



Universidad Politécnica  
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de  
Ingenieros Informáticos**



Grado en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial

Trabajo Fin de Grado

**Teoría de Estabilidad y Atractores  
Globales para Sistemas Diferenciales  
Autónomos con Aplicaciones**

Autor: Jesús María Díez Gómez  
Tutor: Javier López de la Cruz

Madrid, Junio 2025

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

*Trabajo Fin de Grado*

*Grado en Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial*

*Título:* Teoría de Estabilidad y Atractores Globales para Sistemas Diferenciales Autónomos con Aplicaciones

Junio 2025

*Autor:* Jesús María Díez Gómez

*Tutor:* Javier López de la Cruz

Departamento de Matemáticas Aplicadas a las TIC  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos  
Universidad Politécnica de Madrid

# Resumen

Actualmente, los sistemas diferenciales autónomos son de gran importancia para la modelización de fenómenos que suceden en el mundo. Su utilidad se extiende a campos como la Física, la Biología y la Computación, entre otros. El estudio del comportamiento de estos sistemas a largo plazo nos permite comprender su estabilidad y predecir su evolución.

Este trabajo consiste en una revisión teórica de la estabilidad de los sistemas dinámicos, además de otros conceptos relevantes como los puntos de equilibrio, los atractores globales o los conjuntos límite. Se estudian en profundidad el método directo de Lyapunov y las órbitas de sistemas dinámicos a través del Teorema de LaSalle y del Teorema de Poincaré-Bendixson.

La revisión se basa en el contenido teórico encontrado en “*Applied Nonautonomous and Random Dynamical Systems*” [1], libro escrito por Tomás Caraballo y Xiaoying Han, así como en los apuntes de la asignatura de “*Ampliación de Ecuaciones Diferenciales*” [2] del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

A lo largo del trabajo se exponen las definiciones y teoremas necesarios para el entendimiento de los conceptos tratados, junto con ejemplos concretos y gráficas para facilitar la comprensión del tema.

Con este trabajo se busca comprender y estudiar la estabilidad de los sistemas dinámicos, además de las potenciales aplicaciones que estos puedan tener, como modelización de epidemias, el desarrollo de ecosistemas o el análisis y simulación computacional de fenómenos físicos.



# Abstract

Autonomous differential systems are of great importance for modeling real-world phenomena. Their applicability extends to fields such as Physics, Biology, and Computing, among others.

Studying the long-term behavior of these systems allows us to understand their stability and predict their evolution.

This work presents a theoretical review of the stability of dynamical systems, along with other relevant concepts such as equilibrium points, global attractors, and limit sets. The direct Lyapunov method and the orbits of dynamical systems are studied in depth through LaSalle's Theorem and the Poincaré–Bendixson's Theorem.

The review is based on the theoretical content found in “*Applied Nonautonomous and Random Dynamical Systems*” [1] by Tomás Caraballo and Xiaoying Han, as well as on the lecture notes from the course “*Advanced Differential Equations*” [2], part of the Bachelor's Degree in Mathematics at the University of Seville

Throughout this work, the necessary definitions and theorems are presented to support the understanding of the aforementioned concepts, together with specific examples and graphs to facilitate comprehension.

The aim of this project is to study and understand the stability of dynamical systems, as well as their potential applications, such as epidemic modeling, ecosystem development, and the computational analysis and simulation of physical phenomena.



# Tabla de contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sistemas Diferenciales No Lineales de Primer Orden</b>	<b>3</b>
2.1. Algunos Conceptos Básicos . . . . .	3
2.2. Existencia y Unicidad de Solución . . . . .	4
2.3. Dependencia Continua Respecto de los Datos Iniciales . . . . .	7
<b>3. Teoría de Estabilidad en Sistemas Dinámicos Autónomos</b>	<b>9</b>
3.1. Sistemas Dinámicos Autónomos . . . . .	9
3.2. Introducción a la Teoría de Estabilidad . . . . .	11
<b>4. Órbitas, Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson</b>	<b>19</b>
4.1. Concepto de Órbita y sus propiedades . . . . .	19
4.2. Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	25
4.2.1. Teorema de LaSalle . . . . .	25
4.2.2. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	26
<b>5. Introducción a la Teoría de Atractores Globales</b>	<b>29</b>
<b>6. Aplicaciones en el Mundo Real</b>	<b>33</b>
6.1. Modelo Ecológico Quimiostato . . . . .	33
6.1.1. Estabilidad del sistema . . . . .	34
6.1.2. Atractor global . . . . .	36
6.2. Modelo Epidemiológico SIR . . . . .	37
6.2.1. Estabilidad del sistema . . . . .	38
6.2.2. Atractor global . . . . .	41
6.3. Modelo Climatológico Lorentz-84 . . . . .	42
6.3.1. Estabilidad del sistema . . . . .	43
6.3.2. Atractor global . . . . .	45
<b>7. Análisis de impacto</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) son una de las herramientas matemáticas más utilizadas para la descripción y análisis de fenómenos que evolucionan en el tiempo en el mundo real. Su aparición es común en diversos campos, como la Física, la Biología, la Economía, la Ecología o la Ingeniería, donde permiten modelar dinámicas de sistemas reales con gran precisión. Desde el estudio del movimiento de las galaxias hasta la propagación de enfermedades o la evolución de una población animal, las EDOs nos permiten comprender no solo el comportamiento inmediato de estos sistemas, sino también cómo evolucionan a largo plazo.

Concretamente, los sistemas diferenciales autónomos son especialmente relevantes en el estudio de la dinámica de fenómenos reales. Comprender su comportamiento es crucial, ya que muchos fenómenos naturales y tecnológicos pueden representarse mediante este tipo de sistemas. Saber cómo se comportan estas soluciones con el tiempo, si tienden a estabilizarse, si presentan oscilaciones o incluso comportamientos caóticos, es clave para poder controlar, predecir o simular y visualizar virtualmente dichos fenómenos.

Uno de los aspectos de mayor importancia en el estudio de los sistemas dinámicos es el análisis de su estabilidad, su capacidad para mantener su comportamiento o retornar a un estado de equilibrio frente a pequeñas perturbaciones. Este análisis permite anticipar la respuesta del sistema ante cambios o perturbaciones en sus condiciones iniciales o en su entorno, lo cual es crucial en la práctica científica y técnica. Además, conceptos como los atractores globales, que describen la tendencia asintótica del sistema, ofrecen una perspectiva más profunda a largo plazo de estos sistemas, aportando una visión global del destino y velocidad de convergencia a ese destino de todas sus posibles trayectorias.

Este trabajo busca estudiar estos conceptos y realizar una revisión teórica de la estabilidad en sistemas diferenciales autónomos y no lineales, además del concepto de atractores globales. Para ello, se presentarán y analizarán los fun-

## Capítulo 1. Introducción

---

damentos matemáticos más relevantes, como el concepto de punto de equilibrio, la estabilidad local y global, el método directo de Lyapunov, el Teorema de LaSalle y el Teorema de Poincaré-Bendixson, así como los elementos esenciales de la teoría de atractores y de órbitas. El enfoque será fundamentalmente teórico, pero se incluirán ejemplos representativos y visualizaciones gráficas que ayuden a entender mejor los resultados y conceptos expuestos.

Además del análisis matemático, el trabajo incorpora una reflexión sobre el impacto que este tipo de estudios puede tener en multitud de contextos, como en el caso de la COVID-19 o la evolución de especies en peligro de extinción. De este modo, se muestra cómo un trabajo de carácter teórico puede tener importantes implicaciones prácticas.

Este trabajo se organiza según los siguientes apartados:

- En el **Capítulo 2** se introducen los sistemas diferenciales ordinarios no lineales y los sistemas dinámicos, el concepto de solución, el problema de Cauchy y el Teorema de existencia y unicidad de Picard.
- El **Capítulo 3** está dedicado al concepto de sistema dinámico autónomo y la teoría de estabilidad, incluyendo el análisis de puntos de equilibrio, las funciones de Lyapunov y los teoremas que permiten determinar la estabilidad sin necesidad de soluciones explícitas.
- En el **Capítulo 4** se define el concepto de órbita y sus propiedades, así como el estudio de su comportamiento según el Teorema de LaSalle y el Teorema de Poincaré-Bendixson.
- En el **Capítulo 5** se aborda la teoría de atractores globales para sistemas diferenciales autónomos.
- A lo largo del **Capítulo 6** se estudian casos reales de aplicación de la teoría presentada en campos como la Ecología, Epidemiología y Climatología.
- El **Capítulo 7** presenta un análisis del impacto de estos estudios teóricos en la sociedad, relacionándolos con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) pertinentes.
- Finalmente, en el **Capítulo 8** se recogen las conclusiones del trabajo y se proponen posibles líneas de trabajo futuro.

## Capítulo 2

# Sistemas Diferenciales No Lineales de Primer Orden

### 2.1. Algunos Conceptos Básicos

Un sistema diferencial ordinario (SDO) no lineal de primer orden es un conjunto de ecuaciones diferenciales que dependen de manera no lineal de las propias funciones incógnita o de sus derivadas. A diferencia de los sistemas lineales, en estos sistemas las variables pueden interactuar entre sí de forma compleja, apareciendo productos, potencias o funciones no lineales como senos, logaritmos o exponenciales.

Matemáticamente, estos sistemas suelen presentarse en dimensión  $N \in \mathbb{N}$  con la siguiente expresión:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)), \\ \vdots \\ y_N'(t) = f_N(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $f_1, \dots, f_N : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , son funciones dadas,  $t$  es la variable independiente, las funciones  $y_1, \dots, y_N$  son las funciones incógnita que solo dependen de  $t$  e  $y_1', \dots, y_N'$  son las derivadas de las funciones incógnita respecto de  $t$ .

**Definición 2.1.1.** Una solución de (2.1) es cualquier conjunto de funciones  $y_1, \dots, y_N : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo:

- (i) Existe  $y_i'(t)$ ,  $\forall t \in (a, b)$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ .
- (ii)  $(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)) \in \Omega$ ,  $\forall t \in (a, b)$ .
- (iii)  $y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t))$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ .

Diremos entonces que  $y = (y_1, \dots, y_N)^T$  es solución de (2.1) en  $(a, b)$ , para todo  $t \in (a, b)$ .

## Capítulo 2. Sistemas Diferenciales No Lineales de Primer Orden

Por lo general, consideraremos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$  es abierto y que  $f = (f_1, \dots, f_N)^T \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N)$ , con lo que podemos sustituir la primera condición de la Definición 2.1.1 por  $y \in C^1((a, b); \mathbb{R}^N)$ .

Ahora, para poder determinar las propiedades de las soluciones de nuestro sistema, es necesaria información adicional sobre los datos iniciales. Si el sistema describiese el movimiento de una partícula en el espacio, estos datos consistirían, por ejemplo, en su posición de origen y el instante inicial de salida.

Así, podemos determinar un problema de valores iniciales (PVI) que se define a continuación.

**Definición 2.1.2.** *Denominaremos problema de valores iniciales (PVI) o problema de Cauchy (PC) para el SDO (2.1) al problema consistente en, fijado un dato inicial  $(t_0, y_{01}, \dots, y_{0N}) \in \Omega$ , hallar una solución de (2.1) en  $(a, b)$  tal que  $t_0 \in (a, b)$  y se verifique que  $y_1(t_0) = y_{01}, \dots, y_N(t_0) = y_{0N}$ . En tal caso, se dice que  $y = (y_1, \dots, y_N)^T$  es solución en  $(a, b)$  de*

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)), \\ \vdots \\ y_N'(t) = f_N(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \dots, y_N(t_0) = y_{0N}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Bajo una serie de suposiciones aplicadas a  $f_1, \dots, f_N$ , se puede probar matemáticamente que el (PC) (2.2) tiene una única solución. Esta solución es una aplicación diferenciable  $y_i(\cdot; t_0, y_{0i}) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^N$  que satisface  $y_i(t_0; t_0, y_{0i}) = y_{0i}$  para todo  $i = 1, \dots, N$ . Aquí, la notación “ $\cdot; t_0, y_{0i}$ ” se usa para especificar la dependencia de la solución respecto del dato inicial  $(t_0, y_{0i})$ . Para simplificar las definiciones, trabajaremos con  $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0N})$  y seguiremos con el ejemplo de la partícula en el espacio propuesto con anterioridad.

Continuamos buscando presentar un teorema de existencia y unicidad de solución maximal para el (PC).

### 2.2. Existencia y Unicidad de Solución

**Teorema 2.2.1** (de Picard). *Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$  un conjunto abierto no vacío y consideremos  $f_1, \dots, f_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  funciones tales que*

- (i)  $f_1, \dots, f_N \in C^0(\Omega)$ ,
- (ii) *existen las derivadas parciales de  $f_1, \dots, f_N$  y son continuas en  $\Omega$ .*

*Entonces, para cada  $(t_0, y_{01}, \dots, y_{0N}) \in \Omega$ , existe  $\delta > 0$  tal que, si denotamos  $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , existe una única solución del PVI (2.2) en  $I_\delta$ .*

Si podemos verificar solamente el apartado (i) anterior, podemos garantizar la existencia de solución (Teorema de Peano), pero no podemos confirmar que dicha solución sea única.

## 2.2. Existencia y Unicidad de Solución

Con esto ya tendríamos una breve noción sobre los sistemas diferenciales, cómo determinar si existe solución única para los mismos y en qué consiste ser solución de un SDO.

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función continua y  $(t_0, y_0)$  un punto en  $\Omega$ . Consideremos ahora el PVI (2.2) escrito en forma compacta

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.3)$$

Nos interesan los PVI que presentan la forma de (2.3), cuyas soluciones se definen en un intervalo temporal que contiene el intervalo  $[t_0, +\infty)$ , i.e., PVI con soluciones globales en el tiempo. Hay varias maneras de ver esto, como la que se expresa a continuación.

**Teorema 2.2.2** (Unicidad de solución). *Asúmase que  $f$  es continua respecto de  $t$  y de clase 1 respecto de  $y$  en  $\Omega$ . Dado cualquier  $(t_0, y_0) \in \Omega$ , sea  $\varphi_1(t)$  la solución del PVI (2.3) en el intervalo  $I_1$  y  $\varphi_2(t)$  la solución del PVI (2.3) en el intervalo  $I_2$ . Entonces*

$$\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Dado que buscamos estudiar el comportamiento de estos sistemas a futuro, necesitamos que los PVI estén definidos globalmente en el tiempo ( $t \geq t_0$ ). Es por ello que se necesita encontrar una solución maximal. Este término se refiere a la solución definida en el mayor intervalo  $[t_0, T_{max})$  posible, de forma que no existan otras soluciones definidas en un intervalo mayor. Por tanto, si  $T_{max} = +\infty$ , la solución de (2.3) está definida globalmente en el tiempo.

Antes de definir matemáticamente lo que es una solución maximal, vamos a ver qué significa 'soluciones continuables', que nos servirá para explicarla.

**Definición 2.2.1.** *Considérese  $(t_0, y_0) \in \Omega$  y sea  $\varphi(t)$  la solución del PVI (2.3) en el intervalo  $J \subset I$ . Se dice que la solución  $\varphi(t)$*

- (i) *es continuable por la derecha, si existe otra solución  $\varphi(t)$  del PVI (2.3) en el intervalo  $J_1$ , tal que  $J \subset J_1$  y  $\sup(J)$  está contenido en el interior de  $J_1$ ;*
- (ii) *es continuable por la izquierda, si existe otra solución  $\varphi(t)$  del PVI (2.3) en el intervalo  $J_2$ , tal que  $J \subset J_2$  y  $\inf(J)$  está contenido en el interior de  $J_2$ ;*
- (iii) *es continuable, si lo es por la derecha, por la izquierda o ambos.*

Con este concepto de continuabilidad, podemos enunciar el concepto de **solución maximal**:

**Definición 2.2.2.** *Una solución del PVI (2.3) se denomina solución maximal si no es continuable.*

**Observación 2.2.1.** *Imagínese que tenemos dos soluciones del PVI (2.3):  $\varphi(t)$  en el intervalo  $J$ , continuable por la derecha, y  $\phi(t)$  en el intervalo  $J_1$  de forma que*

## Capítulo 2. Sistemas Diferenciales No Lineales de Primer Orden

---

$J \subset J_1$  y el  $\text{sup}(J)$  está contenido en  $J_1$ . Entonces, según el Teorema 2.2.2 expresado antes,  $\varphi$  y  $\phi$  coinciden en la intersección de sus intervalos y, por ende,  $\phi$  es simplemente una continuación de  $\varphi$  por la derecha en  $J$ . Esta idea también puede usarse para el lado izquierdo.

El siguiente teorema presenta la existencia y unicidad de esa solución maximal que buscamos, concretamente del PVI (2.3).

**Teorema 2.2.3.** [Existencia y Unicidad de Solución Maximal] *Asúmase que  $f : (a, +\infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es continuamente diferenciable, i.e., sus derivadas parciales de primer orden son funciones continuas, y que existen funciones continuas no negativas  $h, k : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tales que*

$$|f(t, y)| \leq h(t)|y| + k(t), \quad \forall (t, y) \in (a, +\infty) \times \mathbb{R}^N. \quad (2.4)$$

Entonces, existe una única solución de (2.3) que está definida globalmente en el tiempo.

Veamos un ejemplo de esto. Consideremos el PVI siguiente, que cumple la condición de crecimiento (2.4) del Teorema 2.2.3:

$$y'(t) = \frac{3t^2 y(t)}{1 + y^2(t)} + y(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.5)$$

Multiplicando esta ecuación por  $2y(t)$  obtenemos

$$2y(t)y'(t) = \frac{6t^2 y^2(t)}{1 + y^2(t)} + 2y^2(t),$$

lo que implica que

$$y'(t)^2 \leq 2(3t^2 + 1)y^2(t). \quad (2.6)$$

Resolviendo (2.6) como una inecuación diferencial ordinaria, tenemos

$$y(t)^2 \leq y_0^2 e^{2(3t^3+t) - 2(t_0^3+t_0)},$$

y como resultado del Teorema 2.2.3, la solución del PVI (2.5) está definida globalmente en el tiempo.

También puede darse el caso de que no se cumpla la condición (2.4), como en el siguiente ejemplo:

$$y'(t) = y^2(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.7)$$

El PVI (2.7) puede resolverse directamente de forma estándar como

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)}.$$

Puede verse fácilmente que, en el caso de que  $y_0 \leq 0$ , la solución está definida para todo  $t \geq 0$ . Concretamente, está bien definida en el intervalo  $(t_0 + \frac{1}{y_0}, +\infty)$ . Sin

## 2.3. Dependencia Continua Respecto de los Datos Iniciales

embargo, si se da que  $y_0 > 0$ , la solución solo se define en el intervalo  $(-\infty, t_0 + \frac{1}{y_0})$  porque la solución “explota” en tiempo finito en el instante  $t = t_0 + \frac{1}{y_0}$ .

Otra condición que asegura existencia de solución definida globalmente en el tiempo es la *condición de disipatividad*. Para entenderla, tomaremos un sistema a partir de (2.3) con  $f(t, y) = f(y)$ . Asíumase que existen dos constantes  $\alpha, \beta$  con  $\beta > 0$  tales que

$$f(y) \cdot y \leq \alpha|y|^2 + \beta. \quad (2.8)$$

Tomando el producto escalar de (2.3) con  $y$  obtenemos

$$\frac{d}{dt}|y(t)|^2 \leq 2\alpha|y(t)|^2 + 2\beta,$$

lo que implica que

$$|y(t)|^2 \leq |y_0|^2 e^{2\alpha(t-t_0)} - \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{2\alpha(t-t_0)}).$$

Por tanto, si se tiene que  $\alpha > 0$

$$|y(t)|^2 \leq (|y_0|^2 + \frac{\beta}{\alpha})e^{2\alpha(t-t_0)},$$

y las soluciones están definidas globalmente en el tiempo. Por otro lado, si  $\alpha < 0$

$$|y(t)|^2 \leq |y_0|^2 e^{2\alpha(t-t_0)} - \frac{\beta}{\alpha},$$

y toda solución se encuentra contenida en una bola centrada en 0 con radio  $r = -\frac{\beta}{\alpha} + 1$  en algún instante  $T$  (dependiente de  $y_0$ ) y se mantiene dentro indefinidamente, i.e.,  $\forall t \geq T$ . Otra manera de expresarlo es que existe una bola absorbente para todas las soluciones, cosa debida a la condición de disipatividad (2.8).

La situación ideal se da en el caso de que, con un intervalo maximal de tiempo  $(m_1, m_2)$ ,  $m_2 = +\infty$ , en cuyo caso la solución existe y está definida para todo tiempo  $t$ .

**Teorema 2.2.4.** *Sea  $(m_1, m_2)$  un intervalo maximal de existencia para el PVI (2.3). Si  $|m_2| < \infty$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow m_2^-} |\varphi(t)| = +\infty$ . De forma similar para  $m_1$ .*

De esta forma vemos que, en el caso de que la solución explote en tiempo finito, entonces  $m_2 = +\infty$  y la solución es no acotada.

## 2.3. Dependencia Continua Respecto de los Datos Iniciales

Ahora expresaremos la dependencia de la solución de los datos iniciales del PVI (2.3). Para ello, nos damos cuenta de que una solución maximal de (2.3) no deja

## Capítulo 2. Sistemas Diferenciales No Lineales de Primer Orden

---

de ser una función con punto inicial  $(t_0, y_0) \in \Omega$ . De esta manera, podemos definir el conjunto

$$\Theta := \{(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{N+2} : (t_0, y_0) \in \Omega \text{ y } t \in I_{max}(t_0, y_0)\}, \quad (2.9)$$

que nos permite reformular la función  $\varphi(t)$ , solución del PVI (2.3), como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi : \Theta \subset \mathbb{R}^{N+2} &\rightarrow \mathbb{R}^N, \\ (t, t_0, y_0) \in \Theta &\mapsto \varphi(t; t_0, y_0) \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Esta expresión de la función solución se denomina *solución maximal del PVI (2.3) expresada en términos de los valores iniciales*.

Sabemos gracias a lo expresado en este capítulo que la solución maximal  $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$  es continuamente diferenciable respecto a  $t$  en el intervalo maximal de existencia, i.e.,  $I_{max}(t_0, y_0)$ . En el teorema siguiente podemos ver que la solución maximal  $\varphi(t; \cdot, \cdot)$  es también continua expresada en términos de valores iniciales  $(t_0, y_0)$ .

**Teorema 2.3.1** (Dependencia continua de los valores iniciales). *Asúmase que  $\Omega$  es un subconjunto conexo, abierto, no vacío de  $\mathbb{R}^N$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  es continua respecto de  $t$  y de clase 1 respecto de  $y$ . Sea  $\Theta$  definida en (2.9). Entonces, la solución global  $\varphi(\cdot; \cdot, \cdot)$  del PVI (2.3) expresada en términos de los valores iniciales es continua en  $\Theta$ , i.e.,  $\varphi \in C^0(\Theta; \mathbb{R}^N)$ .*

Asumiremos de aquí en adelante, al tratar con la parte teórica, que trabajamos con PVI's que verifican las condiciones necesarias para garantizar la existencia y unicidad de solución global, así como la dependencia continua respecto de los datos iniciales.

En el siguiente capítulo vamos a comenzar a ver los conceptos básicos sobre sistemas dinámicos autónomos, que nos servirán para presentar la teoría de estabilidad de estos sistemas y la aplicación de las mismas en el mundo real.

## Capítulo 3

# Teoría de Estabilidad en Sistemas Dinámicos Autónomos

### 3.1. Sistemas Dinámicos Autónomos

Los sistemas dinámicos gozan de una gran relevancia en los últimos años debido en gran parte a su utilidad en la modelización de fenómenos reales de importancia. Un marco teórico para estos sistemas dinámicos nos facilita un análisis completo y efectivo de diferentes tipos de problemas. Con este trabajo se busca aportar un marco teórico sobre teoría de sistemas en dimensión finita para ser accesible para investigación en diferentes campos (Ingeniería, Biología, etc).

Dentro de los sistemas dinámicos, nos centraremos concretamente en los sistemas dinámicos autónomos, como veremos más adelante.

Comenzaremos con un ejemplo en el que partiremos de la posición de una partícula a lo largo de una trayectoria en  $\mathbb{R}^N$ , modelable según el sistema diferencial

$$y' = g(y), \quad (3.1)$$

donde  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

Añadida a esta ecuación, es necesaria información adicional sobre el problema para poder determinar una solución concreta del sistema (3.1). Para el ejemplo expresado, esta información podría ser la posición inicial de la partícula  $y_0 \in \mathbb{R}^N$  que nos permite determinar la posición de la misma en cualquier momento futuro.

Así, un problema de valores iniciales (PVI) asociado a (3.1) sería:

$$y' = g(y), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^N. \quad (3.2)$$

Si tomamos el Teorema 2.2.1 (de Picard), tenemos condiciones bajo las que podemos demostrar que para el PVI que acabamos de definir existe una única solución maximal. Tomando la expresión  $; t_0, y_0$  para recordar la dependencia de la función de los valores iniciales  $(t_0, y_0)$ , esta solución es una función  $y(\cdot; t_0, y_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  con derivada  $y'(t) = g(y(t))$  que satisface que  $y(t_0; t_0, y_0) = y_0$ .

### Capítulo 3. Teoría de Estabilidad en Sistemas Dinámicos Autónomos

---

Además, las soluciones que se obtienen del PVI (3.2) presentan las siguientes propiedades básicas:

(a) **Autonomía del sistema.**

La evolución de  $y$  depende del tiempo transcurrido y no del instante de comienzo y de final. Como  $g$  no depende de  $t$ , se puede realizar un desplazamiento  $t \rightarrow t - t_0$  y entonces

$$y(t; t_0, y_0) = y(t - t_0; 0, y_0), \quad \forall t \geq t_0,$$

por lo que, siguiendo nuestro ejemplo, la posición de la partícula en  $t \geq t_0$  empezando en  $(t_0, y_0)$  será el mismo que en el instante  $t - t_0$  partiendo de  $(0, y_0)$ . Gracias a esta propiedad se puede tomar 0 como instante inicial para todos los casos ( $t_0 = 0$ ).

(b) **Propiedad de valores iniciales.**

Si un sistema parte de un dato inicial  $(t_0, y_0)$ , entonces la trayectoria de su función pasa por dicho punto. Matemáticamente,

$$y(t_0; t_0, y_0) = y_0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^N, t_0 \in \mathbb{R}.$$

(c) **Concatenación de solución.**

Supongamos una solución que parte del dato inicial  $(0, y_0)$ . Transcurrido un tiempo  $t_1$ , alcanza el punto  $y_1$  y, saliendo de esta nueva posición, alcanza otro punto  $y_2$  tras un tiempo  $t_2$ . Entonces, el punto  $y_2$  se alcanza de la misma manera partiendo del punto  $(0, y_0)$  transcurrido un tiempo  $t_1 + t_2$ . Se define como

$$y(t_2; 0, y(t_1; 0, y_0)) = y(t_1 + t_2; 0, y_0).$$

(d) **Continuidad de soluciones respecto a valores iniciales.**

En el entorno científico, muchas veces se producen ligeras desviaciones causadas por interferencias humanas, de las herramientas o del entorno donde se realiza el experimento o análisis. Por ello, se debe comprobar que las soluciones partiendo del punto  $(0, y_0)$  y de  $(0, y_0^*)$ , aproximación de  $y_0$ , son muy cercanas entre sí.

Expresado de forma matemática y teniendo un espacio de estados  $Y$  (por ejemplo,  $\mathbb{R}^N$ ), un sistema dinámico es una función  $\varphi(t, y_0)$ , definida para todo  $t \in \mathbb{T}$  ( $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  para tiempo discreto y  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  para continuo) que describe cómo evolucionan los diferentes datos iniciales  $y_0 \in Y$  con el tiempo. Para el ejemplo anterior podemos definir  $\varphi(t, y_0) := y(t; 0, y_0)$  y reescribir las propiedades anteriores del PVI como propiedades de la función  $\varphi(\cdot, \cdot)$ .

**Definición 3.1.1.** *Sea  $Y$  un espacio métrico. Un sistema dinámico es una función continua  $\varphi : \mathbb{T} \times Y \rightarrow Y$  con las propiedades:*

(i) *Propiedad de valores iniciales:*

$$\varphi(0, y) = y \quad \forall y \in Y. \tag{3.3}$$

## 3.2. Introducción a la Teoría de Estabilidad

---

(ii) *Propiedad de grupo:*

$$\varphi(t + \tau, y) = \varphi(t, \varphi(\tau, y)) \quad \forall t, \tau \in \mathbb{T} \text{ e } y \in Y. \quad (3.4)$$

La propiedad expresada por (3.4) se denomina de grupo porque el conjunto de funciones  $\{\varphi(t, \cdot) : t \in \mathbb{T}\}$ , que describe el espacio de estados  $Y$  sobre sí mismo, forma un grupo de composición. Este también puede ser un semigrupo en el caso del conjunto de soluciones  $\{\varphi(t, \cdot) : t \in \mathbb{T}_0^+\}$  de  $Y$ , donde  $\mathbb{T}_0^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geq 0\}$ . En el caso de que se tenga un semigrupo, hablamos de un sistema semi-dinámico que puede definirse de la siguiente manera.

**Definición 3.1.2.** *Sea  $Y$  un espacio métrico. Entonces, un sistema semi-dinámico es una función continua  $\varphi : \mathbb{T}_0^+ \times Y \rightarrow Y$  con la propiedad de valores iniciales (3.3) y la propiedad de semigrupo*

$$\varphi(t + \tau, y) = \varphi(t, \varphi(\tau, y)) \quad \forall t, \tau \in \mathbb{T}_0^+ \text{ e } y \in Y. \quad (3.5)$$

En el caso  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , tendríamos un sistema semi-dinámico discreto y si  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , un sistema semi-dinámico continuo. Dado que en nuestra principal referencia [1] se toman únicamente los sistemas dinámicos (semi-dinámicos) continuos, a lo largo de este trabajo recurriremos únicamente a estos, omitiendo el término "continuo" si no es requerido para la definición.

También, se tratarán sistemas dinámicos generados por soluciones obtenidas de un sistema diferencial ordinario. De esta manera, se busca expresar no solo la teoría más abstracta y general sobre estos sistemas, sino tratar aquellos que presenten una dimensión finita. Se pretende así que esta teoría sea entendible y accesible para investigadores de todos los campos para los que los sistemas dinámicos sean de gran interés: Física, Química, Biología, Ingeniería, etc.

## 3.2. Introducción a la Teoría de Estabilidad

Para facilitar la comprensión de la teoría, estudiaremos los puntos de equilibrio del sistema (3.1). Recordemos que un punto de equilibrio  $y^*$  de un sistema (3.1) es una solución continua de (3.1) que satisface  $g(y^*) = 0$ .

**Definición 3.2.1.** *Un punto de equilibrio se dice que es*

- (i) *estable si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que si  $|y_0 - y^*| < \delta(\epsilon)$ , entonces  $I_{max}(y_0) \supseteq [0, +\infty)$  y*

$$|\varphi(t; y_0) - y^*| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

*Esto implica que las soluciones que comienzan cerca del equilibrio se mantienen cerca en el futuro.*

- (ii) *convergente o atractiva si existe  $\delta > 0$  tal que si  $|y_0 - y^*| < \delta$ , entonces  $I_{max}(y_0) \supseteq [0, +\infty)$  y*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; y_0) = y^*.$$

### Capítulo 3. Teoría de Estabilidad en Sistemas Dinámicos Autónomos

*Esto implica que las soluciones que comienzan cerca del equilibrio convergen a él en tiempo infinito.*

(iii) *asintóticamente estable si es estable y convergente*

(iv) *exponencialmente asintóticamente estable si existen  $\delta > 0$  y  $\alpha, \lambda > 0$  tales que si  $|y_0 - y^*| < \delta$ , entonces  $I_{max}(y_0) \supseteq [0, +\infty)$  y*

$$|\varphi(t; y_0) - y^*| < \alpha |y_0 - y^*| e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

**Observación 3.2.1.** *La Definición 3.2.1 presentada anteriormente está dada para el caso de que el equilibrio sea un punto, una constante  $y^*$ . Sin embargo, puede generalizarse para que englobe una solución no constante: una solución particular  $y^*(t)$  de (3.1) es estable si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que si  $|y_0 - y^*(0)| < \delta(\epsilon)$ , entonces  $I_{max} \supseteq [0, +\infty)$  y*

$$|\varphi(t; y_0) - y^*(t)| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

*Siguiendo este método se pueden generalizar el resto de conceptos que introduce la Definición 3.2.1.*

Todos estos conceptos son uniformes en el tiempo, por lo que  $\delta$  no depende del tiempo, pero solo se cumple para sistemas autónomos. Para SDOs no autónomos se requieren nuevas definiciones que podrían analizarse para una futura ampliación del trabajo.

También es de importancia aclarar que estabilidad y convergencia son propiedades independientes. Equilibrio exponencial implica equilibrio asintótico y este, a su vez, implica estabilidad y convergencia. No obstante, la convergencia no implica estabilidad en caso general, solo para SDOs lineales. Por ejemplo, tomemos el SDO autónomo

$$x'(t) = \frac{x^2(y-x) + y^5}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)}; \quad x'(t) = 0 \text{ para } x = 0, y = 0, \quad (3.6)$$

$$y'(t) = \frac{y^2(y-2x)}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)}; \quad y'(t) = 0 \text{ para } x = 0, y = 0, \quad (3.7)$$

cuyo punto de equilibrio es  $(0, 0)$ . Este equilibrio es convergente, pero inestable (toda solución que empieza cerca tiende a él en tiempo infinito, pero las soluciones que empiezan cerca no permanecen cerca en el futuro). Véase en la Figura 3.1.

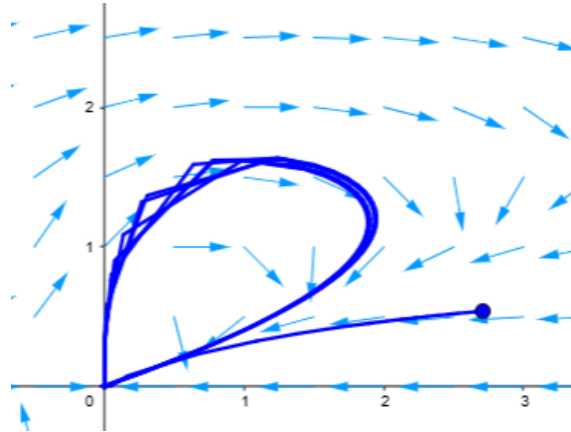


Figura 3.1: Convergencia y atracción del ejemplo (3.6)-(3.7)

Nótese que si se realiza un cambio de variable sobre una solución de (3.1), podemos pasar a analizar la estabilidad de la solución cero (solución trivial)  $\varphi_0(t) \equiv 0$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ) de dicho sistema. Más concretamente, asúmase que  $y^*(t)$  es una solución particular no nula del sistema (3.1), y considérese el cambio de variable  $\bar{y}(t) = y(t) - y^*(t)$ , entonces se cumple que

$$\bar{y}'(t) = \tilde{g}(t, \bar{y}(t)), \quad \text{donde } \tilde{g}(t, \bar{y}) = g(\bar{y} + y^*(t)) - g(y^*(t)),$$

donde el lado derecho de la igualdad satisface que  $\tilde{g}(t, 0) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ . Si se da el caso especial de que  $y^*(t) = y^*$  es una constante para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{g}(t, \bar{y}) = \tilde{g}(\bar{y}) = g(\bar{y} + y^*) - g(y^*)$ . De esta forma, nos podemos centrar para los futuros casos en analizar la estabilidad de la solución cero asumiendo que  $g$  en (3.1) satisface  $g(0) = 0$ .

#### Estabilidad para SDOs lineales:

Para los SDOs lineales, la estabilidad es del mismo tipo para todas sus soluciones. Además, la estabilidad de estas mismas puede determinarse con el comportamiento asintótico de su matriz fundamental. Por ejemplo, para el sistema autónomo (3.1), la matriz fundamental puede determinarse con los autovalores de la matriz del lado derecho de la igualdad. Más concretamente, teniendo el SDO lineal

$$y' = Ay + b(t), \tag{3.8}$$

donde  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$  es una matriz  $d \times d$  con coeficientes reales  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , si  $y^*(t)$  es solución de este SDO lineal (3.8), entonces  $\bar{y}(t) = y(t) - y^*(t)$  es solución del SDO

$$\bar{y}' = A\bar{y}. \tag{3.9}$$

Lo mismo se cumple si  $y^*(t)$  es solución de la contraparte homogénea de (3.8),  $y' = Ay$ . Por ende, la estabilidad de un SDO lineal cualquiera (3.8) puede determinarse con la estabilidad de la solución cero de (3.9), independientemente de si  $b(t) = 0$ . El siguiente teorema nos da la estabilidad de estos SDOs lineales.

## Capítulo 3. Teoría de Estabilidad en Sistemas Dinámicos Autónomos

**Teorema 3.2.1.** Sea  $\{\lambda_j\}_{1 \leq j \leq d} \subset \mathbb{C}$  el conjunto de autovalores de la matriz  $A$ . Entonces,

- (i) cualquier solución de (3.9) es exponencialmente asintóticamente estable si, y solo si, las partes reales de todos los autovalores es negativa, i.e.,  $\Re(\lambda_j) < 0$ ,  $\forall 1 \leq j \leq d$ .
- (ii) cualquier solución de (3.9) es uniformemente estable si, y solo si,  $\Re(\lambda_j) \leq 0$ ,  $\forall 1 \leq j \leq d$  y, si para esos autovalores  $\lambda_j$  ( $1 \leq j \leq d$ ) tales que  $\Re(\lambda_j) = 0$ , la dimensión de la caja de Jordan asociadas a ellos en sus formas canónicas es 1 (su multiplicidad algebraica y geométrica coinciden).

### Estabilidad para SDOs no lineales:

Este último Teorema 3.2.1 nos permite determinar la estabilidad de SDOs lineales, pero puede usarse igualmente para analizar la estabilidad de SDOs no lineales mediante el **método de primera aproximación**. Para entenderse, asúmase que la función  $g$  de (3.1) es continuamente diferenciable y satisface  $g(0) = 0$ . Entonces, según la fórmula de Taylor,  $g$  puede expresarse como

$$g(y) = Jy + T_1(y), \quad J = \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0) \right)_{i,j=1,\dots,d}, \quad (3.10)$$

donde el término superior de  $T_1(\cdot)$  es lo suficientemente pequeño para valores pequeños de  $y$  en el sentido de que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|T_1(y)|}{|y|} = 0.$$

Ahora definimos la estabilidad e inestabilidad de soluciones para el sistema (3.1).

**Teorema 3.2.2.** Asúmase que  $g \in C^1(O)$  y  $g(0) = 0$ . Sea  $J$  la matriz Jacobiana definida en (3.10). Entonces,

- (i) si todos los autovalores de la matriz  $J$  tienen parte real negativa, la solución trivial de (3.1) es (localmente) exponencialmente asintóticamente estable.
- (ii) si uno de los autovalores de la matriz  $J$  tiene parte real positiva, la solución trivial de (3.1) es (localmente) inestable.

Continuaremos ahora con la documentación, conceptos y definiciones que aportan los apuntes [2].

### Estabilidad según segundo método de Lyapunov:

Este nuevo método para determinar la estabilidad de un sistema radica en la existencia de ciertas funciones reales, definidas  $V \in O$ , que se relacionan con las propiedades de estabilidad del sistema diferencial que se está analizando. La dificultad de este método consiste en el cálculo de estas **funciones de Lyapunov**, ya que no existen procedimientos concretos para ello, aunque para muchos

### 3.2. Introducción a la Teoría de Estabilidad

SDOs de origen físico, esta función  $V$  suele venir determinada por la energía asociada al sistema. Como manera simple de entender el método, si  $V$  es decreciente (la energía del sistema decrece), entonces la solución nula es estable.

Vamos a considerar el sistema dinámico autónomo definido anteriormente, que recordamos como

$$y' = g(y), \quad (3.11)$$

donde  $g : O \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  y  $O$  es conexo, abierto, no vacío y supondremos que verifica las condiciones del Teorema de Picard. Podemos considerar  $\Omega = I \times O$  como conjunto abierto maximal de existencia y unicidad asociado al sistema (3.11) para  $I = \mathbb{R}$ . También, el hecho de que  $g(0) = 0$  implica que la función nula es solución en  $\Omega$ , sabiendo que al ser un sistema autónomo, la estabilidad de dicha solución nula determina el tipo de estabilidad del resto de soluciones.

**Definición 3.2.2.** Sea  $V \in C^0(O)$  una función real. Entonces, se dice que

- (i) es definida positiva en  $O$  si  $V(0) = 0$  y  $V(y) > 0$  para cualquier  $y \in O \setminus \{0\}$ .
- (ii) es semidefinida positiva en  $O$  si  $V(0) = 0$  y  $V(y) \geq 0$  para cualquier  $y \in O \setminus \{0\}$
- (iii) es definida o semidefinida negativa en  $O$  si  $-V$  es definida o semidefinida positiva respectivamente.

Para ver esto, tomemos la función

$$V(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

donde  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Es fácil ver que  $V(0) = 0$  y que  $V(y) > 0 \quad \forall y \in O \setminus \{0\}$ . Esta función será, por tanto, definida positiva. Sin embargo, la función de Lyapunov

$$V(y) = y_1^2,$$

donde  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , es semidefinida positiva, ya que si tomamos  $y = (0, y_2, y_3)$  se tendría  $V(y) = 0$ .

**Definición 3.2.3.** Sea  $V : O \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $V \in C^1(O)$ .

- (a) Se denomina derivada respecto del sistema autónomo (3.11) a la función  $\dot{V} : O \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) g_i(y), \quad \forall y \in O.$$

- (b) Se dice que  $V \in C^1(O)$  es una función de Lyapunov en  $O$  para el sistema autónomo (3.11) si  $V$  es definida positiva en  $O$  y

$$\dot{V}(y) \leq 0, \quad \forall y \in O.$$

**Observación 3.2.2.** También podemos definir la derivada de la función de Lyapunov como la derivada de una función compuesta. Supongamos que  $\varphi$  es solución

### Capítulo 3. Teoría de Estabilidad en Sistemas Dinámicos Autónomos

de nuestro sistema (3.11) en un intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  que cumple  $\varphi(t) \in O$  para cualquier  $t \in J$ . Entonces podemos definir la función compuesta  $E(\cdot) = V(\varphi(\cdot))$ , función definida y continuamente diferenciable en  $J$ , i.e.,  $E(\cdot) \in C^1(J)$  de la siguiente manera y, siguiendo la regla de la cadena

$$E'(t) = \frac{d}{dt}[V(\varphi(t))] = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial y_i}(\varphi(t)) \varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial y_i}(\varphi(t)) g_i(\varphi_i(t)) = \dot{V}(\varphi(t)), \quad \forall t \in J.$$

Además, si  $V$  es la función de Lyapunov del sistema, por la Definición 3.2.3 tendríamos que

$$E'(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \leq 0, \quad \forall t \in J.$$

En otras palabras,  $E(t)$  es una función no negativa decreciente en  $J$ .

Veamos ahora el resultado de estabilidad de esta solución nula del sistema (3.11) usando este segundo método (o método directo) de Lyapunov.

**Teorema 3.2.3** (Condiciones suficientes de estabilidad de Lyapunov). *Sea  $V : O \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Lyapunov en  $O$  para el sistema (3.11) tal que  $V \in C^1(O)$ . Entonces,*

- (i) *la solución nula de (3.11) en  $\mathbb{R}$  es uniformemente estable.*
- (ii) *si además  $\dot{V}(y) < 0$ ,  $\forall y \in O \setminus \{0\}$ , la solución nula de (3.11) en  $\mathbb{R}$  es uniformemente asintóticamente estable.*
- (iii) *si existen constantes positivas  $c_1, c_2, c_3, k > 0$  tales que*

$$c_1|y|^k \leq V(y) \leq c_2|y|^k \quad y \quad \dot{V}(y) \leq -c_3|y|^k, \quad \forall y \in O, \quad (3.12)$$

*la solución nula de (3.11) en  $\mathbb{R}$  es exponencialmente asintóticamente estable.*

Vamos a ver esto con un ejemplo. Tomemos por ejemplo el siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_1 y_2^2, \\ y_2' = -y_2 - y_1^2 y_2, \end{cases} \quad (3.13)$$

que presenta un equilibrio en el punto  $(0, 0)$  y la función de Lyapunov

$$V(y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2), \quad (3.14)$$

donde  $y = (y_1, y_2)$ .

Es fácil ver que  $V(0, 0) = 0$  y  $V(y) > 0$ ,  $\forall y \in O$ . Entonces,  $V$  es definida positiva. Por otro lado,

$$\dot{V}(y) = y_1 y_1' + y_2 y_2' = y_1(-y_1 - y_1 y_2^2) + y_2(-y_2 - y_1^2 y_2) = -y_1^2 - y_2^2 - 2y_1^2 y_2^2 = -(y_1^2 + y_2^2)^2.$$

Así, se puede ver que  $\dot{V}(y) = -(y_1^2 + y_2^2)^2 < 0$ ,  $\forall y \in O \setminus \{0\}$  y  $\dot{V}$  es definida negativa.

Siguiendo el punto (b) del Teorema 3.2.3, podemos concluir que la solución nula es asintóticamente estable.

Veamos ahora que no solo se tienen condiciones para la estabilidad de la solución nula, sino que también existen condiciones suficientes de inestabilidad.

### 3.2. Introducción a la Teoría de Estabilidad

**Teorema 3.2.4** (de Tchetaev). *Asúmase que existen  $\rho > 0$  y  $V \in C^1(\bar{B}_\rho)$  tales que  $B_\rho \subseteq O$  y*

(a)  $V(0) = 0,$

(b)  $\dot{V}(y)$  es definida positiva en  $B_\rho,$

(c) Para cualquier  $\sigma \in (0, \rho)$  existe  $y_\sigma \in B_\rho$  tal que  $V(y_\sigma) > 0.$

Entonces, la solución nula de (3.11) es inestable.

Tomemos para ver esto el sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_1, \\ y_2' = y_2 + y_2^2, \end{cases} \quad (3.15)$$

y la función de Lyapunov

$$V(y) = \frac{1}{2}(-y_1^2 + y_2^2),$$

donde  $y = (y_1, y_2).$

En primera instancia podemos ver que se cumple el primer punto del Teorema 3.2.4 de Tchetaev, ya que  $V(0,0) = 0.$  Comprobemos si se cumplen el resto de puntos.

$$\dot{V}(y) = -y_1 y_1' + y_2 y_2' = y_1^2 + y_2^2(1 + y_2) \geq 0,$$

con lo que se cumple el punto (b) del teorema.

Finalmente, si tomamos  $y = (0, y_2),$  con  $y_2 > 0,$  se da que

$$V(y) = \frac{1}{2}y_2^2 > 0.$$

Entonces, se cumple el punto (c) del Teorema 3.2.4 de Tchetaev y concluimos que la solución nula del sistema (3.15) es inestable. Véase la siguiente Figura 3.2 para ver esta inestabilidad gráficamente.

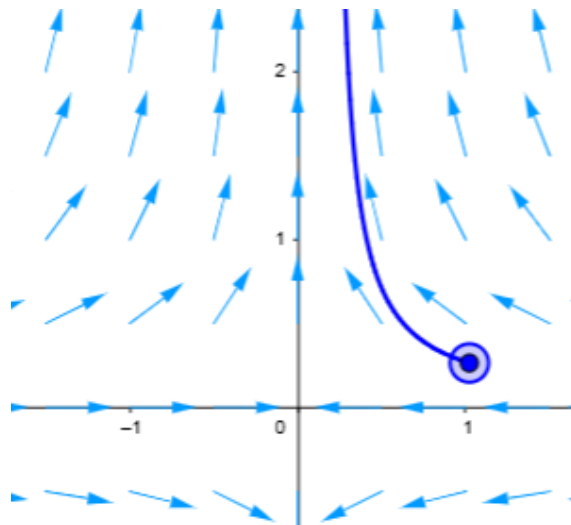


Figura 3.2: Comportamiento inestable de la solución nula en (3.15)

### **Capítulo 3. Teoría de Estabilidad en Sistemas Dinámicos Autónomos**

---

En el siguiente capítulo comenzaremos a ver nuevos elementos de importancia en ese análisis de estabilidad, que son las órbitas en sistemas autónomos y los atractores globales.

## Capítulo 4

# Órbitas, Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson

En este nuevo capítulo, continuaremos con el análisis del sistema autónomo

$$y' = g(y). \quad (4.1)$$

Concretamente, queremos estudiar cómo los equilibrios de cualquier solución maximal pueden comportarse de manera asintótica en torno a una órbita que pasa por un punto  $y_0$ . Veremos que esta órbita es, geoméricamente, una curva en torno al punto de equilibrio, de forma que las soluciones tienden a ella con el tiempo. Para estos conceptos, tomaremos una función  $g : O \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que  $g \in C^0(O)$  y verifica las condiciones del Teorema de Picard en  $O$ .

### 4.1. Concepto de Órbita y sus propiedades

Comencemos con la definición matemática de órbita del sistema (4.1).

**Definición 4.1.1.** Sea  $y_0 \in O$  y un intervalo de existencia  $I(y_0) = I(0, y_0)$ . Se denomina órbita del sistema autónomo (4.1) asociada a  $y_0$  al conjunto  $\gamma(y_0)$  dado por

$$\gamma(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0)\} \subset O.$$

Podemos sacar de la definición que  $y_0 \in \gamma(y_0)$  y, como hemos mencionado en la introducción de este capítulo,  $\gamma(y_0)$  es, generalmente, una curva en  $\mathbb{R}^N$  que pasa por  $y_0$ .

**Observación 4.1.1.** Recordemos de la independencia del instante inicial que para cualquier  $(t_0, y_0) \in I \times O$ , con  $I = \mathbb{R}$ , se tiene

1.  $I(t_0, y_0) = t_0 + I(y_0) \Rightarrow I(y_0) = I(t_0, y_0) - t_0$ ,
2.  $\varphi(t; 0, y_0) = \varphi(t + t_0; t_0, y_0)$ .

## Capítulo 4. Órbitas, Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson

Entonces, si  $y_0 \in O$  se tiene

$$\begin{aligned}\gamma(y_0) &= \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0)\} = \{\varphi(t + t_0; t_0, y_0) : t \in I(t_0, y_0) - t_0\} \\ &= \{\varphi(s; t_0, y_0) : s \in I(t_0, y_0)\} = \{\varphi(t; t_0, y_0) : t \in I(t_0, y_0)\}.\end{aligned}$$

Gracias a la Observación 4.1.1 tenemos una nueva definición de órbita asociada a  $y_0$ , pero extendida para cualquier punto inicial  $t_0$  del PVI asociado al sistema (4.1).

**Definición 4.1.2.** Sea  $y_0 \in O$ . Se dice que  $y_0$  es un punto crítico o estacionario del sistema (4.1) si se cumple

$$g(y_0) = 0.$$

**Observación 4.1.2.** Para que  $y_0$  sea un punto crítico del sistema (4.1) se da que  $\varphi(t; 0, y_0) = y_0$  para cualquier  $t \in I(y_0) \equiv \mathbb{R}$ , i.e.,

$$\gamma(y_0) = \{y_0\}.$$

Vamos a ver un ejemplo sobre estos conceptos. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_1(1 - y_1^2 - y_2^2), \\ y_2' = -y_1 + y_2(1 - y_1^2 - y_2^2). \end{cases} \quad (4.2)$$

Calculamos sus puntos críticos multiplicando por  $y_2$  y  $-y_1$  la primera y segunda ecuación respectivamente y las sumamos, resultando en

$$y_1^2 + y_2^2 = 0.$$

Por tanto, el único posible punto crítico es el  $(0, 0)$  (además, puede comprobarse que  $g(0, 0) = 0$ ). Entonces, el punto crítico del sistema es el  $(0, 0)$  y su órbita

$$\gamma(0, 0) = \{(0, 0)\}.$$

Para resolver nuestro sistema (4.2) realizaremos cambio a coordenadas polares

$$\begin{cases} y_1 = \rho \cos(\theta), \\ y_2 = \rho \sen(\theta), \end{cases}$$

donde

$$\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = |y| \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

De aquí, podemos obtener el sistema diferencial

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1 - \rho^2), \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

Si fijamos un  $y_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , obtenemos un PVI para el sistema (4.2) con dato inicial  $y(0) = y_0$ :

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1 - \rho^2), & \rho(0) = \rho_0, \\ \theta' = -1, & \theta(0) = \theta_0, \end{cases}$$

## 4.1. Concepto de Órbita y sus propiedades

con  $(\rho_0, \theta_0)$  las coordenadas polares de  $y_0$ , siendo además  $\rho_0 = |y_0| \in (0, \infty)$ .

Resolviendo el sistema, tenemos

$$\begin{cases} \rho(t; 0, \rho_0, \theta_0) = \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + (1 - \rho_0^2)e^{-2t}}}, \\ \theta'(t; 0, \rho_0, \theta_0) = -t + \theta_0, \end{cases}$$

con  $t \in I(\rho_0, \theta_0)$  donde:

$$I(\rho_0, \theta_0) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } \rho_0 \in (0, 1], \\ (T(\rho_0), \infty), & \text{si } \rho_0 \in (1, \infty) \end{cases} \quad \text{con } T(\rho_0) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0^2} \right).$$

Con todo esto, podemos sacar las siguientes conclusiones:

1. Si  $|y_0| = 1 \Rightarrow \rho_0 = 1$ , entonces  $\rho(t; 0, \rho_0, \theta_0) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Entonces, dado que  $\rho'$  no cambia con el tiempo, la órbita que pasa por  $y_0$  está definida por  $\gamma(y_0) = S_1$ , siendo  $S_1$  la circunferencia de radio 1 y centro  $(0, 0)$ . Además, esta circunferencia se recorre en sentido horario.
2. Si  $0 < |y_0| < 1 \Rightarrow \rho(t; 0, \rho_0, \theta_0) \in (0, 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Entonces, como en este caso  $\rho' = \rho(1 - \rho^2) > 0$ , la función  $\rho(t; 0, \rho_0, \theta_0)$  es estrictamente creciente. De hecho,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(t; 0, \rho_0, \theta_0) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t; 0, \rho_0, \theta_0) = 1$ . Para este caso tendríamos que la órbita  $\gamma(y_0)$  es una espiral contenida dentro de la bola unidad que va del origen de coordenadas a  $S_1$  en sentido horario.
3. Si  $|y_0| > 1 \Rightarrow \rho(t; 0, \rho_0, \theta_0) \in (1, \infty), \quad \forall t \in (T(\rho_0), \mathbb{R})$ . Así, en este caso  $\rho' = \rho(1 - \rho^2) < 0$  y la función  $\rho(t; 0, \rho_0, \theta_0)$  es estrictamente decreciente. De hecho,  $\lim_{t \rightarrow T(\rho_0)^-} \rho(t; 0, \rho_0, \theta_0) = \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t; 0, \rho_0, \theta_0) = 1$ . Entonces, tendríamos que la órbita  $\gamma(y_0)$  sería una espiral que se acerca desde infinito hasta la circunferencia unidad  $S_1$  en sentido horario.

En las gráficas de la Figura 4.1 se pueden ver claramente los tres diferentes casos expuestos del ejemplo.

Veamos ahora el concepto de órbita cíclica y conjunto límite para el sistema autónomo (4.1). Para ello, recordamos la independencia del instante inicial.

**Proposición 4.1.1.** *Teniendo un sistema autónomo (4.1) con  $g$  verificando las condiciones del Teorema de Picard en  $O$ , para el punto inicial  $(t_0, y_0)$ , si la solución maximal del PVI asociado a (4.1.1) se define como  $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ , entonces*

1.  $I(t_0, y_0) = t_0 + I(0, y_0) = t_0 + I(y_0)$ .
2.  $\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t - t_0; 0, y_0), \quad \forall t \in I(t_0, y_0)$ .

**Proposición 4.1.2.** *Teniendo un sistema autónomo (4.1) con  $g$  verificando las condiciones del Teorema de Picard en  $O$ , para el punto inicial  $(t_0, y_0)$ , si  $t_1 \in I(t_0, y_0)$  e  $y_1 = \varphi(t_1; t_0, y_0)$ , entonces  $I(t_0, y_0) = I(t_1, y_1)$  y*

$$\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t; t_1, y_1), \quad \forall t \in I(t_0, y_0).$$

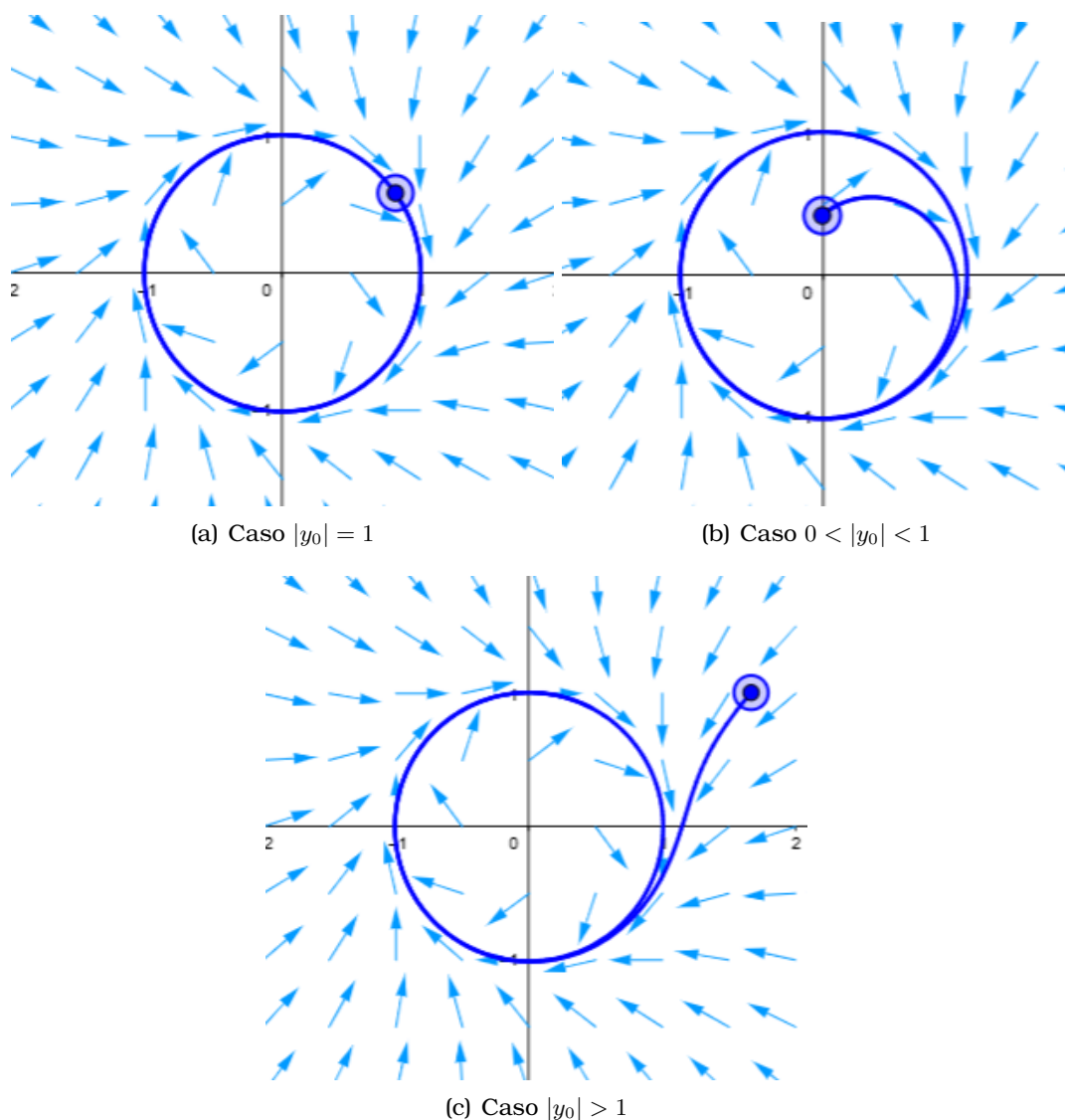


Figura 4.1: Casos Órbita del Sistema (4.2)

Como consecuencia de estas proposiciones, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.1.** *En las condiciones de Proposición 4.1.1, sean  $y_0 \in O$ ,  $t_1 \in I(y_0)$  e  $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0)$ . Entonces,  $I(y_0) = t_1 + I(y_1)$  y*

$$\varphi(t; 0, y_1) = \varphi(t + t_1; 0, y_0), \quad \forall t \in I(y_1);$$

*De forma equivalente,  $\varphi(t; 0, y_0) = \varphi(t - t_1; 0, y_1)$ ,  $\forall t \in I(y_0)$ .*

A partir de esto, podemos definir algunas propiedades del conjunto órbita  $\gamma(y_0)$ .

**Proposición 4.1.3.** *Sean  $y_0, y_1 \in O$ . Entonces,*

1.  $y_1 \in \gamma(y_0)$  si, y solo si,  $\gamma(y_1) = \gamma(y_0)$ .

## 4.1. Concepto de Órbita y sus propiedades

---

2.  $\gamma(y_0) \cap \gamma(y_1) \neq \emptyset$  si, y solo si,  $\gamma(y_1) = \gamma(y_0)$ .

**Proposición 4.1.4.** Sea  $y_0 \in O$  y consideremos  $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0) \in \gamma(y_0)$ , con  $t_1 \in I(y_0)$ . Entonces,

1. si  $t_1 \geq 0$ , entonces  $\gamma^+(y_0) = \gamma^+(y_1) \cup \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in [0, t_1]\}$ .
2. si  $t_1 \leq 0$ , entonces  $\gamma^+(y_1) = \gamma^+(y_0) \cup \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in [t_1, 0]\}$ .

Así, ya tenemos algunas propiedades que vamos a utilizar para las siguientes definiciones. Veamos la de semiórbita positiva y negativa.

**Definición 4.1.3.** Dado un punto inicial  $y_0 \in O$ , definimos la semiórbita positiva (o negativa) del sistema (4.1) asociada a  $y_0$  al conjunto  $\gamma^+(y_0)$  (o al conjunto  $\gamma^-(y_0)$ ) dado por :

$$\gamma^+(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0), \quad t \geq 0\},$$

$$\text{o } \gamma^-(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0), \quad t \leq 0\}.$$

Ahora con la definición de semiórbita, veamos la de órbita cíclica.

**Definición 4.1.4.** Sea  $y_0 \in O$ . Se dice que la órbita  $\gamma(y_0)$  del sistema (4.1) es cíclica o cerrada si  $I(y_0) = \mathbb{R}$  y existe  $T > 0$  tal que

$$\varphi(t + T; 0, y_0) = \varphi(t; 0, y_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En este caso se dice que  $T$  es un periodo de la órbita.

Entonces, las órbitas cíclicas corresponden a las soluciones periódicas del sistema autónomo (4.1). Tenemos como caso trivial el de los puntos críticos del sistema, dado que si  $y_0 \in O$  es punto crítico de (4.1), entonces  $\varphi(t; 0, y_0) = y_0$ , para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\gamma(y_0) = \{y_0\}$  y es cíclica con periodo  $T > 0$  arbitrario. Este tipo de órbitas cíclicas que se reducen a un punto se denominan **órbitas cíclicas degeneradas**.

**Observación 4.1.3.** Si para  $y_0 \in O$  la órbita  $\gamma(y_0)$  es cíclica, entonces se tiene que  $\gamma(y_0) = \gamma^+(y_0) = \gamma^-(y_0)$ . Además, si  $y_1 \in \gamma(y_0)$ , se tiene que  $\gamma^+(y_0) = \gamma^+(y_1)$ .

**Proposición 4.1.5.** Sea  $y_0 \in O$  y consideremos el sistema autónomo (4.1). Supongamos que la órbita  $\gamma(y_0)$  se corta a sí misma, i.e., existen  $t_1, t_2 \in I(y_0)$ , con  $t_1 \neq t_2$ , tales que

$$\varphi(t_1; 0, y_0) = \varphi(t_2; 0, y_0).$$

Entonces  $\gamma(y_0)$  es cíclica y  $T = |t_2 - t_1|$  es un periodo asociado.

Antes de ver el Teorema de LaSalle, necesitamos definir y entender algunos conceptos.

## Capítulo 4. Órbitas, Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson

**Definición 4.1.5.** Sea  $M \subseteq O$ .

- (a) Se dice que  $M$  es un conjunto invariante para el sistema (4.1) si para cualquier  $y_0 \in M$  se satisface que  $\gamma(y_0) \subseteq M$ .
- (b) Se dice que  $M$  es un conjunto positivamente invariante (o negativamente invariante) para el sistema (4.1) si para cualquier  $y_0 \in M$  se tiene que  $\gamma^+(y_0) \subseteq M$  (o  $\gamma^-(y_0) \subseteq M$ ).

El que un conjunto sea invariante implica que toda solución que pasa por un punto dentro de este conjunto invariante  $M$ , se mantendrá dentro de dicho conjunto en el futuro.

**Definición 4.1.6.** Se dice que  $p \in \mathbb{R}^N$  es un punto límite positivo (o negativo) asociado al sistema (4.1) y al punto  $y_0 \in O$  si existe una sucesión  $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset I(y_0)$  tal que

$$\lim t_n = \sup I(y_0) \text{ (ó } \lim t_n = \inf I(y_0)) \quad \text{y} \quad \lim \varphi(t_n; 0, y_0) = p$$

Y, con esta definición de punto límite podemos definir lo que es un conjunto límite.

**Definición 4.1.7.** Dado un  $y_0 \in O$ , se denomina conjunto límite positivo (o negativo) asociado al sistema (4.1) y al punto  $y_0$  al conjunto

$$\omega^+(y_0) = \{p \in \mathbb{R}^N : p \text{ es un punto límite positivo asociado a (4.1) y a } y_0\},$$

(respectivamente,  $\omega^-(y_0) = \{p \in \mathbb{R}^N : p \text{ es un punto límite negativo asociado a (4.1) y a } y_0\}$ ).

Además, el conjunto límite de un conjunto  $A \subseteq O$  se define como

$$\omega^\pm(A) = \bigcup_{y_0 \in A} \omega^\pm(y_0).$$

Seguimos demostrando algunas propiedades de los conjuntos límite, centrándonos en los conjunto límite positivo, aunque puedan extenderse para el caso de los conjuntos límite negativo.

**Proposición 4.1.6.** Consideremos el sistema autónomo (4.1), con  $g$  verificando las condiciones del Teorema de Picard en  $O$ , y sea  $y_0 \in O$ . Se tiene:

- (i) Si  $y_1 \in \gamma(y_0)$ , entonces  $\omega^+(y_1) = \omega^+(y_0)$ .
- (ii)  $\overline{\gamma^+(y_0)} = \gamma^+(y_0) \cup \omega^+(y_0)$ .

**Teorema 4.1.1.** Consideremos el sistema autónomo (4.1) con  $g$  verificando las condiciones del Teorema de Picard en  $O$ . Sea  $y_0 \in O$  y  $K \subset O$  un compacto tal que  $\gamma^+(y_0) \subseteq K$ . Entonces,

- (i)  $\sup I(y_0) = \infty$ .
- (ii)  $\omega^+(y_0) \subset K$  es un conjunto compacto, no vacío.

## 4.2. Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson

(iii)  $\omega^+(y_0) \subseteq K$  es **invariante** para el sistema (4.1).

(iv)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\varphi(t; 0, y_0), \omega^+(y_0)) = 0$ .

Además, siguiendo las condiciones expuestas en el Teorema 4.1.1, se tiene que si  $\omega^+(y_0) = \{y_1\}$ , entonces  $y_1$  es un punto crítico del sistema.

## 4.2. Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson

### 4.2.1. Teorema de LaSalle

El Teorema de LaSalle es conocido como el Principio de Invarianza de LaSalle, que asegura, bajo ciertas condiciones, que existen conjuntos absorbentes en un sistema autónomo que atraen las órbitas del sistema.

Consideremos de nuevo un sistema autónomo (4.1) con  $O \subseteq \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto, conexo, no vacío y  $g : O \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función que verifica las condiciones del Teorema de Picard en  $O$ .

**Teorema 4.2.1** (Principio de Invarianza de LaSalle). *Consideremos el sistema autónomo (4.1) con  $g$  localmente Lipschitz en  $O$ . Sea  $K \subset O$  un conjunto compacto, no vacío y sea  $V$  una función de Lyapunov tal que  $V \in C^1(O)$  y  $\dot{V}(y) \leq 0$  para cualquier  $y \in K$ . Sea  $y_0 \in O$  tal que  $\gamma^+(y_0) \subseteq K$ . Denotemos por*

$$E = \{y \in K : \dot{V}(y) = 0\},$$

*y sea  $M$  el mayor subconjunto invariante del sistema (4.1) de  $E$ , i.e.,  $M$  es la unión de todos los subconjuntos invariantes contenidos en  $E$ . Entonces:*

(i)  $I(y_0) \supset [0, \infty)$ .

(ii)  $\omega^+(y_0) \subseteq M$  (ergo  $M \neq \emptyset$ ).

(iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; 0, y_0), M) = 0$ .

**Observación 4.2.1.** *El Principio de Invarianza de LaSalle puede aplicarse a cualquier conjunto de equilibrio, no solo a un único punto. Pero cuando  $M$  es un único punto, podemos obtener información adicional del equilibrio. Si encontramos una función de Lyapunov semidefinida negativa con  $M$  un único punto, entonces el equilibrio es asintóticamente estable (estable por el Teorema 3.2.3 y convergente por el principio de LaSalle).*

Ahora, en el caso de órbitas unidimensionales todo es más simple. Comprobémoslo en el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $\varphi$  la solución del PVI*

$$\begin{cases} y' = g(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

*donde  $g$  es localmente Lipschitz en  $(a, b)$ , con  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $y_0 \in (a, b)$ , y denotemos  $\psi(\cdot) = \varphi(\cdot; 0, y_0)$ . Se tiene entonces que*

## Capítulo 4. Órbitas, Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson

■ Si  $y_0$  es punto crítico de  $g$ , entonces  $I(y_0) = \mathbb{R}$  y  $\psi(t) = y_0$ , para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ .

■ Si  $g(y_0) > 0$ , entonces  $\psi$  es estrictamente creciente en  $I(y_0)$ . Además,

(i) Si existe un punto crítico de  $g$  mayor (o menor) que  $y_0$ , entonces  $I(y_0) \supset [0, +\infty)$  (o  $I(y_0) \supset (-\infty, 0]$ ) y

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \hat{y} \quad (\text{respectivamente, } \exists \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = \check{y}),$$

con  $\hat{y}$  el menor de los puntos críticos de  $g$  mayores que  $y_0$  (o con  $\check{y}$  el mayor de los puntos críticos de  $g$  menores que  $y_0$ )

(ii) Si no existe un punto crítico de  $g$  mayor (o menor) que  $y_0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \sup I(y_0)} \psi(t) = b \quad (\text{respectivamente, } \lim_{t \rightarrow \inf I(y_0)} \psi(t) = a),$$

donde  $\sup I(y_0)$  (o  $\inf I(y_0)$ ) puede ser finito o no.

■ Si  $g(y_0) < 0$ , entonces  $\psi$  es estrictamente decreciente en  $I(y_0)$ . Además,

(i) Si existe un punto crítico de  $g$  menor (o mayor) que  $y_0$ , entonces  $I(y_0) \supset [0, +\infty)$  (o  $I(y_0) \supset (-\infty, 0]$ ) y

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \hat{y} \quad (\text{respectivamente, } \exists \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = \check{y}),$$

con  $\hat{y}$  el mayor de los puntos críticos de  $g$  menores que  $y_0$  (o con  $\check{y}$  el menor de los puntos críticos de  $g$  mayores que  $y_0$ )

(ii) Si no existe un punto crítico de  $g$  menor (o mayor) que  $y_0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \sup I(y_0)} \psi(t) = a \quad (\text{respectivamente, } \lim_{t \rightarrow \inf I(y_0)} \psi(t) = b),$$

donde  $\sup I(y_0)$  (o  $\inf I(y_0)$ ) puede ser finito o no.

### 4.2.2. Teorema de Poincaré-Bendixson

Hasta ahora hemos visto que las órbitas de los sistemas autónomos pueden o acercarse a un punto crítico, o acercarse a una órbita cíclica. El Teorema de Poincaré-Bendixson nos permite clasificar los conjuntos límite en estos dos casos para sistemas dinámicos autónomos planos (en  $\mathbb{R}^2$ ). Por tanto, tomaremos

$$g : O \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

con  $O$  un conjunto abierto, conexo, no vacío de  $\mathbb{R}^2$  y  $g$  continuamente diferenciable en  $O$ .

**Definición 4.2.1.** Se dice que el segmento compacto

$$L = [a, b] = \{y = a + \lambda(b - a) : \lambda \in [0, 1]\} \subset O,$$

( $a, b \in O$ ) es transversal respecto de  $g$  si  $L$  no contiene puntos críticos del sistema (4.1) y, para cualquier  $y \in L$ , el vector  $g(y)$  no es paralelo a la dirección del segmento  $L$  ( $g(y)$  no es proporcional a  $b - a$ ).

## 4.2. Teorema de LaSalle y Teorema de Poincaré-Bendixson

---

**Definición 4.2.2.** Consideremos  $y_0, y_1 \in O$  y supongamos  $\gamma(y_1)$  es una órbita cíclica no degenerada de (4.1). Se dice que la semiórbita  $\gamma^+(y_0)$  se acerca en espiral a  $\gamma(y_1)$  si para cualquier  $p \in \gamma(y_1)$  y cualquier segmento transversal  $L$  respecto de  $g$  que satisfaga  $p \in \text{int}(L) \cap \gamma(y_1)$ , se tiene:

(i)  $\text{int}(L) \cap \gamma(y_1) = \{p\}$ , i.e.,  $\text{int}(L) \cap \gamma(y_1)$  es un conjunto unitario.

(ii) Existe una sucesión estrictamente creciente  $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset I(y_0) \cap [0, \infty)$  tal que

$$\{\varphi(t_n; 0, y_0)\}_{n \geq 1} \subset L, \quad \lim t_n = \sup I(y_0), \quad p = \lim \varphi(t_n; 0, y_0),$$

y la sucesión  $\{\varphi(t_n; 0, y_0)\}_{n \geq 1}$  está monótonamente ordenada en el segmento  $L$ , i.e., para cualquier  $n \geq 2$ ,  $\varphi(t_n; 0, y_0)$  está entre  $\varphi(t_{n-1}; 0, y_0)$  y  $\varphi(t_{n+1}; 0, y_0)$ .

Una definición análoga se obtiene a partir de la Definición 4.2.2 para la convergencia en espiral de  $\gamma^-(y_0)$  hacia la órbita cíclica no degenerada  $\gamma(y_1)$ .

Con todo esto, podemos enunciar finalmente el Teorema de Poincaré-Bendixson como sigue:

**Teorema 4.2.3** (de Poincaré-Bendixson). Consideremos el sistema autónomo (4.1) con  $g$  continuamente diferenciable en  $O$  y  $O \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto, conexo, no vacío. Sea  $y_0 \in K \subset O$  con  $K$  un conjunto compacto tal que  $\gamma^+(y_0) \subset K$  (respectivamente,  $\gamma^-(y_0) \subset K$ ). Supongamos que  $\omega^+(y_0)$  (respectivamente,  $\omega^-(y_0)$ ) no contiene puntos críticos de (4.1). Entonces,

(i)  $\omega^+(y_0)$  (respectivamente,  $\omega^-(y_0)$ ) es una órbita cíclica no degenerada.

(ii) O bien  $\gamma(y_0)$  es una órbita cíclica ( $\gamma(y_0) = \omega^\pm(y_0)$ ), o bien  $\gamma^\pm(y_0)$  se acerca en espiral hacia  $\omega^\pm(y_0)$ , en cuyo caso se dice que  $\omega^\pm(y_0)$  es un **ciclo límite**.



## Capítulo 5

# Introducción a la Teoría de Atractores Globales

En el capítulo anterior hablábamos de lo que era un conjunto invariante  $M$  y, concretamente en el Teorema 4.2.1 de LaSalle,  $M$  es el mayor subconjunto invariante de  $E$ . Estos conjuntos invariantes poseen una dinámica propia que nos permite determinar si las trayectorias de las soluciones de un sistema autónomo se acercan a él (atractor) o se alejan de él (repulsor).

Esto es lo que veremos en este capítulo, aunque primero debemos generalizar la definición de conjunto invariante expresada anteriormente.

**Definición 5.0.1.** Sea  $\varphi : \mathbb{R} \times O \rightarrow O$  un sistema dinámico en  $O$ . Un subconjunto  $M$  de  $O$  se dice

(i) *invariante bajo  $\varphi$  (o  $\varphi$ -invariante), si*

$$\varphi(t; M) = M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) *positivamente invariante bajo  $\varphi$  si*

$$\varphi(t; M) \subset M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(iii) *negativamente invariante bajo  $\varphi$  si*

$$\varphi(t; M) \supset M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Con esto, tenemos las bases para definir atractor global.

**Definición 5.0.2.** Un subconjunto compacto, no vacío  $A$  se denomina atractor global para un sistema dinámico  $\varphi$  en  $O$  si

(i)  *$A$  es  $\varphi$ -invariante*

## Capítulo 5. Introducción a la Teoría de Atractores Globales

---

(ii)  $A$  atrae todos los conjuntos acotados de  $O$ , i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; B), A) = 0, \text{ para cualquier subconjunto acotado } B \subset O,$$

donde  $\text{dist}$  denota la semidistancia de Hausdorff, dada por

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |a - b|.$$

La existencia de estos atractores globales se debe a la propiedad de disipatividad de los sistemas dinámicos, que pierden “energía” a lo largo del tiempo. Esto puede formularse matemáticamente como sigue.

**Definición 5.0.3.** Un subconjunto acotado, no vacío  $K$  de  $O$  se dice es un **conjunto absorbente** del sistema dinámico  $\varphi$  en  $O$  si para cada subconjunto acotado  $B \subset O$ , existe un tiempo  $T_B = T(B) \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t; B) \subset K$ ,  $\forall t > T_B$ .

Con el siguiente teorema se demuestra la existencia de un único atractor global.

**Teorema 5.0.1.** Asúmase que un sistema dinámico  $\varphi$  en  $O$  posee un conjunto compacto absorbente  $K$ . Entonces, existe un único atractor global  $A \subset K$  dado por

$$A = \omega(K).$$

Si además  $K$  es positivamente invariante, entonces el único atractor global viene dado por

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \varphi(t; K).$$

Estos atractores globales presentan gran relevancia en el análisis de los sistemas dinámicos. Las trayectorias que comienzan dentro del atractor, permanecen en él dada su naturaleza invariante y, a su vez, aquellas trayectorias de fuera del atractor se aproximan a él sin llegar a tocarlo en tiempo finito. La complejidad de estas trayectorias pueden afectar a la estructura del atractor, exhibiendo un comportamiento caótico o incluso fractal. Así, también es útil analizar la geometría del atractor global para obtener información sobre el comportamiento a futuro del sistema.

Veamos un ejemplo que nos ayude a entender la importancia de los atractores globales. Hay algunos sistemas dinámicos para los que la estructura geométrica del atractor global es muy conocida, como los sistemas dinámicos gradientes. Existen funciones de Lyapunov para estos sistemas, siendo funciones

- (a) no crecientes a lo largo de las trayectorias del sistema, i.e., la función  $t \mapsto V(\varphi(t; 0, y_0))$  es no creciente para cualquier  $y_0 \in O$ ,
- (b) si es constante a lo largo de una trayectoria, entonces esta trayectoria es un punto de equilibrio.

Además, si  $V(\varphi(t; 0, y_0)) = V(y_0)$  para algún  $t > 0$ , entonces  $y_0$  es un punto de equilibrio.

---

Una ecuación diferencial ordinaria gradiente puede expresarse como

$$y' = -\nabla h(y), \quad (5.1)$$

donde  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es al menos continuamente diferenciable. Entonces, podemos tomar  $V(y) := h(y)$  función de Lyapunov del sistema (5.1). Sea  $\varphi(t; 0, y_0)$  solución de (5.1) con condición inicial  $y(0) = 0$ , y sea  $\omega(y_0)$  el conjunto límite de la órbita que pasa a través de  $y_0$ . Entonces,  $\omega(y_0)$  es un conjunto invariante compacto en  $\mathbb{R}^N$ . Volviendo al Teorema 4.2.1, para cualquier  $y \in \omega(y_0)$ , la solución  $\varphi(t; y) \in \omega(y_0)$  y  $V(\varphi(t; y)) = V(y)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . En consecuencia,  $\dot{V}(\varphi(t; y)) = 0$ , con lo que  $\nabla h(\varphi(t; y)) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , i.e.,  $\omega(y_0)$  pertenece al conjunto de equilibrios de (5.1).

Lo interesante de estos sistemas dinámicos gradientes es que sus atractores globales son la unión de la variedades inestables de los puntos de equilibrio. Para un punto de equilibrio  $y^*$  de un sistema dinámico  $\varphi$ , esta variedad inestable se define como

$$\mathcal{W}^u(y^*) = \{y \in O : \varphi(t; y) \text{ está definida para } t \in \mathbb{R} \text{ y } \varphi(t; y) \rightarrow y^*, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}.$$

Así, si  $\varphi$  es un sistema dinámico gradiente, el atractor global  $\mathcal{A}$  del sistema viene dado como

$$\mathcal{A} = \bigcup_{y^* \in \mathcal{E}} \mathcal{W}^u(y^*),$$

donde  $\mathcal{E}$  define el conjunto de todos los puntos de equilibrio.

Otro aspecto de interés de los atractores globales se relaciona con cómo estos determinan la dinámica asintótica del sistema. Por definición, podemos decir que cualquier trayectoria fuera del atractor puede seguirse por otras del atractor, i.e., cualquier trayectoria externa al atractor alcanza una trayectoria del atractor, a la que se aproxima con el tiempo. Esta propiedad, llamada **propiedad de seguimiento**, puede definirse matemáticamente de la siguiente manera.

**Definición 5.0.4.** *Dada una trayectoria  $\varphi(t; 0, y_0)$  con  $y_0$  no necesariamente dentro del atractor global  $\mathcal{A}$ , y dado cualquier  $\epsilon > 0$  y  $T > 0$ , existe un tiempo  $\tau = \tau(\epsilon, T)$  y un punto  $v_0 \in \mathcal{A}$  tales que*

$$|\varphi(t; 0, y_0) - \varphi(t; v_0)| \leq \epsilon, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Esta propiedad asegura que toda trayectoria fuera del atractor  $\mathcal{A}$  puede ser “seguida” por una trayectoria del atractor hasta un tiempo  $T$ , pero para un tiempo mayor, puede ser necesario usar más de una trayectoria de  $\mathcal{A}$ .

Con esto queda concluida la presentación del marco teórico para análisis de estabilidad de un sistema dinámico. Continuamos en el siguiente capítulo viendo algunos ejemplos de aplicación en Ecología, Epidemiología y Climatología.



## Capítulo 6

# Aplicaciones en el Mundo Real

A continuación se van a ver tres diferentes casos de aplicación de la teoría presentada anteriormente en el mundo real. Concretamente, estudiaremos el caso del **Quimiostato**, relevante en Ecología, del **modelo SIR**, relevante en Epidemiología, y del **modelo Lorentz-84**, relevante en Climatología.

### 6.1. Modelo Ecológico Quimiostato

Un quimiostato es un tipo de experimento realizado en laboratorios que consiste en tres contenedores interconectados. En estos se mantiene un entorno para el crecimiento de microorganismos de forma controlada.

En el primer recipiente, llamado **botella de alimentación**, se tiene una disolución con abundantes nutrientes, necesarios para la proliferación de los microorganismos. De entre estos, uno se introduce en menor cantidad, llamado **nutriente limitante**. El contenido de este recipiente pasa al segundo, denominado **recipiente de cultivo**, de forma continua, dentro del cual se encuentran los microorganismos que proliferan bajo los nutrientes que llegan de la botella. Este recipiente es removido continuamente para que todos los microorganismos tengan acceso equitativo a los nutrientes.

Finalmente, el contenido del recipiente de cultivo se transmite de forma continua al tercer recipiente, denominado **recipiente de recolección**, que contiene una mezcla de nutrientes, microorganismos y los restos que generan los microorganismos.

Este modelo es de utilidad para Ecología, ya que con unas alteraciones es el mismo modelo para el proceso de tratamiento de aguas residuales.

Tomemos como  $x$  la concentración de nutriente limitante y como  $y$  la concentración de microorganismos que se alimentan de ese nutriente. Asúmase que el resto de nutrientes son abundantes, i.e., solo estudiaremos el efecto de este nutriente sobre la población de microorganismos  $y$ . Bajo estas hipótesis, tomemos también los siguientes coeficientes.

## Capítulo 6. Aplicaciones en el Mundo Real

---

- $D \Rightarrow$  Ritmo al que se suministra el nutriente y el contenido del recipiente de cultivo es extraído.
- $I \Rightarrow$  Cantidad de nutriente limitante inicial en el sistema.
- $a \Rightarrow$  Ritmo de consumo máximo del nutriente y ritmo de crecimiento máximo de los microorganismos ( $a > 0$ ).
- $U \Rightarrow$  Función que describe el consumo de los nutrientes, llamada función de consumo o absorción. Esta función  $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  debe cumplir:
  - (i)  $U(0) = 0, U(x) > 0, \forall x > 0$ .
  - (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = L_1$ , donde  $L_1 < \infty$ , i.e.,  $U(x) \leq L_1, \forall x \in [0, \infty)$ .
  - (iii)  $U$  es continuamente diferenciable.
  - (iv)  $U$  es monótona creciente.

Para nuestro modelo, usaremos la función de consumo de la forma Holling Tipo-II, definida como

$$U(x) = \frac{x}{\lambda + x}, \quad (6.1)$$

donde  $\lambda > 0$  es la constante de saturación media.

Con todo esto, podemos definir nuestro modelo como un sistema diferencial autónomo. Téngase  $x(t)$  e  $y(t)$  las concentraciones de nutriente y microorganismos respectivamente en un instante de tiempo  $t$ . Con  $I$  y  $D$  constantes, el sistema del quimiostato se define como

$$x'(t) = D(I - x(t)) - a \frac{x(t)}{\lambda + x(t)} y(t), \quad (6.2)$$

$$y'(t) = -Dy(t) + a \frac{x(t)}{\lambda + x(t)} y(t). \quad (6.3)$$

Empecemos por estudiar la estabilidad del modelo del quimiostato.

### 6.1.1. Estabilidad del sistema

En primera instancia, necesitamos encontrar los puntos de equilibrio del sistema. Para ello, debemos resolver el sistema algebraico asociado al sistema (6.2)-(6.3)

$$\begin{aligned} 0 &= D(I - x^*) - a \frac{x^*}{\lambda + x^*} y^*, \\ 0 &= -Dy^* + a \frac{x^*}{\lambda + x^*} y^*. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos las soluciones  $y^* = 0$  y  $x^* = \frac{D\lambda}{a-D}$ . Sustituyendo en la primera ecuación, nos quedan dos puntos de equilibrio:

$$(x^*, y^*) = (I, 0), \quad (x^*, y^*) = \left( \frac{D\lambda}{a-D}, I - \frac{D\lambda}{a-D} \right).$$

Vemos así que tenemos tres casos diferentes. Estudiémoslos por separado.

1. Caso 1:  $a < D$ .

En este primer caso, el sistema (6.2)-(6.3) tiene un único equilibrio en  $(x^*, y^*) = (I, 0)$ . Para estudiar el tipo de equilibrio del punto, vamos a tomar la matriz jacobiana del sistema como

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -D - a \frac{\lambda}{(\lambda+x)^2} y & -a \frac{x}{\lambda+x} \\ a \frac{\lambda}{(\lambda+x)^2} y & -D + a \frac{x}{\lambda+x} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

que tomada para nuestro equilibrio en este caso resulta

$$J(I, 0) = \begin{pmatrix} -D & -a \frac{I}{\lambda+I} \\ 0 & -D + a \frac{I}{\lambda+I} \end{pmatrix}.$$

Calculando los autovalores de esta matriz obtenemos  $\lambda_1 = -D$  y  $\lambda_2 = -D + a \frac{I}{\lambda+I}$ . El primero es claramente negativo y, el segundo, podemos ver que el término  $\frac{I}{\lambda+I} \leq 1$  con lo que  $a \frac{I}{\lambda+I} \leq a < D$  y, por tanto,  $\lambda_2$  es negativo también.

Con esto, se cumple el Teorema 3.2.2 de Estabilidad por Primera Aproximación y el equilibrio  $(I, 0)$  es **exponencialmente estable**: los microorganismos no pueden proliferar y mueren.

2. Caso 2:  $a = D$ .

Veamos el segundo caso. Aquí, ambos equilibrios son el mismo punto  $(x^*, y^*) = (I, 0)$ . En este caso, vamos a utilizar el Teorema 3.2.3 de Lyapunov. Para ello, debemos hacer un cambio de variable para desplazar el equilibrio a la solución trivial  $(0, 0)$ . Así, usaremos la equivalencia

$$\bar{x} = x - I.$$

Con este cambio, el sistema inicial (6.2)-(6.3) queda

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t) &= -D\bar{x}(t) - a \frac{\bar{x}(t) + I}{\lambda + (\bar{x}(t) + I)} y(t), \\ y'(t) &= -Dy(t) + a \frac{\bar{x}(t) + I}{\lambda + (\bar{x}(t) + I)} y(t). \end{aligned}$$

Para el análisis del equilibrio, tomaremos la función de Lyapunov

$$V(x, y) = x + y.$$

Se ve que esta función es definida positiva en todo  $\mathbb{R}_+^2$ . Calculamos su derivada como

$$\dot{V}(x, y) = x' + y' = -D\bar{x} - a \frac{\bar{x} + I}{\lambda + (\bar{x} + I)} y - Dy + a \frac{\bar{x} + I}{\lambda + (\bar{x} + I)} y,$$

que simplificando nos queda

$$\dot{V}(x, y) = -D(\bar{x} + y),$$

## Capítulo 6. Aplicaciones en el Mundo Real

la cual es definida negativa en  $\mathbb{R}_+^2$ . Además, si tomamos  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 2D$  y  $k = 1$ , se cumple el punto (iii) del Teorema 3.2.3 y, por tanto, el equilibrio en  $(\bar{x}^*, y^*) = (0, 0)$  es **exponencialmente estable**: nuevamente los microorganismos no pueden proliferar y mueren.

### 3. Caso 3: $a > D$ .

Para nuestro último caso, tendríamos que ambos equilibrios existen para el sistema, por lo que debemos analizar ambos.

Para ello, usaremos nuevamente la matriz jacobiana del sistema (6.2)-(6.3). En el equilibrio  $(x^*, y^*) = (I, 0)$  teníamos que los autovalores eran  $\lambda_1 = -D$  y  $\lambda_2 = -D + a\frac{I}{\lambda+I}$ . En el primer caso, dado que  $a < D$ ,  $\lambda_2$  tenía parte real negativa, pero para este caso, dado que  $a > D$ ,  $\lambda_2$  tiene parte real positiva y, según el Teorema 3.2.2 de Estabilidad por Primera Aproximación el equilibrio  $(I, 0)$  es **inestable**.

Ahora, para el segundo equilibrio  $(x^*, y^*) = \left(\frac{D\lambda}{a-D}, I - \frac{D\lambda}{a-D}\right)$ , tomamos la matriz jacobiana (6.4) en ese punto

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -D - a\frac{\lambda y^*}{(\lambda+x^*)^2} & -D \\ a\frac{\lambda y^*}{(\lambda+x^*)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Al estudiar los autovalores de la matriz nos encontramos con  $\lambda_1 = -D$  y  $\lambda_2 = -a\frac{\lambda y^*}{(\lambda+x^*)^2}$ , teniendo ambos parte real negativa. Así, según el Teorema 3.2.2, tendríamos que el equilibrio en  $\left(\frac{D\lambda}{a-D}, I - \frac{D\lambda}{a-D}\right)$  es **exponencialmente estable**: la población de microorganismos se estabiliza en un valor concreto.

Resumiendo, tenemos que

- Si  $a \leq D$ , el sistema (6.2)-(6.3) tiene un solo equilibrio en  $(I, 0)$  que es exponencialmente estable.
- Si  $a > D$ , el sistema (6.2)-(6.3) tiene dos equilibrios: en  $(I, 0)$ , que es inestable, y en  $\left(\frac{D\lambda}{a-D}, I - \frac{D\lambda}{a-D}\right)$ , que es exponencialmente estable.

Ahora que hemos analizado la estabilidad, estudiemos la existencia de atractor global.

### 6.1.2. Atractor global

En el caso de nuestro sistema, si asumimos un valor inicial para  $x$  e  $y$ , tendríamos un PVI con solución global positiva  $\varphi(t, x_0, y_0)$ . Entonces, sumando ambas ecuaciones

$$(x + y)'(t) = DI - D(x + y),$$

y asumiendo  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , resolvemos la ecuación diferencial anterior como

$$x(t) + y(t) = I + (x_0 + y_0 - I)e^{-Dt}.$$

## 6.2. Modelo Epidemiológico SIR

Dado que  $e^{-Dt}$  es monótona decreciente, de esta expresión podemos deducir dos cosas:

- Si  $x_0 + y_0 > I$ , entonces  $x_0 + y_0 - I < 0$  y en un tiempo futuro la función  $x(t) + y(t)$  crece hacia  $I$ .
- Si  $x_0 + y_0 < I$ , entonces  $x_0 + y_0 - I > 0$  y en un tiempo futuro la función  $x(t) + y(t)$  decrece hacia  $I$ .

Entonces, existe  $\epsilon > 0$  tal que para un tiempo  $T \geq t$  se tiene un conjunto absorbente para la solución  $\varphi(t, x_0, y_0)$  del sistema

$$K_\epsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \leq I + \epsilon\}.$$

Por tanto y siguiendo el Teorema 5.0.1, la solución  $\varphi(t, x_0, y_0)$  del sistema (6.2)-(6.3) presenta un atractor global en  $\mathbb{R}_+^2$ . Este atractor global sería:

1. Si  $a \leq D$ , el atractor global se define como

$$\mathcal{A} = \{(I, 0)\}.$$

2. Si  $a > D$ , el atractor global se define como

$$\mathcal{A} = \{(I, 0), \left(\frac{D\lambda}{a-D}, I - \frac{D\lambda}{a-D}\right)\} \cup \{\text{soluciones heteroclínicas}\},$$

donde las soluciones heteroclínicas son soluciones que parten de un punto de equilibrio (en este caso  $(I, 0)$  por ser inestable) y acaban en un punto de equilibrio distinto.

## 6.2. Modelo Epidemiológico SIR

Uno de los campos de mayor relevancia de estudio actualmente es el epidemiológico. Tras el paso de la COVID-19, el estudio de modelos que representen la evolución de la población de infectados y de contagios es de gran utilidad para frenar el virus o erradicar alguna enfermedad. Para este trabajo, generaremos un modelo más simple, que no toma en cuenta edad o fluctuación medioambiental.

El modelo que usaremos es un modelo modificado de Kermack-McKendrick. Este modelo divide a la población en tres clases diferentes, definidas como  $S, I$  y  $R$ .  $S(t)$  representa al número de individuos susceptibles en la población, aquellos que no se han infectado aún, pero son vulnerables ante el virus.  $I(t)$  define el número de personas infectadas en la población, que pueden transmitir el virus. Finalmente,  $R(t)$  representa el número de personas que se recuperan de la enfermedad y se inmunizan a la misma, no pudiendo volver a reinfectarse. Es por estas tres clases que el modelo se conoce como “modelo SIR”.

El modelo de Kermack-McKendrick tiene en cuenta el número de nacimientos y de muertes, por causas ajenas al virus, de la población; que los infectados pueden inmunizarse y que los susceptibles infectarse. Para el trabajo añadiremos algunas modificaciones. Concretamente, supondremos que una parte de la

## Capítulo 6. Aplicaciones en el Mundo Real

---

población que nace susceptible es vacunada y que los infectados pueden sanar, pero ser susceptibles de reinfectarse.

Tanto para el modelo SIR clásico, como para el que usaremos, se supone que la población es constante, i.e.,

$$S(t) + I(t) + R(t) = N,$$

de forma que el porcentaje de nacimientos y muertes es igual. Los parámetros de nuestro modelo serían los siguientes.

- $S(t) \Rightarrow$  Número de personas susceptibles en la población.
- $I(t) \Rightarrow$  Número de personas infectadas en la población.
- $R(t) \Rightarrow$  Número de personas recuperadas (inmunizadas) en la población.
- $p \Rightarrow$  Porcentaje de personas que son vacunadas en el nacimiento ( $p \in [0, 1]$ ).
- $\mu \Rightarrow$  Tasa de nacimientos y muertes de la población ( $\mu > 0$ ).
- $\beta \Rightarrow$  Tasa de contacto de susceptibles con infectados ( $\beta > 0$ ).
- $\gamma \Rightarrow$  Ratio de infectados que se recuperan por unidad de tiempo ( $\gamma > 0$ ).
- $\kappa \Rightarrow$  Tasa de recuperación de infectados, susceptibles a reinfección ( $\kappa \geq 0$ ).

Con todo esto, nuestro sistema dinámico autónomo modelo SIR quedaría

$$S'(t) = (1 - p)\mu N - \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \mu S(t) + \kappa I(t), \quad (6.5)$$

$$I'(t) = \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t) - \kappa I(t), \quad (6.6)$$

$$R'(t) = \gamma I(t) - \mu R(t) + p\mu N, \quad (6.7)$$

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0.$$

Como hemos expresado antes, la población se mantiene constante. Así, nuestro sistema puede simplificarse, ya que  $R(t)$  puede calcularse como  $R(t) = N - (S(t) + I(t))$ . Entonces, solo será necesario estudiar el sistema de dos variables

$$S'(t) = (1 - p)\mu N - \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \mu S(t) + \kappa I(t), \quad (6.8)$$

$$I'(t) = \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t) - \kappa I(t), \quad (6.9)$$

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0.$$

### 6.2.1. Estabilidad del sistema

Los puntos de equilibrio del sistema (6.8)-(6.9) se obtienen resolviendo el sistema algebraico

$$0 = (1 - p)\mu N - \beta \frac{S^* I^*}{N} - \mu S^* + \kappa I^*,$$

$$0 = \beta \frac{S^* I^*}{N} - \gamma I^* - \mu I^* - \kappa I^*.$$

## 6.2. Modelo Epidemiológico SIR

De la segunda ecuación obtenemos  $I^* = 0$  y  $S^* = \frac{N}{\beta}(\mu + \gamma + \kappa)$ . Sustituyendo en la primera ecuación, nos quedan dos puntos de equilibrio:

$$(S^*, I^*) = ((1-p)N, 0) \quad \text{y} \quad (S^*, I^*) = \left( \frac{N}{\beta}(\mu + \gamma + \kappa), \mu N \left( \frac{1-p}{\gamma + \mu} - \frac{\gamma + \mu + \kappa}{\beta(\gamma + \mu)} \right) \right),$$

donde el primer equilibrio es el punto de equilibrio **libre de infección**, mientras el segundo es el punto de equilibrio **endémico**.

De estos puntos de equilibrio, podemos sacar tres casos diferentes de estudio:

1. Caso 1:  $\beta(1-p) < \gamma + \mu + \kappa$ .

Para este primer caso, nuestro sistema (6.8)-(6.9) presenta un único punto de equilibrio en  $(S^*, I^*) = ((1-p)N, 0)$ . Para analizar el tipo de equilibrio, tomaremos la matriz jacobiana del sistema. Ésta viene dada como sigue:

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -\beta \frac{I}{N} - \mu & -\beta \frac{S}{N} + \kappa \\ \beta \frac{I}{N} & \beta \frac{S}{N} - (\gamma + \mu + \kappa) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

que, sustituyendo con el punto de equilibrio nos queda

$$J((1-p)N, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta(1-p) + \kappa \\ 0 & \beta(1-p) - (\gamma + \mu + \kappa) \end{pmatrix}$$

Al calcular los autovalores de esta matriz, obtenemos  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_2 = \beta(1-p) - (\gamma + \mu + \kappa)$ . Como estamos tomando el caso de que  $\beta(1-p) < \gamma + \mu + \kappa$ ,  $\lambda_2 < 0$  y, según el Teorema 3.2.2 el punto de equilibrio  $((1-p)N, 0)$  es **exponencialmente estable**.

2. Caso 2:  $\beta(1-p) = \gamma + \mu + \kappa$ .

Veamos el segundo caso. Aquí, nuevamente solo tenemos un solo punto de equilibrio en  $(S^*, I^*) = ((1-p)N, 0)$ . Si usamos la matriz jacobiana, obtendríamos un autovalor nulo, lo cual no se contempla en la teoría.

Por ello, recurriremos al Teorema 3.2.3 de Lyapunov. Dado que el teorema trabaja con la solución nula, realizamos un cambio de variable  $\bar{S} = S - (1-p)N$ , dejando nuestro sistema (6.8)-(6.9) como

$$\begin{aligned} \bar{S}'(t) &= (1-p)\mu N - \beta \frac{(\bar{S}(t) + (1-p)N)I(t)}{N} - \mu(\bar{S}(t) + (1-p)N) + \kappa I(t), \\ I'(t) &= \beta \frac{(\bar{S}(t) + (1-p)N)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t) - \kappa I(t), \end{aligned}$$

que simplificando queda

$$\begin{aligned} \bar{S}'(t) &= -\beta \frac{(\bar{S}(t) + (1-p)N)I(t)}{N} - \mu \bar{S}(t) + \kappa I(t), \\ I'(t) &= \beta \frac{(\bar{S}(t) + (1-p)N)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t) - \kappa I(t). \end{aligned}$$

Ahora, tomamos la función de Lyapunov

$$V(\bar{S}, I) = \frac{1}{2}\bar{S}^2 + cI,$$

## Capítulo 6. Aplicaciones en el Mundo Real

donde  $c$  es una constante que veremos más adelante. Esta función de Lyapunov es claramente definida positiva y su derivada, definida de la forma

$$\dot{V}(\bar{S}, I) = -\mu\bar{S}^2 - \left( \frac{\beta}{N}\bar{S}^2 - c\frac{\beta}{N}\bar{S} + (\gamma + \mu) \right) \bar{S}I,$$

es definida negativa siempre que el término que multiplica  $\bar{S}I$  sea negativo o nulo.

Se puede ver que este término es una parábola convexa, por lo que si queremos que el término sea siempre negativo o nulo, esta parábola debe tener raíces negativas o imaginarias. En este caso, buscaremos que las raíces sean imaginarias. Para una parábola de la forma  $ax^2 + bx + c$ , esto implica que  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  sea imaginario, i.e.,

$$\left( c\frac{\beta}{N} \right)^2 < 4\frac{\beta}{N}(\gamma + \mu)$$

$$c^2 < 4\frac{N}{\beta}(\gamma + \mu)$$

$$c < 2\sqrt{\frac{N}{\beta}(\gamma + \mu)}.$$

Entonces, si tomamos  $c = \sqrt{\frac{N}{\beta}(\gamma + \mu)}$ , la parábola siempre será negativa o nula, con lo que  $\dot{V}(\bar{S}, I) \leq 0$ , i.e.,  $\dot{V}$  es semidefinida negativa.

Con todo esto, siguiendo el Teorema 3.2.3 de Lyapunov, concluimos que el punto de equilibrio  $((1-p)N, 0)$  es estable. Usaremos ahora el Teorema (4.2.1) de LaSalle para demostrar que es convergente, demostrando que el punto  $(0, 0)$  es el único subconjunto invariante de un conjunto  $E$ . Para ello, tomamos

$$E := \{(\bar{S}, I) \in \mathbb{R}_+^2 : \dot{V}(\bar{S}, I) = 0\} = \{(0, I_0) : I_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Si definimos como  $\varphi(\cdot)$  la solución del PVI (6.8)-(6.9) y tomamos el punto  $(0, I_0) \in E \setminus \{(0, 0)\}$ , observamos tras sustituir (teniendo en cuenta que  $\beta(1-p) = \gamma + \mu + \kappa$ ) que

$$\varphi'_1(0) = -(\gamma + \mu)I_0 < 0.$$

Entonces, dado que  $\varphi_1(0) = 0$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\varphi_1(t) < 0$ ,  $\forall t \in (0, \epsilon)$ . Esto prueba que  $(0, 0)$  es el único subconjunto invariante de  $E$  y el equilibrio es convergente. Esto implica que, según la Definición 3.2.1 el equilibrio es **asintóticamente estable**.

### 3. Caso 3: $\beta(1-p) > \gamma + \mu + \kappa$ .

Finalmente, en este tercer caso tenemos ambos equilibrios:  $(S^*, I^*) = ((1-p)N, 0)$  y  $(S^*, I^*) = \left( \frac{N}{\beta}(\mu + \gamma + \kappa), \mu N \left( \frac{1-p}{\gamma + \mu} - \frac{\gamma + \mu + \kappa}{\beta(\gamma + \mu)} \right) \right)$ . Para analizarlos, volveremos a recurrir al sistema original (6.8)-(6.9) sin desplazamiento del equilibrio y la matriz jacobiana (6.10).

Comenzamos con el equilibrio libre de infección, cuyos autovalores, ya calculados en el Caso 1, eran  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_2 = \beta(1-p) - (\gamma + \mu + \kappa)$ . En este caso  $\lambda_2 > 0$ , por lo que el equilibrio sería **inestable** según el Teorema 3.2.2.

En el caso del equilibrio endémico, tendríamos la matriz jacobiana asociada

$$J(S^*, I^*) = \begin{pmatrix} -\beta \frac{I^*}{N} - \mu & -\beta \frac{S^*}{N} + \kappa \\ \beta \frac{I^*}{N} & \beta \frac{S^*}{N} - (\gamma + \mu + \kappa) \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son los resultados de la ecuación de segundo grado

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu(\beta(1-p) - (\gamma + \mu + \kappa))}}{2}.$$

Sabiendo que estamos analizando en el caso  $\beta(1-p) > \gamma + \mu + \kappa$  y que  $a^2 \geq \sqrt{a^2 - d}$ , los autovalores de la matriz jacobiana son ambos negativos y, siguiendo el Teorema 3.2.2 el equilibrio endémico es **exponencialmente estable**.

Resumiendo, tenemos que

- Si  $\beta(1-p) < (\gamma + \mu + \kappa)$ , el sistema (6.8)-(6.9) tiene un solo equilibrio en  $((1-p)N, 0)$  que es exponencialmente estable.
- Si  $\beta(1-p) = (\gamma + \mu + \kappa)$ , el sistema (6.8)-(6.9) tiene un solo equilibrio en  $((1-p)N, 0)$  que es asintóticamente estable.
- Si  $\beta(1-p) > (\gamma + \mu + \kappa)$ , el sistema (6.8)-(6.9) tiene dos equilibrios: en  $((1-p)N, 0)$ , que es inestable, y en  $\left(\frac{N}{\beta}(\mu + \gamma + \kappa), \mu N \left(\frac{1-p}{\gamma + \mu} - \frac{\gamma + \mu + \kappa}{\beta(\gamma + \mu)}\right)\right)$ , que es exponencialmente estable.

Veamos ahora qué sucede con el atractor global del sistema.

### 6.2.2. Atractor global

En el caso de nuestro sistema (6.8)-(6.9), si asumimos un valor inicial para  $S$  e  $I$ , tendríamos un PVI asociado a este sistema con solución global positiva  $\varphi(t, S_0, I_0)$ . Sumando ambas ecuaciones, tenemos

$$(S + I)'(t) = (1-p)\mu N - \gamma I(t) - \mu(S(t) + I(t)) \leq (1-p)\mu N - \mu(S(t) + I(t)),$$

y asumiendo  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ , resolvemos la ecuación diferencial anterior como

$$S(t) + I(t) = (1-p)N + (S_0 + I_0 - (1-p)N)e^{-\mu t}.$$

Puede verse que el término  $e^{-\mu t}$  es monótono decreciente, por lo que

- Si  $S_0 + I_0 > (1-p)N$ , se tiene que  $S_0 + I_0 - (1-p)N < 0$  y en un tiempo futuro la función  $S(t) + I(t)$  crece hacia  $(1-p)N$ .
- Si  $S_0 + I_0 < (1-p)N$ , se tiene que  $S_0 + I_0 - (1-p)N > 0$  y en un tiempo futuro la función  $S(t) + I(t)$  decrece hacia  $(1-p)N$ .

## Capítulo 6. Aplicaciones en el Mundo Real

---

De esto concluimos que existe un  $\epsilon > 0$  tal que para un tiempo  $T_\epsilon \geq t$  la solución  $\varphi(t, S_0, I_0)$  del sistema presenta un conjunto absorbente

$$K_\epsilon := \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : S + I \leq (1-p)N + \epsilon\}.$$

Entonces, siguiendo el Teorema 5.0.1 nuestro sistema presenta los siguientes atractores  $\mathcal{A}$ :

- Si  $\beta(1-p) \leq \gamma + \mu + \kappa$ , el sistema (6.8)-(6.9) tiene un atractor global definido como

$$\mathcal{A} = \{((1-p)N, 0)\}.$$

- Si  $\beta(1-p) > \gamma + \mu + \kappa$ , el sistema (6.8)-(6.9) tiene un atractor global definido como

$$\mathcal{A} = \{((1-p)N, 0), (S^*, I^*)\} \cup \{\text{soluciones heteroclínicas}\},$$

$$\text{con } (S^*, I^*) = \left( \frac{N}{\beta}(\mu + \gamma + \kappa), \mu N \left( \frac{1-p}{\gamma + \mu} - \frac{\gamma + \mu + \kappa}{\beta(\gamma + \mu)} \right) \right).$$

### 6.3. Modelo Climatológico Lorentz-84

En 1984, el científico Hendrik Lorentz desarrolló un modelo de la circulación del aire atmosférico. Este modelo se compone de un sistema de tres ecuaciones diferenciales autónomas no lineales. En este sistema,  $x$  representa el gradiente de temperatura hacia los polos o la intensidad de la corriente de los vientos que vienen del oeste e  $y$  y  $z$  representan las intensidades de las fases coseno y seno de una cadena de ondas superpuestas que transportan calor hacia los polos, respectivamente. Además, se tienen los siguientes parámetros:

- $x(t) \Rightarrow$  Gradiente de temperatura hacia los polos o la intensidad de la corriente de los vientos que vienen del oeste.
- $y(t) \Rightarrow$  Intensidad de la fase coseno de una cadena de ondas superpuestas que transportan calor hacia los polos.
- $z(t) \Rightarrow$  Intensidad de la fase seno de una cadena de ondas superpuestas que transportan calor hacia los polos.
- $a \Rightarrow$  Coeficiente de amortiguamiento del viento del oeste.
- $b \Rightarrow$  Desplazamiento de las ondas debido a interacción con el viento.
- $F \Rightarrow$  Contraste de calentamiento simétrico a través de la latitud.
- $G \Rightarrow$  Contraste de calentamiento asimétrico entre océanos y continentes.

Con todo esto, el modelo se representa como

$$x'(t) = -ax - y^2 - z^2 + aF, \tag{6.11}$$

$$y'(t) = -y + xy - bxz + G, \tag{6.12}$$

$$z'(t) = -z + bxy + xz, \tag{6.13}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad z(0) = z_0.$$

Aunque parece bastante simple, es un modelo que tiene en cuenta el cambio de estaciones generadas por la coexistencia de climas diferentes junto con el calentamiento del sol, cómo el clima es afectado por las interacciones existentes entre la atmósfera y los océanos o la asimetría existente entre los océanos y los continentes.

Una vez expresado todo esto, estudiemos su estabilidad.

### 6.3.1. Estabilidad del sistema

Los puntos de equilibrio de este modelo se calculan resolviendo el sistema algebraico asociado

$$a(F - x^*)(1 - 2x^* + (1 + b^2)(x^*)^2) = G, \quad (6.14)$$

$$\frac{(1 - x^*)G}{1 - 2x^* + (1 + b^2)(x^*)^2} = y^*, \quad (6.15)$$

$$\frac{bx^*G}{1 - 2x^* + (1 + b^2)(x^*)^2} = z^*. \quad (6.16)$$

Cuando  $G = 0$ , este sistema (6.14)-(6.16) presenta una única solución, i.e., el modelo solo tiene un punto de equilibrio en  $(F, 0, 0)$ . Vamos a analizar los dos diferentes casos para este equilibrio, pero primero realizaremos un cambio de variable para situar el equilibrio en  $(0, 0, 0)$  con

$$\bar{x} = x - F.$$

El sistema (6.11)-(6.13) queda como

$$x'(t) = -a\bar{x} - y^2 - z^2, \quad (6.17)$$

$$y'(t) = -y + (\bar{x} + F)y - b(\bar{x} + F)z, \quad (6.18)$$

$$z'(t) = -z + b(\bar{x} + F)y + (\bar{x} + F)z. \quad (6.19)$$

#### 1. Caso 1: $F < 1$ .

En este caso, tomamos la función de Lyapunov

$$V(\bar{x}, y, z) = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + y^2 + z^2),$$

cuya derivada satisface

$$\dot{V}(\bar{x}, y, z) = -a\bar{x}^2 - (1 - F)(y^2 + z^2) < 0.$$

De aquí se deduce que  $V$  es derivada positiva en  $\mathbb{R}^3$  y que su derivada  $\dot{V}$  es definida negativa en  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto, según el Teorema (3.2.3) de Lyapunov, el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  sería asintóticamente estable. Pero, si tomamos  $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 1, c_3 = \mu_1 = \min(a, 1 - F), k = 2$ , entonces se cumple el tercer punto del Teorema (3.2.3) de Lyapunov

$$\frac{1}{4}|(\bar{x}, y, z)|^2 \leq V(\bar{x}, y, z) \leq |(\bar{x}, y, z)|^2, \quad \dot{V}(\bar{x}, y, z) \leq -\mu_1|(\bar{x}, y, z)|^2, \quad \forall (\bar{x}, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Entonces, concluimos que el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  es **exponencialmente estable** para este caso.

## Capítulo 6. Aplicaciones en el Mundo Real

---

### 2. Caso 2: $F = 1$ .

En este segundo caso, tendríamos el mismo sistema (6.17)-(6.19) y, con la misma función de Lyapunov  $V$  que el caso anterior, vemos que

$$\dot{V} = -a\bar{x}^2 \leq 0.$$

Esto nos permite, tomando el Teorema 3.2.3 de Lyapunov, determinar que el punto de equilibrio es estable. Ahora, si tomamos un conjunto

$$E := \{(\bar{x}, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dot{V}(\bar{x}, y, z) = 0\} = \{(0, y_0, z_0) : y_0, z_0 \in \mathbb{R}\},$$

podemos demostrar que el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  es convergente si es el único subconjunto invariante de  $E$ . Tomamos  $(0, y_0, z_0) \in E \setminus \{(0, 0, 0)\}$  y definimos  $\varphi(\cdot)$  como la solución del PVI asociado a nuestro sistema (6.17)-(6.19). Entonces, tenemos que

$$\varphi_1(0) = -y_0^2 - z_0^2 < 0.$$

Así, como  $\varphi_1(0) = 0$ , entonces existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\varphi_1(t) < 0$ ,  $\forall t \in (0, \epsilon)$ . Con esto queda demostrado que  $(0, 0, 0)$  es el único subconjunto invariante de  $E$  y, por consiguiente, es **asintóticamente estable**.

### 3. Caso 3: $F > 1$ .

En este tercer caso, recurriremos al Teorema 3.2.4 de Tchetaev. Para ello, considérese la función de Lyapunov

$$V(\bar{x}, y, z) = \frac{1}{2}(-\bar{x}^2 + y^2 + z^2),$$

cuya derivada  $\dot{V}$  resulta

$$\dot{V}(\bar{x}, y, z) = a\bar{x}^2 + (F - 1)y^2 + (F - 1)z^2 + 2\bar{x}(y^2 + z^2).$$

Vemos entonces que  $\dot{V}$  es definida positiva y que  $V(0, 0, 0) = 0$ . Si tomamos entonces el punto  $(0, y, z)$ , podemos encontrar un  $\rho > 0$  tal que, para cualquier  $\sigma \in (0, \rho)$ , exista un  $y_\sigma = (0, y, z) \in \mathbb{B}(0; \sigma)$ , que cumple  $V(0, y, z) > 0$ . Con esto, y siguiendo el Teorema 3.2.4 de Tchetaev, demostramos que el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  es **inestable**.

Resumiendo para cada caso, tendríamos que

- Si  $F < 1$ , el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  es exponencialmente estable.
- Si  $F = 1$ , el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  es asintóticamente estable.
- Si  $F > 1$ , el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  es inestable.

Todo esto lo hemos estudiado asumiendo que  $G = 0$ . Esto se debe a que en el caso contrario  $G \neq 0$ , el sistema (6.11)-(6.13) se vuelve mucho más complejo, exhibiendo comportamientos caóticos para los atractores (véase Figura 6.1). Además, resolver el sistema algebraico (6.1)-(6.16) se vuelve más complicado, siendo difícil determinar cuántos puntos de equilibrio pueden existir.

A pesar de esto, si que se puede investigar la existencia de atractor global para el caso  $G = 0$ .

### 6.3.2. Atractor global

Nuestro sistema (6.11)-(6.13) presenta una solución global que genera un sistema dinámico autónomo  $\varphi(t, x_0, y_0, z_0)$ . Para demostrar la existencia del atractor, demostraremos que existe un conjunto absorbente. Concretamente, demostraremos que existe un conjunto absorbente acotado y, en consecuencia, un conjunto absorbente compacto.

Para ello, sea  $D \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto acotado. Entonces, existe un  $k > 0$  tal que  $|u_0| \leq k, \forall d \in D$ . Entonces, para cualquier  $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$  se tiene

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)'(t) &= 2xx' + 2yy' + 2zz' \\ &= 2(-ax^2 - y^2 - z^2 + aFx + Gy) \\ &\leq -ax^2 - y^2 - 2z^2 + aF^2 + G^2 \\ &\leq -\mu_1(x^2 + y^2 + z^2) + aF^2 + G^2, \end{aligned}$$

donde  $\mu_1 = \min(a, 1)$ .

Resolviendo la ecuación diferencial, tendríamos

$$\begin{aligned} x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) &\leq |u_0|^2 e^{-\mu_1 t} + \frac{aF^2 + G^2}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}) \\ &\leq k^2 e^{-\mu_1 t} + \frac{aF^2 + G^2}{\mu_1}. \end{aligned}$$

Esto implica que dado un  $\epsilon > 0$ , existe un  $T = T(\epsilon, D)$  tal que

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) \leq \frac{aF^2 + G^2}{\mu_1} + \epsilon, \forall t \geq T.$$

Esta inecuación implica que existe un conjunto absorbente compacto de  $\varphi$

$$K_\epsilon := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{aF^2 + G^2}{\mu_1} + \epsilon \right\}.$$

Entonces, según el Teorema 5.0.1 concluimos que el sistema dinámico generado por las soluciones de (6.11)-(6.13) posee un atractor global  $\mathcal{A} = \{(F, 0, 0)\}$ .

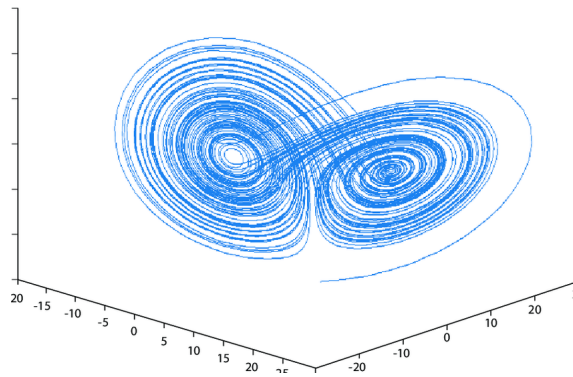


Figura 6.1: Atractor global de (6.11)-(6.13) con  $G \neq 0$



## Capítulo 7

# Análisis de impacto

En este capítulo se evalúa la contribución de este trabajo a los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) que todos los países de la Unión Europea adoptaron como parte de la Agenda 2030 en el año 2015. Estos ODS se desarrollaron en base a los Objetivos de Desarrollo del Milenio (ODM), que enfrentan la pobreza y lograron grandes avances en varias áreas como energía y ecosistemas terrestres y marinos, entre otros. A pesar de estos avances, los ODS plantean un plan de acción más amplio para beneficiar a las personas, proteger el planeta y promover la paz y la prosperidad, garantizando el acceso a justicia para todos.

A continuación se expondrá sobre cuáles ODS tiene un mayor impacto este trabajo.

En primer lugar, este trabajo tiene un impacto directo en el ODS 3 de salud y bienestar. Como se vio en las aplicaciones, la teoría de estabilidad y atractores globales es muy relevante en el estudio de modelos epidemiológicos, como el caso del modelo SIR estudiado. Nos facilita el análisis de la evolución de una posible pandemia, generando un avance en la prevención y control de enfermedades y epidemias. A esto se suma una mejora en la salud pública, reducción del número de muertes por la enfermedad y estudio de métodos de prevención para evitar mayores riesgos.



En segundo lugar, para la aplicación de estos modelos en el mundo real es necesaria la participación conjunta de numerosos especialistas de varios campos. Poniendo de ejemplo el modelo del quimiostato, es necesaria la participación y los conocimientos de matemáticas, biólogos y ecólogos, entre otros. Esto se alinea claramente con el ODS 4 que promueve una educación de calidad y un aprendizaje continuo e íntegro, aportando una ba-

## Capítulo 7. Análisis de impacto

---

se educativa para el éxito de las investigaciones que se realicen usando la teoría expuesta en este trabajo. Así mismo, el desarrollo de estos modelos impulsa la enseñanza de matemáticas aplicadas en niveles universitarios y su integración en carreras técnicas.

En tercer lugar, hemos hablado en el caso del modelo del quimiostato que puede modelar el tratamiento de aguas residuales. Ésto se alinea con el ODS 6, que se centra en la accesibilidad de agua para todos y el saneamiento de agua contaminada o residual para reducir el impacto medioambiental. Con el estudio de un modelo de tratamiento de agua residual se disminuye el impacto que tienen los desperdicios generados por fábricas que acaban en ríos, lagos u océanos, además de que puede aplicarse para limpieza y tratamiento de agua en zonas desérticas, donde el agua es escasa y, generalmente, contaminada con tierra y polvo.



En cuarto lugar, todos los conocimientos desarrollados son aplicables para el desarrollo de la industria y la infraestructura según el ODS 9. La estabilidad de las diferentes infraestructuras, así como procesos industriales complejos, puede modelarse como un sistema diferencial autónomo. El estudio de estos modelos facilita el desarrollo de soluciones y mejoras a los procesos e infraestructuras actuales. También, el modelado de fenómenos del mundo real (como el clima o fenómenos

físicos complejos) mediante los SDOs contribuye al diseño de modelos predictivos y de aprendizaje para toma de decisiones asistidas por IA.

En quinto lugar, uno de los modelos que se han estudiado en este trabajo es el modelo de Lorentz-84, que representa la evolución del clima con el tiempo. A partir del estudio de estos modelos, se favorece el desarrollo de medidas para aliviar el efecto del cambio climático, según lo que se pretende en el ODS 13. Estos modelos pueden modificarse para estudiar los efectos que tendrían nuevas variables como la deforestación o la contaminación por emisiones. Este conocimiento también sirve para prevenir sobre eventos climáticos extremos, mitigando los efectos que estos tienen.



En sexto lugar, este trabajo tiene un impacto directo en la vida de ecosistemas terrestres y submarinos que se relaciona con los ODS 14 y 15. Con el estudio de SDOs se pueden estudiar y analizar las fluctuaciones de diferentes especies en estos ecosistemas, además del efecto de la introducción del ser humano en el ecosistema. Con ello se pueden solucionar la pérdida y amenaza a la biodi-

---

versidad, pudiendo evitarse la desaparición de especies en peligro de extinción, además de problemas de sobrepoblación o desequilibrio por introducción de especies no autóctonas en un ecosistema.



Finalmente, para la aplicación de este marco teórico es necesario el trabajo coordinado de diversas personas, habiendo cooperación internacional entre diversos países. Ésto se alinea con el ODS 17, que fomenta las alianzas efectivas existentes entre sociedades, empresas y gobiernos.






# Bibliografía

- [1] Tomás Caraballo y Xiaoying Han, *Applied Nonautonomous and Random Dynamical Systems*. Springer Cham, 2017.
- [2] Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico. «Ampliación de Ecuaciones Diferenciales». Universidad de Sevilla. (2023).

Este documento esta firmado por



<b>Firmante</b>	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
<b>Fecha/Hora</b>	Tue Jul 01 22:24:24 CEST 2025
<b>Emisor del Certificado</b>	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
<b>Numero de Serie</b>	561
<b>Metodo</b>	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)