = [M_2]$, veamos que $i(M_1) = i(M_2)$. En primer lugar, por pertenecer a la misma clase de equivalencia tenemos que $\exists P \in GL(k, \mathbb{K}) : M_1 = PM_2$ se tiene por tanto que para cualesquiera menores de M_1 y M_2 ,

$$\det(M_1|_{\{i_1, \dots, i_k\}}) = \det(P) \det(M_2|_{\{i_1, \dots, i_k\}}),$$

dónde tenemos también en cuenta que $\det(P) \neq 0$. Esto quiere decir que

$$\Phi(M_1) = (\det(M_1|_{\{1, \dots, k\}}) : \dots : \det(M_1|_{\{n-k, \dots, n\}}))$$

y

$$\begin{aligned} \Phi(M_2) &= (\det(M_2|_{\{1, \dots, k\}}) : \dots : \det(M_2|_{\{n-k, \dots, n\}})) \\ &= (\det(P) \det(M_2|_{\{1, \dots, k\}}) : \dots : \det(P) \det(M_2|_{\{n-k, \dots, n\}})) \\ &= (\det(M_1|_{\{1, \dots, k\}}) : \dots : \det(M_1|_{\{n-k, \dots, n\}})) \end{aligned}$$

Por lo que se concluye que $\Phi(M_1) = \Phi(M_2)$.

Veamos que Φ es inyectiva. Supongamos que tenemos dos subespacios W_1 y W_2 de dimensión k representados por las matrices M_1 y M_2 . Supongamos sin pérdida de generalidad que las primeras k columnas de cada matriz son linealmente independientes, en caso de no ser así, se pueden reordenar las columnas de manera que lo sean. Podemos por tanto formar las matrices $\widetilde{M}_1 = M_1|_{1,\dots,k}^{-1} \cdot M_1$ y $\widetilde{M}_2 = M_2|_{1,\dots,k}^{-1} \cdot M_2$ de manera que las primeras k columnas sean la identidad. Es decir, $[M_1] = [\widetilde{M}_1]$ y $[M_2] = [\widetilde{M}_2]$, así que procederemos con las segundas. Una vez las tenemos de esta forma, vamos a ver que cualquier elemento de las matrices $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2$ que no está en la parte de la identidad se puede obtener (salvo signo) como cierto menor de las matrices. Sea la matriz $\widetilde{M}$ de la forma:

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & m_{1,k+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & m_{k,k+1} & \dots & m_{k,n} \end{pmatrix}.$$

Tenemos que podemos obtener el elemento $m_{i,j}$ (salvo signo) tomando las columnas $1, \dots, i-1, i+1, \dots, k, j$, ya que tendríamos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{1,j} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & m_{i-1,j} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{i,j} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & m_{i+1,j} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & m_{k,j} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna $i-1$ veces obtenemos

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{i,j} \\ 1 & \dots & 0 & m_{i+1,j} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & m_{k,j} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna $k-i$ veces obtenemos

$$= (-1)^{k-i} m_{i,j}$$

Como en $\Phi(M_1), \Phi(M_2)$ tenemos todos los menores maximales y $\Phi(\widetilde{M}_1) = \Phi(M_1) = \Phi(M_2) = \Phi(\widetilde{M}_2)$, obtenemos que $(-1)^{k-i} (M_1)_{i,j} = (-1)^{k-i} (M_2)_{i,j}, \forall i = 1, \dots, k, \forall j =$

$k + 1, \dots, n$, lo que implica

$$(M_1)_{ij} = (M_2)_{ij}, \forall i = 1, \dots, k, \forall j = k + 1, \dots, n.$$

Como además las k primeras columnas son la identidad en ambas, se tiene que $(\widetilde{M}_1) = (\widetilde{M}_2)$, por lo que se concluye que $W_1 = W_2$.

Hasta ahora tenemos que $\mathbb{G}(k, n)$ es un subconjunto de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$. Para ver que es una subvariedad diferenciable hay que equiparla con un atlas y ver que los cambios de carta son diferenciables. Sabemos que al menos uno de los menores maximales de la matriz que representa al subespacio debe ser no nulo. Consideramos por tanto como abiertos de Zariski

$$\mathcal{U}_{i_1, \dots, i_k} = \{(x_{1, \dots, k} : \dots : x_{n-k, \dots, n}) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1} : x_{i_1, \dots, i_k} \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$$

Por lo visto al comprobar la inyectividad de Φ , podemos a partir de estos abiertos construir de manera única una matriz con la identidad en las columnas $i_1, \dots, i_k$. Podemos llevar por último las columnas de la matriz no pertenecientes a la identidad a un vector de $\mathbb{K}^{k(n-k)}$ construido por columnas, por lo que tenemos así nuestras cartas $\varphi_{i_1, \dots, i_k} : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1} \rightarrow \mathbb{K}^{k(n-k)}$.

Veamos por último que los cambios de carta son diferenciables

$$\varphi_{j_1, \dots, j_k} \circ \varphi_{i_1, \dots, i_k}^{-1} : \varphi_{i_1, \dots, i_k}^{-1}(\mathcal{U}_{i_1, \dots, i_k} \cap \mathcal{U}_{j_1, \dots, j_k}) \rightarrow \varphi_{j_1, \dots, j_k}(\mathcal{U}_{i_1, \dots, i_k} \cap \mathcal{U}_{j_1, \dots, j_k})$$

Esta aplicación en esencia: Toma un vector de $\mathbb{K}^{k(n-k)}$, lo transforma por columnas en una matriz $A \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ con la identidad en las columnas $i_1, \dots, i_k$ y se transforma por la aplicación i . Seguidamente, divide las coordenadas entre la coordenada $j_1, \dots, j_k$ y recupera la matriz, que esta vez contendrá la matriz identidad en las columnas $j_1, \dots, j_k$. Por último toma las $(n - k)$ filas de la Matriz $A|_{\{j_1, \dots, j_k\}}^{-1} A$ no pertenecientes a la identidad y las transforma en un vector $\mathbb{K}^{k(n-k)}$. Este proceso da como resultado una aplicación polinómica, el único paso delicado sería multiplicar por la inversa, que sabemos que existe porque el vector inicial está en $\varphi_{i_1, \dots, i_k}^{-1}(\mathcal{U}_{i_1, \dots, i_k} \cap \mathcal{U}_{j_1, \dots, j_k})$, lo que significa que las columnas $j_1, \dots, j_k$ de A son linealmente independientes y esta inversa existe. Además la expresión quedaría dividida por el determinante, que de nuevo por la independencia lineal de esas columnas no se va a anular nunca. Por tanto los cambios de carta son diferenciables y se concluye que la Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$ se puede embeber dentro de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$ como subvariedad diferenciable de dimensión $k(n - k)$. ■

Ejemplo 2.32. Consideremos la Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$. Vamos a construir el cambio de cartas

$$\varphi_{3,4} \circ \varphi_{1,2}^{-1} : \varphi_{1,2}(\mathcal{U}_{1,2} \cap \mathcal{U}_{3,4}) \rightarrow \varphi_{3,4}(\mathcal{U}_{1,2} \cap \mathcal{U}_{3,4})$$

En primer lugar consideramos un elemento de $\varphi_{1,2}(\mathcal{U}_{1,2} \cap \mathcal{U}_{3,4})$, por ejemplo

$$(2, 3, 1, 2).$$

A continuación creamos la matriz que representa este subespacio, con la identidad en este caso en las columnas 1 y 2 por tener que transformar el punto por la aplicación $\varphi_{1,2}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como queremos transformarlo ahora por la aplicación $\varphi_{3,4}$, necesitamos la matriz identidad en las columnas 3 y 4. Para ello multiplicamos por la matriz inversa de la formada con las columnas 3 y 4 como se muestra:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por último, una vez formada la identidad en las columnas 3 y 4 transformamos la matriz por la aplicación $\varphi_{3,4}$ formando un vector por columnas de la matriz no perteneciente a la identidad:

$$(2, -3, -1, 2).$$

Tenemos por tanto que dado un vector

$$(a, b, c, d) \in \varphi_{1,2}(\mathcal{U}_{1,2} \cap \mathcal{U}_{3,4}),$$

la expresión explícita de la aplicación $\varphi_{3,4} \circ \varphi_{1,2}^{-1}$ es

$$\varphi_{3,4} \circ \varphi_{1,2}^{-1}(a, b, c, d) = \frac{1}{ad - bc}(d, -b, -c, a),$$

dónde $ad - bc$ nunca se va a anular por estar trabajando con puntos de $\varphi_{1,2}(\mathcal{U}_{1,2} \cap \mathcal{U}_{3,4})$. De hecho, $ad - bc$ es el determinante de la submatriz que representa al subespacio, formada por las columnas 3 y 4, que por trabajar con puntos de este estilo sabemos que es no nulo por estar en el abierto $\mathcal{U}_{3,4}$ (la coordenada referente a ese menor es no nula).

Estrictamente, tenemos que el conjunto imagen de la aplicación $\varphi_{1,2}^{-1}$ son puntos del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$, pero para hacer los cálculos es mucho más conveniente trabajar con las matrices que representan a dichos puntos.

Observación. El embebimiento de Plücker no es sobreyectivo.

Consideremos el punto de $\mathbb{G}(2, 4)$ asociado al subespacio $\mathcal{L}\{(1, 0, u_1, u_2), (0, 1, v_1, v_2)\}$. Tendríamos las siguientes coordenadas homogéneas de acuerdo a los menores de la matriz formada por las filas de los vectores del anterior subespacio y con el orden establecido en el Algoritmo 1:

$$(1 : v_1 : v_2 : -u_1 : -u_2 : u_1v_2 - u_2v_1) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$$

Aquí vemos que tenemos restricciones en las coordenadas, las 5 primeras son libres pero la sexta depende de estas, por lo que si consideramos un punto de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ cuyas primeras 5 coordenadas no satisfagan la relación de arriba, ese punto de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ no representará ningún subespacio vectorial y no será un punto de la Grassmanniana. Además,

$$\dim(\mathbb{G}(2, 4)) = 2(4 - 2) = 4 \neq 5 = \dim(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5).$$

por lo que tiene sentido tener una restricción en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ que rebaje su dimensión a 4.

Esta observación nos da una idea:

dado un punto de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$, ¿qué ecuaciones tiene que satisfacer para ser un punto de $\mathbb{G}(k, n)$? Es decir, ¿podemos ver $\mathbb{G}(k, n)$ como una variedad proyectiva?

Teorema 2.33. *La Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$ es una variedad proyectiva en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$.*

Demostración.

El objetivo para probar que $\mathbb{G}(k, n)$ es una variedad proyectiva es expresarla como un conjunto de ceros de polinomios homogéneos en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$.

Sea $M \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ una matriz que representa a cierto punto de $\mathbb{G}(k, n)$. Como las filas de M son los vectores que generan el subespacio vectorial asociado al punto, y el subespacio es de dimensión k , las filas son linealmente independientes. Por tanto existen unos $i_1, \dots, i_k$ tales que $\det(M|_{\{i_1, \dots, i_k\}}) \neq 0$, es decir el punto de la Grassmanniana está en $\mathbb{G}(k, n) \cup \mathcal{U}_{i_1, \dots, i_k}$. Definimos por tanto $\widetilde{M} = M|_{\{i_1, \dots, i_k\}}^{-1} M$, de manera que las columnas $i_1, \dots, i_k$ son la identidad. Si consideramos las coordenadas homogéneas de p siguiendo la construcción realizada en el Teorema 2.31, sabemos que hay $k(n - k)$ coordenadas que son iguales (salvo signo) a los coeficientes de la matriz M no pertenecientes a las columnas de la identidad. El resto de coordenadas hacen referencia a menores de la matriz donde se toman al menos dos columnas no pertenecientes a la identidad, es decir distintas de $i_1, \dots, i_k$. Esto se debe a que si formamos menores en la que todas las columnas son las

de la identidad, el menor vale 1 y si formamos menores en las que solo 1 columna es no perteneciente a la identidad tendremos, como se ha visto en la demostración del Teorema 2.31, que su valor será (salvo signo) el de un coeficiente de la matriz no perteneciente a la identidad. El valor de estos menores donde al menos se toman dos columnas distintas de $i_1, \dots, i_k$ queda determinado por los coeficientes de la matriz, y los coeficientes quedan determinados una vez se fija el valor de las $k(n-k)$ coordenadas de p que son iguales salvo signo a los coeficientes de las columnas no pertenecientes a la identidad. De esta manera podemos formar ecuaciones que tienen que satisfacer las coordenadas para formar el ideal de definición de la variedad $\mathbb{G}(k, n) \cup \mathcal{U}_{i_1, \dots, i_k}$ y tomar la clausura proyectiva tomando el ideal homogéneo con la variable asociada a la matriz identidad que tenemos en las columnas $i_1, \dots, i_k$.

Tendremos un total de $\sum_{q=2}^{\min\{k, n-k\}} \binom{k}{q} \binom{n-k}{q}$ ecuaciones en $\mathbb{I}(\mathbb{G}(k, n) \cup \mathcal{U}_{i_1, \dots, i_k})$. La expresión $\binom{k}{q} \binom{n-k}{q}$ es el número de casos que resultan de tomar q filas de la matriz (de k posibles) y q columnas de la matriz (de $n-k$ posibles) que no sean de la parte de la identidad, cada uno de estos menores (salvo signo) corresponderá a un menor maximal y por tanto a una coordenada de $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$. Tenemos por tanto que $\mathbb{G}(k, n)$ es una variedad proyectiva por venir dada como un conjunto de ceros de polinomios homogéneos. ■

Observación. El número de ecuaciones que se tienen es una por cada coordenada que no sea ni la perteneciente a la identidad ni una de las $k(n-k)$ que coincide con los coeficientes de la matriz salvo signo. Es decir como $\mathbb{G}(k, n) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$ tendríamos $\binom{n}{k} - 1 - k(n-k)$ ecuaciones. Se tiene que

$$\sum_{q=2}^{\min\{k, n-k\}} \binom{k}{q} \binom{n-k}{q} = \binom{n}{k} - 1 - k(n-k)$$

Para ello utilizaremos un resultado clásico sobre números combinatorios llamada la *identidad de Vandermonde* o convolución de Vandermonde. El enunciado se puede revisar en la sección 1.2.6, ecuación (21) de Knuth, 1997.

La identidad de Vandermonde establece

$$\sum_{k=0}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r},$$

si $\min\{k, n-k\} = n-k$ tenemos

$$\sum_{q=0}^{n-k} \binom{k}{q} \binom{n-k}{q} = \sum_{q=0}^{n-k} \binom{k}{q} \binom{n-k}{n-k-q} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$

sin embargo si $\min\{k, n-k\} = n-k$ tenemos

$$\sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \binom{n-k}{q} = \sum_{q=0}^k \binom{n-k}{q} \binom{k}{k-q} = \binom{n}{k},$$

concluimos por tanto que

$$\sum_{q=0}^{\min\{k, n-k\}} \binom{k}{q} \binom{n-k}{q} = \binom{n}{k}.$$

Ahora desarrollando los dos primeros términos tenemos

$$\binom{k}{0} \binom{n-k}{0} + \binom{k}{1} \binom{n-k}{1} + \sum_{q=2}^{\min\{k, n-k\}} \binom{k}{q} \binom{n-k}{q} = \binom{n}{k},$$

por un lado $\binom{k}{0} \binom{n-k}{0} = 1 \cdot 1 = 1$, y por otro lado $\binom{k}{1} \binom{n-k}{1} = k(n-k)$. Sustituyendo y despejando el sumatorio, se concluye

$$\sum_{q=2}^{\min\{k, n-k\}} \binom{k}{q} \binom{n-k}{q} = \binom{n}{k} - 1 - k(n-k).$$

Ejemplo 2.34. Veamos un ejemplo de cómo realizar esta construcción para hallar ecuaciones para la Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 5)$. Dado un punto $p \in \mathbb{G}(2, 5)$, consideramos una matriz que lo represente $M \in \mathcal{M}_{2 \times 5}(\mathbb{R})$. Supongamos que las columnas 1 y 3 son independientes. Tenemos por tanto que $\widetilde{M} = M|_{\{1,3\}}^{-1} M$ es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & c & e \\ 0 & b & 1 & d & f \end{pmatrix}$$

Las coordenadas homogéneas de p serían entonces

$$(b : 1 : d : f : a : ad - bc : af - be : -c : -e : cf - de) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\binom{5}{2}-1} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^9$$

Necesitaremos $9 - 6 = 3$ ecuaciones. Consideramos el anillo

$$\mathbb{K}[x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{1,5}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{2,5}, x_{3,4}, x_{3,5}, x_{4,5}]$$

con las variables nombradas en referencia a las columnas tomadas para cada menor de la matriz $M \in \mathcal{M}_{2 \times 5}(\mathbb{R})$ y considerando la ordenación explicada en el Algoritmo 1. Las variables que en este caso son iguales (salvo signo) a los coeficientes de la matriz son

$$x_{1,2} = b, \quad x_{1,4} = d, \quad x_{1,5} = f, \quad x_{2,3} = a, \quad x_{3,4} = -c, \quad x_{3,5} = -e,$$

estas son las que usaremos para hallar los polinomios.

Las variable que usaremos para homogeneizar será la referente al menor de la identidad, en este caso es $x_{1,3}$. Por último el resto se utilizarán para formar los polinomios. Tenemos

$$x_{2,4} = ad - bc = x_{2,3}x_{1,4} + x_{1,2}x_{3,4} \longrightarrow f_1 \equiv x_{1,2}x_{3,4} - x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3} = 0$$

$$x_{2,5} = af - be = x_{2,3}x_{1,5} + x_{1,2}x_{3,5} \longrightarrow f_2 \equiv x_{1,2}x_{3,5} - x_{2,5} + x_{1,5}x_{2,3} = 0$$

$$x_{4,5} = cf - de = -x_{3,4}x_{1,5} + x_{1,4}x_{3,5} \longrightarrow f_3 \equiv x_{4,5} - x_{1,4}x_{3,5} + x_{1,5}x_{3,4} = 0$$

Por tanto se concluye que $\mathbb{G}(2, 5) \cap \mathcal{U}_{1,3}$ es la variedad afín

$$\mathbb{V}(f_1, f_2, f_3) \subseteq \mathbb{R}^9$$

Tomemos a continuación su clausura proyectiva, que por la Definición 2.22 es $\mathbb{V}(\mathbb{I}(\mathbb{G}(2, 5) \cap \mathcal{U}_{1,3})^{h, x_{1,3}})$. Consideramos el ideal $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$. Por el Teorema 2.20, se puede construir $I^{h, x_{1,3}}$ como el ideal generado por los elementos de una base de Gröbner con respecto de un orden monomial graduado. Considerando el orden *grlex* en el anillo de polinomios, se tiene que

$$G_f = \{x_{1,2}x_{3,4} + x_{1,4}x_{2,3} - x_{2,4}, x_{1,2}x_{3,5} + x_{1,5}x_{2,3} - x_{2,5}, \\ x_{1,2}x_{4,5} - x_{1,4}x_{2,5} + x_{1,5}x_{2,4}, x_{1,4}x_{3,5} - x_{1,5}x_{3,4} - x_{4,5}, x_{2,3}x_{4,5} - x_{2,4}x_{3,5} + x_{2,5}x_{3,4}\},$$

es una base de Gröbner de I . Por tanto tenemos que la clausura de $\mathbb{G}(2, 5) \cap \mathcal{U}_{1,3}$ es $\mathbb{G}(2, 5) = \mathbb{V}(\langle b_1^f, \dots, b_5^f \rangle) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^9$, donde

$$\begin{aligned} b_1^f &= x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3}, & b_2^f &= x_{1,2}x_{3,5} - x_{1,3}x_{2,5} + x_{1,5}x_{2,3} \\ b_3^f &= x_{1,2}x_{4,5} - x_{1,4}x_{2,5} + x_{1,5}x_{2,4}, & b_4^f &= x_{1,3}x_{4,5} - x_{1,4}x_{3,5} + x_{1,5}x_{3,4} \\ b_5^f &= x_{2,3}x_{4,5} - x_{2,4}x_{3,5} + x_{2,5}x_{3,4} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que las columnas 1 y 3 no son independientes, pero la 2 y la 5 si lo son. Tenemos por tanto que $\widetilde{M} = M|_{\{2,5\}}^{-1} M$ es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 1 & c & e & 0 \\ b & 0 & d & f & 1 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas homogéneas de p serían entonces

$$(-b : ad - bc : af - be : a : d : f : 1 : cf - de : c : e) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\binom{5}{2}-1} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^9$$

Como $\dim(\mathbb{G}(2, 5)) = 2(5 - 2) = 6$, necesitaremos $9 - 6 = 3$ ecuaciones. Consideramos el anillo $\mathbb{K}[x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{1,5}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{2,5}, x_{3,4}, x_{3,5}, x_{4,5}]$ de nuevo. Las variables que en este caso son iguales (salvo signo) a los coeficientes de la matriz son

$$x_{1,2} = -b, \quad x_{1,5} = a, \quad x_{2,3} = d, \quad x_{2,4} = f, \quad x_{3,5} = c, \quad x_{4,5} = e,$$

estas son las que usaremos para hallar los polinomios.

Las variable que usaremos para homogeneizar será la referente al menor de la identidad, en este caso es $x_{2,5}$.

Por último el resto se utilizarán para formar los polinomios. Tenemos

$$x_{1,3} = ad - bc = x_{1,5}x_{2,3} + x_{1,2}x_{3,5} \longrightarrow g_1 \equiv x_{1,2}x_{3,5} - x_{1,3} + x_{1,5}x_{2,3} = 0$$

$$x_{1,4} = af - be = x_{1,5}x_{2,4} + x_{1,2}x_{4,5} \longrightarrow g_2 \equiv x_{1,2}x_{4,5} - x_{1,4} + x_{1,5}x_{2,4} = 0$$

$$x_{3,4} = cf - de = x_{3,5}x_{2,4} - x_{2,3}x_{4,5} \longrightarrow g_3 \equiv x_{2,3}x_{4,5} - x_{2,4}x_{3,5} + x_{3,4} = 0$$

Por tanto se concluye que $\mathbb{G}(2, 5) \cap \mathcal{U}_{2,5}$ es la variedad afín

$$\mathbb{V}(g_1, g_2, g_3) \subseteq \mathbb{R}^9$$

Formemos al igual que para la otra variedad su clausura $\mathbb{V}(\mathbb{I}(\mathbb{G}(2, 5) \cap \mathcal{U}_{2,5})^{h,x_{2,5}})$. Consideramos el ideal $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ y construimos $I^{h,x_{2,5}}$ de nuevo como el ideal generado por una base de Gröbner respecto del orden monomial *grlex*. Se tiene que

$$G_g = \{x_{1,3}x_{2,4}x_{3,5} - x_{1,3}x_{3,4} - x_{1,4}x_{2,3}x_{3,5} + x_{1,5}x_{2,3}x_{3,4}, x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3}, \\ x_{1,2}x_{3,5} - x_{1,3} + x_{1,5}x_{2,3}, x_{1,2}x_{4,5} - x_{1,4} + x_{1,5}x_{2,4}, \\ x_{1,3}x_{4,5} - x_{1,4}x_{3,5} + x_{1,5}x_{3,4}, x_{2,3}x_{4,5} - x_{2,4}x_{3,5} + x_{3,4}\},$$

es una base de Gröbner de I . Por tanto tenemos que la clausura de $\mathbb{G}(2, 5) \cap \mathcal{U}_{1,3}$ es $\mathbb{G}(2, 5) = \mathbb{V}(\langle h_1^g, \dots, h_5^g \rangle) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^9$, donde

$$h_1^g = x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3}, \quad h_2^g = x_{1,2}x_{3,5} - x_{1,3}x_{2,5} + x_{1,5}x_{2,3} \\ h_3^g = x_{1,2}x_{4,5} - x_{1,4}x_{2,5} + x_{1,5}x_{2,4}, \quad h_4^g = x_{1,3}x_{4,5} - x_{1,4}x_{3,5} + x_{1,5}x_{3,4} \\ h_5^g = x_{2,3}x_{4,5} - x_{2,4}x_{3,5} + x_{2,5}x_{3,4}$$

Omitimos el término $x_{1,3}x_{2,4}x_{3,5} - x_{1,3}x_{2,5}x_{3,4} - x_{1,4}x_{2,3}x_{3,5} + x_{1,5}x_{2,3}x_{3,4}$ ya que se puede escribir como $-x_{3,5}h_1^g + x_{3,4}h_2^g$. Observamos que $G_g = G_f$, lo que ilustra que la construcción de la Grassmanniana no depende del abierto $\mathcal{U}_{i,j}$ que se utilice.

3

Aplicaciones regulares y dimensión de variedades

Visto qué es una variedad, lo siguiente a definir son las aplicaciones entre variedades. Las aplicaciones que vamos a considerar son las llamadas regulares o polinómicas. En esta sección trataremos la dimensión de las variedades, los principales tipos de aplicaciones y como se comportan las dimensiones de las variedades bajo la acción de dichas aplicaciones. El objetivo final es enunciar y demostrar el llamado *Teorema de la dimensión de las fibras*, que da una expresión para la dimensión de las preimágenes de puntos bajo aplicaciones regulares dominantes.

Este capítulo utiliza como referencias el capítulo 4 de Cox et al., 2015, el capítulo 6 de Reid, 1988 y el capítulo 3 sección A de Mumford, 1976.

En primer lugar definamos lo que es una aplicación regular y algunos conceptos básicos relacionados con ello.

Definición 3.1. Sean $V \subseteq \mathbb{K}^m$, $W \subseteq \mathbb{K}^n$ variedades algebraicas afines. Una aplicación $\phi : V \rightarrow W$ se dice *regular* (o *polinómica*) si existen polinomios $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ tales que

$$\phi(a_1, \dots, a_m) = (f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m))$$

Definición 3.2. Sea V una variedad algebraica. Se define el *anillo de coordenadas de V* como

$$\mathbb{K}[V] := \{\phi : V \rightarrow \mathbb{K} : \phi \text{ es regular}\}$$

Observación. $\mathbb{K}[V]$ tiene estructura de anillo conmutativo (de $\mathbb{K}$ -álgebra de hecho si $V \neq \emptyset$ porque $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[V]$), es decir dadas $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{K}[V]$, podemos considerar la suma y el

producto y siguen siendo funciones regulares de V a $\mathbb{K}$.

Proposición 3.3 (Cox et al., 2015, Teorema 7 sección 5.2). *Sea V una variedad algebraica, los anillos siguientes son isomorfos*

$$\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / \mathbb{I}[V]$$

Observación. El interés de no definir el anillo de coordenadas directamente como el cociente se debe a que al no hacerlo así se tiene una definición que es intrínseca a la variedad y no involucra el anillo de polinomios ambiente. Una vez se realiza este cociente “se toman coordenadas”.

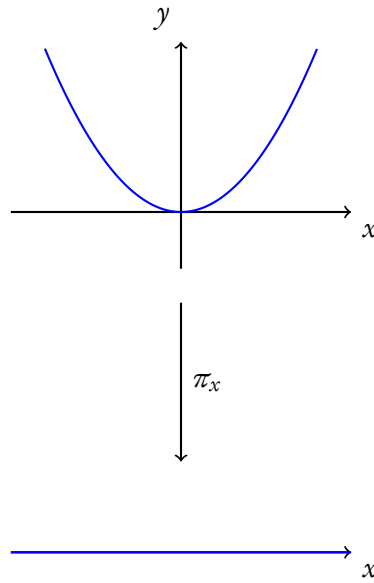
3.1. Aplicaciones dominantes

De entre las aplicaciones regulares que usaremos en el documento veremos a continuación las dominantes. Estas son de interés ya que nos permiten obtener resultados sin imponer sobreyectividad sobre las aplicaciones, sino una condición algo más relajada. En las secciones sucesivas se definirán nociones topológicas, a no ser que se diga lo contrario trabajaremos en la topología de Zariski sobre $\mathbb{K}^n$ (Definición A.10) o sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ (Definición 2.14).

Definición 3.4. Sean V y W variedades algebraicas y sea $\phi : V \rightarrow W$ una aplicación regular. Se dice que ϕ es *dominante* si $\phi(V)$ es denso en W es decir si $\overline{\phi(V)} = W$.

Ejemplo 3.5. 1. Consideramos la variedad $V = \mathbb{V}(y - x^2) \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideremos también la proyección sobre el eje x

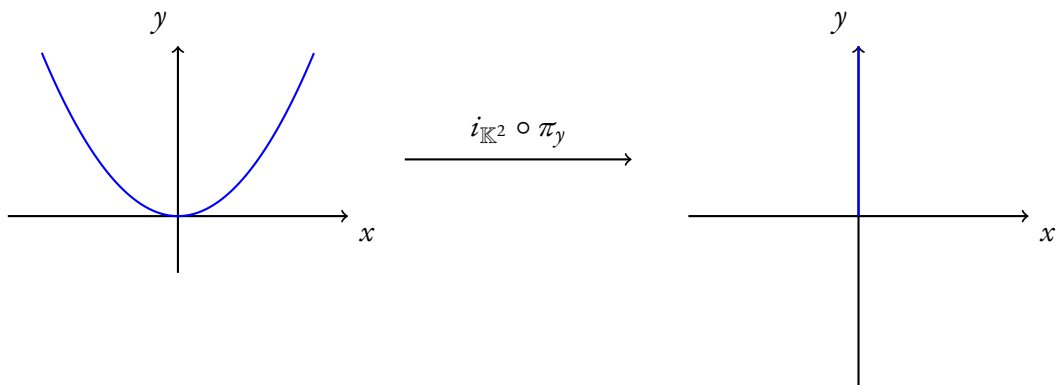
$$\begin{aligned} \pi_x : V \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$



Se tiene que $\pi_x(V) = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}}$, por lo que la aplicación es sobreyectiva y además dominante.

2. Consideremos ahora la aplicación proyección sobre el eje y compuesta con la inclusión en $\mathbb{K}^2$

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{K}^2} \circ \pi_y : V \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (0, y) \end{aligned}$$

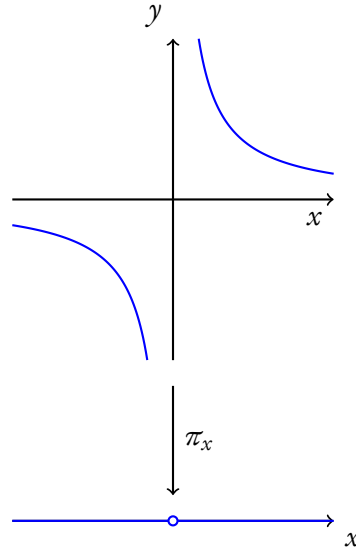


Se tiene que

$$\pi_x(V) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \overline{\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}} = \mathbb{V}(y) \neq \mathbb{R}^2$$

por lo que no es una aplicación dominante, y tampoco sobreyectiva.

3. Por último, consideremos la variedad $V = \mathbb{V}(xy - 1)$ y la proyección sobre el eje x anterior π_x .



En este caso

$$\pi_x(V) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \neq \overline{\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}} = \mathbb{R}$$

por lo que la aplicación no es sobreyectiva, pero sí es dominante.

Observación. Toda aplicación regular $\phi : V \rightarrow W$ define una aplicación entre los anillos $\phi^* : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V]$, $\phi^*(f(x)) := (f \circ \phi)(x)$. Esta es la llamada *aplicación pull-back*.

Proposición 3.6. Sean V y W dos variedades algebraicas. Una aplicación inyectiva de $\mathbb{K}$ -álgebras $\phi^* : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V]$ se corresponde con una aplicación dominante $\phi : V \rightarrow W$.

Demostración.

Hay que ver que

$$\phi^* : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V] \text{ inyectiva} \implies \overline{\phi(V)} = W$$

Para ello veamos los dos contenidos de $\overline{\phi(V)} = W$:

$\subseteq$) Trivial: $\phi : V \rightarrow W \implies \phi(V) \subseteq W$. Como W es variedad algebraica su clausura de Zariski es sí mismo (es cerrado de Zariski). Por tanto se concluye $\overline{\phi(V)} \subseteq \overline{W} = W$. ✓

$\supseteq$) Si ϕ^* es inyectiva, entonces por definición $\forall p, q \in \mathbb{K}[x]$ se tiene que si $[\phi^*(p)] = [\phi^*(q)]$, entonces $[p] = [q]$. Por ser $\mathbb{K}[V]$ un anillo y por la Proposición 3.3, se tiene

$$[\phi^*(p)] = [\phi^*(q)] \implies [\phi^*(p - q)] = [0] \implies (p - q) \circ \phi \in \mathbb{I}(V).$$

De manera similar tenemos

$$[p] = [q] \implies [p - q] = [0] \implies p - q \in \mathbb{I}(W).$$

Por tanto, la condición de inyectividad se traduce en

$$(p - q) \circ \phi \in \mathbb{I}(V) \implies p - q \in \mathbb{I}(W).$$

Por definición de clausura de Zariski, tenemos que $\overline{\phi(V)} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(\phi(V)))$, por tanto tenemos que demostrar $\mathbb{V}(\mathbb{I}(\phi(V))) \supseteq W$, lo que es equivalente a demostrar $\mathbb{I}(\phi(V)) \subseteq \mathbb{I}(W)$ por el Teorema A.9.

Supongamos por reducción al absurdo que no se da esto último, entonces $\exists p - q \in \mathbb{I}(\phi(V))$ tal que $p - q \notin \mathbb{I}(W)$. Como $p - q \notin \mathbb{I}(W)$, entonces, por la condición de inyectividad, $(p - q) \circ \phi \notin \mathbb{I}(V)$. Ahora, esto por definición implica que $\exists x^* \in V$ tal que $(p - q)(\phi(x^*)) \neq 0$. Sin embargo, habíamos supuesto que $p - q \in \mathbb{I}(\phi(V))$, lo que significa que $(p - q)(y) = 0$ para todo $y \in \phi(V)$ $\nmid$

Se concluye por tanto que $\overline{\phi(V)} \supseteq W$, y esto junto con el primer contenido nos da que $\overline{\phi(V)} = W$ ■

Ejemplo 3.7. Consideremos de nuevo la variedad algebraica $V = \mathbb{V}(xy - 1)$ y la aplicación $\pi_x : V \rightarrow \mathbb{R}$. Nótese que $\mathbb{R} = \mathbb{V}(\langle 0 \rangle)$. La aplicación se corresponde con una aplicación entre $\mathbb{R}$ -álgebras $\pi_x^* : \mathbb{R}[\mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}[V]$. Por un lado tenemos que $\mathbb{R}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}[t]/\langle 0 \rangle = \mathbb{R}[t]$. Por otro lado que $\mathbb{R}[V] = \mathbb{R}[x, y]/\langle xy - 1 \rangle$. Tenemos por tanto la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_x^* : \mathbb{R}[t] &\rightarrow \mathbb{R}[x, y]/\langle xy - 1 \rangle \\ p(t) &\mapsto \pi_x^*(p(t)) = p \circ \pi_x(x, y) = p(x) \end{aligned}$$

Es fácil ver que π_x^* es una aplicación inyectiva, ya que simplemente toma un polinomio en la variable t y la cambia por la variable x como hemos visto. El teorema nos dice entonces que π_x es dominante, como hemos comprobado en el Ejemplo 3.5.

3.2. Independencia algebraica y dimensión

Antes de lanzarnos a ver las dimensiones de las fibras por aplicaciones regulares, tenemos que definir qué es la dimensión de una variedad, y cómo relacionarla con el anillo de coordenadas de esta.

Definición 3.8. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $V \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad y $\mathbb{K}[V]$ su anillo de coordenadas. Sean $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[V]$. Se dice que estos son *algebraicamente independientes* sobre $\mathbb{K}$ si dado $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $p(f_1, \dots, f_n) = 0$, entonces $p \equiv 0$. De no ser así, se dice que son *algebraicamente dependientes*.

Ejemplo 3.9. 1. Dado el anillo $\mathbb{R}[x, y]$ se tiene que los elementos $x, x^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ son algebraicamente dependientes, ya que el polinomio $p(t_1, t_2) = t_1^2 - t_2 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ es no nulo y cumple que

$$p(x, x^2) = x^2 - x^2 = 0.$$

Los elementos $x, y \in \mathbb{R}[x, y]$ son independientes, ya que no existe ningún polinomio no nulo que cumpla $p(t_1, t_2) = 0$ en $\mathbb{R}[t_1, t_2]$ por ser íntegro.

2. Si consideramos $V = \mathbb{V}(y - x^2)$ y el anillo $\mathbb{R}[V] = \mathbb{R}[x, y] / \langle y - x^2 \rangle$, tenemos que los elementos $x, y \in \mathbb{R}[V]$ son algebraicamente dependientes, ya que el polinomio $p(t_1, t_2) = t_1^2 - t_2 \in \mathbb{R}[t_1, t_2]$ es no nulo y cumple que

$$p(x, y) = x^2 - y = 0 \in \mathbb{R}[V].$$

Definición 3.10. Sea V una variedad algebraica. Dados $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[V]$, se dice que *generan la parte trascendente de $\mathbb{K}[V]$* si

$$\forall f \in \mathbb{K}[V] \text{ no nulo, } \exists p \in \mathbb{K}(f_1, \dots, f_n)[t] \text{ no nulo, tal que } p(f) = 0$$

Ejemplo 3.11. 1. Dado el anillo $\mathbb{R}[x, y]$ se tiene que los elementos $x, x^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ no generan la parte trascendente de $\mathbb{R}[x, y]$, ya que para el polinomio $y \in \mathbb{R}[x, y]$, $\forall p \in \mathbb{R}(x, x^2)[t] = \mathbb{R}(x)[t]$ no nulo, se tiene $p(y) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i q_i(y) \neq 0$ con $q_i \in \mathbb{R}[y]$, $a_i \in \mathbb{R}$. Esto se debe a que la única manera de que se anule este polinomio es anulándose cada uno de sus monomios pero como $p(y)$ es no nulo, al menos tiene que haber algún i de manera que $a_i \neq 0$ y $q_i(y) \neq 0$. Concluimos por tanto que $x, x^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ no generan la parte trascendente de $\mathbb{R}[x, y]$.

2. Los elementos $x, y \in \mathbb{R}[x, y]$ sin embargo, generan la parte trascendente de $\mathbb{R}[x, y]$, ya que $\forall f \in \mathbb{R}[x, y]$ no nulo, $\exists p \in \mathbb{R}(x, y)[t]$ no nulo, tal que $p(f) = 0$. Como $f \in \mathbb{R}[x, y]$, entonces $f \in \mathbb{R}(x, y)$ por lo que podemos considerar $p(t) = f(x, y) - t$.

Definición 3.12. Sea V una variedad algebraica. Dados $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[V]$. Se dice que $(f_1, \dots, f_n)$ es una *base de trascendencia* si $f_1, \dots, f_n$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{K}$ y generan la parte trascendente de $\mathbb{K}[V]$.

Ejemplo 3.13. Se tiene que:

1. Los polinomios $x, y \in \mathbb{K}[x, y]$ son algebraicamente independientes y además generan la parte trascendente de $\mathbb{K}[x, y]$.
2. Los polinomios $x, x^2 \in \mathbb{K}[x, y]$ no son algebraicamente independientes, ni generan la parte trascendente de $\mathbb{K}[x, y]$.

Definición 3.14. Sea V una variedad algebraica. Se llama *grado de trascendencia* de $\mathbb{K}[V]$ sobre $\mathbb{K}$, denotado $\text{tr deg}(\mathbb{K}[V])$, al mayor número de elementos de $\mathbb{K}[V]$ que son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{K}$, es decir, al número de elementos de una base de trascendencia de $\mathbb{K}[V]$.

3.3. Aplicaciones suaves

Definición 3.15. Sea $X \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica. Se define el *espacio vectorial tangente* en un punto $x \in X$ como sigue:

$$T_x X := \mathbb{V} \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)x_n : f \in \mathbb{I}(X) \right\} \right)$$

Proposición 3.16 (Reid, 1988, Corolario-Definición 6.6). Sea $X \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica. Existe un denso de Zariski $X_0 \subseteq X$ tal que

$$\dim(T_x X) = r, \quad \forall x \in X_0 \quad \text{y} \quad \dim(T_x X) \geq r, \quad \forall x \in X$$

Definición 3.17. Sea $X \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica y sea $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$\dim(T_x X) = r, \quad \forall x \in X_0 \quad \text{y} \quad \dim(T_x X) \geq r, \quad \forall x \in X$$

con $X_0 \subseteq X$ denso de Zariski. Se define r como la dimensión de la variedad X , denotado $\dim(X)$.

Se dice que x es un punto *suave* si $\dim(X) = \dim(T_x X)$. De lo contrario x se dice punto *singular*. Denotamos $\text{Sing}(X)$ al conjunto de puntos singulares de X .

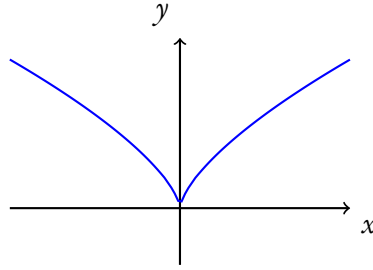
Proposición 3.18. Sea $X \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica irreducible, se tiene que

$$\dim(T_x X) = n_{x \in X}(\dim(T_x X))$$

con $X_0 \subseteq X$ denso de Zariski. Se define r como la dimensión de la variedad X , denotado $\dim(X)$.

Se dice que x es un punto suave si $\dim(X) = \dim(T_x X)$. De lo contrario x se dice punto singular. Denotamos $\text{Sing}(X)$ al conjunto de puntos singulares de X .

Ejemplo 3.19. Consideremos la variedad $X = \mathbb{V}(x^2 - y^3)$.



Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^3) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^3) = -3y^2,$$

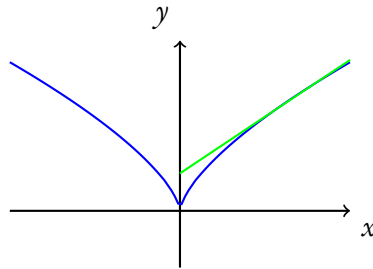
Por lo que, de manera genérica el espacio vectorial tangente en un punto (x_0, y_0) será

$$T_{(x_0, y_0)}X = \mathbb{V}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^3)\right|_{(x_0, y_0)} x + \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^3)\right|_{(x_0, y_0)} y\right) = \mathbb{V}(2x_0x - 3y_0^2y)$$

Consideremos el punto $(1, 1) \in X$. Tenemos que

$$T_{(1,1)}X = \mathbb{V}(2x - 3y)$$

Ahora si dibujamos este espacio vectorial “apoyado” sobre el punto $(1, 1)$, tenemos



Aquí tenemos que el espacio vectorial tangente tiene dimensión 1, de hecho, así será siempre que $2x_0x - 3y_0y = 0$. La única manera de que pase esto es que $(x_0, y_0) = (0, 0)$. En efecto el plano tangente en el punto $(0, 0)$ es $T_{(0,0)}X = \mathbb{V}(0) = \mathbb{R}^2$.

Aquí tenemos un espacio vectorial de dimensión 2. Cómo $V \setminus \{(0, 0)\}$ es un denso de Zariski y $\dim(T_x X) = 1$ para todo $x \in V \setminus \{(0, 0)\}$, se tiene que $\dim(X) = 1$. En consecuencia se tiene que $(0, 0)$ sería un punto singular, denominado cúspide, y el resto serían puntos suaves.

Teorema 3.20 (Reid, 1988, Teorema 6.10). *Sea V una variedad y $\mathbb{K}[V]$ su anillo de coordenadas. Se tiene*

$$\dim(V) = \text{tr deg}(\mathbb{K}[V])$$

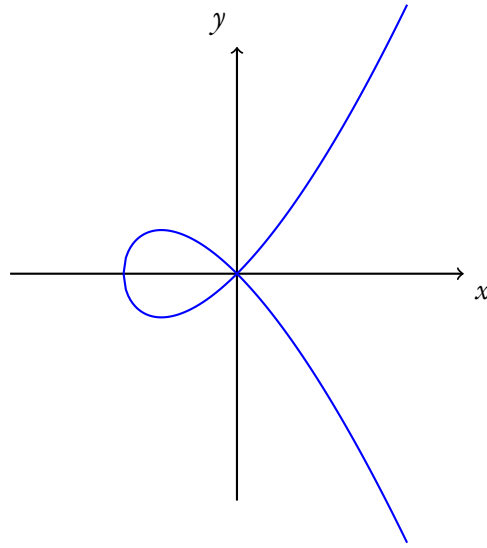
Definición 3.21. Sean X e Y variedades algebraicas, sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación regular y sea $x \in X$. Se define la diferencial como la aplicación $d\varphi_x : T_x X \rightarrow T_{\varphi(x)} Y$ donde:

$$d\varphi_x(v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} v$$

Definición 3.22. Sean X e Y variedades algebraicas, sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación regular dominante y sea $x \in X$. Si $y = \varphi(x)$ es un punto suave de Y , entonces decimos que φ es suave en x si x es un punto suave de X y $d\varphi_x$ es sobreyectiva.

Ejemplo 3.23. Consideremos la variedad $X = \mathbb{V}(y^2 - x^3 - x^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ y la proyección de esta sobre el eje x .

$$\begin{aligned} \pi_x : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$



Se tiene que

$$T_{(x_0, y_0)}X = \mathbb{V}(\langle (-3x_0^2 - 2x_0)x + 2y_0y \rangle)$$

Igualando los coeficientes del hiperplano a 0 tenemos que $T_{(x_0, y_0)}X = \langle 0 \rangle$ únicamente en los puntos $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ó $(x_0, y_0) = (-2/3, 0)$, por lo que para ellos $\dim(T_{(x_0, y_0)}X) = 2$, para el resto de puntos de la variedad se tiene que $\dim(T_{(x_0, y_0)}X) = 1$, por tanto tenemos que $\dim(X) = 1$ y $\text{Sing}(\pi_x) = \{(0, 0), (-2/3, 0)\}$. Se tiene que $\mathbb{R}$ es una variedad algebraica suave en todo punto. Ahora, construimos la diferencial de π_x de manera que

$$d\pi_{x(x_0, y_0)}(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1$$

Se tiene que:

1. La aplicación π_x es suave en $(1, \sqrt{2})$, ya que $(1, \sqrt{2}) \notin \text{Sing}(\pi_x)$, su imagen $\pi_x(1, \sqrt{2}) \notin \text{Sing } \mathbb{R} = \emptyset$ y la diferencial en el punto
2. La aplicación π_x no es suave en $(0, 0)$, ya que a pesar de que $\pi_x(-1, 0) = -1$ es suave en $\mathbb{R}$ y la diferencial

$$\begin{aligned} d\pi_{x(1, \sqrt{2})} : \mathbb{V}(\langle -5x + 2\sqrt{2}y \rangle) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

$$\begin{aligned} d\pi_{x(0, 0)} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 \end{aligned}$$

es sobreyectiva, se tiene que $(0, 0) \in \text{Sing}(\pi_x)$.

3. La aplicación π_x no es suave en $(-1, 0)$ ya que a pesar de que X es suave en $(-1, 0)$ ya que $(-1, 0) \notin \text{Sing}(\pi_x)$ y $\pi_x(-1, 0) = -1$ es suave en $\mathbb{R}$, se tiene que $d\pi_{x(-1,0)}$ no es sobreyectiva, ya que $T_{(-1,0)}X = \mathbb{V}(\langle x \rangle)$ y $T_{-1}\mathbb{R} = \mathbb{V}(\langle 0 \rangle) = \mathbb{R}$, por lo que

$$\begin{aligned} d\pi_{x(-1,0)} : \mathbb{V}(\langle x \rangle) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 \end{aligned}$$

Se tiene que $d\pi_{x(-1,0)}(\mathbb{V}(\langle x \rangle)) = \{0\}$, por lo que la $d\pi_{x(-1,0)}$ no es sobreyectiva y por tanto π_x no es suave en $(-1, 0)$.

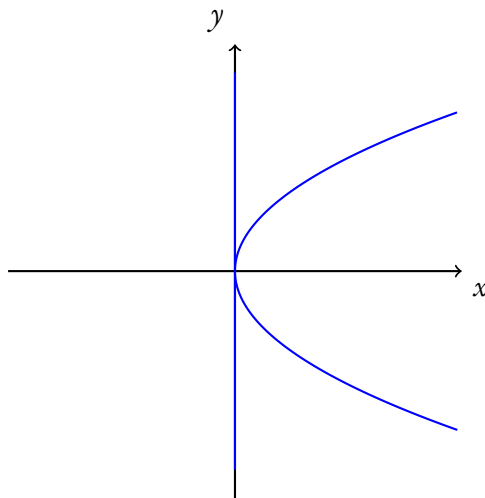
3.4. Fibras de aplicaciones regulares

A lo largo de esta sección los resultados no tienen por qué ser ciertos para cualquier cuerpo. En concreto, el Teorema de la dimensión de las fibras, que es el objetivo del capítulo no es cierto para cualquier cuerpo, por lo que a partir de ahora fijaremos el cuerpo ambiente $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposición 3.24 (Mumford, 1976, Proposición 3.4). *Sean X e Y variedades algebraicas y sea $\phi : X \rightarrow Y$ una aplicación regular. Si ϕ es suave en x , entonces $\phi^{-1}\phi(x)$ tiene una única componente Z que contiene a x , $\dim Z = r - s$ y x es un punto suave de Z .*

Ejemplo 3.25. Consideremos la proyección sobre el eje x de la variedad $V = \mathbb{V}(xy^2 - x^2) \subseteq \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} \pi_x : \mathbb{V}(xy^2 - x^2) &\subseteq \mathbb{C}^2 & \text{to} & \mathbb{C} \\ (x, y) &\rightarrow x \end{aligned}$$



Tenemos que $\mathbb{C}$ es una variedad de dimensión 1 suave en todos sus puntos. Por otro lado tenemos que $T_{(x_0, y_0)} V = \mathbb{V}((y_0^2 - 2x_0)x + 2x_0y_0y)$ y que $\dim(T_{(0,0)} V) = 2$, mientras que $\dim(T_{(x_0, y_0)} V) = 1$ para todo $(x_0, y_0) \in V \setminus \{(0, 0)\}$, conjunto denso, por lo que tenemos que $\dim(V) = 1$ y $\text{Sing}(V) = \{(0, 0)\}$. Tenemos por último que $d\pi_x(v_1, v_2) = v_1$.

1. Tenemos que $(-1, i)$ es un punto suave de V , $\pi_x(-1, i) = -1$ es un punto suave de $\mathbb{C}$ y la aplicación $d\pi_x : T_{(-1, i)} V = \mathbb{V}(-3v_1 + 2iv_2) \rightarrow \mathbb{C}$ es sobreyectiva, por lo que π_x es suave en $(-1, i)$. Se tiene por el teorema que $\pi^{-1}\pi(-1, i)$ tiene una única componente Z que contiene a $(-1, i)$, con dimensión $1 - 1 = 0$ y $(-1, i)$ es un punto suave de esta. En efecto $\pi^{-1}\pi(-1, i) = \pi^{-1}(-1) = \{(-1, i), (-1, -i)\}$, el punto $(-1, i)$ solo pertenece a una de ellas (de hecho solo es una de ellas) y es trivialmente un punto suave.
2. Tenemos que $(0, 0)$ no cumple las hipótesis de la proposición ya que π_x no es suave en $(0, 0)$ (por no ser este un punto suave de V). Ahora, podemos observar que $\pi_x^{-1}\pi_x(0, 0) = \pi_x^{-1}(0) = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$. Se tiene que $(0, 0)$ pertenece a la única componente de la preimagen, pero esta es de dimensión 1 en lugar de ser de dimensión 0.

Proposición 3.26 (Mumford, 1976, Proposición 3.6). *Sean X e Y variedades algebraicas y sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación regular. El conjunto de puntos suaves de φ es un subconjunto de X abierto de Zariski no vacío.*

Lema 3.27 (de Sard para variedades) (Mumford, 1976, Lema 3.7). *Sean X e Y variedades algebraicas y sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación regular. Existe un abierto de Zariski $Y_0 \subseteq Y$ tal que φ es suave $\forall x \in \varphi^{-1}(Y_0) - \text{Sing}(X)$.*

Corolario 3.28 (Mumford, 1976, Corolario 3.8). *Sean X e Y variedades algebraicas y sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación regular. Existe un abierto de Zariski Y_0 tal que $\varphi^{-1}(Y_0)$ puede ser estratificado en piezas suaves sobre Y_0 , esto es:*

$$\varphi^{-1}(Y_0) = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_k,$$

dónde $\{X_i\}_{i=1}^k$ son abiertos en la topología inducida sobre X , disjuntos y tales que $\varphi|_{X_i} : X_i \rightarrow Y_0$ es suave $\forall i = 0, \dots, k$ y $\dim(X_0) = \dim(X)$ pero $\dim(X_i) < \dim(X) \forall i = 1, \dots, k$.

Veamos cómo estratificar una variedad en piezas suaves.

Ejemplo 3.29. Para ilustrar el proceso estratificación consideraremos una variedad real en lugar de una compleja. Consideremos la variedad $V = \mathbb{V}(xyz) \subseteq \mathbb{R}^3$, que es la unión de

Algoritmo 2 Estratificación de una variedad en componentes suaves**Input:** V , una variedad algebraica**Output:** $Strat = (V_1, V_2, \dots, V_k)$, la estratificación en componentes suaves $Strat$, inicializamos la lista vacía que contendrá las componentes**while** $V \neq \emptyset$ **do** $Strat \leftarrow Strat + (V \setminus \text{Sing}(V))$, se añade la componente a la estratificación $V \leftarrow \text{Sing}(V)$ **end while****return** $Strat$

los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Vamos a realizar la estratificación en componentes suaves de acuerdo al Algoritmo 2. En primer lugar hallamos el espacio vectorial tangente:

$$T_{(x_0, y_0, z_0)} V = \mathbb{V}(\gamma_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z)$$

Podemos ver que el espacio tangente tiene dimensión 3 en puntos de la forma $(0, 0, z_0)$, $(0, y_0, 0)$ y $(x_0, 0, 0)$, en caso contrario se puede ver que tiene dimensión 2. Tenemos que $\dim(T_{(x_0, y_0, z_0)} V) = 2$ para todo $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{V}(xy, xz, yz)$, que es un denso de Zariski, por lo que la dimensión de la variedad es 2. Como $\text{Sing}(V) = \mathbb{V}(xy, xz, yz)$, tenemos que el primer estrato es $V_1 = V \setminus \mathbb{V}(xy, xz, yz)$.

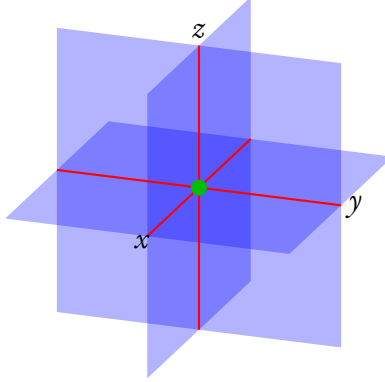
Veamos el siguiente estrato. Para ello se repetirá el proceso para la nueva variedad $V' = \text{Sing}(V) = \mathbb{V}(xy, xz, yz)$. En primer lugar hallaremos su espacio vectorial tangente. Esta vez tenemos tres polinomios algebraicamente independientes, por lo que el espacio será la variedad

$$T_{(x_0, y_0, z_0)} = \mathbb{V}(\gamma_0 x + x_0 y, z_0 x + x_0 z, z_0 y + y_0 z).$$

Nótese que si $(x_0, y_0, z_0) \in V'$, al menos dos de sus coordenadas deben ser 0. Si dos de ellas son nulas, pero la otra no, tenemos que la dimensión del espacio tangente es 1 (una de las tres condiciones polinomiales se anula, las otras dos siguen siendo no triviales e independientes y como $3 - 2 = 1$, la dimensión es 1). Sin embargo si las tres son nulas, entonces la dimensión del espacio tangente es 3 (todos los polinomios se vuelven nulos, por tanto la variedad es $\mathbb{V}(0) = \mathbb{R}^3$). Tenemos por tanto que $\dim T_{x_0, y_0, z_0} V' = 1$ para todo $(x_0, y_0, z_0) \in V' \setminus \mathbb{V}(x, y, z)$ denso de Zariski, por lo que $\dim(V') = 1$ y $\text{Sing}(V') = \mathbb{V}(x, y, z)$. Tenemos por tanto que el segundo estrato es $V_2 = V_1 \setminus \mathbb{V}(x, y, z)$. Como la siguiente variedad consiste solo en un punto, este va a ser no singular, por tanto el tercer y último estrato es $V_3 = \mathbb{V}(x, y, z)$, por lo que se tiene la estratificación en componentes

suaves:

$$\mathbb{V}(xyz) = (\mathbb{V}(xyz) \setminus \mathbb{V}(xy, xz, yz)) \cup (\mathbb{V}(xy, xz, yz) \setminus \mathbb{V}(x, y, z)) \cup \mathbb{V}(x, y, z)$$

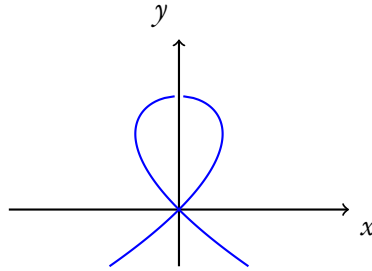


Definición 3.30. Sea X una variedad algebraica y $x \in X$. Entonces X es *topológicamente uniramificada* (o *topologically unibranch* si para todo subconjunto cerrado $Y \subseteq X$, $\exists \{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de entornos de x en la topología usual inducida sobre X tal que $\mathcal{U}_n \setminus (\mathcal{U}_n \cap Y)$ es conexo $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observación. Toda variedad es topológicamente uniramificada en sus puntos suaves.

Se puede ver con detalle la justificación debajo de la Definición 3.9 de Mumford, 1976

Ejemplo 3.31. 1. Consideremos la variedad $V = \mathbb{V}(x^2 - y^2(1 - y))$.

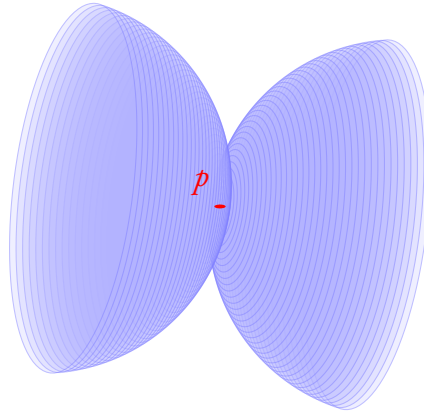


Consideramos $p = (0, 1) \in V$, veamos si es topológicamente uniramificada en ese punto. Consideramos los abiertos de la topología usual inducida en V

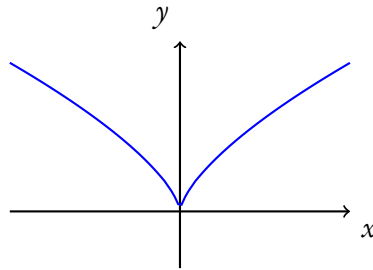
$$\mathcal{U}_n = \mathbb{B} \left((0, 1), \frac{1}{n} \right) \cap V.$$

Se tiene que el conjunto $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de entornos de x . Como V es una curva compleja, los únicos subconjuntos cerrados $Y \subseteq V$ que contendrán a p

serán la curva entera $Y = V$ y el propio punto $Y = \{p\}$. Si consideramos $Y = V$ tenemos que $\mathcal{U}_n \setminus (\mathcal{U}_n \cap Y) = \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_n = \emptyset$, por lo que es trivialmente conexo. Si consideramos $Y = \{p\}$, tenemos que $\mathcal{U}_n \setminus (\mathcal{U}_n \cap Y)$ no es conexo, ya que la variedad localmente en $(0, 0)$ es homeomorfa a dos curvas complejas (dimensión compleja 1, dimensión real 2) que intersecan en un punto (dimensión compleja y real 1), y al quitar el punto se desconecta. Por tanto se tiene que la variedad no es topológicamente uniramificada en el punto $p = (0, 1)$.



2. Consideramos ahora la variedad $V(x^2 - y^3)$

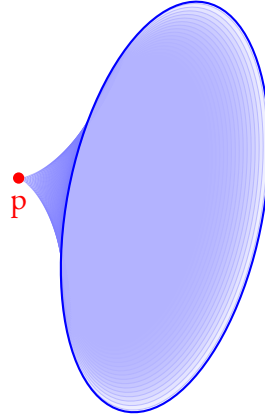


Consideramos $p = (0, 0) \in V$, veamos si es topológicamente uniramificada en ese punto. Consideramos los abiertos de la topología usual inducida en V al igual que antes

$$\mathcal{U}_n = \mathbb{B} \left((0, 1), \frac{1}{n} \right) \cap V.$$

De nuevo, como V es una curva compleja, los únicos subconjuntos cerrados $Y \subseteq V$ que contendrán a p serán la curva entera $Y = V$ y el propio punto $Y = \{p\}$. Si consideramos $Y = V$ tenemos que $\mathcal{U}_n \setminus (\mathcal{U}_n \cap Y) = \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_n = \emptyset$, por lo que es trivialmente conexo. Si consideramos $Y = \{p\}$, tenemos que $\mathcal{U}_n \setminus (\mathcal{U}_n \cap Y)$ es

conexo, ya que la curva localmente en $(0, 0)$ es homeomorfa a una curva compleja (dimensión compleja 1, dimensión real 2), no dos como antes y al quitar el punto no se desconecta. Por tanto se tiene que la variedad es topológicamente uniramificada en el punto $p = (0, 0)$.



Proposición 3.32 (Principio fundamental de abiertidad)(Mumford, 1976, Principio 3.10).

Sean X e Y variedades algebraicas con $\dim(X) = \dim(Y)$ y sea $\varphi : X \rightarrow Y$. Sea $x \in X$ tal que

1. $\varphi(x)$ es topológicamente uniramificado en Y
2. $\{x\}$ es una componente de $\varphi^{-1}(\varphi(x))$

entonces φ es abierta en x en la topología usual, es decir, para todo entorno $\mathcal{U} \subseteq X$ de x , $\varphi(\mathcal{U})$ es un entorno de $\varphi(x)$ en Y .

Lema 3.33. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $X \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión r y un punto $x^* \in X$. Existen $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[V]$ no nulos tales que $f_1(x^*) = \dots = f_r(x^*) = 0$ y $\dim(X \cap \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)) = 0$.

Demostración. Sea $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $y \in X$, $T_y X = \mathbb{V}(g_1, \dots, g_{n-r})$ con $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{K}(y)[x]$ el espacio vectorial tangente de X en y , tenemos por la Proposición 3.18 que:

$$\min_{y \in X} (\dim(T_y X)) = r$$

Consideramos los polinomios lineales $h_i = x_i - x_i^* \in \mathbb{K}^n$. Como el número de generadores de $T_y X$ es $n - r$, habrá como mucho $n - r$ elementos de $\{x_i\}_{i=1}^n$ que estén en $\langle g_1, \dots, g_{n-r} \rangle$. Sean $i_1, \dots, i_r \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tales que $x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \notin \langle g_1, \dots, g_{n-r} \rangle$. Entonces tenemos que

$b_{i_1}(x^*) = \cdots = b_{i_r}(x^*) = 0$ por construcción y además que $\dim(X \cap \langle b_{i_1}, \dots, b_{i_r} \rangle) = 0$. Tenemos por la Proposición 3.18 que

$$\dim(X) = \min_{y \in X} (\dim(T_y X)) = r$$

Por lo que el espacio tangente de $X \cap \mathbb{V}(\langle b_{i_1}, \dots, b_{i_r} \rangle)$ es $\mathbb{V}(g_1, \dots, g_{n-r}, x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$. Como hemos tomado $x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \notin \langle g_1, \dots, g_{n-r} \rangle$, tenemos que

$$\dim(X \cap \langle b_{i_1}, \dots, b_{i_r} \rangle) = \min_{y \in X} (\dim(\mathbb{V}(g_1, \dots, g_{n-r}, x_{i_1}, \dots, x_{i_r}))) = r - r = 0$$

■

3.5. Teorema de la dimensión de las fibras

El objetivo final del documento es clasificar los problemas punto-recta minimales. A grandes rasgos, un problema punto recta estará ligado a una aplicación entre variedades $\phi : X \rightarrow Y$. Sea $y \in Y$ lo que denominaremos instancia del problema, una solución de una instancia de un problema punto-recta es un $x \in X$ tal que $\phi(x) = y$. Se dirá que un problema es minimal cuando las soluciones de puntos genéricos sean un conjunto finito de puntos, es decir $\#\phi^{-1}(y) < \infty$. Se dirá que un punto es genérico cuando pertenezca a un denso de Zariski. La utilidad de las aplicaciones dominantes viene de que si una aplicación es dominante, su imagen será un denso de Zariski, por lo que un punto genérico siempre tendrá preimagen. La utilidad del Teorema de la dimensión de las fibras viene de que queremos que las preimágenes sean conjuntos finitos de puntos, es decir, que $\dim(\#\phi^{-1}(y)) = 0$. El Teorema establece una relación entre las dimensiones de X , Y e $\phi^{-1}(y)$ para un $y \in Y$ genérico, por lo que nos permitirá saber cuando un problema tiene la posibilidad de ser minimal en función de los parámetros de este. A continuación veremos el enunciado del Teorema, su demostración e implicaciones que nos serán de mayor utilidad.

Teorema 3.34 (de la dimensión de las fibras) (Mumford, 1976, Teorema 3.13). *Sean X , Y variedades algebraicas de dimensiones r y s respectivamente y sea $\phi : X \rightarrow Y$ una aplicación regular dominante. Para todo $y \in Y$ todas las componentes de $\phi^{-1}(y)$ tienen dimensión al menos $r - s$.*

Demostración.

Supongamos por reducción al absurdo que existe W componente de ϕ^{-1} tal que $\dim(W) < r - s$. Sea $x \in W$ no estando en ninguna otra componente. Sabemos que

existe:

Por la Proposición 3.26 se tiene que el conjunto de puntos suaves de φ es un abierto no vacío y tomamos x de ese abierto. Por la Proposición 3.24 como φ es suave en x tenemos que $\varphi^{-1}\varphi(x)$ solo tiene una componente a lo largo de x , por lo que no está en ninguna otra componente.

Ahora, tenemos (de acuerdo a (Mumford, 1976, Teorema 3.13)) que existen s funciones polinómicas $g_1, \dots, g_s$ en Y que sean cero en y y tales que $\{y\}$ es una componente de $\mathbb{V}(g_1, \dots, g_s) \cap Y$, no las podemos encontrar con el el Lema 3.33 ya que no tenemos garantía de que Y sea una variedad irreducible. Tenemos por el Lema 3.33, que existen $r-s-1$ funciones polinómicas $f_1, \dots, f_{r-s-1}$ en X que sean cero en x y tales que $\{x\}$ es una componente de $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_{r-s-1}) \cap W$ (en el lema estrictamente tendríamos tantas como $\dim(W)$, esto como mucho vale $r-s-1$, pero si $\dim(W) = r' < r-s-1$ completamos con polinomios nulos hasta $r-s-1$ porque con los r' primeros ya tendríamos $\{x\}$ como componente de la intersección). Podemos definir con ello la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \phi : X &\rightarrow \mathbb{C}^{r-1} \\ z &\mapsto (f_1(z), \dots, f_{r-s-1}(z), \phi^*g_1(z), \dots, \phi^*g_s(z)) \end{aligned}$$

dónde ϕ^* denota el pull-back de ϕ . Por la manera de construirla tenemos que $\{x\}$ es una componente de $\phi^{-1}(\{0\})$. Esto sería una contradicción al teorema, pues tendríamos una aplicación regular dominante entre variedades afines de dimensiones r y $s = r-1$ y habríamos encontrado que la preimagen de un punto $0 \in \mathbb{C}^{r-1}$ tiene dimensión $0 < 1 = r - (r-1) = r-s$. Sin embargo lo que se busca es una contradicción a la hipótesis para probar el teorema.

Tomamos ahora el k más pequeño tal que existe una aplicación regular $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}^k$ para la cual $\{x\}$ es una componente de $\psi^{-1}(\{0\})$ (por la construcción anterior sabemos que $k \leq r-1$).

Tomamos un abierto $\mathcal{U}$ que contiene a x y que cumple que $\psi^{-1}(\{0\}) \cap \mathcal{U} = \{x\}$. Como $\dim(\psi^{-1}(\{0\})) = 0$ y la aplicación es regular, sabemos que $\psi^{-1}(\{0\})$ es un conjunto finito, por tanto el abierto $\mathcal{U}$ existe, y se puede tomar sustrayendo del espacio ambiente de X el resto de componentes (puntos y por tanto que corresponden a varietizar ideales maximales y por tanto cerrados de Zariski) de $\psi^{-1}(\{0\})$ que no son $\{x\}$.

Veamos que ψ es además dominante: Supongamos por reducción al absurdo que no

lo es, tendríamos entonces $\overline{\psi(X)} = Z$ con $\dim(Z) = l < k$ (si tuviera dimensión k tendríamos que $\overline{\psi(X)} \subseteq \mathbb{C}^K$ y ambos tienen la misma dimensión por lo que $\overline{\psi(X)} = \mathbb{C}^K$ por lo que sería dominante). Podemos elegir l funciones polinómicas $b_1, \dots, b_l$ en Z tales que $\{0\}$ es una componente de $Z \cap \mathbb{V}(b_1, \dots, b_l)$. Si consideramos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C}^k &\rightarrow \mathbb{C}^l \\ z &\mapsto (b_1(z), \dots, b_l(z)) \end{aligned}$$

podemos construir la aplicación $H \circ \psi$, de manera que como

$$\{0\} \subseteq Z \cap \mathbb{V}(b_1, \dots, b_l) \subseteq \mathbb{V}(b_1, \dots, b_l)$$

entonces $0 \in H^{-1}(\{0\})$ y por tanto

$$\{x\} \in (H \circ \psi)^{-1}(\{0\}) = \psi^{-1}(H^{-1}(\{0\})) = \psi^{-1}(\{0\})$$

por lo que habríamos encontrado una aplicación $X \rightarrow \mathbb{C}^l$ que cumple que $\{x\}$ es una componente de la preimagen de $\{0\}$ con $l < k$, cuando habíamos supuesto que k era el menor, ℓ . Por tanto ψ es dominante.

Sean $Y_1, \dots, Y_k$ coordenadas en $\mathbb{C}^k$, tenemos que $\psi^* Y_1, \dots, \psi^* Y_k$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{C}$. Esto se debe a que, que la aplicación ψ sea dominante implica que ψ^* sea inyectiva y la inyectividad significa que lleva elementos algebraicamente independientes en elementos algebraicamente independientes. Para ver esto, hay que verificar que $P(\psi^* Y_1, \dots, \psi^* Y_k) = 0 \implies P \equiv 0$. Por ser ψ^* morfismo de k -álgebras,

$$\begin{aligned} P(\psi^* Y_1, \dots, \psi^* Y_k) &= \sum_{0 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq d} c_{i_1 i_2 \dots i_k} (\psi^* Y_1)^{i_1} \dots (\psi^* Y_k)^{i_k} \\ &= \sum_{0 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq d} c_{i_1 i_2 \dots i_k} \psi^*(Y_1^{i_1}) \dots \psi^*(Y_k^{i_k}) \\ &= \sum_{0 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq d} c_{i_1 i_2 \dots i_k} \psi^*(Y_1^{i_1} \dots Y_k^{i_k}) \\ &= \sum_{0 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq d} \psi^*(c_{i_1 i_2 \dots i_k} Y_1^{i_1} \dots Y_k^{i_k}) \\ &= \psi^* \left(\sum_{0 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_k \leq d} c_{i_1 i_2 \dots i_k} Y_1^{i_1} \dots Y_k^{i_k} \right) \\ &= \psi^* P(Y_1, \dots, Y_k) \end{aligned}$$

Por ser ψ^* inyectiva, se tiene

$$\psi^* P(Y_1, \dots, Y_k) = P(\psi^* Y_1, \dots, \psi^* Y_k) = 0 \implies P(Y_1, \dots, Y_k) = 0.$$

Por último, por ser $Y_1, \dots, Y_k$ se tiene que $P \equiv 0$, por lo que se concluye que $\psi^* Y_1, \dots, \psi^* Y_k$ son algebraicamente independientes.

Cómo X tiene dimensión r , se tiene que el grado de trascendencia de $\mathbb{C}[X]$ es r . Podemos tomar entonces $f_{k+1}, \dots, f_r$ funciones polinómicas en X , cero en x , tales que el conjunto

$$\{\psi^* Y_1, \dots, \psi^* Y_k, f_{k+1}, \dots, f_r\}$$

es una base trascendente de $\mathbb{C}[X]$. Consideramos ahora la extensión de ψ

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : X &\rightarrow \mathbb{C}^r \\ z &\mapsto (\psi(z), f_{k+1}(z), \dots, f_r(z)) \end{aligned}$$

Como $\{x\}$ es una componente de $\tilde{\psi}^{-1}(\tilde{\psi}(x))$ (por construcción de la aplicación) y $\tilde{\psi}(x)$ es topológicamente unramificado en $\mathbb{K}^r$, por ser un punto suave, podemos aplicar el Principio fundamental de Abierticidad 3.32 entonces $\tilde{\psi}$ es una aplicación abierta, en concreto en x , por lo que

$$0 = \tilde{\psi}(x) \in \tilde{\psi}(\mathcal{U})$$

Sin embargo, los puntos del tipo $(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_r) \notin \tilde{\psi}(\mathcal{U})$ siempre que $(a_{k+1}, \dots, a_r) \neq (0, \dots, 0)$, ya que si $y \in \mathcal{U}$ del estilo anterior.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(y) = (0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_r) &\implies \psi(y) = 0 \\ &\implies y \in \mathcal{U} \cap \psi^{-1}(\{0\}) = \{x\} \\ &\implies y = x \\ &\implies (a_{k+1}, \dots, a_r) = (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Por tanto, no podemos encontrar una bola centrada en $\tilde{\psi}(x)$ y contenida en $\tilde{\psi}(\mathcal{U})$, por lo que este último no es un abierto, $\nexists$.

Se concluye por tanto que no existen componentes W de $\varphi^{-1}(y)$ tales que $\dim(W) < r - s$. ■

Corolario 3.35 (Mumford, 1976, Corolario 3.14). *Sea X una variedad algebraica de dimensión r y sean $f_1, \dots, f_k$ funciones polinómicas en X , entonces toda componente de $X \cap \mathbb{V}(f_1, \dots, f_k)$ tiene dimensión $\geq r - k$.*

Demostración.

Basta aplicar el teorema a la aplicación regular $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}^k$, donde $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ y tomar $0 \in \mathbb{C}^k$, por lo que $\varphi^{-1}(\{0\}) = X \cap \mathbb{V}(f_1, \dots, f_k)$ tiene dimensión al menos $\dim(X) - \dim(\mathbb{C}^k) = r - k$ ■

Corolario 3.36 (de la dimensión de las fibras) (Mumford, 1976, Corolario 3.15). Sean X e Y variedades algebraicas de dimensiones r y s respectivamente y sea $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación regular dominante. Existe un abierto de Zariski $Y_0 \subseteq Y$ tal que para todo $y \in Y_0$, toda componente de $\varphi^{-1}(\{y\})$ tiene dimensión $r - s$.

Demostración.

Por un lado, el Teorema 3.34 nos indica que $\dim(\varphi^{-1}(\{y\})) \geq r - s$ para todo $y \in Y_0$ (abierto de Zariski que definiremos más tarde). Por otro lado, por el Corolario 3.28, tenemos un abierto de Zariski Y_0 tal que $\varphi^{-1}(Y_0)$ puede ser estratificado en piezas suaves sobre Y_0 . Veamos las restricciones de φ a cada uno de los estratos, que son suaves. Por ser $\varphi|_{X_i} : X_i \rightarrow Y_0$ suaves, por la Proposición 3.24, tenemos que $\forall x \in \varphi|_{X_i}^{-1}(y)$, $\varphi|_{X_i}^{-1} \varphi|_{X_i}(x) = \varphi|_{X_i}^{-1}(y)$ tiene una única componente a lo largo de x , y es de dimensión $\dim(X_i) - \dim(Y_0) = \dim(X_i) - s$. Si $i = 0$, entonces por el corolario $\dim(X_0) = \dim(X) = r$ y por tanto la dimensión es $r - s$. Sin embargo si $i = 1, \dots, k$, $\dim(X_i) < \dim(X)$, por lo que la dimensión es menor que $r - s$, $\nless$.

Habíamos supuesto que $\dim(\varphi^{-1}(\{y\})) \geq r - s$. Tenemos por tanto que $\varphi^{-1}(\{y\})$ tiene solo la componente X_0 y es de dimensión $r - s$. ■

4

Problemas punto-recta en visión por computador

En este capítulo se definirán en términos de variedades algebraicas los problemas punto-recta. Estos se denominarán minimales cuando para una imagen conjunta genérica el número de soluciones sea finito. El objetivo es realizar una clasificación de los problemas minimales. Para ello se definirán los problemas balanceados, problemas sencillos de clasificar con la virtud de que esta clasificación no depende de una configuración concreta del problema, sino de parámetros como el número de puntos, rectas, cámaras e incidencias entre estos. Una vez clasificados los balanceados, se crearán métodos para determinar si estos tienen asociada una aplicación de cámara dominante y los que lo cumplan serán minimales. Por último se plantearán algoritmos para poder computar si un problema balanceado es minimal y determinar su número de soluciones.

4.1. Cámaras proyectivas

En primer lugar, definiremos el objeto central de nuestro estudio, las cámaras. Estas serán aplicaciones proyectivas que modelicen el comportamiento que vamos a describir en el espacio afín. Se utilizará como referencia principal el capítulo 6 de Hartley y Zisserman, 2003.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y el espacio afín $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ sobre $\mathbb{K}$ de dimensión 3, dados un centro de cámara que llamaremos O_C y un plano imagen que llamaremos π_{im} , buscamos una aplicación C de manera que la imagen de cualquier punto X se pueda calcular como la intersección $\pi_{\text{im}} \cap \mathcal{L}(X, O_C)$.

Sea $\mathcal{B}^4 = \{u_0^4, u_1^4, u_2^4, u_3^4\}$ una base de $\mathbb{K}^4$, $\mathcal{B}^3 = \{u_0^3, u_1^3, u_2^3\}$ una base de $\mathbb{K}^3$, $\mathcal{B}^2 = \{u_0^2, u_1^2\}$ una base de $\mathbb{K}^2$ y $\mathcal{R}_\mathcal{A}^3 = \{O_C; \mathcal{B}^3\}$ una referencia afín donde el plano imagen venga definido por la ecuación $x_2 = f$ respecto de la referencia $\mathcal{R}_\mathcal{A}^3$, con $f \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ al que llamaremos distancia focal. Calculemos la imagen de un punto cualquiera $X = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$. Se tiene que la recta $\mathcal{L}\{X, O_C\}$ es el conjunto de $(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3$ que satisface

$$\begin{cases} X_0 x_2 - X_2 x_0 = 0 \\ X_1 x_2 - X_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

Tenemos por tanto que $\pi_{\text{im}} \cap \mathcal{L}(X, O_C) = (f \frac{x_0}{x_2}, f \frac{x_1}{x_2}, f)$. Si consideramos este punto del plano imagen como un punto de un espacio afín $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ con referencia afín $\mathcal{R}_\mathcal{A}^2 = \{0; \mathcal{B}^2\}$, identificando el punto $(0, 0, 1)$ con el origen de la referencia y los vectores u_0^3 y u_1^3 con los de la base $\mathcal{B}^2$, tendríamos que la cámara es una aplicación tal que

$$(x_0, y_0, z_0) \mapsto (f \frac{x_0}{z_0}, f \frac{y_0}{z_0})$$

Ahora, si consideramos esta construcción en el plano afín $x_3 = 1$ dentro del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$, considerando las referencias proyectivas $\mathcal{R}_\mathcal{A}^3 = \{[u_0^4], [u_1^4], [u_2^4], [u_3^4]; [u_0^4 + u_1^4 + u_2^4 + u_3^4]\}$ y $\mathcal{R}_\mathcal{A}^2 = \{[u_0^3], [u_1^3], [u_2^3]; [u_0^3 + u_1^3 + u_2^3]\}$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ y $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ respectivamente, tenemos

$$(x_0 : y_0 : z_0 : 1) \mapsto (f \frac{x_0}{z_0} : f \frac{y_0}{z_0} : 1)$$

Podemos escribir esto de manera matricial como

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f x_0 \\ f y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Por último, estamos asumiendo que el origen de la referencia afín del plano imagen está en el punto $(0, 0)$. En general, si el origen fuera $p = (p_x, p_y)$ tendríamos

$$(x_0, y_0, z_0) \mapsto (p_x + f \frac{x_0}{z_0}, p_y + f \frac{y_0}{z_0})$$

Lo que se traduce en nuestra construcción anterior a

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f & 0 & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f x_0 \\ f y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Considerando ahora

$$K := \begin{pmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \quad X := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

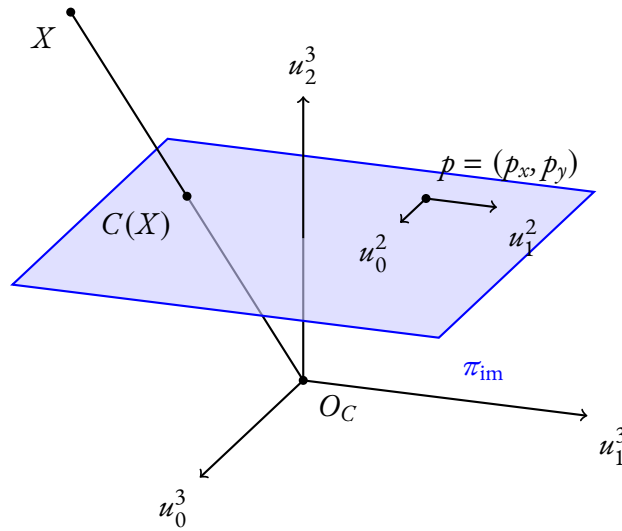
Podemos escribir

$$X \mapsto K(Id|0)X$$

K se denomina matriz de calibración de cámara. Para mayor generalidad se considera que la matriz de calibración de cámara tiene la forma general

$$\begin{pmatrix} f & s & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde f se denota distancia focal, (p_x, p_y) centro de imagen y s factor de asimetría. Este último por lo general será nulo, pero para cierto tipo de cámaras puede no serlo.



Generalmente, los puntos que queremos transformar por la cámara no están en la referencia afín de la cámara $\mathcal{R}_c^3 = \{O_C; \mathcal{B}^3\}$. Dicho de otra manera, la cámara no siempre va a estar en el origen de coordenadas con el plano imagen perpendicular al eje x_2 . Para ello, hay que cambiar las coordenadas de los puntos que originalmente vendrán en una referencia cualquiera $\mathcal{R}_c'^3 = \{O; \mathcal{B}'^3 = \{v_0^3, v_1^3, v_2^3\}\}$ a $\mathcal{R}_c^3$ para poder transformarlos

por nuestra aplicación de cámara. Cómo de la referencia $\mathcal{R}_3$ solo nos interesa alinear el tercer vector de la base asociada de manera que el plano imagen sea perpendicular a este, podemos considerar $\mathcal{B}^3$ como una rotación de los vectores de $\mathcal{B}'^3$, de manera que podemos llevar $\mathcal{R}_3'$ a $\mathcal{R}_3$ mediante una traslación (del centro de la referencia) y una rotación (de los vectores de la base). Si $X_{\mathcal{R}_3'} = (x_0, x_1, x_2)$ son las coordenadas de un punto respecto de la referencia $\mathcal{R}_3'$, y $X_{\mathcal{R}_3} = (y_0, y_1, y_2)$ son las coordenadas de dicho punto respecto de la referencia de la cámara $\mathcal{R}_3$, se tiene que

$$X_{\mathcal{R}_3} = R(X_{\mathcal{R}_3'} - O_{C\mathcal{R}_3'})$$

dónde $O_{C\mathcal{R}_3'}$ son las coordenadas de la cámara respecto de la referencia $\mathcal{R}_3'$ y $R \in \text{SO}(3, \mathbb{K})$ es la matriz de rotación que transforma los vectores de la base $\mathcal{B}'^3$ en los de $\mathcal{B}^3$. De nuevo, considerando esta construcción dentro del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ tenemos matricialmente que si $(y_0 : y_1 : y_2 : 1)$ son las coordenadas de X respecto de la referencia proyectiva $\mathcal{R}_3'$ y $(x_0 : x_1 : x_2 : 1)$ respecto de la referencia $\mathcal{R}_3 = \{[v_0^4], [v_1^4], [v_2^4], [v_3^4]; [v_0^4 + v_1^4 + v_2^4 + v_3^4]\}$ (donde $\mathcal{B}^4 = \{v_0^4, v_1^4, v_2^4, v_3^4\}$ es una base de $\mathbb{K}^4$), entonces

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -RO_{C\mathcal{R}_3'} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sustituyendo en la Ecuación (4.1), tenemos

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f & s & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & -RO_{C\mathcal{R}_3'} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O de manera equivalente

$$X \mapsto KR(Id| - O_{C\mathcal{R}_3'})X$$

Es común representar $X_{\mathcal{R}_3} = RX_{\mathcal{R}_3'} + t$, de esta manera tendríamos que la matriz de cámara sería de la forma

$$K(R|t)$$

Definición 4.1. Sean $\mathcal{B} = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, base de $\mathbb{K}^4$ asociadas a referencias proyectivas $\mathcal{R}_c = \{[u_0], [u_1], [u_2], [u_3]; [u_0 + \dots + u_3]\}$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ y $\mathcal{B}_{\text{im}} = \{w_0, w_1, w_2\}$ una base de $\mathbb{K}^3$ asociada a una referencia proyectiva $\mathcal{R}_{\text{im}} = \{[w_0], [w_1], [w_2]; [w_0 + \dots + w_2]\}$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ y $R \in \text{SO}(3, \mathbb{K})$. Se define la *cámara* de centro $O_C = -R^T t$ y orientación R con

distancia focal f , factor de asimetría s y centro de imagen $p = (p_x, p_y, 1, 1)$ a la aplicación $C : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ tal que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\text{im}}}(C) = K(R|t)$$

donde

$$K = \begin{pmatrix} f & s & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se dice que C es calibrada si K es conocida.

Observación. A lo largo del artículo se considerarán cámaras calibradas sin haber fijado ninguna referencia en los espacios proyectivos de salida y de llegada. Esta arbitrariedad se eliminará fijando parámetros de las cámaras y por tanto sus matrices asociadas. En primer lugar, supongamos que tenemos una cámara C , un punto $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ y su imagen $y_1 = C(x) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$. Sean y_1 las coordenadas de un punto de una imagen respecto de una referencia $\mathcal{R}_1$, consideramos la referencia $\mathcal{R}_2$ de manera que la matriz de cambio de referencia de $\mathcal{R}_2$ a $\mathcal{R}_1$ sea K , de manera que las coordenadas de dicho punto respecto de $\mathcal{R}_2$ son $Ky_2 = y_1$. Tenemos por tanto que si x son las coordenadas del punto $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ respecto de una referencia $\mathcal{R}_x$, y la matriz de cámara tiene la forma $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\text{im}}}(C) = K(R|t)$, tenemos que $Ky_1 = y_2 = K(R|t) \cdot x$, por lo que $y_1 = (R|t) \cdot x$. En esta sección por tanto fijamos las referencias proyectivas de cada una de las imágenes de manera que la matriz de una cámara calibrada tiene la forma $(R|t)$.

Observación. Si tenemos que un punto $y \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ viene dado como imagen de $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ bajo la cámara C , es decir si y son las coordenadas de y en cierta referencia, x las de x en otra referencia y $K(R|t)$ la matriz de la cámara C respecto de esas referencias, tenemos $y = K(R|t)x$. Entonces, para cualquier matriz H invertible, tenemos que y viene como imagen del punto con coordenadas Hx bajo la cámara con matriz asociada $K(R|t)H^{-1}$, ya que

$$K(R|t)H^{-1}Hx = K(R|t)x = y$$

Esta arbitrariedad será resuelta fijando la forma de las dos primeras cámaras del espacio de configuración de cámara, lo que se puede entender como fijar la referencia proyectiva de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$.

Sean $(R_1|t_1), \dots, (R_m|t_m)$ un conjunto de matrices de cámara calibradas, si tenemos que $y_1, \dots, y_m$ son las coordenadas de m puntos imágenes del punto de coordenadas x bajo las m cámaras, entonces transformar Hx por las cámaras de matrices $(R_1|t_1)H^{-1}, \dots, (R_m|t_m)H^{-1}$ nos dará también como imágenes, donde H es la matriz de una transformación de similitud,

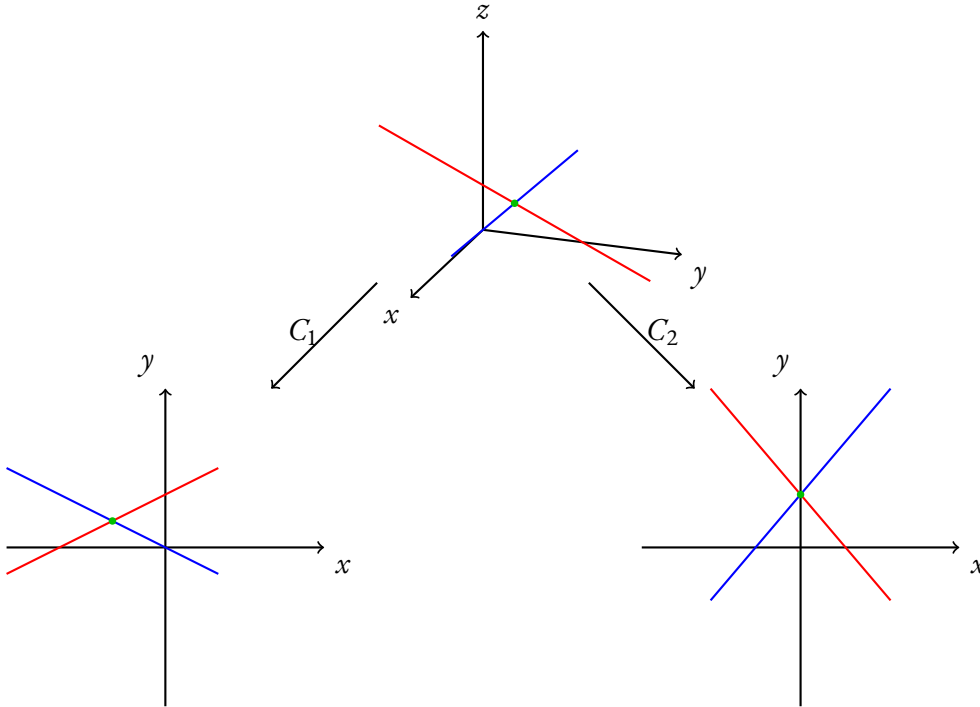
que viene definida por una matriz invertible de la forma

$$H = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

dónde $R \in SO(3, \mathbb{K})$, $p \in \mathbb{K}^3$ y $s \in \mathbb{K}$. Tenemos por tanto una arbitrariedad dada por 7 parámetros libres. Fijar estos parámetros es equivalente a fijar la forma de las dos primeras matrices, si fijamos $(R_1|t_1) = (Id|0)$ y la primera coordenada de t_2 a 1, habremos eliminado esta arbitrariedad, por lo que trataremos con conjuntos de matrices de cámara que tengan esta forma. Este proceso es equivalente a fijar una referencia proyectiva en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$, que será en la que expresemos nuestros puntos tridimensionales.

4.2. Problemas punto-recta

A continuación definiremos los problemas punto-recta, que son con los que trabajaremos a lo largo de todo el documento, y definiremos el comportamiento de las cámaras para cada problema en función de variedades proyectivas. La referencia principal que se utilizará es Duff et al., 2020.



Definición 4.2. Un *problema punto-recta* es una tupla $(p, l, \mathcal{T}, m)$, donde $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ indica el número de puntos en el problema, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ indica el número de rectas, $m \in \mathbb{N}$

indica el número de cámaras e $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, l\}$ indica las incidencias, de manera que $(i, j) \in \mathcal{I}$ si el punto i está contenido en la recta j .

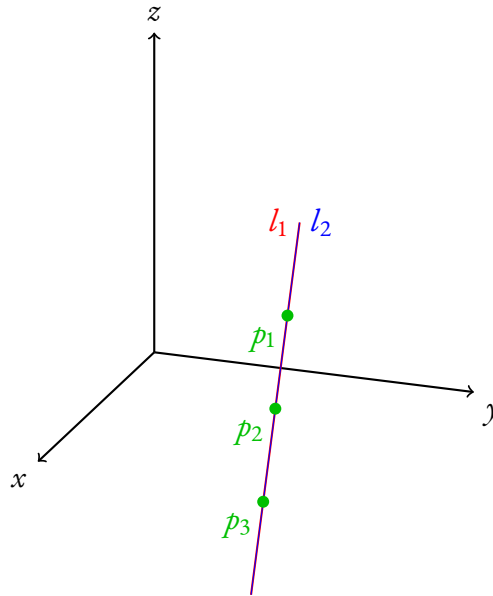
Esta definición involucra todo lo que respecta a la naturaleza del problema, ya que a pesar de que consideremos instancias distintas de un mismo problema el número de soluciones va a ser el mismo. Esto se debe a que los métodos de clasificación que se expondrán dependen enteramente de estos parámetros y no de instancias concretas.

En nuestro contexto si dos rectas intersecan, esta intersección figura como un punto de los considerados en el problema, además dos rectas no pueden intersecar en dos puntos distintos. Se asumirá también que $\mathcal{I}$ es completa, es decir, que si contiene ciertas incidencias, contendrá también las que se puedan deducir a partir de estas.

Ejemplo 4.3. Consideremos el caso en el que tenemos dos rectas l_1, l_2 y tres puntos p_1, p_2, p_3 . Tenemos que si los elementos

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2) \in \mathcal{I}$$

entonces $(3, 2) \in \mathcal{I}$ porque de las tres primeras relaciones se deduce que los tres primeros puntos están alineados y contenidos en l_1 y de las tres últimas que p_1 y p_2 están en l_2 . Como p_1, p_2 y p_3 están alineados y p_1 y p_2 están en la recta l_2 , entonces p_3 también tiene que estar en la recta l_2 .



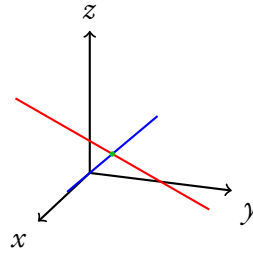
Definición 4.4. Sea $(p, l, \mathcal{I}, m)$ un problema punto recta. Llamamos instancia del problema a un conjunto de p puntos y l rectas tridimensionales que inciden de acuerdo a $\mathcal{I}, m$

cámaras y m conjuntos de p puntos y l rectas tridimensionales que inciden de acuerdo a $\mathcal{T}$, y que además son el resultado de transformar los puntos y rectas tridimensionales por las cámaras.

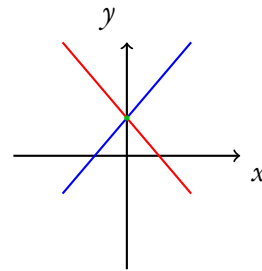
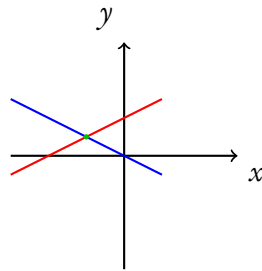
Observación. Sea $(p, l, \mathcal{T}, m)$ un problema punto recta, siempre va a existir una instancia para ese problema, la llamada instancia trivial. Consiste en considerar todos los puntos iguales y todas las rectas iguales, todas las cámaras iguales y construimos los puntos y rectas bidimensionales como transformados por las cámaras, de manera que son todos iguales para todas las vistas. De esta forma tendremos una instancia con p puntos, l rectas y m vistas que además tiene cualquier incidencia que pueda estar en $\mathcal{T}$ (ya que por construcción las tiene todas).

A continuación vamos a ver que cada instancia tiene más estructura que la de conjunto. En primer lugar podemos separarlo en tres conjuntos diferenciados.

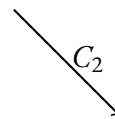
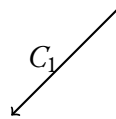
1. Los puntos y rectas tridimensionales



2. Los puntos y rectas bidimensionales



3. Las cámaras



Estos tres conjuntos son variedades, los dos primeros proyectivas y el último afín. Veamos a continuación a qué espacio pertenecen y por qué condiciones polinomiales vienen definidas.

Definición 4.5. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$, se define la *variedad de arreglos tridimensional* como

$$\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} := \{(p_1; \dots; p_p; l_1; \dots; l_l) \in (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^p \times (\mathbb{G}(2, 4))^l : \forall (i, j) \in \mathcal{I}, p_i \in l_j\}$$

Proposición 4.6. $\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}$ es una variedad multiproyectiva que viene dada por las ecuaciones:

$$l_{k,2}l_{k,3} - l_{k,1}l_{k,4} + l_{k,0}l_{k,5} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, l$$

$$\begin{cases} p_{i,0}l_{j,3} - p_{i,1}l_{j,1} + p_{i,2}l_{j,0} = 0 \\ p_{i,0}l_{j,4} - p_{i,1}l_{j,2} + p_{i,3}l_{j,0} = 0 \\ p_{i,0}l_{j,5} - p_{i,2}l_{j,2} + p_{i,3}l_{j,1} = 0 \\ p_{i,1}l_{j,5} - p_{i,2}l_{j,4} + p_{i,3}l_{j,3} = 0 \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}$$

donde $p_i = (p_{i,0} : \dots : p_{i,3}) \in \mathbb{P}^3$ son las coordenadas del punto i y $l_j = (l_{j,0} : \dots : l_{j,5}) \in \mathbb{G}(2, 4)$ las coordenadas de la recta j .

Demostración.

El objetivo para ver que es una variedad multiproyectiva es primero ver $\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}$ como un conjunto de puntos de un producto cartesiano de espacios proyectivos que satisfaga ciertas condiciones dadas por polinomios multihomogéneos. Lo primero es fácil, ya que gracias al Embebimiento de Plücker (Teorema 2.31) podemos ver $\mathbb{G}(2, 4) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{4}{2}-1} = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^5$, por lo que los puntos

$$(p_1, \dots, p_p, l_1, \dots, l_l) \in (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^p \times (\mathbb{G}(2, 4))^l \subseteq (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^p \times (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^5)^l.$$

Lo segundo es que los puntos de $\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \subseteq (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^p \times (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^5)^l$ se puedan dar como el subconjunto del producto cartesiano de espacios proyectivos $(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^p \times (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^5)^l$ que satisfacen ciertas condiciones polinomiales multihomogéneas. Para ello hay que codificar en polinomios tanto las condiciones que tienen que satisfacer $l_1, \dots, l_l$ para pertenecer a $\mathbb{G}(2, 4)$, como las condiciones de incidencia de $x_i \in l_j \forall (i, j) \in \mathcal{I}$.

En primer lugar, construyamos las restricciones polinomiales que tiene que satisfacer un punto de $\mathbb{G}(2, 4)$. Procederemos como en el Ejemplo 2.34. Consideremos en primer

lugar una matriz general asociada a la Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$ con una identidad en sus primeras dos columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & b & d \end{pmatrix}$$

Las coordenadas homogéneas de un punto a partir de esta matriz serían: $(1 : b : d : -a : -c : ad - bc) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^5$. Consideramos ahora el anillo $\mathbb{K}[x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4}]$. Las variables igual a coeficientes salvo signo son:

$$x_{1,3} = b, x_{1,4} = d, x_{2,3} = -a, x_{2,4} = -c$$

Finalmente, se utiliza la última variable para hallar la única condición polinomial:

$$x_{3,4} = ad - bc = -x_{2,3}x_{1,4} + x_{1,3}x_{2,4} \xrightarrow{\text{homog.}} x_{1,2}x_{3,4} - x_{1,3}x_{2,4} + x_{1,4}x_{2,3}$$

Nótese que como el ideal $\mathcal{U}_{1,2} \cap \mathbb{G}(2, 4)$ está definido por un solo polinomio, basta considerar el ideal generado por la homogeneización de dicho polinomio para construir el ideal homogéneo. Renombrando ahora las variables para cada recta

$$l_k = (l_{k,0}, l_{k,1}, l_{k,2}, l_{k,3}, l_{k,4}, l_{k,5}) \longleftrightarrow (x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4})$$

tenemos el conjunto de restricciones:

$$l_{k,2}l_{k,3} - l_{k,1}l_{k,4} + l_{k,0}l_{k,5} = 0, \forall k = 1, \dots, l$$

En segundo lugar, veamos el conjunto de restricciones que se deriva de las condiciones de incidencia. Para cada $(i, j) \in I$, necesitamos imponer $p_i \in l_j$. Supongamos que la recta l_j viene generada por los puntos $[u], [v]$ con $u, v \in \mathbb{K}^4$. Como $p_i \in l_j$, se tiene que dar

$$\text{rg} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ p_{i,0} & p_{i,1} & p_{i,2} & p_{i,3} \end{pmatrix} = 2$$

Para lo que todos los menores de orden 3 deben anularse. Tomando cada uno de estos y desarrollándolo por la última fila, irán apareciendo menores de orden 2 de la submatriz formada por las 2 primeras filas. Estos menores hacen referencia a las coordenadas de Plücker. Tenemos por tanto los siguientes menores:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ p_{i,0} & p_{i,1} & p_{i,2} \end{vmatrix} = p_{i,0} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - p_{i,1} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + p_{i,2} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = p_{i,0}l_{j,3} - p_{i,1}l_{j,1} + p_{i,2}l_{j,0}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \\ p_{i,0} & p_{i,1} & p_{i,3} \end{vmatrix} = p_{i,0} \begin{vmatrix} u_2 & u_4 \\ v_2 & v_4 \end{vmatrix} - p_{i,1} \begin{vmatrix} u_1 & u_4 \\ v_1 & v_4 \end{vmatrix} + p_{i,3} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = p_{i,0}l_{j,4} - p_{i,1}l_{j,2} + p_{i,3}l_{j,0}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_3 & v_4 \\ p_{i,0} & p_{i,2} & p_{i,3} \end{vmatrix} = p_{i,0} \begin{vmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{vmatrix} - p_{i,2} \begin{vmatrix} u_1 & u_4 \\ v_1 & v_4 \end{vmatrix} + p_{i,3} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} = p_{i,0}l_{j,5} - p_{i,2}l_{j,2} + p_{i,3}l_{j,1}$$

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ p_{i,1} & p_{i,2} & p_{i,3} \end{vmatrix} = p_{i,1} \begin{vmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{vmatrix} - p_{i,2} \begin{vmatrix} u_2 & u_4 \\ v_2 & v_4 \end{vmatrix} + p_{i,3} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = p_{i,1}l_{j,5} - p_{i,2}l_{j,4} + p_{i,3}l_{j,3}$$

Forzando a que estos menores se anulen, se tienen las condiciones polinomiales:

$$\begin{cases} p_{i,0}l_{j,3} - p_{i,1}l_{j,1} + p_{i,2}l_{j,0} = 0 \\ p_{i,0}l_{j,4} - p_{i,1}l_{j,2} + p_{i,3}l_{j,0} = 0 \\ p_{i,0}l_{j,5} - p_{i,2}l_{j,2} + p_{i,3}l_{j,1} = 0 \\ p_{i,1}l_{j,5} - p_{i,2}l_{j,4} + p_{i,3}l_{j,3} = 0 \end{cases}, \forall (i, j) \in \mathcal{I}$$

Veamos por último que los polinomios son multihomogéneos, es decir que son homogéneos en cada una de las variables $\{p_{1,q}\}_{q=0}^3, \dots, \{p_{p,q}\}_{q=0}^3, \{l_{1,q}\}_{q=0}^5, \dots, \{l_{l,q}\}_{q=0}^5$.

En primer lugar se puede ver que

$$l_{k,2}l_{k,3} - l_{k,1}l_{k,4} + l_{k,0}l_{k,5} = 0, \forall k = 1, \dots, l$$

son homogéneos de grado 2 en las variables $\{l_{k,q}\}_{q=0}^5$.

Por último, se puede ver que

$$\begin{cases} p_{i,0}l_{j,3} - p_{i,1}l_{j,1} + p_{i,2}l_{j,0} = 0 \\ p_{i,0}l_{j,4} - p_{i,1}l_{j,2} + p_{i,3}l_{j,0} = 0 \\ p_{i,0}l_{j,5} - p_{i,2}l_{j,2} + p_{i,3}l_{j,1} = 0 \\ p_{i,1}l_{j,5} - p_{i,2}l_{j,4} + p_{i,3}l_{j,3} = 0 \end{cases}, \forall (i, j) \in \mathcal{I}$$

son homogéneos de grado 1 en las variables $\{p_{i,q}\}_{q=0}^3$ y homogéneos también de grado 1 en las variables $\{l_{j,q}\}_{q=0}^5$.

Concluimos por tanto que $\mathcal{X}_{p,l,T}$ es una variedad multiproyectiva al ser un subconjunto de $(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^p \times (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^5)^l$ definida por polinomios multihomogéneos. ■

Observación. Nótese que en principio esta variedad incluye casos *degenerados* que no vamos a tratar. Consideraremos degenerados casos concretos que en la práctica no se van a ver, no son *genéricos* (más adelante se verá que se considera genérico). Estos serán indicados a lo largo del desarrollo del capítulo. Ejemplos de casos degenerados son aquellos donde dos rectas son la misma (entra en conflicto porque intersecan en varios puntos distintos), y entran casos donde dos puntos son el mismo.

Ejemplo 4.7. Consideremos una instancia del problema punto-recta

$$(1, 2, \{(1, 1), (1, 2)\}, 2)$$

es decir, hay un punto y dos rectas, la primera recta contiene al primer punto y la segunda recta también. Por tanto el problema consta de dos rectas que se cortan en un punto y cuenta con 2 cámaras. Vamos a considerar la instancia con el punto $p = (1 : 1 : 0 : 0)$ y las dos rectas $l_1 = \mathcal{L}\{p, (1 : 1 : 1 : 0)\}$ y $l_2 = \mathcal{L}\{p, (1 : -1 : 0 : 0)\}$ con las coordenadas de los puntos en la referencia proyectiva estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Consideramos las matrices M_{l_1} y M_{l_2} que representan los subespacios proyectivos l_1 y l_2 respectivamente.

$$M_{l_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{l_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando el Algoritmo 1, tenemos que las coordenadas de Plücker de las rectas son $l_1 = (0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0)$ y $l_2 = (-2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$.

Tenemos por tanto un punto

$$(1 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathcal{X}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\}}$$

Veamos que efectivamente está en la variedad. Esta variedad, por la Proposición 4.6 está definida por las ecuaciones

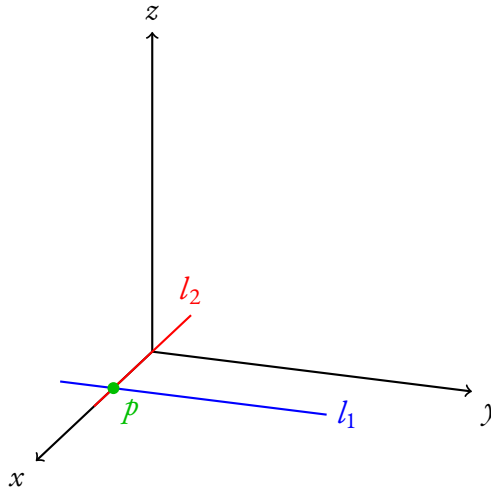
$$l_{1,2}l_{1,3} - l_{1,1}l_{1,4} + l_{1,0}l_{1,5} = 0, \quad (l_1 \in \mathbb{G}(2, 4))$$

$$l_{2,2}l_{2,3} - l_{2,1}l_{2,4} + l_{2,0}l_{2,5} = 0, \quad (l_2 \in \mathbb{G}(2, 4))$$

$$\begin{cases} p_{1,0}l_{1,3} - p_{1,1}l_{1,1} + p_{1,2}l_{1,0} = 0 \\ p_{1,0}l_{1,4} - p_{1,1}l_{1,2} + p_{1,3}l_{1,0} = 0 \\ p_{1,0}l_{1,5} - p_{1,2}l_{1,2} + p_{1,3}l_{1,1} = 0 \\ p_{1,1}l_{1,5} - p_{1,2}l_{1,4} + p_{1,3}l_{1,3} = 0 \end{cases}, (p_1 \in l_1)$$

$$\begin{cases} p_{1,0}l_{2,3} - p_{1,1}l_{2,1} + p_{1,2}l_{2,0} = 0 \\ p_{1,0}l_{2,4} - p_{1,1}l_{2,2} + p_{1,3}l_{2,0} = 0 \\ p_{1,0}l_{2,5} - p_{1,2}l_{2,2} + p_{1,3}l_{2,1} = 0 \\ p_{1,1}l_{2,5} - p_{1,2}l_{2,4} + p_{1,3}l_{2,3} = 0 \end{cases}, (p_1 \in l_2)$$

Sustituyendo, se comprueba en efecto que las satisface. Por tanto tenemos un punto de $\mathcal{X}_{\mathbb{I},2,\{(1,1),(1,2)\}}$. Podemos visualizar su corte con el hiperplano afín $x_0 = 1$:



Definición 4.8. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$, se define la *variedad de imagen conjunta* como

$$\mathcal{V}_{p,l,\mathcal{I},m} := \left\{ (p_1^1; \dots; p_p^1; \dots; p_1^m; \dots; p_p^m; l_1^1; \dots; l_l^1; \dots; l_1^m; \dots; l_l^m) \in (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2)^{pm} \times (\mathbb{G}(2,3))^{lm} \right. \\ \left. : \forall k \in \{1, \dots, m\}, \forall (i,j) \in \mathcal{I}, p_i^k \in l_j^k \right\}$$

Denominaremos además como *vista*, a cada una de las imágenes por las cámaras. Por tanto la variedad de imagen conjunta consiste en las m vistas de p puntos proyectivos tridimensionales y las m vistas de l rectas proyectivas tridimensionales que cumplen las relaciones de incidencia indicadas por $\mathcal{I}$.

Proposición 4.9. *La variedad de imagen conjunta $\mathcal{V}_{p,l,\mathcal{I},m}$ es una variedad multiproyectiva que viene dada por las ecuaciones:*

$$p_{i,0}^k l_{j,2}^k - p_{i,1}^k l_{j,1}^k + p_{i,2}^k l_{j,0}^k = 0, \forall (i,j) \in I, \forall k = 1, \dots, m$$

donde $p_i^k = (p_{i,0}^k : p_{i,1}^k : p_{i,2}^k) \in \mathbb{P}^2$ son las coordenadas del punto i en la vista k y $l_j^k = (l_{j,0}^k : l_{j,1}^k : l_{j,2}^k) \in \mathbb{G}(2, 3)$ son las coordenadas de la recta j en la vista k .

Demostración.

La estructura de la prueba será similar a la de la Proposición 4.6. En primer lugar, tenemos

$$\mathcal{V}_{p,l,\mathcal{I},m} \subseteq (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^{pm} \times (\mathbb{G}(2, 3))^{lm} \subseteq (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^{pm} \times \left(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{3}{2}-1} \right)^{lm} = (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^{pm} \times (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2)^{lm},$$

por lo que $\mathcal{V}_{p,l,\mathcal{I},m}$ es un subconjunto de un producto cartesiano de espacios proyectivos. Veamos a continuación las condiciones polinomiales que tienen que satisfacer los puntos

$$(p_1^1; \dots; p_p^1; \dots; p_1^m; \dots; p_p^m; l_1^1; \dots; l_l^1; \dots; l_1^m; \dots; l_l^m) \in (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^{pm} \times (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2)^{lm}$$

para estar en $\mathcal{V}_{p,l,\mathcal{I},m}$.

En primer lugar hay que establecer las condiciones para que los $l_j^k \in \mathbb{G}(2, 3)$. Sin embargo, por el Embebimiento de Plücker (Teorema 2.31) se tiene que $\dim(\mathbb{G}(2, 3)) = 2(3-2) = 2$ y además $\mathbb{G}(2, 3) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$. Se concluye por tanto que $\mathbb{G}(2, 3) = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$, cualquier punto de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ se corresponde con un punto de $\mathbb{G}(2, 3)$, no hay que imponer condiciones extra.

En segundo lugar, veamos las condiciones de pertenencia de puntos a rectas. Sea $(i,j) \in I$, entonces $p_i^k \in l_j^k, \forall k = 1, \dots, m$. Si $l_j^k = \mathcal{L}\{[u], [v]\}$, se tiene que dar

$$\text{rg} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ p_{i,0}^k & p_{i,1}^k & p_{i,2}^k \end{pmatrix} = 2$$

Por lo que el determinante de la matriz debe anularse. Desarrollando por la ultima columna obtenemos:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ p_{i,0}^k & p_{i,1}^k & p_{i,2}^k \end{vmatrix} = p_{i,0}^k \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - p_{i,1}^k \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + p_{i,2}^k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = p_{i,0}^k l_{j,2}^k - p_{i,1}^k l_{j,1}^k + p_{i,2}^k l_{j,0}^k$$

Forzando a que el determinante se anule, tenemos el conjunto de condiciones polinomiales:

$$p_{i,0}^k l_{j,2}^k - p_{i,1}^k l_{j,1}^k + p_{i,2}^k l_{j,0}^k = 0, \forall (i, j) \in I, \forall k = 1, \dots, m$$

Además es un conjunto de restricciones polinomiales multihomogéneas, ya que el polinomio del lado izquierdo es homogéneo de grado 1 en las variables $\{p_{i,q}^k\}_{q=0}^2$ y homogéneo de grado 1 también en las variables $\{l_{j,q}^k\}_{q=0}^2$.

Concluimos por tanto que la variedad de imagen conjunta $\mathcal{V}_{p,l,I,m}$ es una variedad multiproyectiva por ser un subconjunto de $(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3)^{pm} \times (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2)^{lm}$ que satisface ciertas condiciones polinomiales multihomogéneas. ■

Ejemplo 4.10. Consideremos de nuevo el problema $(1, 2, \{(1, 1), (1, 2)\}, 2)$. Recordemos que esto en esencia son dos rectas que cortan en un punto. Vamos a considerar ahora en la primera vista el punto $p^1 = (1 : 1 : 0)$ y las rectas $l_1^1 = \mathcal{L}\{p^1, (1 : 1 : 1)\}$ y $l_2^1 = \mathcal{L}\{p^1, (1 : -1 : 0)\}$. En la segunda vista consideraremos el punto $p^2 = (1 : -1 : 0)$ y las rectas $l_1^2 = \mathcal{L}\{p^2, (1 : -1 : -1)\}$ y $l_2^2 = \mathcal{L}\{p^2, (1 : 1 : 0)\}$. Consideramos las coordenadas de todos los puntos en la referencia proyectiva estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Para las coordenadas de Plücker de las rectas, consideramos las matrices que las representan, que no son más que las matrices formadas por filas por las coordenadas de los puntos que generan las rectas. Sea $M_{l_i^j}$ la matriz que representa a la recta i en la vista j , tenemos las matrices.

$$M_{l_1^1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{l_2^1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{l_1^2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_{l_2^2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando a cada una el Algoritmo 1, tenemos que las coordenadas de Plücker de las rectas son $l_1^1 = (0 : 1 : 1)$, $l_2^1 = (1 : 0 : 0)$, $l_1^2 = (0 : -1 : 1)$ y $l_2^2 = (1 : 0 : 0)$.

Tenemos por tanto el punto

$$(1 : 1 : 0 : 1 : -1 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0 : -1 : 1 : 1 : 0 : 0) \in \mathcal{V}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\},2}$$

Veamos que está en la variedad. De acuerdo a la Proposición 4.9, un punto de la variedad debe satisfacer las ecuaciones

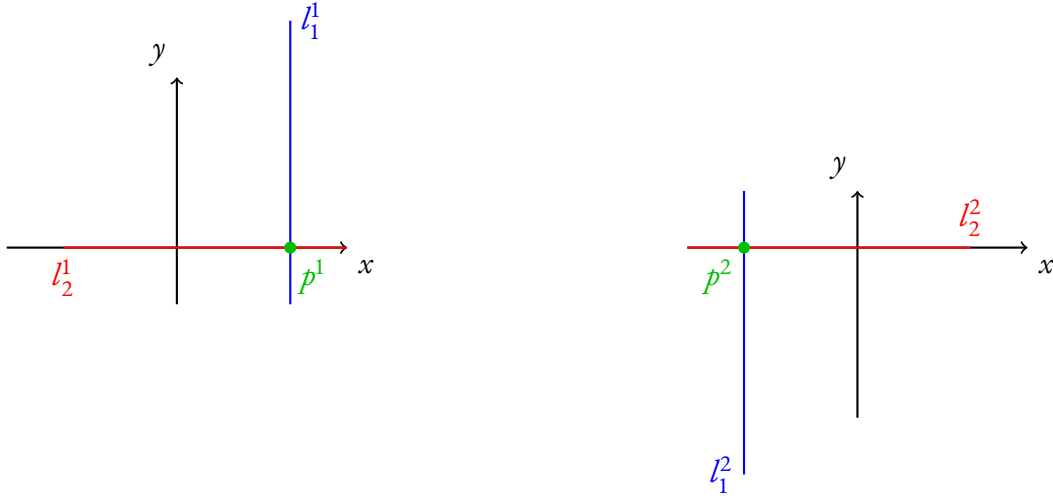
$$p_{1,0}^1 l_{1,2}^1 - p_{1,1}^1 l_{1,1}^1 + p_{1,2}^1 l_{1,0}^1 = 0, \quad (p_1^1 \in l_1^1)$$

$$p_{1,0}^2 l_{1,2}^2 - p_{1,1}^2 l_{1,1}^2 + p_{1,2}^2 l_{1,0}^2 = 0, \quad (p_1^2 \in l_1^2)$$

$$p_{1,0}^1 l_{2,2}^1 - p_{1,1}^1 l_{2,1}^1 + p_{1,2}^1 l_{2,0}^1 = 0, \quad (p_1^1 \in l_2^1)$$

$$p_{1,0}^2 l_{2,2}^2 - p_{1,1}^2 l_{2,1}^2 + p_{1,2}^2 l_{2,0}^2 = 0, \quad (p_1^2 \in l_2^2)$$

Se tiene en efecto que el punto las satisface. Por tanto tenemos un punto de $\mathcal{V}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\},2}$. Visualicemos ambas vistas para el corte con el hiperplano afín $x_0 = 1$:



Observación. Nótese que un punto de la variedad de imagen conjunta a priori no tiene por qué venir de pasar un arreglo punto-recta concreto por unas determinadas cámaras, estas cámaras y arreglo no tienen por qué existir.

Definición 4.11. Dado un problema punto recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$, se define el *espacio de configuración de cámaras* como

$$C_m := \{(C_1, \dots, C_m) \in (\mathbb{K}^{3 \times 4})^m : C_i = (R_i, t_i), R_i \in \text{SO}(3), t_i \in \mathbb{K}^3, R_1 = Id, t_1 = 0, (t_2)_1 = 1\}$$

Esto es el conjunto de m cámaras calibradas tales que la primera es de la forma $P_1 = (Id|0)$ y la componente $(1, 4)$ de la segunda es 1.

Proposición 4.12. El espacio de configuración de cámaras C_m es una variedad afín dada por las ecuaciones:

$$t_1 = 0, \quad (t_2)_1 = 1, \quad R_1 = Id, \quad R_i R_i^T = Id, \quad \forall i = 2, \dots, m$$

Demostración.

Trivial. Las tres primeras condiciones vienen en la definición de C_m . El último conjunto de condiciones viene de la definición de $SO(3)$, ya que por definición $R_i \in SO(3)$ si $R_i R_i^T = Id$. ■

Observación. Más adelante, se verá por qué podemos considerarlo así, pero a lo largo del capítulo trabajaremos con problemas que llamaremos *genéricos*. Esto nos permitirá no tener en cuenta casos degenerados. Estos casos degenerados vienen de que se cumplan demasiadas restricciones (es decir los casos pertenecen a una variedad) que, en la práctica, van a pasar con probabilidad 0. Por ejemplo, si consideramos tres puntos genéricos que no tienen por qué estar alineados, el caso en el que esos tres puntos están alineados no lo consideramos genérico y por tanto se excluye del análisis. En términos de variedades consideraremos que un punto, recta o cámara es genérico si pertenece a un denso de Zariski

Se asumirá que las posiciones de las cámaras están suficientemente genéricas para que se den las siguientes condiciones:

1. Dos rectas o puntos distintos en el espacio tridimensional se verán como dos rectas o puntos distintos en las vistas
2. Un punto y recta no incidentes en el espacio tridimensional se verán como un punto y recta no incidentes en las vistas
3. Tres puntos no colineales en el espacio tridimensional se verán como tres puntos no colineales en las vistas

Ejemplo 4.13. Vamos a considerar las cámaras definidas por las matrices:

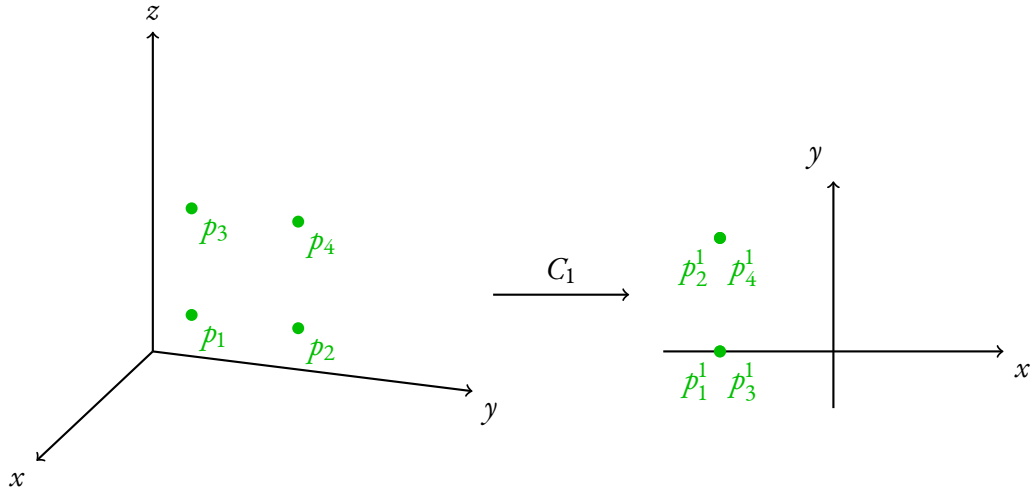
$$C_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), C_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Para ver su comportamiento, veamos a donde lleva los puntos $p_1 = (1 : -1 : 0 : 0)$, $p_2 = (1 : -1 : 1 : 0)$, $p_3 = (1 : -1 : 0 : 1)$ y $p_4 = (1 : -1 : 1 : 1)$:

$$C_1 \cdot p_1 = (1 : -1 : 0), \quad C_1 \cdot p_3 = (1 : -1 : 0)$$

$$C_1 \cdot p_2 = (1 : -1 : 1), \quad C_1 \cdot p_4 = (1 : -1 : 1)$$

Para visualizar qué está pasando grafiquemos los puntos sobre el corte con el hiperplano x_0 .



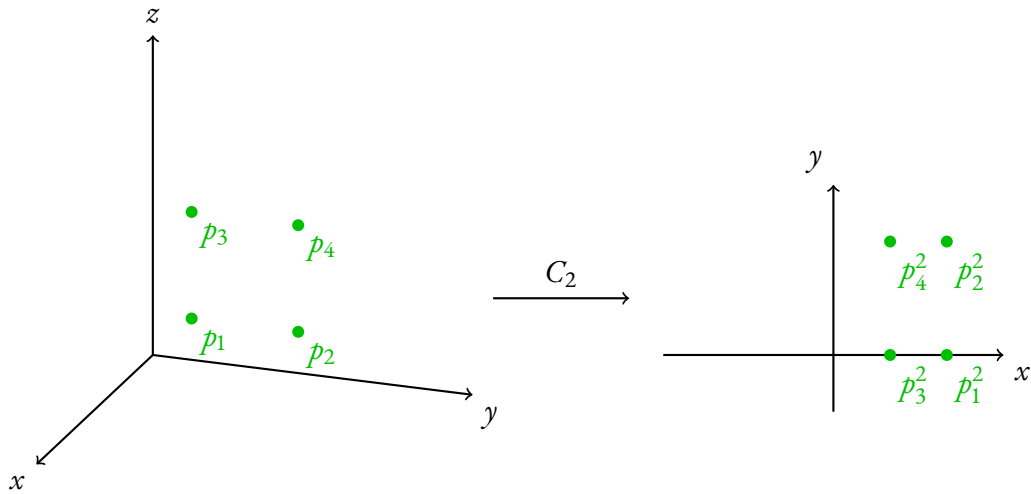
Podemos ver que al transformar los puntos por la cámara colapsan. Esto es un caso degenerado de los que no vamos a considerar porque las cámaras, puntos y rectas no son genéricos.

Veamos a continuación a donde van los puntos por la cámara 2:

$$C_2 \cdot p_1 = (1 : 1 : 0), \quad C_2 \cdot p_3 = (2 : 1 : 0) = (1 : \frac{1}{2} : 0)$$

$$C_2 \cdot p_2 = (1 : 1 : 1), \quad C_2 \cdot p_4 = (2 : 1 : 1) = (1 : \frac{1}{2} : 1)$$

Grafiquemos de nuevo los puntos sobre el hiperplano $x_0 = 0$



Tenemos por tanto un punto

$$\left(\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right) \in C_2$$

Veamos que cumple las ecuaciones de la Proposición 4.12

$$t_1 = 0, \quad (t_2)_1 = 1, \quad R_1 = Id, \quad R_2 R_2^T = Id$$

Sustituimos los valores del problema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\checkmark, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 = 1\checkmark, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id\checkmark, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id\checkmark$$

Concluimos que, al cumplir las ecuaciones, estamos ante un punto de la variedad del espacio de configuración de cámaras C_m .

Una vez establecido nuestro espacio de trabajo del problema, pasemos a definir el tipo de problemas que vamos a afrontar, los problemas minimales. A grandes rasgos se dirá que un problema es minimal si dado un punto genérico de la variedad de imagen conjunta, existen un numero finito de arreglos de la variedad de arreglos punto recta y cámaras del espacio de configuración de cámaras (no nulo) del que pueda provenir esa imagen conjunta.

Definición 4.14. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$, se define la *aplicación de cámara conjunta* asociada como la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_{p,l,\mathcal{I},m} : \mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m &\rightarrow \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m} \\ (p_1; \dots; p_p; l_1; \dots; l_l; C_1, \dots, C_m) &\mapsto (C_1(p_1); \dots; C_1(p_p); \dots; C_m(p_1); \dots; C_m(p_p) \\ &\quad ; C_1(l_1); \dots; C_1(l_l); \dots; C_m(l_1); \dots; C_m(l_l)) \end{aligned}$$

que a dados un arreglo punto-recta tridimensional y unas cámaras del espacio de configuración, les asigna resultado las imágenes de esos puntos y rectas por cada una de las cámaras.

Observación. Es en esta definición donde reside el por qué vamos a trabajar con objetos genéricos. Podríamos pedir que la aplicación fuese sobreyectiva, pero tendríamos problemas para los casos degenerados por cuestiones como la coincidencia de puntos o rectas (que en principio no se contemplan como coincidentes), por lo que nos rebajamos a dominante y consideramos casos genéricos.

Lema 4.15. Sea una aplicación lineal $C : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$ representada por la matriz $C = (c_{i,j})_{i=1,\dots,3,j \in \{1,\dots,4\}}$. Dada una recta $l = \mathcal{L}\{[u], [v]\} \in \mathbb{G}(2, 4)$ con $u, v \in \mathbb{K}^4$ y con coordenadas homogéneas $l = (l_{1,2} : l_{1,3} : l_{1,4} : l_{2,3} : l_{2,4} : l_{3,4})$, se tiene que $C(l) = \mathcal{L}\{[C(u)], [C(v)]\} \in \mathbb{G}(2, 3)$ tiene coordenadas homogéneas $l' = (l'_{1,2} : l'_{1,3} : l'_{2,3})$, donde:

$$l'_{1,2} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det(C|_{\{1,2\} \times \{i,j\}}) l_{i,j}$$

$$l'_{1,3} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det(C|_{\{1,3\} \times \{i,j\}}) l_{i,j}$$

$$l'_{2,3} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det(C|_{\{2,3\} \times \{i,j\}}) l_{i,j}$$

Demostración.

Tenemos en primer lugar que las coordenadas homogéneas de l son $l = (l_{1,2} : l_{1,3} : l_{1,4} : l_{2,3} : l_{2,4} : l_{3,4})$ donde $l_{i,j} = u_i v_j - u_j v_i$. Por otro lado, tenemos, transformando los vectores u y v que:

$$u' = C(u) = C \cdot u = \left(\sum_{i=1}^4 c_{1,i} u_i, \sum_{i=1}^4 c_{2,i} u_i, \sum_{i=1}^4 c_{3,i} u_i \right)$$

$$v' = C(v) = C \cdot v = \left(\sum_{i=1}^4 c_{1,i} v_i, \sum_{i=1}^4 c_{2,i} v_i, \sum_{i=1}^4 c_{3,i} v_i \right)$$

Tendríamos por tanto que las coordenadas homogéneas de $l' = (l'_{1,2} : l'_{1,3} : l'_{2,3})$ donde $l'_{i,j} = u'_i v'_j - u'_j v'_i$. Veamos para cada uno de los $l'_{i,j}$ cual sería su valor en función de los coeficientes de C y en función de las coordenadas de l .

Primero veamos $l'_{1,2} = u'_1 v'_2 - u'_2 v'_1$. Sustituyendo las coordenadas de u' y v' tenemos:

$$l'_{1,2} = \left(\sum_{i=1}^4 c_{1,i} u_i \right) \left(\sum_{j=1}^4 c_{2,j} v_j \right) - \left(\sum_{i=1}^4 c_{2,i} u_i \right) \left(\sum_{j=1}^4 c_{1,j} v_j \right) = \sum_{i,j=1}^4 (c_{1,i} c_{2,j} - c_{2,i} c_{1,j}) u_i v_j$$

Ahora, por un lado tenemos

$$c_{1,i} c_{2,j} - c_{2,i} c_{1,j} = \begin{vmatrix} c_{1,i} & c_{1,j} \\ c_{2,i} & c_{2,j} \end{vmatrix} = \det \left(C|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right)$$

Por lo que tendríamos

$$l'_{1,2} = \sum_{i,j=1}^4 \det \left(C|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) u_i v_j$$

Por otro lado observamos que si $i = j$ el determinante se anula, y el término por lo tanto también, por lo que podemos reescribir la suma como suma de dos:

$$l'_{1,2} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) u_i v_j + \sum_{1 \leq j < i \leq 4} \det \left(C|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) u_i v_j$$

Intercambiando los índices i y j en la segunda suma, se puede agrupar todo bajo el mismo sumatorio. Además usando

$$\det \left(C|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) = \begin{vmatrix} c_{1,i} & c_{1,j} \\ c_{2,i} & c_{2,j} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_{1,j} & c_{1,i} \\ c_{2,j} & c_{2,i} \end{vmatrix}$$

tendríamos lo siguiente

$$l'_{1,2} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) u_i v_j - u_j v_i$$

Finalmente, sustituyendo $u_i v_j - u_j v_i = l_{i,j}$, se concluye:

$$l'_{1,2} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) l_{i,j}$$

Mediante un proceso análogo, se pueden derivar formulas similares para $l'_{1,3}$ y $l'_{2,3}$, con lo que se concluye que

$$l'_{1,3} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C|_{\{1,3\} \times \{i,j\}} \right) l_{i,j}$$

$$l'_{2,3} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C|_{\{2,3\} \times \{i,j\}} \right) l_{i,j}$$

■

Proposición 4.16. *La aplicación de cámara conjunta $\Phi_{p,l,I,m}$ es una aplicación regular*

$$\begin{aligned} \Phi_{p,l,I,m} : \mathcal{X}_{p,l,I} \times C_m &\rightarrow \mathcal{Y}_{p,l,I,m} \\ (p_1; \dots; p_p; l_1; \dots; l_l; C_1, \dots, C_m) &\mapsto (p_1^1; \dots; p_p^1; \dots; p_1^m; \dots; p_p^m; l_1^1; \dots; l_l^1; \dots; l_1^m; \dots; l_l^m) \end{aligned}$$

dónde

$$p_q^k = C_k(p_q) = C_k \cdot p_q = \left(\sum_{i=1}^4 c_{1,i} p_{q,i-1} : \sum_{i=1}^4 c_{2,i} p_{q,i-1} : \sum_{i=1}^4 c_{3,i} p_{q,i-1} \right)$$

$$l_q^k = C_k(l_q) = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C_k|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) l_{q,(i,j)} : \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C_k|_{\{1,3\} \times \{i,j\}} \right) l_{q,(i,j)} \right)$$

$$: \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C_k|_{\{2,3\} \times \{i,j\}} \right) l_{q,(i,j)} \Bigg)$$

con

$$l_q^k = (l_{q,0}^k : l_{q,1}^k : l_{q,2}^k) = (l_{q,(1,2)}^k : l_{q,(1,3)}^k : l_{q,(2,3)}^k)$$

Demostración.

Trivial: En primer lugar, tenemos que transformar el punto p_q por la cámara C_k es directamente realizar el producto matricial $C_k \cdot p_q$ y eso nos da sus coordenadas. Por otro lado, tenemos que el resultado de transformar la recta l_q por la cámara C_k viene dado por el Lema 4.15. Finalmente, como podemos escribir cada coordenada de la imagen de la aplicación como un polinomio usando como variables las coordenadas del espacio inicial, se concluye que es una aplicación regular. ■

Ejemplo 4.17. Consideremos la aplicación de cámara conjunta $\Phi_{1,2,\{(1,1),(1,2)\},2}$, es decir, la asociada al problema punto recta $(1, 2, \{(1, 1), (1, 2)\}, 2)$. En primer lugar tendríamos que la aplicación, de acuerdo a la Proposición 4.16, tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2,\{(1,1),(1,2)\},2} : \mathcal{X}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\}} \times C_2 &\rightarrow \mathcal{Y}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\},2} \\ (p_1; l_1; l_2, C_1, C_2) &\mapsto (p_1^1; p_2^1; l_1^1; l_2^1; l_1^2; l_2^2) \end{aligned}$$

Tomemos ahora un punto de $\mathcal{X}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\}} \times C_2$ y veamos cómo se transforma por la aplicación. Consideraremos el punto

$$(1 : 1 : 0 : 0; 0 : 1 : 0 : 1 : 0 : 0; -2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0, C_1, C_2)$$

con

$$C_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad C_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

es un punto de $\mathcal{X}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\}} \times C_2$ porque en el Ejemplo 4.7 hemos visto que lo primero es un punto de $\mathcal{X}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\}}$ y en el Ejemplo 4.13 hemos visto que lo último es un punto de C_2 . Ahora transformemos el puntos y las rectas por las cámaras de acuerdo a la Proposición 4.16.

En primer lugar tenemos los puntos:

$$p_1^1 \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1^2 \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que $p_1^1 = (1 : 1 : 0)$ y $p_1^2 = (1 : -1 : 0)$.

Falta ahora transformar las rectas por las cámaras para obtener $l_1^1 = C_1(l_1)$, $l_2^1 = C_1(l_2)$, $l_1^2 = C_2(l_1)$ y $l_2^2 = C_2(l_2)$. Aplicando el Lema 4.15 a l_1^1 obtenemos

$$l_1^1 = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C_1|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) l_{1,(i,j)} : \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C_1|_{\{1,3\} \times \{i,j\}} \right) l_{1,(i,j)} \right. \\ \left. : \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C_1|_{\{2,3\} \times \{i,j\}} \right) l_{1,(i,j)} \right)$$

A continuación, se desarrolla el sumatorio para cada coordenada, se hará el primero de ejemplo, los siguientes serán análogos.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \left(C_1|_{\{1,2\} \times \{i,j\}} \right) l_{1,(i,j)} &= \\ &= \det \left(C_1|_{\{1,2\} \times \{1,2\}} \right) l_{1,(1,2)} + \det \left(C_1|_{\{1,2\} \times \{1,3\}} \right) l_{1,(1,3)} + \det \left(C_1|_{\{1,2\} \times \{1,4\}} \right) l_{1,(1,4)} \\ &\quad + \det \left(C_1|_{\{1,2\} \times \{2,3\}} \right) l_{1,(2,3)} + \det \left(C_1|_{\{1,2\} \times \{2,4\}} \right) l_{1,(2,4)} + \det \left(C_1|_{\{1,2\} \times \{3,4\}} \right) l_{1,(3,4)} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} 1 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} 1 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} 0 = 0 \end{aligned}$$

Desarrollando el resto de sumatorios tendríamos

$$l_1^1 = (0 : 1 : 1)$$

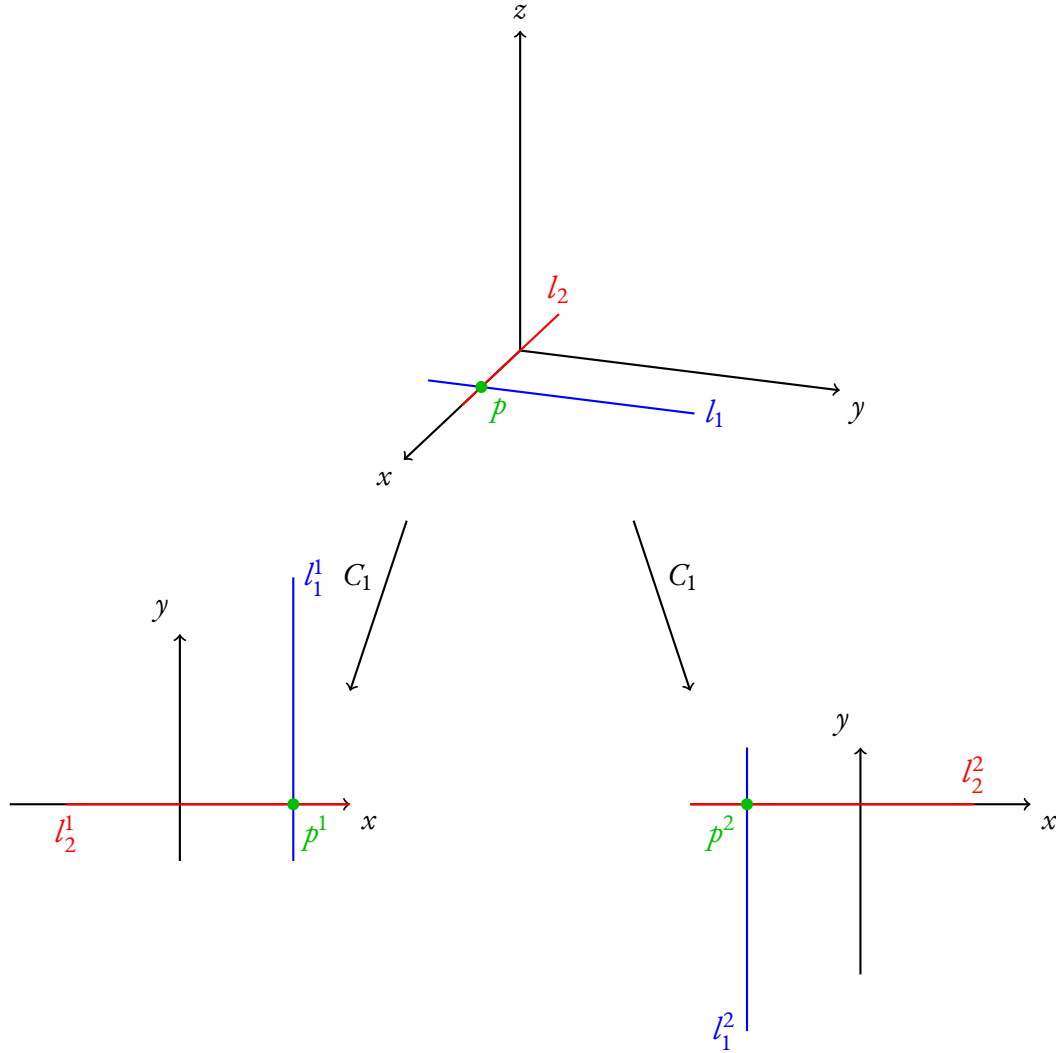
Ahora aplicando la fórmula para el resto de rectas se obtendría

$$l_2^1 = (1 : 0 : 0), \quad l_1^2 = (0 : -1 : 1), \quad l_2^2 = (1 : 0 : 0)$$

Por tanto tenemos que la imagen por $\Phi_{1,2,\{(1,1),(1,2)\},2}$ del punto que hemos considerado es

$$(1 : 1 : 0; 1 : -1 : 0; 0 : 1 : 1; 1 : 0 : 0; 0 : -1 : 1; 1 : 0 : 0)$$

que hemos visto en el Ejemplo 4.10, sabemos que está en $\mathcal{T}_{1,2,\{(1,1),(1,2)\},2}$. Juntando las gráficas de los ejemplos 4.7 y 4.10 visualizamos cómo transforma la aplicación de imagen conjunta este punto y estas rectas por las dos cámaras consideradas:



Definición 4.18. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$. Si su aplicación de cámara conjunta asociada $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$ cumple

1. $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$ es dominante
2. Para todo $(\mathbf{p}, \mathbf{l}) \in \mathcal{T}_{p,l,\mathcal{I},m}$ genérico, el conjunto $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}^{-1}((p, l))$ es finito.

entonces el problema se dice que es *minimal*. Se denota el *grado* del problema a $\#\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}^{-1}((p, l))$.

Observación. Para un punto genérico de $y \in \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ siempre existirá preimagen por $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$.

De cara a clasificar los problemas minimales, la definición no es de mucha ayuda. Sin embargo, si queremos que la preimagen sea finita, queremos que sea de dimensión 0. Motivados por el Corolario 3.36 tenemos que si $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$ es dominante, entonces para todo punto $y \in \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ genérico, se tiene que cualquier componente de $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}^{-1}(y)$ tiene dimensión $\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) - \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$. Como queremos que la preimagen sea un conjunto finito de puntos, queremos que esta resta sea 0, lo que nos lleva a la siguiente definir un tipo nuevo de problema.

Observación. A partir de aquí se hará uso del Teorema de la dimensión de las fibras, que no es cierto en general para cualquier cuerpo, por lo que fijaremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ como cuerpo ambiente, de manera que los espacios afines, vectoriales y proyectivos serán complejos también.

Definición 4.19. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$, se dice que el problema es *balanceado* si

$$\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) = \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$$

Proposición 4.20. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ y su aplicación de cámara conjunta asociada $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$.

1. Si el problema es minimal, entonces es balanceado.
2. Si el problema es balanceado y la aplicación de cámara conjunta es dominante, entonces es minimal.

$$\text{Minimal} \implies \text{Balanceado}$$

$$\text{Minimal} \iff \text{Balanceado} + \Phi_{p,l,\mathcal{I},m} \text{ dominante}$$

Demostración.

1. Si un problema es minimal, por definición $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$ es dominante y por el Corolario 3.36, toda componente de la preimagen de un punto genérico de $\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ tiene dimensión $\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) - \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$. Sin embargo, por ser minimal para todo punto genérico en $\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ la preimagen es un conjunto finito de puntos, es decir, tiene dimensión 0, por tanto se tiene que $\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) - \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}) = 0$, lo que implica $\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) = \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$, y por tanto que el problema es balanceado.

2. Si el problema es balanceado, se tiene $\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) = \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$. Por ser $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$ y de nuevo por el Corolario 3.36 se tiene que cualquier preimagen de un punto genérico de $\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ tiene dimensión $\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) - \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$. Por la igualdad de dimensiones implicada a partir de que el problema sea balanceado, se tiene que la preimagen de un punto genérico tendrá dimensión

$$\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) - \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}) = \dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) - \dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) = 0,$$

por lo que se tiene que la preimagen será un conjunto finito de puntos. Esto último, junto con que $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$ es dominante implica que el problema sea minimal.

■

Dada esta equivalencia entre problemas balanceados y minimales, la manera de proceder para clasificar los problemas minimales será clasificar los balanceados, y luego computacionalmente ver si su aplicación de imagen conjunta es dominante.

4.3. Problemas punto-recta balanceados

La ventaja que proponen los problemas balanceados frente a los minimales, es que tenemos una ecuación para comprobar si cierto problema es o no balanceado:

$$\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) = \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$$

A partir de esta podremos deducir una equivalente que dependa explícitamente de los parámetros del problema. Para ello primero debemos averiguar fórmulas para las dimensiones de ambas variedades. Esto se hará por separado para C_m , $\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}$ y $\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$.

Proposición 4.21. *La dimensión de la variedad C_m para $m \geq 2$ es $6m - 7$.*

$$\dim(C_m) = 6m - 7$$

Demostración.

Tenemos por definición $C_m := \{(C_1, \dots, C_m) \in (\mathbb{K}^{3 \times 4})^m : C_i = (R_i | t_i), R_i \in \text{SO}(3), t_i \in \mathbb{K}^3, R_1 = Id, t_1 = 0, (t_2)_1 = 1\}$. Como $\dim(\text{SO}(3)) = 3$ y $\dim(\mathbb{K}^3) = 3$, se tiene que

$$\dim\left(\{(C_1, \dots, C_m) \in (\mathbb{K}^{3 \times 4})^m : C_i = (R_i | t_i), R_i \in \text{SO}(3), t_i \in \mathbb{K}^3\}\right) = 6m$$

Si suponemos $m \geq 2$ y fijamos la primera matriz C_1 , habríamos fijado 6 parámetros, por lo que la dimensión bajaría a $6m - 6$. Finalmente si también fijamos el elemento $(1, 4)$ de la matriz C_2 , tenemos que la variedad ya sería igual a C_m , y la dimensión sería $6m - 6 - 1 = 6m - 7$. ■

De cara a determinar las dimensiones de $\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}$ y $\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$, primero hay que clasificar los tipos de puntos y rectas, ya que no todos tendrán el mismo número de parámetros libres.

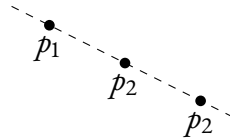
Definición 4.22. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ y una instancia genérica. Una aplicación $(\mathbb{P}^n)^p \rightarrow \{l, d\}^p$ que asigna una etiqueta f de *libre* (free) o d de *dependiente* a cada punto se denomina *etiquetación* si para todo punto dependiente el grafo de dependencias tiene hojas libres.

Definición 4.23. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$, una instancia genérica y una etiquetación $(\mathbb{P}^n)^p \rightarrow \{l, d\}^p$. Sea $p \in \mathbb{P}^n$ un punto etiquetado como dependiente, se define su *grafo de dependencias* como un grafo árbol con raíz p donde cada nodo se denota con un punto de la instancia y la letra d o f en función de si es dependiente o libre. Cada nodo dependiente tiene dos hijos, que son puntos colineares con el punto del nodo (en caso de haber varios se escogen preferentemente puntos libres).

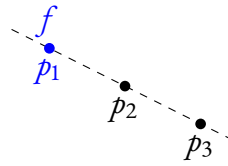
Definición 4.24. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ y una instancia genérica. Una etiquetación $(\mathbb{P}^n)^p \rightarrow \{l, d\}^p$ se denomina *válida* si para todo punto dependiente el grafo de dependencias tiene hojas libres.

Observación. Una etiquetación válida de puntos se puede realizar de la siguiente manera. En primer lugar se selecciona un punto aleatorio y se etiqueta como libre. A continuación se selecciona otro punto, si está en la recta definida por dos etiquetados se etiqueta como dependiente, de lo contrario se etiqueta como libre. Se itera hasta que no quedan puntos por etiquetar.

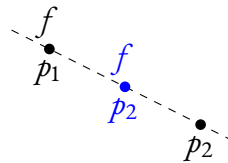
Ejemplo 4.25. Supongamos que tenemos la siguiente configuración



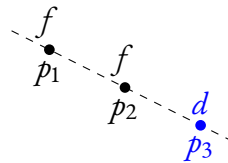
Realicemos una etiquetación. En primer lugar tomamos un punto al azar, como no está alineado con ningún otro considerado en la etiquetación, le denotamos etiquetado libre. Supongamos que tenemos la siguiente configuración



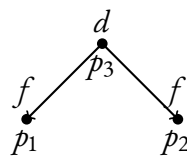
A continuación seleccionamos otro punto. Como no está en línea con otros dos etiquetados, le etiquetamos también como libre.



Seleccionamos por último el punto que queda. Como está alineado con otros dos etiquetados, le etiquetamos como dependiente

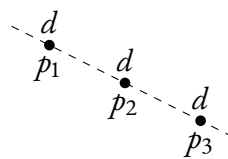


Veamos el grafo árbol de dependencias. Seleccionamos el único punto dependiente y sacamos de él dos nodos uno para cada uno de los puntos de los que depende:

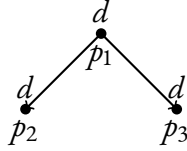


Cómo todas las hojas son libres, es una etiquetación válida.

Ejemplo 4.26. Si consideramos la siguiente aplicación $(\mathbb{P}^2) \rightarrow \{l, d\}^p$



Consideramos el grafo de dependencias de p_1 :



Cómo existen hojas del grafo que son dependientes (las dos de hecho), esta aplicación no es una etiquetación válida.

Observación. Para cualquier problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ y cualquier instancia siempre existe una etiquetación válida, la llamada etiquetación trivial que consiste en la aplicación

$$(\mathbb{P}^n)^p \rightarrow (f, f, \dots, f)$$

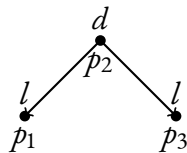
que etiqueta todo punto como libre. Es una etiquetación válida porque para todo punto dependiente (no hay), su grafo de dependencias tiene hojas libres trivialmente.

Observación. El número de puntos etiquetados como libres o como dependientes no es el mismo para todas las etiquetaciones.

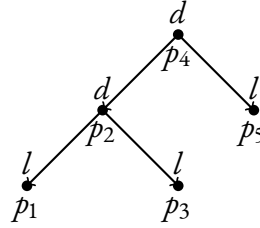
Ejemplo 4.27. Consideramos el siguiente conjunto de puntos con dos posibles etiquetaciones:



Consideramos ahora el grafo de dependencias de p_2 , que es el mismo para ambas etiquetaciones:



Y consideremos el grafo de dependencias de p_4 para la etiquetación de la izquierda:

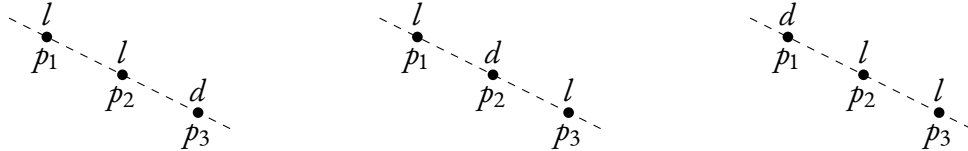


Como todos los grafos de dependencias de las etiquetaciones tienen hojas libres, son etiquetaciones válidas. Observamos que para una el número de puntos libres es 3 y para otra es 4, es distinto, a pesar de ambas ser etiquetaciones válidas.

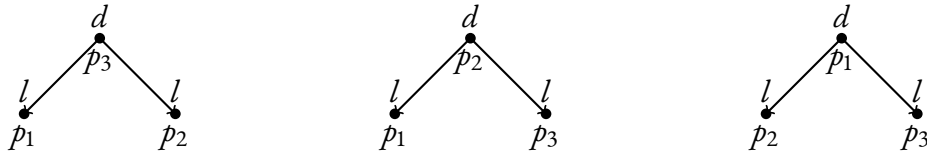
Definición 4.28. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ y una instancia genérica, consideramos de entre todas las posibles etiquetaciones válidas de puntos la (o las, no es única) que tiene un menor número de puntos etiquetados como libres. Se denota p^f al número de puntos libres y p^d al número de puntos dependientes de dicha configuración. Una etiquetación válida se dice minimal si tiene p^f puntos libres y p^d puntos dependientes.

Observación. Como todo punto se etiqueta como libre o dependiente se tiene que $p = p^f + p^d$.

Ejemplo 4.29. Continuando con la configuración de puntos del problema anterior, tenemos las siguientes etiquetaciones



Si construimos los grafos de dependencias para cada punto dependiente tenemos



Como todas las hojas del grafo son libres son etiquetaciones válidas. Las tres etiquetaciones cuentan con dos puntos libres y uno dependiente. Por tanto se dice que esta configuración tiene $p^f = 2$ puntos libres y $p^d = 1$.

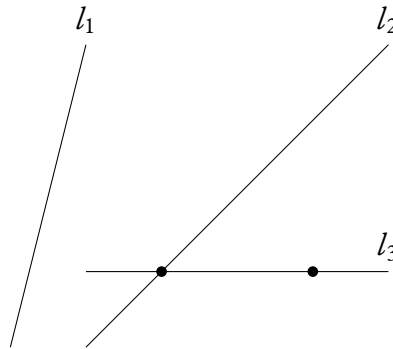
Definición 4.30. Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$.

1. Una recta se dice *libre* si no contiene a ningún punto. Se denota el número de rectas libres como l^f
2. Una recta se dice *incidente* si contiene exactamente 1 punto. Se denota el número de rectas incidentes como l^a .
3. Una recta se dice *generada* si contiene un número de puntos mayor que 1.

Observación. La clasificación de problemas balanceados va a depender únicamente del número de parámetros del problema, como las rectas generadas no añaden parámetros (dados dos puntos que contenga, puede ser determinada sin necesidad de parámetros extras) vamos a excluirlas de nuestro análisis, teniendo en cuenta que en cualquier problema balanceado podemos añadir las que queramos sin modificar su naturaleza.

Observación. Se tiene por tanto que toda recta de los problemas será libre o incidente, por lo que $l = l^f + l^a$.

Ejemplo 4.31. Consideremos la siguiente configuración de 3 rectas y 2 puntos



Tenemos que:

1. l_1 es una recta libre, por no contener a ningún punto.
2. l_2 es una recta incidente, por contener solamente un punto.
3. l_3 es una recta generada, por contener mas de un punto.

Una vez clasificados los tipos de puntos y rectas, podemos derivar expresiones para las dimensiones de las variedades $\mathcal{X}_{p,l,T}$ y $\mathcal{Y}_{p,l,T,m}$ en función del número de puntos y rectas de cada tipo.

Proposición 4.32. *Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ con p^f puntos libres, p^d puntos dependientes, l^f rectas libres y l^a rectas incidentes. La dimensión de la variedad $\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}$ es*

$$\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}) = 3p^f + p^d + 4l^f + 2l^a$$

Demostración.

Consideramos un arreglo punto recta genérico en $\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}$ con p^f puntos libres, p^d puntos dependientes, l^f rectas libres y l^a rectas incidentes. Cada punto libre de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ tiene 3 parámetros libres por el Corolario C.18, por lo que los puntos libres me aportan $3p^f$ parámetros. Cada punto dependiente tiene 1 parámetro libre (si está en la recta generada por P_1 y P_2 lo puedo escribir como $\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ y ese λ sería el parámetro), por lo que los puntos dependientes me aportan p^d parámetros. Cada recta libre es un punto de $\mathbb{G}(2, 4)$, que tiene dimensión $2(4 - 2) = 4$ por el Teorema 2.31, por lo que las rectas libres me aportan $4l^f$ parámetros. Por último, cada recta incidente tiene 2 parámetros libres, ya que fijado un punto basta determinar una dirección en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, lo que es equivalente a un punto del hiperplano del infinito, que es isomorfo a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Por tanto las rectas incidentes nos aportan $2l^a$ parámetros. Sumándolo todo, se concluye el resultado. ■

Proposición 4.33. *Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ con p^f puntos libres, p^d puntos dependientes, l^f rectas libres y l^a rectas incidentes. La dimensión de la variedad $\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ es*

$$\dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}) = m(2p^f + p^d + 2l^f + l^a)$$

Demostración.

De manera similar que para la variedad de arreglos punto-recta, derivamos el número de parámetros. Por ser los puntos, rectas y cámaras genéricos, tenemos que si en el espacio 3D tenemos p^f puntos libres, al pasarlos por cada cámara obtendremos p^f puntos libres y de manera similar con los puntos dependientes, las rectas libres y las rectas incidentes. Dicho esto, en cada vista cada punto libre de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ se puede determinar con 2 parámetros por el Corolario C.18, por lo que los puntos libres en cada vista me aportan $2p^f$ parámetros. De manera similar que en la proposición anterior, dado un punto dependiente (en la recta generada por otros dos), se puede determinar su posición con tan solo un parámetro, por lo que los puntos dependientes de cada vista nos aportan p^d parámetros. Las rectas libres son puntos de $\mathbb{G}(2, 3)$, que tiene dimensión $2(3 - 2) = 2$ por el Teorema 2.31, por lo que las rectas libres de cada vista nos aportan $2l^f$ parámetros. Por último, una recta dependiente se puede determinar con un solo parámetro, por que fijado un punto hay que determinar un punto del hiperplano del infinito, que es isomorfo a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Por tanto las rectas incidentes de cada vista nos aportan l^a parámetros. Sumándolo todo y teniendo en cuenta que hay m vistas, se concluye el resultado. ■

Una vez derivadas las fórmulas para las dimensiones de cada variedad, podemos lanzarnos a clasificar todos los problemas punto-recta balanceados existentes en función del número de puntos libres y dependientes y rectas libres e incidentes. Para ello, utilizando la expresión de la definición de problema balanceado, vamos a derivar una serie de lemas y corolarios que nos permitirán tanto acotar el número de cámaras y puntos y rectas de cada tipo, como imponer restricciones en relación a estos parámetros para poder atacar este problema.

En consecuencia de las fórmulas de las dimensiones, podemos hallar una cota inferior para el número de cámaras.

Corolario 4.34. *No hay problemas punto-recta balanceados para una sola cámara.*

Demostración.

Sabemos que un problema punto-recta se dice balanceado si $\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) = \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$. Sin embargo, se tiene por las proposiciones 4.32 y 4.33:

$$\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) = \dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}) = 3p^f + p^d + 4l^f + 2l^a > 2p^f + p^d + 2l^f + l^a = \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$$

la desigualdad anterior es estricta porque en los problemas debe haber almenos un punto o recta libre. Se concluye así que la igualdad de la definición de problema punto-recta balanceado no se puede cumplir nunca en el caso de una cámara. ■

A continuación, a partir de la condición de problema balanceado deduciremos un par de expresiones que tendrán que satisfacer los parámetros del problema para poder ser balanceado.

Lema 4.35. *Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ balanceado con p^f puntos libres, p^d puntos dependientes, l^f rectas libres y l^a rectas incidentes. Se tiene la siguiente igualdad.*

$$6m - 7 = (2m - 3)p^f + (m - 1)p^d + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^a$$

Demostración.

Por ser un problema balanceado, se tiene $\dim(\mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}} \times C_m) = \dim(\mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m})$. Usando las proposiciones 4.21, 4.32 y 4.33 para las dimensiones de las variedades anteriores se tiene

$$3p^f + p^d + 4l^f + 2l^a + 6m - 7 = m(2p^f + p^d + 2l^f + l^a)$$

Despejando $6m - 7$ al lado izquierdo y reagrupando términos con p^f , p^d , l^f y l^a , se concluye

$$6m - 7 = (2m - 3)p^f + (m - 1)p^d + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^a$$

■

Lema 4.36. *Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ balanceado con p^f puntos libres, p^d puntos dependientes, l^f rectas libres y l^a rectas incidentes. Se tiene la siguiente igualdad.*

$$5 \equiv p^f + p^d \pmod{m-2}$$

Demostración.

Por ser un problema balanceado, el Lema 4.35 nos da la igualdad

$$6m - 7 = (2m - 3)p^f + (m - 1)p^d + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^a$$

A continuación sumamos y restamos a la izquierda 5 y a la derecha $p^f + p^d$ obtenemos

$$6m - 7 - 5 + 5 = (2m - 3)p^f - p^f + p^f + (m - 1)p^d - p^d + p^d + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^a$$

Reordenando y agrupando obtenemos

$$6(m - 2) + 5 = 2(m - 2)p^f + (m - 2)p^d + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^a + p^f + p^d$$

Finalmente, aplicamos módulo $(m - 2)$ y concluimos

$$5 \equiv p^f + p^d \pmod{m-2}$$

■

A continuación, hallaremos una cota superior para el número de puntos del problema. Está será de utilidad ya que cuando el número de puntos sea el de la cota, tendremos el problema completamente clasificado, por lo que solo habrá que centrarse problemas con un número de puntos menor.

Lema 4.37. *Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ balanceado con $m > 1$ cámaras. Si hay al menos 5 puntos, entonces hay exactamente 2 cámaras.*

$$p^f + p^d \geq 5 \implies m = 2$$

Demostración.

Por ser un problema balanceado, el Lema 4.35 nos da la igualdad

$$6m - 7 = (2m - 3)p^f + (m - 1)p^d + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^a$$

Ahora, como $p^f + p^d \geq 5$, tenemos $p^d \geq 5 - p^f$, por lo que

$$\begin{aligned} 6m - 7 &= (2m - 3)p^f + (m - 1)p^d + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^a \\ &\geq (2m - 3)p^f + (m - 1)(5 - p^f) + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^a \\ &\geq (2m - 3)p^f + (m - 1)(5 - p^f) \\ &= 2mp^f - 3p^f + 5m - p^f m - 5 + p^f \\ &= (p^f + 5)m - (2p^f + 5) \end{aligned}$$

Por tanto tenemos $6m - 7 \geq (p^f + 5)m - (2p^f + 5)$. Separando a la izquierda los términos que dependen de m y a la derecha los que no y reagrupando, obtenemos

$$2p^f + 5 - 7 \geq (p^f + 5 - 6)m$$

$$2(p^f - 1) \geq (p^f - 1)m$$

Como de esos 5 punto, al menos 2 deben ser libres (recordemos un punto es dependiente si está en la recta formada por otros dos, por lo que para definir puntos dependientes hace falta tener antes 2 puntos, que a la fuerza deben ser libres), $p^f \geq 2$, es decir no cambia el sentido de la desigualdad y podremos dividir entre $p^f - 1$ a ambos lados de esta, por lo que obtenemos

$$2 \geq m$$

Como habíamos supuesto que $m > 1$, se concluye que $m = 2$. ■

El recíproco nos determina directamente el número de puntos en si el número de cámaras sea 2, lo que será de utilidad para clasificar los problemas balanceados con 2 cámaras.

Corolario 4.38. *Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$ balanceado con 2 cámaras, entonces el problema tiene exactamente 5 puntos.*

$$m = 2 \implies p^f + p^d = 5$$

Demostración.

Usando la expresión del Lema 4.35, tenemos $6m - 7 = (2m - 3)p^f + (m - 1)p^d + 2(m - 2)l^f + (m - 2)l^d$. Sustituyendo $m = 2$, se concluye $p^f + p^d = 5$. ■

Corolario 4.39. *Dado un problema punto-recta $(p, l, \mathcal{I}, m)$. Este tiene 2 cámaras si y solo si tiene 5 puntos*

$$m = 2 \Leftrightarrow p^f + p^d = 5$$

A continuación, hallaremos una cota superior para el número de cámaras.

Teorema 4.40. *No hay problemas punto-recta balanceados con siete cámaras o más.*

Demostración.

Supongamos que hay un problema punto-recta balanceado con $m \geq 7$ cámaras. Por el Lema 4.36 tenemos

$$5 \equiv p^f + p^d \pmod{m - 2}$$

Esto implica que si $m \geq 8$, $p^f + p^d = 5 + (m - 2)k$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ya que si fuera negativo tendríamos $p^f + p^d = 5 + (m - 2)k \leq 5 - m + 2 = 7 - m \leq 7 - 8 = -1$ y no se puede tener un número negativo de puntos. Como $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que $p^f + p^d \geq 5$ y por el Lema 4.37 se tiene que $m = 2$, contradicción. Habíamos supuesto que $m \geq 7$.

Por tanto, tenemos que nuestro problema punto-recta balanceado tiene que tener exactamente 7 cámaras. Por el Lema 4.36 tenemos

$$5 \equiv p^f + p^d \pmod{5}$$

lo que implica que $p^f + p^d = 5 + 5k$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$. Si $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que $p^f + p^d \geq 5$, por lo que entraríamos de nuevo en contradicción con el Lema 4.37, ya que no hay 2 cámaras sino 7. Esto nos deja con la única opción de que $k = -1$, por lo que $p^f + p^d = 0$, y por tanto $p^f = 0$ y $p^d = 0$. Como no hay puntos libres, por definición tampoco puede haber rectas incidentes (no tienen donde incidir), por lo que $l^a = 0$. Sustituyendo ahora $m = 7$, $p^f = 0$, $p^d = 0$ y $l^a = 0$ en la ecuación del Lema 4.35 se tiene $35 = 10l^f$, lo que implicaría que $l^f = 35/10 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, contradicción, no puede haber un número de rectas libres que no sea entero no negativo. Se concluye por tanto que el número de cámaras de un problema punto-recta balanceado debe ser menor a 7. ■

Finalmente, antes de lanzarnos a clasificar todos los problemas balanceados, hallaremos una cota inferior para el número de puntos libres de un problema.

Corolario 4.41. *No hay problemas punto-recta balanceados sin puntos libres.*

Demostración.

Como $p^f = 0$, por definición tenemos que no hay puntos dependientes $p^d = 0$ ni rectas incidentes $l^a = 0$. Sustituyendo en la expresión del Lema 4.35 se tiene $6m - 7 = 2(m - 2)l^f$ y despejando l^f se tiene $l^f = (6m - 7)/(2(m - 2))$. Como por el Corolario 4.34 y el Teorema 4.40 tenemos $6 \geq m \geq 2$, $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Sustituyendo $m = 2$ en la expresión anterior al despeje tenemos $5 = 0$. Esto nos deja con que $m \in \{3, 4, 5, 6\}$. Sustituyendo estos valores en la expresión de l^f se tiene

$$m = 3 \implies l^f = 11/2$$

$$m = 4 \implies l^f = 17/4$$

$$m = 5 \implies l^f = 23/6$$

$$m = 6 \implies l^f = 29/8$$

Como l^f no puede ser un número negativo ni un número no entero, se concluye que no hay problemas punto-recta balanceados sin puntos libres. ■

Una vez tenemos restricciones que tienen que satisfacer los parámetros del problema y acotados el número de cámaras y el número de puntos, nos lanzamos a clasificar todos los problemas balanceados utilizando estas herramientas.

Observación. Hay problemas minimales donde dar los parámetros (p^f, p^d, l^f, l^a) no es suficiente para deducir las incidencias, porque puede haber varias configuraciones. Por ejemplo en el problema $(2, 0, 0, 3)$ esas tres rectas incidentes pueden incidir todas en el mismo punto o repartirse entre los dos disponibles. Estas ambigüedades serán resueltas con un subíndice en el problema que indicará el número máximo de rectas incidentes a un punto, de manera que $(2, 0, 0, 3)_3$ será el problema en el que tres rectas son incidentes al mismo punto (y al otro entonces ninguna) y $(2, 0, 0, 3)_2$ será el problema donde 2 rectas son incidentes a un punto y la otra al restante. De igual manera en problemas como $(3, 2, 0, 0)$, donde los puntos dependientes pueden estar ambos en la recta generada por dos puntos libres cualesquiera o cada uno en la recta generada por dos puntos distintos dos a dos. De manera similar se indicará con un subíndice el número máximo de puntos en una recta generada, de manera que el problema $(3, 2, 0, 0)_2$ hará referencia a que los dos puntos dependientes se encuentran en una misma recta generada por dos libres y el problema $(3, 2, 0, 0)_1$ a uno en el que cada punto está en una recta generada distinta.

Primero clasificaremos todos los problemas con 3, 4, 5 y 6 cámaras en el siguiente teorema y por último clasificaremos los que tienen 2 cámaras a parte en la proposición que sigue.

Teorema 4.42. *Hay 34 problemas punto-recta balanceados con 3, 4, 5 o 6 cámaras.*

Demostración.

Consideramos los casos para $3 \leq m \leq 6$ y razonamos por casos. En todos estos casos, como $m \neq 2$, el número de puntos debe ser estrictamente menor que 5 ($p^f + p^d < 5$) ya que sino, por el Lema 4.37 tendríamos $m = 2$ y entraríamos en contradicción.

m=6. Por el Lema 4.36 tenemos $p^f + p^d \equiv 5 \pmod{4}$. Como $0 \leq p^f + p^d < 5$, entonces $p^f + p^d = 1$, por lo que $p^f = 1$ y $p^d = 0$ y sustituyendo en la expresión del Lema 4.35, tenemos

$$29 = 9 + 8l^f + 4l^a \implies 8l^f + 4l^a = 20 \implies 2l^f + l^a = 5$$

Teniendo en cuenta que $l^f, l^a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijando valores de l^f en la igualdad anterior y despejando para l^a tenemos:

$$\begin{aligned} l^f = 0 &\implies l^a = 5 \\ l^f = 1 &\implies l^a = 3 \\ l^f = 2 &\implies l^a = 1 \end{aligned}$$

No hay más soluciones ya que si $l^f \geq 3$, entonces $l^a = 5 - 2l^f \leq -1$ y eso no puede ser.

Tenemos por tanto que para 3 cámaras

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(1, 0, 0, 5), (1, 0, 1, 3), (1, 0, 2, 1)\}.$$

Como solo hay un punto para todos estos problemas, las rectas incidentes deben ser todas incidentes al mismo punto (no hay variaciones del problema en función de a que puntos las rectas incidentes sean incidentes, en otros casos las habrá), por tanto se concluye que hay 3 problemas balanceados cuando tenemos 6 cámaras.

m=5. Por el Lema 4.36 tenemos $p^f + p^d \equiv 5 \pmod{3}$, por tanto $p^f + p^d = 2$, lo que hace que $p^f = 2$ y $p^d = 5$. Sustituyendo en la expresión del Lema 4.35 tenemos

$$23 = 14 + 6l^f + 3l^a \implies 6l^f + 3l^a = 9 \implies 2l^f + l^a = 3$$

De nuevo fijando l^f y despejando l^a tenemos

$$\begin{aligned} l^f = 0 &\implies l^a = 3 \\ l^f = 1 &\implies l^a = 1 \end{aligned}$$

No hay mas casos ya que si $l^f \geq 2$, tendríamos $l^a = 3 - 2l^f \leq -1$, que no puede ser. Tenemos por tanto que para 5 cámaras

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(2, 0, 0, 3), (2, 0, 1, 1)\}.$$

En el caso $(2, 0, 1, 1)$ hay una recta incidente, que será incidente a uno de los dos puntos, pero esencialmente es el mismo problema. Sin embargo en el caso $(2, 0, 0, 3)$ hay 3 rectas incidentes, que si tenemos el punto A y el punto B , puede ser que 3 incidan en A y 0 en B ; 2 en A y 1 en B ; 1 en A y 2 en B ; o 0 en A y 3 en B . Esencialmente estos cuatro casos serían dos: uno en el que las 3 rectas incidentes inciden en el mismo punto, que denotaremos $(2, 0, 0, 3)_3$, y otro en el que 2 rectas inciden en el mismo punto y la otra en el otro, que denotaremos $(2, 0, 0, 3)_2$. Concluimos por tanto que hay 3 problemas balanceados para 5 cámaras.

m=4. Por el Lema 4.36 tenemos $p^f + p^d \equiv 5 \pmod{2}$, por lo que puede pasar $p^f + p^d = 1$ o $p^f + p^d = 3$. Veamos los casos por separado.

- Si $p^f + p^d = 1$, entonces $p^f = 1$ y $p^d = 0$. Sustituyendo en la igualdad del Lema 4.35 tenemos

$$17 = 5 + 4l^f + 2l^a \implies 12 = 4l^f + 2l^a \implies 6 = 2l^f + l^a$$

Esto nos deja con los siguientes casos:

$$l^f = 0 \implies l^a = 6$$

$$l^f = 1 \implies l^a = 4$$

$$l^f = 2 \implies l^a = 2$$

$$l^f = 3 \implies l^a = 0$$

No hay más soluciones ya que $l^f \geq 4 \implies l^a = 6 - 2l^f \leq -2$ y eso no puede ser. Tenemos por tanto que para 4 cámaras

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(1, 0, 0, 6), (1, 0, 1, 4), (1, 0, 2, 2), (1, 0, 3, 0)\}$$

Como solo hay un punto, las rectas incidentes deben ser todas incidentes a este, por lo que con 4 cámaras y 1 punto tenemos 4 problemas balanceados.

- Si $p^f + p^d = 3$, entonces $p^f = 3$ y $p^d = 0$ ó $p^f = 2$ y $p^d = 1$.
 - Si $p^f = 3$ y $p^d = 0$, sustituyendo en la expresión del Lema 4.35, tenemos

$$17 = 15 + 4l^f + 2l^a \implies 2 = 4l^f + 2l^a \implies 1 = 2l^f + l^a$$

Esto nos deja únicamente con el siguiente caso

$$l^f = 0 \implies l^a = 1$$

ya que si $l^f \geq 1$, entonces $l^a = 1 - 2l^f \leq -1$ y eso no puede ser. Tenemos por tanto que para 4 cámaras y 3 puntos de los cuales los 3 son libres

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(3, 0, 0, 1)\}$$

- Si $p^f = 2$ y $p^d = 1$, la ecuación del Lema 4.35 se reduce a

$$17 = 10 + 3 + 4l^f + 2l^a \implies 4 = 4l^f + 2l^a \implies 2 = 2l^f + l^a$$

Esto nos deja con las posibilidades

$$l^f = 0 \implies l^a = 2$$

$$l^f = 1 \implies l^a = 0$$

ya que si $l^f \geq 2$, entonces $l^a = 2 - 2l^f \leq -2$ y esto no puede ser. Tenemos por tanto que si hay 4 cámaras y 3 puntos de los cuales 2 son libres

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(2, 1, 0, 2), (2, 1, 1, 0)\}$$

Al tener en el caso $(2, 1, 0, 2)$ 2 rectas incidentes y 3 puntos pueden pasar dos situaciones distintas: que las dos rectas incidan en el mismo punto o que cada una incida en uno. Tenemos por tanto que el caso $(2, 1, 0, 2)$ se desdobra, siguiendo la notación anteriormente establecida, en los casos $(2, 1, 0, 2)_2$ y $(2, 1, 0, 2)_1$. Por tanto se tiene que con 4 cámaras y 3 puntos de los cuales 2 son libres, tenemos 3 problemas balanceados.

Tras este análisis concluimos que hay un total de 8 problemas punto-recta balanceados con 4 cámaras.

m=3. Por el Lema 4.36 tenemos $p^f + p^d \equiv 5 \pmod{1}$, que no nos da información. Por el Corolario 4.41, al menos tiene que haber un punto independiente. Tenemos por tanto que $p^f + p^d = 1$ o $p^f + p^d = 2$ o $p^f + p^d = 3$ o $p^f + p^d = 4$, porque de ser mayor entraríamos en contradicción con el Lema 4.37. Vayamos caso por caso:

- Si $p^f + p^d = 1$, entonces $p^f = 1$ y $p^d = 0$. Sustituyendo en la expresión del Lema 4.36 tenemos

$$11 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2l^f + l^a \implies 8 = 2l^f + l^a$$

Esto nos deja con las siguientes posibilidades

$$\begin{aligned} l^f = 0 &\implies l^a = 8 \\ l^f = 1 &\implies l^a = 6 \\ l^f = 2 &\implies l^a = 4 \\ l^f = 3 &\implies l^a = 2 \\ l^f = 4 &\implies l^a = 0 \end{aligned}$$

No hay más ya que si $l^f \geq 5$, entonces $l^a = 8 - 2l^f \leq -2$ y esto no puede pasar. Por tanto tenemos que si $m = 3$ y $p^f + p^d = 1$ entonces

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(1, 0, 0, 8), (1, 0, 1, 6), (1, 0, 2, 4), (1, 0, 3, 2), (1, 0, 4, 0)\}$$

Como solo hay un punto, todas las rectas que sean incidentes serán incidentes a él, por lo que tenemos 5 problemas.

- Si $p^f + p^d = 2$, entonces $p^f = 2$ y $p^d = 0$. Sustituyendo en la expresión del Lema 4.36 tenemos

$$11 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2l^f + l^a \implies 5 = 2l^f + l^a$$

Esto nos deja con los casos siguientes

$$l^f = 0 \implies l^a = 5$$

$$l^f = 1 \implies l^a = 3$$

$$l^f = 2 \implies l^a = 1$$

No hay mas casos ya que si $l^f \geq 3$, entonces $l^a = 5 - 2l^f \leq -1$ y esto no puede pasar. Por tanto las posibilidades son

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(2, 0, 0, 5), (2, 0, 1, 3), (2, 0, 2, 1)\}$$

Como tenemos dos puntos, las rectas pueden ser incidentes de distintas maneras, por lo que el caso $(2, 0, 0, 5)$ se desdobla en los casos $(2, 0, 0, 5)_3$, $(2, 0, 0, 5)_4$ y $(2, 0, 0, 5)_5$; y el caso $(2, 0, 1, 3)$ se desdobla en los casos $(2, 0, 1, 3)_2$ y $(2, 0, 1, 3)_3$. Tendríamos en total 6 problemas.

- Si $p^f + p^d = 3$, entonces puede pasar $p^f = 3$ y $p^d = 0$ o $p^f = 2$ y $p^d = 1$.
 - Si $p^f = 3$ y $p^d = 0$, sustituyendo en la expresión del Lema 4.36 tenemos

$$11 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 2l^f + l^a \implies 2 = 2l^f + l^a$$

Tenemos por tanto los casos

$$l^f = 0 \implies l^a = 2$$

$$l^f = 1 \implies l^a = 0$$

Por lo que las posibilidades serían

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(3, 0, 0, 2), (3, 0, 1, 0)\}$$

Además, al tener 3 puntos y 2 rectas incidentes, las rectas pueden incidir de distintas maneras en los puntos, por lo que el caso $(3, 0, 0, 2)$ se desdobla en $(3, 0, 0, 2)_2$ y $(3, 0, 0, 2)_1$. Tendríamos por tanto 3 casos distintos.

- Si $p^f = 2$ y $p^d = 1$, sustituyendo en la expresión del Lema 4.36 tenemos

$$11 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2l^f + l^a \implies 3 = 2l^f + l^a$$

Tenemos por tanto los casos

$$l^f = 0 \implies l^a = 3$$

$$l^f = 1 \implies l^a = 1$$

Por lo que las posibilidades serían

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(2, 1, 0, 3), (2, 1, 1, 1)\}$$

Además, al tener 3 puntos y 2 rectas incidentes, el caso $(2, 1, 0, 3)$ se desdobra en $(2, 1, 0, 3)_3$, $(2, 1, 0, 3)_2$ y $(2, 1, 0, 3)_1$. Tendríamos por tanto 4 casos distintos.

- Por último, en caso de que $p^f + p^d = 4$, puede pasar $p^f = 4$ y $p^d = 0$, $p^f = 3$ y $p^d = 1$ o $p^f = 2$ y $p^d = 2$. Veamos caso por caso.
 - Si $p^f = 4$ y $p^d = 0$, sustituyendo en la expresión del Lema 4.36 tenemos

$$11 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 2l^f + l^a \implies -1 = 2l^f + l^a$$

Por lo que no existe solución, no tenemos ningún caso.

- Si $p^f = 3$ y $p^d = 1$, sustituyendo en la expresión del Lema 4.36 tenemos

$$11 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2l^f + l^a \implies 0 = 2l^f + l^a \implies l^f = 0 \text{ \& } l^a = 0$$

Por lo que tenemos el caso

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(3, 1, 0, 0)\}$$

- Por último si $p^f = 2$ y $p^d = 2$, sustituyendo en la expresión del Lema 4.36 tenemos

$$11 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2l^f + l^a \implies 1 = 2l^f + l^a \implies l^f = 0 \text{ \& } l^a = 1$$

Por lo que tenemos el caso

$$(p^f, p^d, l^f, l^a) \in \{(2, 2, 0, 1)\}$$

Tras este análisis nos encontramos con un total de 20 problemas punto-recta balanceados para 3 cámaras.

En total, sumando los 3 casos cuando $m = 6$, 3 cuando $m = 5$, 8 cuando $m = 4$ y 20 cuando $m = 3$, obtenemos 34 problemas punto-recta balanceados. ■

Proposición 4.43. *Hay 5 problemas punto-recta balanceados con $m = 2$ cámaras módulo un número arbitrario de rectas.*

Demostración.

Cómo $m = 2$, por el Corolario 4.38 tenemos que $p^f + p^d = 5$. De hecho la expresión del Lema 4.35 se reduce a la anterior y de la del Lema 4.36 no sacamos nada por ser una expresión módulo 0. Tenemos por tanto que para 2 cámaras el número de rectas es irrelevante. Por tanto tenemos 5 posibilidades combinatorias módulo un número arbitrario de rectas:

$$(p^f, p^d, l^f, l^d) \in \{(5, 0, 0, 0), (4, 1, 0, 0), (3, 2, 0, 0), (2, 3, 0, 0)\}$$

Sin embargo debido a la manera en que dependen los puntos dependientes (y de manera similar que las rectas incidentes) tenemos algún caso que se desdobra. En el caso $(4, 1, 0, 0)$ el punto dependiente estará en la recta generada por cualesquiera de los puntos independientes y serán todos problemas equivalentes. En el caso $(2, 3, 0, 0)$ los 3 puntos dependientes deben estar en la recta generada por los dos independientes. Sin embargo en el caso $(3, 2, 0, 0)$ puede pasar que cada uno de los puntos dependientes esté en una recta generada por dos pares de puntos distintos o que estén en la misma recta. Al primero de estos casos lo llamaremos siguiendo con la notación el caso $(3, 2, 0, 0)_1$ y al segundo $(3, 2, 0, 0)_2$. ■

A modo de resumen se presenta la Tabla I de Duff et al., 2020, en la que se presenta con dibujos incluidos la clasificación anterior:

m views	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4
$p^f p^d l^f l^d$	1021 ₁	1013 ₃	1005 ₅	2011 ₁	2003 ₂	2003 ₃	1030 ₀	1022 ₂	1014 ₄	1006 ₆	3001 ₁	2110 ₀	2102 ₁
(p, l, I)													
Minimal Degree	Y	N	N	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	Y	Y	Y
	> 180k*			11296*	26240*	11008*	3040*	4512*			1728*	32*	544*
m views	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$p^f p^d l^f l^d$	2102 ₂	1040 ₀	1032 ₂	1024 ₄	1016 ₆	1008 ₈	2021 ₁	2013 ₂	2013 ₃	2005 ₃	2005 ₄	2005 ₅	3010 ₀
(p, l, I)													
Minimal Degree	Y	Y	Y	Y	N	N	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
	544*	360	552	480			264	432	328	480	240	64	216
m views	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
$p^f p^d l^f l^d$	3002 ₁	3002 ₂	2111 ₁	2103 ₁	2103 ₂	2103 ₃	3100 ₀	2201 ₁	5000 ₂	4100 ₃	3200 ₃	3200 ₄	2300 ₅
(p, l, I)													
Minimal Degree	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	Y	Y	N	N
	312	224	40	144	144	144	64		20	16	12		

Adicionalmente en la tabla se presenta la minimalidad o no del problema y en caso de ser minimal su grado, dónde se indica con * si está calculado con métodos numéricos. En las secciones posteriores, el objetivo será la construcción de dichos algoritmos

4.4. Eliminación del arreglo punto-recta tridimensional

Una vez clasificados totalmente los problemas balanceados, tenemos que ver para cuales de estos la aplicación de cámara conjunta es dominante, lo que implicará por la Proposición 4.20 que es minimal. Para computar si los problemas balanceados anteriores son minimales y para calcular su grado, es de interés eliminar las variables del mundo, es decir las referentes a rectas y puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ para realizar los cálculos con el número menor de parámetros posible. Una vez hecho, hay que reformular la condición de dominancia de la aplicación de cámara conjunta (que es la que implicaría que un problema balanceado sea minimal) en términos de la nueva variedad. Consideremos en primer lugar la clausura de Zariski del grafo de la aplicación de cámara conjunta.

$$Inc := \overline{\Gamma(\Phi_{p,l,I,m})} = \overline{\{(X, C, Y) \in \mathcal{X}_{p,l,I} \times C_m \times \mathcal{Y}_{p,l,I,m} : Y = \Phi_{p,l,I,m}(X, C)\}}$$

y la proyección $\pi_{\mathcal{Y}}$ en las últimas variables (las correspondientes a $\mathcal{Y}_{p,l,I,m}$)

Proposición 4.44. *La cardinalidad de una fibra genérica de un punto de $Y \in \mathcal{Y}_{p,l,I,m}$ es la misma bajo ambas aplicaciones.*

$$\forall Y \in \mathcal{Y}_{p,l,I,m} \text{ genérico } \quad \#\Phi_{p,l,I,m}^{-1}(Y) = \#\pi_{\mathcal{Y}}^{-1}(Y)$$

Además, la aplicación de cámara conjunta $\Phi_{p,l,I,m}$ es dominante si y solo si la proyección $\pi_{\mathcal{Y}} : Inc \rightarrow \mathcal{Y}_{p,l,I,m}$ en su último factor es dominante.

$$\Phi_{p,l,I,m} : \mathcal{X}_{p,l,I} \times C_m \rightarrow \mathcal{Y}_{p,l,I,m} \text{ dominante} \Leftrightarrow \pi_{\mathcal{Y}} : Inc \rightarrow \mathcal{Y}_{p,l,I,m} \text{ dominante}$$

Demostración.

La cardinalidad de la preimagen es la misma para ambos ya que

$$\pi_{\mathcal{Y}}^{-1}(Y) = \left(\Phi_{p,l,I,m}^{-1}(Y), Y \right)$$

Además, la dominancia de una implica la dominancia de la otra. Los conjuntos imagen de $\Phi_{p,l,I,m}$ y $\pi_{\mathcal{Y}}$ son las mismas y viven en los mismos espacios, por lo que si una es dominante la otra también lo es. ■

Nuestro objetivo es llegar a la misma equivalencia pero para una variedad más pequeña (para facilitar las computaciones) y por tanto otra aplicación. Consideramos por tanto la siguiente variedad sin el espacio de rectas y puntos del mundo:

$$Inc' := \overline{\{(C, Y) \in \mathcal{C}_m \times \mathcal{Y}_{p,l,I,m} : \exists X \in \mathcal{X}_{p,l,I} : Y = \Phi_{p,l,I,m}(X, C)\}}$$

y la proyección en el último factor desde Inc'

$$\pi'_{\mathcal{Y}} : Inc' \rightarrow \mathcal{Y}_{p,l,I,m}$$

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Inc & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y}_{p,l,I,m} \\ \pi_{\mathcal{C},\mathcal{Y}} \downarrow & \nearrow \pi'_{\mathcal{Y}} & \\ Inc' & & \end{array}$$

Como hemos demostrado la equivalencia de cardinalidad y dominancia entre $\Phi_{p,l,I,m}$ y $\pi_{\mathcal{Y}}$, bastará demostrar esta equivalencia entre $\pi_{\mathcal{C},\mathcal{Y}}$ y $\pi'_{\mathcal{Y}}$. Para ello utilizaremos un lema que nos dará la biyectividad de la aplicación $\pi_{\mathcal{C},\mathcal{Y}}$ para puntos genéricos.

Lema 4.45. *Si $m \geq 2$, todo punto genérico $(C, Y) \in Inc'$ tiene un solo punto en su preimagen bajo $\pi_{\mathcal{C},\mathcal{Y}}$.*

Demostración.

Sea $(C, Y) \in Inc'$. Esta imagen conjunta Y está compuesta por p puntos en cada vista

$$x = (x_{1,1}; \dots; x_{1,p}; \dots; x_{m,1}; \dots; x_{m,p})$$

y l rectas en cada vista

$$l = (l_{1,1}; \dots; l_{1,l}; \dots; l_{m,1}; \dots; l_{m,l}).$$

Para cada vista tenemos al menos un conjunto de p puntos para cada cámara y como $m \geq 2$ por cada uno de los puntos tengo al menos dos imágenes. Como las matrices de cámara tienen rango 3, por contener una submatriz de $SO(3)$, las preimágenes de las imágenes anteriores son al menos dos rectas proyectivas. Estas rectas de manera genérica intersecan en un punto. De manera similar en caso de haber alguna recta, tomando preimágenes por las cámaras de cada grupo de rectas que provengan de la misma, cada preimagen es un plano entero y como $m \geq 2$ la intersección de manera genérica es una recta. Por tanto para cualquier $(C, Y) \in Inc'$ genérico existe un único $(X, C, Y) \in Inc'$ tal que $(X, C, Y) \in \pi_{\mathcal{C},\mathcal{Y}}^{-1}(C, Y)$. ■

Corolario 4.46. *Sea $(p, l, \mathcal{I}, m)$ un problema punto-recta balanceado. Es minimal si y solo si la proyección $\pi'_{\mathcal{Q}}$ es dominante. El grado del problema minimal es el número de puntos de la preimagen $\pi'^{-1}_{\mathcal{Q}}$ de una imagen conjunta genérica $Y \in \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$.*

Demostración.

Por la Proposición 4.20 un problema balanceado es minimal si su aplicación de cámara conjunta $\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}$ es dominante. Por la Proposición 4.44, esto es equivalente a que $\pi_{\mathcal{Q}}$ sea dominante. Por el Lema 4.45, $\pi_{\mathcal{Q},C}$ es dominante y por el diagrama conmutativo que nos indica que $\pi_{\mathcal{Q}} = \pi'_{\mathcal{Q}} \circ \pi_{C,\mathcal{Q}}$, entonces $\pi'_{\mathcal{Q}}$ tiene que ser dominante.

Por el Lema 4.44, tenemos que el grado del problema punto-recta, $\#\Phi_{p,l,\mathcal{I},m}^{-1}(Y)$, coincide con $\#\pi_{\mathcal{Q}}^{-1}(Y)$. Por el Lema 4.45, tenemos que $\#\pi_{C,\mathcal{Q}}^{-1}(Y) = 1$, por lo que $\#(\pi_{\mathcal{Q}}^{-1}(Y)) = \#(\pi_{C,\mathcal{Q}} \circ \pi'^{-1}_{\mathcal{Q}})(Y) = \#\pi'^{-1}_{\mathcal{Q}}(Y)$. Se concluye por tanto que el grado del problema minimal es $\#\pi'^{-1}_{\mathcal{Q}}(Y)$ para Y genérico. ■

Nótese que es posible describir la variedad Inc' como una componente de la variedad definida por las ecuaciones que se establecerán a continuación.

4.5. Planteamiento en función de rectas y condiciones polinomiales

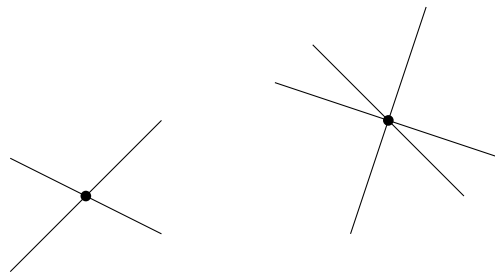
Para cualquier instancia de un problema punto-recta, un punto de $(C, Y) \in \mathcal{C}_m \times \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ tiene que satisfacer unas ciertas ecuaciones para estar en Inc' (además hace falta ver que existen dichas condiciones porque no todo punto $(C, Y) \in \mathcal{C}_m \times \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ está en Inc'). Es decir no cualquier imagen conjunta aleatoria que satisfaga las condiciones de incidencia va a venir de un arreglo punto recta si tomamos las cámaras de manera aleatoria. Para encontrar estas restricciones, se representará $Y \in \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ únicamente en términos de rectas, para lo cual hemos de representar todo punto como intersección de al menos dos rectas.

1. Si un punto está contenido en dos rectas distintas en la formulación del problema (está en su intersección), dichas rectas se llaman visibles.
2. Si un punto está contenido únicamente en una recta (punto dependiente), esta recta se llama visible y se define una nueva recta distinta a la primera de manera que el punto está en la intersección de ambas, y esta última recta se llama fantasma.

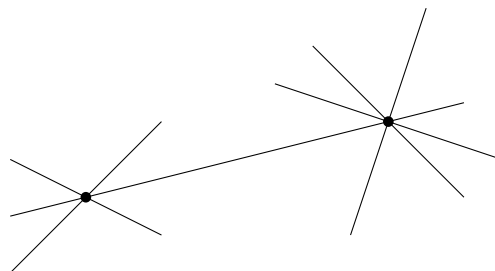
3. Si un punto no está contenido en ninguna recta (punto libre), se definen dos rectas distintas tales que el punto está en su intersección, ambas rectas se llaman fantasmas.

Recordemos que introducir rectas entre dos puntos no aumenta el conteo de parámetros, por lo que la comprobación de en cuantas rectas está un punto se realiza después de incluir en la formulación todas las rectas entre dos puntos posibles.

Ejemplo 4.47. Consideremos el problema $(2, 0, 0, 5)_3$, cuya formulación original (sin rectas que pasen por dos puntos) es la siguiente:



Para ver cuantas rectas visibles y cuantas fantasmas hay, primero construimos todas las rectas posibles entre puntos.

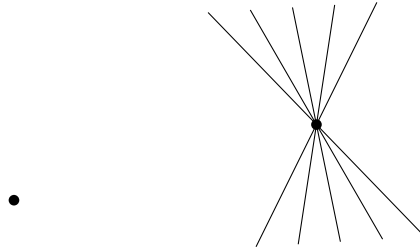


Ahora nos fijamos punto a punto, a ver si todo punto puede ser definido en función de las rectas que pasan por él (es decir que al menos dos rectas pasen por él), de lo contrario será necesario crear rectas fantasmas.

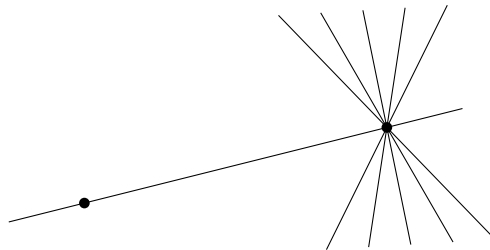
1. El punto de la izquierda está contenido en 3 rectas distintas, por lo que puede ser definido como intersección de estas, no necesita de rectas fantasmas para ser definido.
2. El punto de la derecha está contenido en 4 rectas, por lo que tampoco necesita de rectas fantasmas.

Concluimos por tanto que este problema puede ser definido exclusivamente mediante rectas visibles.

Ejemplo 4.48. Consideremos ahora el problema $(2, 0, 0, 5)_5$, cuya formulación original es la siguiente

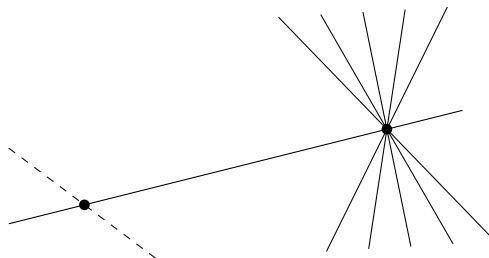


Continuamos como en el anterior ejemplo, dibujando todas las rectas posibles entre dos puntos:



Vamos de nuevo recorriendo punto por punto a ver si es necesario añadir rectas fantasmas.

1. El punto de la derecha está contenido en 6 rectas, por lo que este se puede definir perfectamente como intersección de ellas, no se requiere ninguna recta fantasma.
2. El punto de la izquierda está contenido únicamente en 1 recta, por lo que definir ese punto como contenido en esa recta no será suficiente para determinar su posición, por ello se requiere una recta fantasma:



Tenemos por tanto que para definir este problema únicamente en función de rectas, se requiere una recta fantasma extra.

Observación. Nótese, que esta representación alternativa en función de rectas siempre se puede hacer y no requiere de parámetros extra, ya que como se ha visto en la demostración de la Proposición 4.33, si un punto está contenido únicamente en una recta visible, será un punto dependiente y requerirá de una recta fantasma que pase por ese punto (y por tanto será una recta dependiente), tanto las rectas dependientes como los puntos dependientes se pueden definir con tan solo 1 parámetro. Por otro lado si un punto no está en ninguna recta visible, será un punto libre y requerirá dos rectas fantasmas que pasen por ese punto para definirse en función de rectas. Un punto libre se puede definir con 2 parámetros y cada una de las rectas dependientes que tienen que pasar por ese requiere de 1 parámetro, por lo que se ve que esta formulación no requiere de parámetros extras.

Una vez lo podemos formular todo en función de rectas, hay que derivar condiciones polinomiales para que un punto esté en Inc' . Es decir, no cualquier punto del arreglo de cámaras (ya son cámaras que tienen la forma que tienen que tener) junto con cualquier punto del arreglo de imagen conjunta (que satisface incidencias) va a venir de un arreglo punto recta tridimensional. Para derivar fórmulas, observamos en primer lugar que las rectas que son imágenes de una recta tridimensional por una cámara tienen que satisfacer cierta condición, que podremos reformular en términos de condiciones polinomiales. Lo siguiente se engloba en la siguiente proposición.

Proposición 4.49. Sean $l_1, l_2, \dots, l_m$ (con coordenadas homogéneas $l_1, l_2, \dots, l_m \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$) rectas imágenes de una recta l por m cámaras, con matrices de cámara asociadas $C_1, C_2, \dots, C_m$, entonces

$$\text{rg} \begin{pmatrix} C_1^T l_1 & C_2^T l_2 & \dots & C_m^T l_m \end{pmatrix} \leq 2$$

Demostración.

En primer lugar, cabe destacar que cada recta proyectiva en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ viene dada por una ecuación, cuyos coeficientes se pueden ver como un punto en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ya que no todos pueden ser nulos (si no tenemos todo el espacio, no un plano) y reescalarlos nos da la misma recta. Aunque $\dim(\mathbb{G}(2, 3)) = 2$, es decir, las coordenadas de Plücker de una recta viven también en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, no coinciden con los coeficientes de la ecuación que define. Tenemos que la imagen de la recta l por la cámara i es l_i , lo que nos indica también que para todo punto de l , su imagen por la cámara i tiene que estar en l_i . Esto nos da la idea para representar l como el conjunto que sigue

$$l = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 : C_i x \in l_i, \forall i = 1, \dots, m\}$$

Como l_i son los coeficientes de la ecuación de l_i , podemos escribir este conjunto como

$$l = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 : (C_i x)^T l_i = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$$

Aplicando la traspuesta a las matrices tenemos

$$l = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 : x^T C_i^T l_i = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$$

Y por último agrupando las ecuaciones para $i = 1, \dots, m$

$$l = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 : x^T \begin{pmatrix} C_1^T l_1 & C_2^T l_2 & \dots & C_m^T l_m \end{pmatrix} = 0\}$$

Como l es una recta proyectiva, buscamos que la dimension del espacio de soluciones sea 2, es decir que el núcleo de la matriz tiene que tener dimensión 2 al menos. Nótese que al menos la matriz tendrá dos columnas, ya que si tuviéramos solo una, esto significaría que tenemos una sola cámara. Si esto pasa, con esta formulación del problema, no habrá suficientes condiciones para que la primagen sea exactamente una recta, por lo que el rango de la matriz debe ser como mucho $4 - 2 = 2$,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} C_1^T l_1 & C_2^T l_2 & \dots & C_m^T l_m \end{pmatrix} \leq 2$$

■

Como consecuencia directa tenemos que si las rectas $l_1, \dots, l_m$ son imagenes de la misma recta por las cámaras $C_1, \dots, C_m$ respectivamente, se tiene que dar

$$\det \left(\left(C_1^T l_1 \quad C_2^T l_2 \quad \dots \quad C_m^T l_m \right) \Big|_{\{i_1, i_2, i_3\} \times \{j_1, j_2, j_3\}} \right) = 0$$

para todo $\{i_1, i_2, i_3\} \times \{j_1, j_2, j_3\} \subseteq \{1, \dots, 4\} \times \{1, \dots, m\}$. Esto nos da condiciones polinomiales para las rectas y cámaras de la variedad Inc' .

De manera análoga, si ciertos puntos son imágenes de un punto tridimensional por unas ciertas cámaras, estos puntos imagen junto con las cámaras tendrán que satisfacer cierta condición para que exista un punto tridimensional del que provenga. Esta condición, codificada en función de las rectas que contienen estos puntos imagen, viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 4.50. Sean $l_{v,1}, l_{v,2}, \dots, l_{v,k_i}$ rectas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ visibles y fantasma que intersecan todas en $x_{v,i} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, proyección del i -ésimo punto $x_i \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ bajo la cámara $v = 1, \dots, m$. Entonces

$$\text{rg} \begin{pmatrix} C_1^T l_{1,1} & \dots & C_m^T l_{m,k_i} \end{pmatrix} \leq 3$$

Demostración.

Al igual que en la demostración de la Proposición 4.49, consideramos las coordenadas de las rectas $l_{v,1}, l_{v,2}, \dots, l_{v,k_i} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ como los coeficientes de la ecuación que definen. Siguiendo una idea similar, describimos x_i como sigue

$$x_i = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 : C_v x \in l_{v,j}, \forall j = 1, \dots, k_i, \forall v = 1, \dots, m\}$$

De nuevo, teniendo en cuenta que la recta $l_{v,j}$ viene representada por los coeficientes de la ecuación que la definen

$$x_i = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 : (C_v x)^T l_{v,j} = 0, \forall j = 1, \dots, k_i, \forall v = 1, \dots, m\}$$

Aplicando la traspuesta a las matrices tenemos

$$x_i = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 : x^T C_v^T l_{v,j} = 0, \forall j = 1, \dots, k_i, \forall v = 1, \dots, m\}$$

Por último, agrupando todos los sistemas de ecuaciones lineales en uno

$$x_i = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 : x^T \begin{pmatrix} C_1^T l_{1,1} & \dots & C_m^T l_{m,k_i} \end{pmatrix} = 0\}$$

Como x_i es un punto proyectivo, buscamos que la dimensión del espacio de soluciones sea 1, es decir que el núcleo de la matriz tiene que tener dimensión 1 al menos (si tenemos una sola cámara, con esta formulación del problema, no habrá suficientes condiciones para que la preimagen sea exactamente un punto), por lo que el rango de la matriz debe ser como mucho $4 - 1 = 3$,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} C_1^T l_{1,1} & \dots & C_m^T l_{m,k_i} \end{pmatrix} \leq 3$$

■

Al igual que con la proposición anterior, como consecuencia directa tenemos que si las rectas $l_{v,1}, \dots, l_{v,k_i}$ visibles y fantasma intersecan en $x_{v,i}$, proyección del i -ésimo punto x_i bajo la cámara $v \in \{1, \dots, m\}$, se tiene que dar

$$\det \left(\left(C_1^T l_{1,1} \dots C_m^T l_{m,k_i} \right) \Big|_{\{i_1, \dots, i_4\}} \right) = 0$$

para todo $\{i_1, \dots, i_4\} \subseteq \{1, \dots, m \cdot k_i\}$

Corolario 4.51. Dada una instancia del problema $(p, l, \mathcal{I}, m)$, Inc' es una componente irreducible de la variedad definida por la unión de los dos conjuntos de polinomios:

$$\left\{ \det \left(\left(C_1^T l_1 \ C_2^T l_2 \ \dots \ C_m^T l_m \right) \Big|_{\{i_1, i_2, i_3\} \times \{j_1, j_2, j_3\}} \right) : \right.$$

$$\{i_1, i_2, i_3\} \times \{j_1, j_2, j_3\} \subseteq \{1, \dots, 4\} \times \{1, \dots, m\} \text{ y } q \in \{1, \dots, l\}$$

Sean l_* rectas visibles y l'_* rectas fantasmas tales que $x_q \in l_{q_1} \cap \dots \cap l_{q_*} \cap l'_{q_1} \cap \dots \cap l'_{q_*}$ y por tanto en sus respectivas vistas $x_q^k \in l_{q_1}^k \cap \dots \cap l_{q_*}^k \cap l'_{q_1}^k \cap \dots \cap l'_{q_*}^k$.

$$\left\{ \det \left(\begin{pmatrix} C_1^T l_{q_1}^1 & C_2^T l_{q_1}^2 & \dots & C_m^T l_{q_*}^m \end{pmatrix} \right) \Big|_{\{i_1, \dots, i_4\}} \right. \\ \left. : \{i_1, i_2, i_3\} \subseteq \{1, \dots, 4\} \text{ y } q \in \{1, \dots, l\} \right\}$$

Se llama además F a la función regular que dados C, Y evalúa estos polinomios.

Por último, para las computaciones nos hace falta una manera de parametrizar las matrices de cámara. Recordemos que las matrices de cámara tienen la forma $C = (R|t)$, con $t \in \mathbb{C}^3$, que es fácil de parametrizar, y $R \in \text{SO}(3)$ (que es lo que queremos averiguar cómo parametrizar). Para parametrizar matrices de $\text{SO}(3)$ utilizaremos la parametrización de Cayley, que establece una biyección entre matrices de $\text{SO}(3)$ y matrices antisimétricas que no tengan el autovalor -1 (caso que no consideramos por tratar con matrices de cámara genéricas ya que sólo ocurre en un cerrado de Zariski). Se utilizará como referencia el apéndice 5.4 de Eves, 1966.

Proposición 4.52. Sea S una matriz antisimétrica de coeficientes reales, entonces $Id - S$ es invertible y

$$A = (Id + S)(Id - S)^{-1}$$

es una matriz ortogonal de coeficientes reales.

Demostración.

Veamos en primer lugar que $Id - S$ es invertible. De no ser así, tendríamos que $\det(Id - S) = 0$. Esto implica que 1 es un autovalor de S , pero esto no puede ser, porque S es una matriz antisimétrica y estas solo tienen autovalores 0 e imaginarios puros.

Veamos ahora que A es ortogonal, para lo que se tiene que dar $A^T \cdot A = Id$. En primer lugar tenemos:

$$A^T = ((Id - S)^{-1})^T (Id + S)^T = \left((Id - S)^T \right)^{-1} (Id + S)^T$$

Desarrollando las traspuestas, tenemos:

$$(Id - S)^T = Id^T - S^T = Id + S$$

$$(Id + S)^T = Id^T + S^T = Id - S$$

Por lo que

$$A^T = (Id + S)^{-1}(Id - S)$$

Nótese que las matrices $(Id + S)$ y $(Id - S)$ conmutan ya que desarrollando el producto de estas dos matrices con distinto orden:

$$\begin{aligned} (Id + S)(Id - S) &= Id + S - S - S^2 = Id - S^2 \\ &\parallel \\ (Id - S)(Id + S) &= Id - S + S - S^2 = Id - S^2 \end{aligned}$$

Ahora multiplicando $A^T \cdot A$ tenemos:

$$A^T \cdot A = (Id + S)^{-1}(Id - S)(Id + S)(Id - S)^{-1}$$

Con lo cual el producto anterior es la identidad, por lo que concluimos que A es una matriz ortogonal. ■

Veamos ahora el recíproco.

Proposición 4.53. *Sea A una matriz ortogonal de coeficientes reales que no tiene -1 como autovalor. Entonces existe S matriz antisimétrica de coeficientes reales tal que*

$$A = (Id + S)(Id - S)^{-1}$$

Demostración.

Como A no tiene autovalor -1 , tenemos que $\det(A + Id) \neq 0$, por lo que $A + Id$ es invertible. Consideremos S como sigue:

$$S = (A + Id)^{-1}(A - Id)$$

Veamos que S es antisimétrica:

$$\begin{aligned} S^T &= (A - Id)^T ((A + Id)^{-1})^T \\ &= (A - Id)^T ((A + Id)^T)^{-1} \\ &= (A^T - Id)(A^T + Id)^{-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} (A^T + Id)^{-1}(A^T - Id) \\ &= (A^T + A^T A)^{-1}(A^T - A^T A) \\ &= (A^T(Id + A))^{-1} A^T (Id - A) \\ &= (Id + A)^{-1} (A^T)^{-1} A^T (Id - A) = (Id + A)^{-1}(Id - A) = -S \end{aligned}$$

La igualdad (*) se tiene porque $(A^T - Id)$ y $(A^T + Id)$ conmutan

$$\begin{aligned} (A^T - Id)(A^T + Id) &= (A^T)^2 + A^T - A^T - Id = (A^T)^2 - Id \\ (A^T + Id)(A^T - Id) &= (A^T)^2 - A^T + A^T - Id = (A^T)^2 - Id \end{aligned}$$

Una vez visto que conmutan, podemos ver (*) desarrollando la ecuación

$$\begin{aligned} (A^T - Id)(A^T + Id) &= (A^T + Id)(A^T - Id) \\ (A^T - Id) &= (A^T + Id)(A^T - Id)(A^T + Id)^{-1} \\ (A^T + Id)^{-1}(A^T - Id) &= (A^T - Id)(A^T + Id)^{-1} \end{aligned}$$

Una vez visto que S es antisimétrica, seguimos con la prueba. Hay que ver que $A = (Id + S)(Id - S)^{-1}$.

De la definición de S obtenemos:

$$\begin{aligned} S &= (A + Id)^{-1}(A - Id) \\ (A + Id)S &= (A - Id) \\ A(S - Id) &= -(Id + S) \\ A(Id - S) &= (Id + S) \end{aligned}$$

Como S es antisimétrica, no tiene el autovalor 1, por lo que $\det(S - Id) \neq 0$ y la matriz $S - Id$ es invertible. Por tanto a partir de la ecuación anterior se concluye

$$A = (Id + S)(Id - S)^{-1}$$

■

Con esto tenemos una manera de hallar de manera aleatoria matrices de $SO(3)$. Lo que tenemos que hacer es generar una matriz antisimétrica aleatoria, es decir una matriz de la forma

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ aleatorios. La probabilidad de que -1 sea un autovalor es 0, por lo que de acuerdo a las proposiciones anteriores, la matriz $R = (Id + S)(Id - S)^{-1}$ es ortogonal.

4.6. Algoritmos de minimalidad y grado

Una vez tenemos una variedad (Inc') para en función de esta decir si un problema es minimal o no, y en caso de serlo poder hallar su grado, preparamos los algoritmos que vamos a utilizar para realizar los cálculos.

En primer lugar, tenemos que comprobar la minimalidad de un problema. Por el Corolario 4.46, un problema va a ser minimal si para un problema balanceado la aplicación

$$\pi'_{\mathcal{Q}} : Inc' \rightarrow \mathcal{T}_{p,l,I,m}$$

es dominante. En términos de algoritmos, dado un problema balanceado tenemos que ver si un $Y \in \mathcal{T}_{p,l,I,m}$ genérico (perteneciente a un denso de Zariski) tiene preimagen, es decir si existen unas cámaras para las que exista un arreglo punto recta tridimensional, que al pasarse por esas cámaras nos de Y . Por el Corolario 4.51, tenemos que Inc' es una componente de $F^{-1}(0)$, donde F es la función definida en el Corolario 4.51. Por tanto una manera de atacar el problema es ver si para un punto genérico $Y_0 \in \mathcal{T}_{p,l,I,m}$ existe un $C_0 \in \mathcal{C}_m$ tal que $F(C_0, Y_0) = 0$. Para ello utilizaremos el Teorema de la función implícita.

Teorema 4.54. *Sea $F : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una función continuamente diferenciable y (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y sea $DF(x_0, y_0) = (DF_x(x_0, y_0), DF_y(x_0, y_0))$ su diferencial en el punto (x_0, y_0) . Si $\det(DF_y(x_0, y_0)) \neq 0$, entonces existen abiertos $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^m$ con $(x_0, y_0) \in \mathcal{W}$ y $y_0 \in \mathcal{U}$ tales que para cada $x \in \mathcal{U}$, existe una única $y \in \mathbb{C}^n : (x, y) \in \mathcal{W}$ y $F(x, y) = 0$, lo que define una función*

$$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$$

continuamente diferenciable que verifica $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Nuestro objetivo es usar el teorema para a partir de las condiciones polinomiales $F(C, Y)$, ver si dado un punto genérico (C_0, Y_0) , podemos verificar que ese C_0 son las únicas cámaras en un entorno que verifican $F(C_0, Y_0)$. Esto significaría en primer lugar que la variedad Inc' está formada por puntos (como queremos que sea, aunque esa condición ya la tendríamos por tratar problemas balanceados), y en segundo lugar que un Y_0 genérico tiene preimagen, es decir que la aplicación $\pi'_{\mathcal{Q}}$ es dominante y por tanto estamos ante un problema minimal.

El algoritmo que se utilizará para comprobar si un problema es minimal es el siguiente:

Input: $(p, l, \mathcal{I}, m)$, un problema punto recta balanceado

Output: Y si el problema es minimal, N sino

$$DF_C(C, Y) \leftarrow \frac{\partial F}{\partial C}(C, Y)$$

Tomar $X_0 \in \mathcal{X}_{p,l,\mathcal{I}}$ y $C_0 \in \mathcal{C}_m$ genéricos (aleatorios)

$$Y_0 \leftarrow \Phi_{p,l,\mathcal{I},m}(X_0, C_0)$$

if $\text{rg}(DF_C(C_0, Y_0)) = 6m - 7$ **then**

return Y

else

return N

end if

Queremos aplicar el teorema de la función implícita a la función F , que ya sabemos que es continuamente diferenciable por ser regular. Además, por construcción de C_0 e Y_0 sabemos que $F(C_0, Y_0) = 0$. Supongamos que para nuestro problema $(p, l, \mathcal{I}, m)$ la función F tiene N componentes, por lo que

$$F : \mathcal{C}_m \times \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m} \rightarrow \mathbb{C}^N.$$

El objetivo es “despejar” las variables que determinan el punto $Y \in \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ en función de las que determinan el punto $C \in \mathcal{C}_m$. Por tanto, localmente tenemos una función

$$F : \mathbb{C}^{6m-7} \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^N,$$

donde $d = m(3p^f + p^d + 2^f + l^a)$. Pueden darse varios casos.

1. Si $d = N$.
 - a) Si $\det(DF_C(C_0, Y_0)) \neq 0$ se puede aplicar el teorema y para todo C de un entorno de C_0 va a existir un único Y de un entorno de Y_0 que satisfagan $F(C, 0) = 0$, por lo que para un Y genérico siempre tendremos preimagen no vacía $\pi_{\mathcal{Y}}'^{-1}(Y)$, $\pi_{\mathcal{Y}}'$ es dominante y estaríamos ante un problema minimal.
 - b) Si $\det(DF_C(C_0, Y_0)) = 0$ no se cumplen las hipótesis del teorema y no podemos garantizar la existencia de preimagen para un Y genérico, tenemos por tanto que $\pi_{\mathcal{Y}}'$ no es dominante y no estaríamos ante un problema minimal.
2. Si $d < N$.
 - a) Si $\text{rg}(DF_C(C_0, Y_0)) = 6m - 7$, va a haber un subconjunto de columnas $\{i_1, \dots, i_d\}$ tales que $\det(DF_C(C_0, Y_0)|_{\{i_1, \dots, i_d\}}) \neq 0$. Se puede por tanto considerar la aplicación $F_{\{i_1, \dots, i_d\}}$ donde tomamos solo las componentes $i_1, \dots, i_d$,

de manera que sigue siendo regular y por tanto diferenciable, sigue pasando $F_{\{i_1, \dots, i_d\}}(C_0, Y_0) = 0$, pero ahora se cumple que $\det(DF_{C_{\{i_1, \dots, i_d\}}}(C_0, Y_0)) \neq 0$ por lo que podemos aplicar el teorema de la función implícita y de nuevo tendríamos $\pi_Q'^{-1}(Y) \neq \emptyset$, por lo que π_Q' es dominante y el problema minimal.

b) Si $\text{rg}(DF_C(C_0, Y_0)) < 6m - 7$, no se puede aplicar el teorema, por lo que no estaríamos ante un problema minimal.

3. Si $d > N$, entonces $\text{rg}(DF_C(C_0, Y_0)) < 6m - 7$ y no vamos a poder aplicar el teorema, por lo que no estaríamos ante un problema minimal.

En conclusión el rango de la matriz $DF_C(C_0, Y_0)$ basta para determinar si un problema es minimal o no.

Una vez tenemos si un problema es minimal, lo se utiliza otro algoritmo para determinar su grado. Para ello utilizaremos bases de Gröbner y la teoría desarrollada en el Apéndice B.

Input: $(p, l, \mathcal{I}, m)$, un problema punto recta minimal

Output: $\deg((p, l, \mathcal{I}, m))$, el grado del problema

Tomar $Y_0 \in \mathcal{Y}_{p,l,\mathcal{I},m}$ genérico (aleatorio)

$I \leftarrow \langle F(C, Y_0) \rangle \subseteq \mathbb{C}[C]$

$G \leftarrow GB(I)$, se computa la base de Gröbner del ideal

return $\#\{c_i : \text{LT}(g_i) \nmid c_i, \quad g_i \in G\}$, se devuelve el grado

Como el problema es minimal, sabemos que la variedad $\mathbb{V}(F(C, Y_0))$ tiene dimensión 0. Como estamos buscando soluciones en un cuerpo algebraicamente cerrado, por la Proposición B.6, tenemos que $\#\mathbb{V}(F(C, Y_0)) = \dim(\mathbb{C}[C]/I)$. Finalmente, por la Proposición B.3 tenemos que $\mathbb{C}[C]/I \cong \{c_i : \text{LT}(g_i) \nmid c_i, \quad g_i \in G\}$. Por tanto se concluye que

$$\deg((p, l, \mathcal{I}, m)) = \#\{c_i : \text{LT}(g_i) \nmid c_i, \quad g_i \in G\}.$$

A

Variedades algebraicas, topología de Zariski y bases de Gröbner

A continuación se expondrán los conocimientos previos sobre variedades algebraicas necesarios para comprender las variedades proyectivas, que es la herramienta principal usada de este trabajo.

Se utilizará como referencia y los conocimientos adquiridos en la asignatura Álgebra y Geometría Computacional y los apuntes de esta para el año 2024-2025.

Definición A.1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se define el espacio afín n dimensional sobre $\mathbb{K}$ como

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{K}, \quad i = 1, \dots, n\} \quad (\cong \mathbb{K}^n)$$

Definición A.2. Sea $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ una colección finita de polinomios. Se define la variedad algebraica definida por $f_1, \dots, f_r$ sobre $\mathbb{K}$ al subconjunto de $\mathbb{K}^n$

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_r) := \{a \in \mathbb{K}^n : f_1(a) = \dots = f_r(a) = 0\}$$

Definición A.3. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal, se define la variedad algebraica definida por I sobre $\mathbb{K}$ al subconjunto de $\mathbb{K}^n$

$$\mathbb{V}(I) := \{a \in \mathbb{K}^n : f(a) = 0, \quad \forall f \in I\}$$

Proposición A.4. Sea

$$I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^r b_i \cdot f_i : b_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \right\} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

el ideal definido por los polinomios $f_1, \dots, f_r$, se tiene que

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_r) = \mathbb{V}(I)$$

Observación. La variedad definida por un ideal no depende de los generadores de este, es decir si $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$, se tiene que

$$\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = \mathbb{V}(g_1, \dots, g_s)$$

Definición A.5. Una variedad algebraica afín sobre $\mathbb{K}$ es un subconjunto $V \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ para el que existen $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ($s \in \mathbb{N}$ finito) polinomios tales que

$$V = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$$

Definición A.6. Sea $V \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica, se define el *ideal de definición de la variedad* V como el subconjunto de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$$\mathbb{I}(V) := \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(a) = 0, \quad \forall a \in V\}$$

Proposición A.7. Sea $V \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica, el ideal de definición de la variedad, $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, es un ideal.

Definición A.8. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Se define el *radical de un I* como

$$\sqrt{I} := \{f \in I : f^N \in I, \quad N \in \mathbb{N}\}$$

Se dice que I es *radical* si $\sqrt{I} = I$

Teorema A.9. Sea $V \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica e $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Se tiene que $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{K}^n$ es una variedad algebraica e $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal, por lo que hay una correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \text{Ideal radical} & \xrightarrow{\mathbb{V}} & \text{Variedad algebraica} \\ & \xleftarrow{\mathbb{I}} & \end{array}$$

que revierte inclusiones. Además se tiene que $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$ y $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = V$.

Definición A.10. Se define la *topología de Zariski* sobre $\mathbb{K}^n$ de manera que un subconjunto se considera cerrado si es una variedad algebraica. Es decir si $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, un cerrado de Zariski tiene la forma $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{K}^n$. Como consecuencia, un abierto de Zariski tiene la forma $\mathbb{K}^n \setminus \mathbb{V}(I)$.

Definición A.11. Sea $S \subseteq \mathbb{K}^n$ un subconjunto cualquiera. Se define la *clausura de Zariski* de S a la variedad algebraica más pequeña que contiene a S . La clausura de Zariski de S se denota $\bar{S}$ y se tiene además que $\mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$

Definición A.12. Sea $V \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica. Se dice que V es *irreducible* si no se puede expresar como unión de variedades algebraicas irreducibles propias (no la misma) y no vacías. Es decir

$$\forall V_1, V_2 \in \mathbb{K}^n \text{ variedades tales que } V = V_1 \cup V_2 \implies V_1 \subset V_2 \text{ ó } V_2 \subset V_1$$

Teorema A.13. Para toda variedad algebraica $V \subseteq \mathbb{K}^n$, existe un conjunto finito de variedades algebraicas irreducibles $\{V_1, \dots, V_s\} \subseteq (\mathbb{K}^n)^s$ tales que

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_s$$

Definición A.14. Un *orden monomial* $>$ en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es una relación entre dos monomios $x^\alpha, x^\beta \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ y $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, que satisface las siguientes:

1. $>$ es un orden total, esto es que $\forall x^\alpha, x^\beta$, se tiene bien $x^\alpha > x^\beta$ o bien $x^\alpha < x^\beta$ o bien $x^\alpha = x^\beta$.
2. $x^\alpha > x^\beta \implies \forall x^\gamma, \quad x^\alpha \cdot x^\gamma > x^\beta \cdot x^\gamma$
3. $>$ es un buen orden, cualquier conjunto tiene un elemento minimal.

Definición A.15. Sea $x^\alpha, x^\beta \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Se definen

- El *orden monomial lexicográfico* de manera que

$$x^\alpha >_{lex} x^\beta \Leftrightarrow \alpha >_{lex} \beta \Leftrightarrow \alpha_i - \beta_i > 0, \quad i = \min\{j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_j - \beta_j \neq 0\}$$

- El *orden monomial lexicográfico graduado* de manera que

$$x^\alpha >_{grlex} x^\beta \Leftrightarrow \begin{array}{l} |\alpha| > |\beta| \\ \text{ó} \\ |\alpha| = |\beta| \text{ y } \alpha >_{lex} \beta \end{array}$$

- El *orden monomial lexicográfico inverso graduado* de manera que

$$x^\alpha >_{grevlex} x^\beta \Leftrightarrow \begin{array}{l} |\alpha| > |\beta| \\ \text{ó} \\ \alpha_i - \beta_i < 0, \quad i = \max\{j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_j - \beta_j \neq 0\} \end{array}$$

donde $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Definición A.16. Un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ se dice monomial si podemos encontrar monomios $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tales que $I = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle$.

Definición A.17. Dado un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$, se define el conjunto de términos principales de I como

$$\text{LT}(I) := \{c_\alpha x^\alpha : \exists f \in I, \quad \text{LT}(f) = c_\alpha x^\alpha\}$$

y el ideal de los términos principales de I cómo

$$\langle \text{LT}(I) \rangle$$

Definición A.18. Sea $>$ un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, un conjunto $\{g_1, \dots, g_s\} \subseteq I$ se denomina *base de Gröbner* si

$$\langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s) \rangle = \langle \text{LT}(I) \rangle$$

Proposición A.19. Sea $>$ un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Para todo ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ existe una base de Gröbner finita.

Definición A.20. Sea $>$ un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y G una base de Gröbner de I respecto del orden $>$. Se dice que G es *minimal* si $(f) = 1, \quad \forall f \in G$ y $g \in G$ tal que $\text{LT}(g)$ es divisible por algún $\text{LT}(f)$, $f \in G$.

Definición A.21. Sea $>$ un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y G una base de Gröbner de I respecto del orden $>$. Se dice que G es *reducida* si es minimal y $\forall g \in G$ ningún término de g es divisible por un $\text{LT}(f)$ con $f \in G$.

Teorema A.22. Sea $>$ un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Si $I \neq \{0\}$, existe una única base de Gröbner de I reducida.

B

Variedades algebraicas de dimensión 0

Cuando tenemos una variedad de dimensión 0, esta viene dada por un conjunto finito de puntos, lo que nos interesa es averiguar cuántos. Para ello se utiliza el ideal de definición de la variedad y un isomorfismo entre el anillo cociente y el conjunto de monomios que no están en el ideal. El objetivo es establecer criterios para saber cuando una variedad es un conjunto de puntos y hallar una forma de contar cuantos.

Proposición B.1 (Cox et al., 2015, Proposición 1 sección 5.3). *Fijado un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Se denota $\langle \text{LT}(I) \rangle$ al ideal generado por los términos principales de elementos de I .*

1. *Todo $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ al pasar al cociente $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$ está en la misma clase que un único polinomio mónico r que es una combinación lineal en $\mathbb{K}$ de monomios en el complemento de $\langle \text{LT}(I) \rangle$, $\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$.*
2. *Los elementos de $\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$ son linealmente independientes al pasar al cociente. Esto es que si tenemos*

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} [x^{\alpha}] \stackrel{\text{Def.}}{=} \left[\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \right] = [0]$$

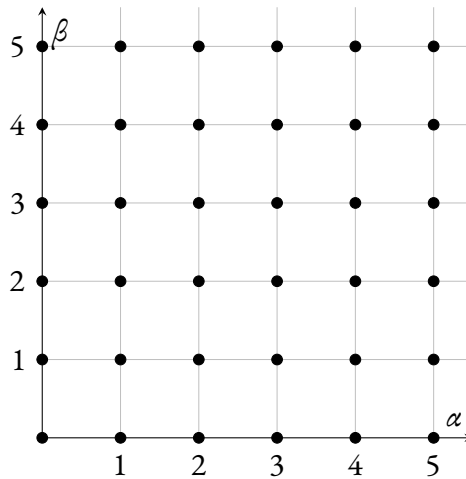
con $c_{\alpha} \in \mathbb{K}$ y $x^{\alpha} \in \{x^{\alpha} : x^{\alpha} \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$, entonces $c_{\alpha} = 0$ para todo α .

Observación. Nótese que el resto de dividir por una base de Gröbner es único, por lo que se puede tomar como representante de la clase el resto de dividir por una base de Gröbner del ideal, es decir $\bar{f}^G = [f]$

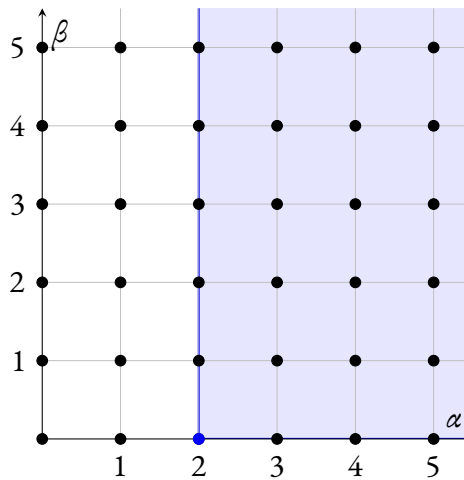
Ejemplo B.2. Consideremos el anillo $\mathbb{R}[x, y]$ con el orden monomial lexicográfico y el ideal $I = \langle (x - 1)(x + 2), y \rangle$ (que además es base de Gröbner $G = \{I\}$). Se tiene $\langle \text{LT}(I) \rangle = \langle x^2, y \rangle$, y por tanto el conjunto complementario es $\{1, x\}$. Esto se debe a que los monomios que genera x^2 son $\{x^\alpha y^\beta\}_{\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, por lo que se quedan sin generar $\{x^0 y^\beta, x^1 y^\beta\}_{\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Por su parte los monomios que genera y son $\{x^\alpha y^\beta\}_{\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \beta \in \mathbb{N}}$, por lo que se quedan sin generar $\{x^\alpha y^0\}_{\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Finalmente intersecando estos conjuntos obtenemos los monomios que ninguno consigue generar

$$\{x^0 y^\beta, x^1 y^\beta\}_{\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \cap \{x^\alpha y^0\}_{\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}} = \{1, x\}.$$

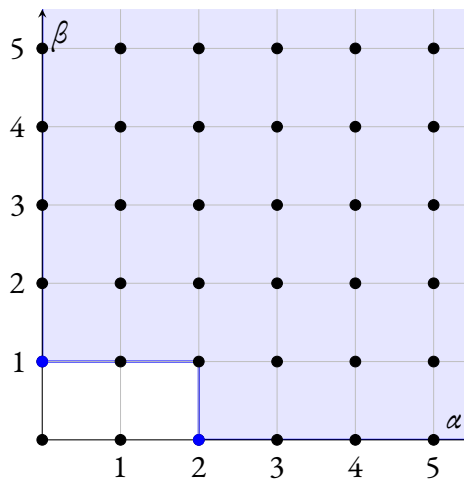
Este conjunto es más fácil de ver gráficamente si representamos en una malla los distintos α y β que pueden ser exponentes de x e y respectivamente.



A continuación marcamos el punto asociado al primer elemento de $\langle \text{LT}(I) \rangle$, x^2 . A continuación colorearemos los elementos que genera. Estos resultan de multiplicar x^2 por $x^\alpha y^\beta$ con $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por lo que si consideramos $x^2 = x^2 y^0$, son todos ellos con mayor o igual exponente en x e y . En el dibujo esto significa que podemos llegar a cualquiera de ellos desde $(2, 0)$ aumentando α , que es ir hacia la derecha, y β , que es ir hacia arriba. Por tanto concluimos que los monomios generados por x^2 son los encerrados por el siguiente área:



De la misma manera, podemos marcar el punto $(0, 1)$ y colorear el área de los que genera y .



Tenemos por tanto coloreado los exponentes de los monomios generados por $\langle \text{LT}(I) \rangle$. Aquí es más fácil ver los que no están generados, ya que son los que caen fuera del área delimitada. Estos puntos son $(0, 0)$, que hace referencia a $x^0y^0 = 1$, y $(1, 0)$, que hace referencia a $x^1y^0 = x$.

Lo que nos indica la Proposición B.1 es en primer lugar por la parte 2, que el conjunto $\{1, x\}$ es base de $\mathbb{K}[x, y]/I$, y en segundo lugar por la parte 1 que dado un $f \in \mathbb{K}[x, y]$, vamos a poder dar unas coordenadas únicas en función de esa base a $[f] \in \mathbb{K}[x, y]/I$. Es decir

$$\forall f \in \mathbb{K}[x, y], \exists! c_1, c_2 \in \mathbb{K} : [f] = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x$$

O equivalentemente

$$\forall f \in \mathbb{K}[x, y], \exists! c_1, c_2 \in \mathbb{K} : f = b_1(x-1)(x+2) + b_2y + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x$$

con $b_1, b_2 \in \mathbb{K}[x, y]$.

Esto nos permite obtener objetos de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$ como combinaciones lineales de elementos de $\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, por lo que podemos ver $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$ como un espacio vectorial con $\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$ como base. En concreto, vamos a tener que los conjuntos son isomorfos como espacios vectoriales:

Proposición B.3 (Cox et al., 2015, Proposición 4 sección 5.3). *Sea $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un anillo, fijamos un orden monomial y sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Entonces $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$ es isomorfo como $\mathbb{K}$ -espacio vectorial a $\mathcal{L}\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$*

Se puede ver la demostración de la proposición en la Proposición 4 del capítulo 5, sección 3 de .

Una vez tenemos esta manera de representar $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$, lo que buscamos es averiguar cuando nuestra variedad $\mathbb{V}(I)$ es finita en términos de ello. Gráficamente con la representación en la malla del ejemplo anterior, vemos que $\mathcal{L}\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$ (y por tanto $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$) es finito porque el número de puntos que se quedan fuera es finito. Esto pasa cuando el área coloreada toca los ejes, lo que implicará que la región que no coloreada será acotada. Esta idea se formaliza en el siguiente teorema:

Teorema B.4 (de Finitud)(Cox et al., 2015, Teorema 6 sección 5.3). *Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y fijado un orden monomial en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces son equivalentes*

1. $\forall 1 \leq i \leq n, \exists m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_i^{m_i} \in \langle \text{LT}(I) \rangle$
2. *Sea G una base de Gröbner de I . Entonces $\forall 1 \leq i \leq n, \exists m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_i^{m_i} = \text{LM}(g)$, para algún $g \in G$*
3. *El conjunto $\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$ es finito*
4. *El $\mathbb{K}$ -espacio vectorial $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$ es de dimensión finita*

e implican

$$\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{K}^n \text{ es finito.}$$

Si además $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$, se tiene también el recíproco.

Ejemplo B.5. Continuando con el ejemplo anterior, donde $I = \langle (x-1)(x+2), y \rangle$, podemos ver todas las condiciones reflejadas.

1. Tenemos $x^2 \in \langle x^2, y \rangle = \langle \text{LT}(I) \rangle$ y también $y \in \langle x^2, y \rangle = \langle \text{LT}(I) \rangle$.
2. $G = \{I\}$ y tenemos que x^2 es el primer elemento y y el segundo de G .
3. $\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\} = \{1, x\}$ es finito.
4. $\mathbb{K}[x, y]/I$ es finito, dado cualquier polinomio, los monomios que vayan multiplicados por y van a ir al 0 en el cociente por el polinomio $y \in I$ y cualquier monomio que tenga grado mayor o igual a dos será reducido hasta grado 1 en el cociente por el polinomio $(x-1)(x+2)$.

Estas condiciones implican por el teorema que $\mathbb{V}(I)$ es finito, y en efecto lo es, ya que

$$\mathbb{V}(I) = \{(1, 0), (-2, 0)\}$$

Una vez tenemos una manera de ver cuando una variedad se reduce a un conjunto de puntos, la siguiente pregunta natural es si podemos, de nuevo a partir de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$ o $\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$, determinar o acotar de alguna forma el cardinal de dicho conjunto. De esta forma surge la siguiente proposición.

Proposición B.6 (Cox et al., 2015, Proposición 7 sección 5.3). *Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal tal que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_i^{m_i} \in \langle \text{LT}(I) \rangle$. Entonces se tiene*

1. $\#\mathbb{V}(I) \leq \dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I)$ (Siendo $\dim$ dimensión como $\mathbb{K}$ -espacio vectorial)
2. $\#\mathbb{V}(I) \geq m_1 \cdot \dots \cdot m_n$
3. Si $\sqrt{I} = I$ y $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$, entonces $\#\mathbb{V}(I) = \dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I)$

Ejemplo B.7. Siguiendo con el ejemplo, las partes 1 y 2 de la proposición nos dicen

$$2 = m_1 \cdot \dots \cdot m_n \leq \#\mathbb{V}(I) \leq \dim(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I) = 2$$

por tanto $\#\mathbb{V}(I) = 2$. En efecto, ya que $\mathbb{V}(I) = \{(1, 0), (-2, 0)\}$. Esto se puede deducir directamente de la parte 3 si consideramos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ya que el ideal $I = \langle (x-1)(x+2), y \rangle$ es radical.

Concluimos con esto que si tenemos una variedad finita en $\mathbb{K}^n$ con $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$ podemos hallar el número de puntos que la componen hallando su ideal de definición (radical). Finalmente basta hallar una base del anillo cociente por el ideal como el conjunto de monomios que no estén en el ideal principal y contar el número de elementos de esta, ya que coincidirá con el número de puntos de la variedad por la Proposición B.6.

C

Espacios proyectivos, coordenadas homogéneas y aplicaciones proyectivas

Considerando un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y una relación de equivalencia se definirán los espacios proyectivos. También se expondrán sus principales propiedades, cómo dar coordenadas a sus elementos, se le dotará de estructura de variedad diferenciable y se definirán las aplicaciones entre estos.

Se utilizará como referencia los conocimientos adquiridos en la asignatura Geometría II y los apuntes de esta para el curso 2023-2024.

Definición C.1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, se denomina *proyectivización del espacio V* (o *espacio proyectivo*) al conjunto $\mathbb{P}(V) := (V \setminus \{0\}) / \sim$ dónde $\sim$ es la relación de equivalencia siguiente

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : v_1 = \lambda v_2$$

Llamamos a la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_c : V \setminus \{0\} &\rightarrow (V \setminus \{0\}) / \sim \\ v &\mapsto [v] \end{aligned}$$

proyección canónica.

Por aligerar la notación, escribiremos $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$ en lugar de $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$. Escribimos $n - 1$ en lugar de n por ser la dimensión del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$. Más adelante se verá que en efecto es así.

Observación. Dado que dos puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ son el mismo si vienen de tomar en el cociente dos vectores proporcionales, se puede ver al espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ como el conjunto de rectas vectoriales de $\mathbb{K}^n$.

Definición C.2. Sea V un espacio vectorial y sean $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ con $P_i = [v_i], i = 0, \dots, r$ con $v_i \in V, \forall i = 0, \dots, r$. Se dice que los puntos son *proyectivamente independientes* si los vectores lo son.

Ejemplo C.3. Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, tenemos que los puntos $[(1, 1, 1)], [(1, 1, 0)], [(1, 0, 0)] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ son proyectivamente independientes por serlo los vectores $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Definición C.4. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ y sean $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$, se dice que los puntos están en *posición general* si $r \leq n$ y los puntos son proyectivamente independientes ó $r > n$ y cualquier subconjunto de $n + 1$ puntos son proyectivamente independientes.

Ejemplo C.5. Retomando el ejemplo anterior, tenemos que los puntos $[(1, 1, 1)], [(1, 1, 0)], [(1, 0, 0)] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ están en posición general porque cualquier subconjunto de $2 + 1 = 3$ de ellos (el único) son proyectivamente independientes.

Los puntos $[(1, 0, 0)], [(0, 1, 0)], [(0, 0, 1)], [(1, 1, 1)] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ están en posición general porque cualquier subconjunto de 3 de ellos son proyectivamente independientes por serlo los vectores ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Definición C.6. Sea V un espacio vectorial y sean $P_0, P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ con $P_i = [v_i], i = 0, \dots, r$ con $v_i \in V, \forall i = 0, \dots, r$. Se dice que los puntos *generan* $\mathbb{P}(V)$ como espacio proyectivo si los vectores $v_0, \dots, v_r$ generan V como espacio vectorial.

Ejemplo C.7. Los puntos $[(1, 1, 1)], [(1, 1, 0)], [(1, 0, 0)] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ generan $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ como espacio proyectivo ya que los vectores $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial.

Definición C.8. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ y $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo. Se define *referencia proyectiva* a la colección de puntos en posición general

$$\mathcal{R}_n := \{P_0, \dots, P_n; P_{n+1}\}$$

donde $P_0, \dots, P_n, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$. Se denota P_{n+1} como *punto unidad*.

Observación. Se tiene que si $P_0, \dots, P_n, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ están en posición general, los puntos $P_0, \dots, P_n$ generan $\mathbb{P}(V)$.

Definición C.9. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ y $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo. Sean $P_0, \dots, P_n, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$, $v_0, \dots, v_n \in V$ y $\mathcal{R}_\bullet = \{P_0, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ una referencia proyectiva. Se dice que $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$ es una *base de V asociada a $\mathcal{R}_\bullet$* si $P_i = [v_i]$, $\forall i = 0, \dots, n$ y $P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$.

Ejemplo C.10. La colección $\mathcal{R}_\bullet = [(1, 0, 0)], [(0, 1, 0)], [(0, 0, 1)]; [(1, 1, 1)]$ es una referencia proyectiva. Se denomina referencia proyectiva estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ por tener como base asociada la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Definición C.11. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ y $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo. Sean $P_0, \dots, P_n, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$, $v_0, \dots, v_n \in V$ y $\mathcal{R}_\bullet = \{P_0, \dots, P_n; P_{n+1}\}$ una referencia proyectiva y $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$ una base asociada a $\mathcal{R}_\bullet$. Se definen las *coordenadas homogéneas* de un punto P a la tupla $(\lambda_0 : \dots : \lambda_n)$ con $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$P = [(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n)]$$

Observación. Nótese que las coordenadas homogéneas son únicas salvo reescalamiento.

Observación. Podemos considerar al igual que tenemos una base usual para el $\mathbb{K}$ -espacio vectorial $\mathbb{K}^{n+1}$, $\mathcal{B}_e = (e_0, \dots, e_n)$ una referencia estándar para $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$,

$$\mathcal{R}_e = \{[e_0], \dots, [e_n]; [e_0 + \dots + e_n]\}$$

nótese que por la manera de estar construida, la referencia estándar tiene como base asociada la usual.

Ejemplo C.12. Sea $\mathcal{R}_\bullet = [(1, 0, 0)], [(0, 1, 0)], [(0, 0, 1)]; [(1, 1, 1)]$ la referencia proyectiva estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, se tienen los puntos $P_1 = [(1, 2, 0)]$, $P_2 = [(-3, 1, -2)]$ y $P_3 = [(0, 0, 4)]$ tienen coordenadas homogéneas respecto de la referencia estándar $(1 : 2 : 0)$, $(-3 : 1 : -2)$ y $(0 : 0 : 4)$ respectivamente. Nótese que las coordenadas $(1 : 2 : 0)$ y $(2 : -4 : 0)$ son coordenadas del mismo punto ya que

$$\begin{aligned} [(-4, -2, 0)] &= [-2(1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)] \\ &= [-2(1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1))] \\ &= [1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)] \\ &= [(1, 2, 0)] \end{aligned}$$

Definición C.13. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ es un *subespacio proyectivo* si existe un subespacio vectorial $W \subseteq V$ tal que $X = \mathbb{P}(W)$.

Definición C.14. Sean $v_0, \dots, v_s \in V$ vectores de un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Se define el subespacio generado por los puntos al conjunto:

$$\mathcal{L}\{[v_0], \dots, [v_n]\} := \{[\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_s v_s] : \lambda_0, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K} \text{ \& } \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_s v_s \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}(V)$$

De manera equivalente se tendría que

$$\mathcal{L}\{[v_0], \dots, [v_n]\} = \mathbb{P}(\mathcal{L}\{v_0, \dots, v_n\})$$

Proposición C.15. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ es un *espacio proyectivo* si y solo si el conjunto

$$\widehat{X} := \pi_c^{-1}(X) \cup \{0\} = \{v \in V : v = 0 \text{ ó } [v] \in X\}$$

es un subespacio vectorial de V .

Ejemplo C.16. Consideremos la referencia proyectiva estándar de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}^2$, con base asociada la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^3$. Sean los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ consideremos la recta proyectiva generada por los puntos $[1 : 0 : 0]$ y $[0 : 1 : 0]$

$$l = \mathcal{L}\{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]\} = \{[\lambda_0(1, 0, 0) + \lambda_1(0, 1, 0)]$$

$$: \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ \& } \lambda_0(1, 0, 0) + \lambda_1(0, 1, 0) \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}(V)$$

Se tiene que es un subespacio proyectivo por ser la proyectivización del subespacio vectorial

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = \{[\lambda_0(1, 0, 0) + \lambda_1(0, 1, 0)]$$

$$: \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ \& } \lambda_0(1, 0, 0) + \lambda_1(0, 1, 0) \neq 0\} = \mathcal{L}\{[(1, 0, 0)], [(0, 1, 0)]\}$$

Además se tiene que el conjunto

$$\begin{aligned} \widehat{l} &= \pi_c^{-1}(l) \cup \{0\} \\ &= \{v = \lambda_0(1, 0, 0) + \lambda_1(0, 1, 0) : \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ \& } v \neq 0\} \cup \{0\} \\ &= \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

es un subespacio vectorial

Proposición C.17. Sea $\mathcal{R}$ una referencia de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Sea

$$\mathcal{U}_i := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : x_i \neq 0\},$$

entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathcal{U}_i \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ (a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_n) &\mapsto (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

es biyectiva.

Demostración. Es fácil ver que la aplicación no depende del representante, ya que dados dos representantes del mismo punto de $\mathcal{U}_i$, sus coordenadas homogéneas serán proporcionales, por lo que al llevarlas ambas a la forma $(a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_n)$ serán iguales. La aplicación además es inyectiva porque si dos puntos son distintos al llevarlos a la forma $(a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_n)$ los coeficientes no podrán ser todos iguales (sino tendríamos que las coordenadas homogéneas de los puntos son proporcionales, por lo que no serían puntos distintos) por lo que sus imágenes por ϕ_i serán distintas. Por último tenemos que la aplicación es sobreyectiva porque para cualesquiera $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, el punto de coordenadas homogéneas $(a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_n)$ está en $\mathcal{U}_i$ y tiene como imagen $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$. ■

Observación. Por la definición de $\mathcal{U}_i$, podemos ver $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \mathcal{U}_i \cup H_i$ para cualquier $i = 0, \dots, n$, donde

$$H_i := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : x_i = 0\}.$$

Podemos pensar H_i como el hiperplano del infinito.

Observación. Podemos identificar los H_i con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$ mediante la aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} \varphi_i : H_i \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1} \\ (a_0 : \cdots : a_{i-1} : 0 : a_{i+1} : \cdots : a_n) &\mapsto (a_0 : \cdots : a_{i-1} : a_{i+1} : \cdots : a_n) \end{aligned}$$

Esto junto con la identificación de $\mathcal{U}_i$ con $\mathbb{K}^n$ hace que podamos ver

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$$

Corolario C.18. Sea $\mathcal{R}$ una referencia de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. El espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ es una variedad diferenciable n dimensional con el atlas $\{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}_{i=0}^n$, donde:

$$\mathcal{U}_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : x_i \neq 0\}$$

y

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathcal{U}_i \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ (a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_n) &\mapsto (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar tenemos que

$$\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : \exists i = 0, \dots, n, \quad x_i \neq 0\} = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

Veremos debajo de la Proposición D.5 que $\mathcal{U}_i$ es un abierto de Zariski $\forall i = 0, \dots, n$. Veamos ahora que los cambios de carta son diferenciables. Tenemos que si $i < j$

$$\begin{aligned} \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) &\rightarrow \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \\ (a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) &\mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_{j-1}}{a_i}, \frac{1}{a_i}, \frac{a_{j+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right) \end{aligned}$$

y si $i > j$

$$\begin{aligned} \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) &\rightarrow \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \\ (a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) &\mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{j-1}}{a_i}, \frac{1}{a_i}, \frac{a_{j+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right) \end{aligned}$$

en cualquiera de los casos, la aplicación va a ser diferenciable ya que $a_i \neq 0$ por tomar $(a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \in \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$. ■

Definición C.19. Sean V y V' $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales. Una *aplicación proyectiva* entre $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ es una aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(V) &\rightarrow \mathbb{P}(V') \\ P = [v] &\mapsto f(P) := [\widehat{f}(v)] \end{aligned}$$

dónde $\widehat{f} : V \rightarrow V'$ es una aplicación lineal que se denomina *asociada a f* . A partir de esta se definen el dominio, imagen y centro de la aplicación:

$$\begin{aligned} \text{dom } f &:= \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker \widehat{f}) \\ \text{im } f &:= \{[\widehat{f}(v)] : v \in V \setminus \ker \widehat{f}\} = \mathbb{P}(\text{im } \widehat{f}) \\ Z(f) &:= \mathbb{P}(\ker \widehat{f}) \end{aligned}$$

Observación. La aplicaciones proyectivas no están definidas en su centro, porque la imagen de un punto de este va a parar al cero, que no pertenece a ningún espacio proyectivo.

Proposición C.20. Sean V y V' $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales. Sea $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ una aplicación proyectiva.

- Dado un subespacio proyectivo $X \subseteq \mathbb{P}(V)$, su imagen por f es el subespacio proyectivo $f(X) := f(X \setminus Z(f))$ tal que $\widehat{f(X)} = \widehat{f(X)} \setminus \widehat{Z(f)}$. En particular si $X = \mathcal{L}\{P_0, \dots, P_r\}$ con $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$, se tiene que

$$f(X) = \mathcal{L}\{f(P_0), \dots, f(P_r)\}$$

- Dado un subespacio proyectivo $Y \subseteq \mathbb{P}(V')$, su preimagen por f es el subespacio proyectivo $f^{-1}(Y) := f(Y) \cup Z(f)$ tal que $\widehat{f^{-1}(Y)} = \widehat{f^{-1}(\widehat{Y})}$. En particular si $Y \cap \text{im } f = \mathcal{L}\{Q_0, \dots, Q_s\}$ tales que $f(P_j) = Q_j$, $\forall j = 1, \dots, s$ con $P_0, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$, se tiene que

$$f^{-1}(Y) = \mathcal{L}\{\{P_1, \dots, P_s\} \cup Z(f)\}$$

Definición C.21. Sean V y V' $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ referencias proyectivas de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ con bases asociadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Se define la matriz asociada a la aplicación proyectiva f respecto de las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ a

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) := [M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\widehat{f})]$$

es decir cualquier representante de la clase de la matriz de la aplicación lineal asociada $\widehat{f}$ respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bajo la relación $\sim$, donde

$$M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow M_1 = \lambda M_2, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Por tanto si x son las coordenadas homogéneas de P en la referencia $\mathcal{R}$ e y son las de $f(P)$ en la referencia $\mathcal{R}'$, tenemos la relación

$$M_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(f) \cdot x = y$$

D

Polinomios homogéneos

Se presentan los principales resultados y notaciones que se utilizarán en cuanto a polinomios homogéneos. La principal referencia utilizada es el capítulo 8 de Cox et al., 2015.

Definición D.1. Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ se dice *homogéneo de grado d* si cada uno de sus términos tiene grado total d .

Definición D.2. Sea $g \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ con $0 \leq i \leq n$ un polinomio de grado total d . Sea $g = \sum_{j=0}^d g_j$ la expansión de g como suma de componentes homogéneas, donde $g_j \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ es un polinomio homogéneo de grado j . Se define la homogeneización de g respecto de la variable x_k al polinomio homogéneo de grado d

$$\begin{cases} g^{h,x_k} = \sum_{j=0}^d g_j \cdot x_k^j \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] & \text{si } k = i \\ g^{h,x_k} = \sum_{j=0}^d g_j \cdot x_k^j \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n] & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

Definición D.3. Sea $g \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ con $0 \leq i \leq n$ un polinomio de homogéneo. Se define la deshomonogeneización de g respecto de la variable x_i al polinomio

$$g(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$$

Observación. Nótese que homogeneizar y después deshomonogeneizar un polinomio respecto a una variable no siempre da como resultado el polinomio original.

Proposición D.4. Sea $g \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ con $0 \leq i \leq n$ un polinomio de grado total d . Se tiene

1. La homogeneización de g respecto de la variable x_i se puede obtener como

$$g^{h,x_i} = x_i^d \cdot g\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

2. Deshomogeneizar g^{b, x_i} respecto de la variable x_i da como resultado g
3. Sea $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un polinomio homogéneo y sea $e \in \mathbb{N}$ el natural más grande tal que x_i^e divide a F , si f es la deshomogeneización de F respecto de x_i , se tiene que

$$F = x_i^e \cdot f^{b, x_i}$$

Proposición D.5. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un polinomio homogéneo de grado d , $\mathcal{R}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ y $x = (x_0 : \dots : x_n)$ las coordenadas de un punto respecto de la referencia $\mathcal{R}$. Si f se anula para un representante de coordenadas homogéneas de $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, entonces f se anula para toda la clase. En concreto:

$$\mathbb{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n : f(p) = 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$$

es un conjunto bien definido de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Bibliografía

- Agarwal, S., Furukawa, Y., Snavely, N., Curless, B., Seitz, S. M., & Szeliski, R. (2010). Reconstructing Rome. *Computer*, 43(6), 40-47. <https://doi.org/10.1109/MC.2010.175>
- Cox, D. A., Little, J., & O'Shea, D. (2015). *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra* (4.^a ed.). Springer.
- Duff, T., Kohn, K., Leykin, A., & Pajdla, T. (2020). Point-Line Minimal Problems in Complete Multi-View Visibility. *International Journal of Computer Vision*.
- Eves, H. (1966). *Elementary Matrix Theory*. Allyn; Bacon, Inc.
- Hartley, R., & Zisserman, A. (2003). *Multiple View Geometry in Computer Vision* (Second). Cambridge University Press. <https://www.cambridge.org/core/books/multiple-view-geometry-in-computer-vision/F2C236314D3C5C3843513B1F8E24C833>
- Knuth, D. E. (1997). *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms* (3rd). Addison-Wesley Professional.
- Meng, Q., Zhang, J., Hu, Q., He, X., & Yu, J. (2020). LGNN: A Context-aware Line Segment Detector, 4364-4372. <https://doi.org/10.1145/3394171.3413784>
- Michalek, M., & Sturmfels, B. (2021). *Invitation to Nonlinear Algebra* (Vol. 211). American Mathematical Society.
- Mumford, D. (1976). *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties* (Vol. 221). Springer-Verlag.
- Reid, M. (1988). *Undergraduate Algebraic Geometry* (Vol. 12). Cambridge University Press.
- Smith, K. E., Kahanpää, L., Kekäläinen, P., & Traves, W. (2000). *An Invitation to Algebraic Geometry*. Springer.

