

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica, Alimentaria y
de Biosistemas



Estructura y propagación de pulsos ultracortos
de luz con momento angular orbital

TESIS DOCTORAL

Presentada para optar al título de Doctor por:

Raúl García Álvarez
Máster en Física Nuclear

Madrid, 2025



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica,
Alimentaria y de Biosistemas

Doctorado en Sistemas Complejos

Estructura y propagación de pulsos ultracortos de luz con momento angular orbital

TESIS DOCTORAL

Presentada para optar al título de Doctor por:

Raúl García Álvarez

Máster en Física Nuclear

Bajo la dirección de:

Dr. Miguel Ángel Porras Borrego

Madrid, 2025

Título: Estructura y propagación de pulsos ultracortos de luz con momento angular orbital

Autor: Raúl García Álvarez

Programa de Doctorado: Sistemas Complejos

Dirección de Tesis:

Dr. Miguel Ángel Porras Borrego, Profesor Titular, Universidad Politécnica de Madrid

Revisores Externos:

Tribunal de Tesis:

Fecha de Defensa de Tesis:

Agradecimientos

A mi tutor Miguel A. Porras, por su guía, criterio y dedicación durante toda la tesis, así como por todo el trabajo aportado a lo largo de estos años para mejorar su claridad y enfoque.

Gracias al personal técnico y compañeros del Departamento de Energía y Combustibles de la ETSIME, por el apoyo, el espacio, y gracias al profesorado y compañeros del Programa de Sistemas Complejos de la ETSIAAB. Y por último, gracias a quienes compartieron conmigo esos primeros años.

Y, sobre todo, a mi esposa y a nuestro hijo, que, llegado recientemente, ya ha redefinido todas las prioridades. Esta tesis es para vosotros.

Abstract

In the field of research currently called "structured and complex light", the orbital angular momentum of light associated with phase singularities, or vortices, plays a central role, with vortices of increasingly high topological charge being generated today. At the same time, synthesis at progressively shorter temporal scales has recently reached and even surpassed the duration corresponding to a single optical cycle. Vortices and ultrashort pulses are today fundamental in a multitude of applications such as communications, quantum entanglement, matter manipulation, and even in astrophysics and medicine. Despite the experimental work and its applications, there is currently no theory describing the propagation properties of few-cycle pulses with OAM. This theoretical study is the content of this Thesis.

I have analysed few-cycle Laguerre–Gauss vortices for an arbitrary frequency dependence of the Rayleigh range of their monochromatic constituents. I have demonstrated a lower bound to the pulse duration set by the topological charge (and thus by the OAM) at the bright ring of the beam. This bound stems from intrinsic space–time couplings that become stronger as the pulse shortens and the charge increases, preventing ultrafast vortices from reaching the duration expected from the available laser bandwidth. The bound varies along the propagation axis: its modulation is governed by the Porras factor g_0 , which encodes how the Rayleigh range changes with frequency and thereby explains the non-uniform temporal profile. Moreover, dispersion of the Gouy phase and of the wavefronts of different spectral components induces pulse distortions that hinder approaching the bound.

To deepen the understanding of pulsed vortices, I have investigated ultrafast Bessel vortices—so-called X waves—which are ideally diffraction-free. X waves with OAM also exhibit spatio-temporal couplings that impose a minimum duration for a given charge. A detailed wide-band analysis shows that these beams are the minimum-duration OAM carriers along propagation at their bright ring.

In such minimum X waves, the OAM induces temporal oscillations within the X arms whose number equals the topological charge at any radial position. The spectrum is distributed radially, with higher frequencies near the axis and lower frequencies toward the periphery, while the entire wave undergoes a global blue-shift proportional to the charge. Since the bright ring increases with the topological charge, the frequency at the bright ring remains constant independent of the topological charge and determined solely by the source spectrum.

Resumen

Dentro del campo de investigación llamado actualmente "luz estructurada y compleja", el momento angular orbital de la luz asociado a singularidades en la fase, o vórtices, juega un papel central, produciéndose hoy en día vórtices de carga topológica cada vez más alta. Al mismo tiempo, la reducción temporal de los pulsos ha llegado e incluso sobrepasado la duración correspondiente a un solo ciclo óptico. Vórtices y pulsos ultracortos son hoy en día fundamentales en multitud de aplicaciones como las comunicaciones, entrelazamiento cuántico, manipulación de la materia e incluso en astrofísica y medicina. A pesar del trabajo experimental y sus aplicaciones, no existe hoy una teoría de las propiedades de propagación de pulsos de pocos ciclos con OAM. Dicho estudio teórico es el contenido de esta Tesis.

He estudiado los vórtices ultracortos (de pocos ciclos) del tipo de Laguerre-Gauss con OAM generalizando para cualquier tipo de dependencia de la frecuencia por parte de la distancia de Rayleigh de los constituyentes monocromáticos. Hemos encontrado la existencia de un límite inferior a la duración de vórtices ultracortos determinado por la carga topológica del vórtice, proporcional al OAM, en su anillo brillante. Este límite es consecuencia de acoplamiento espacio-temporales intrínsecos que son más fuertes cuanto menor sea la duración del pulso y más alta sea la carga topológica, y tiene como resultado que no se puedan sintetizar vórtices ultrarrápidos tan cortos como lo esperado con el ancho de banda disponible con una fuente láser dada de femtosegundos. Además, hemos encontrado que este límite tiene una modulación a lo largo de su dirección de propagación. Esta modulación está determinada por el llamado factor de Porras, o factor g_0 , que caracteriza la dependencia en la distancia de Rayleigh de la frecuencia para la fuente con la que se sintetiza el vórtice ultrarrápido, y explica que su duración no sea constante en la propagación. También se ha encontrado una deformación del pulso que impide acercarse al límite debido a la dispersión en la fase de Gouy y en los frentes de onda de las diferentes componentes espectrales.

Continuando con una comprensión más profunda de los vórtices pulsados ultracortos, se han estudiado los vórtices ultrarrápidos de tipo Bessel, conocidos como ondas-X. Estos ya se sabe que no experimentan, idealmente, difracción. Las ondas-X con OAM experimentan acoplamiento espacio-temporales que limitan también su duración mínima para un OAM dado. Al estudiarse con detalle la estructura espacio-temporal de las ondas-X con gran ancho de banda se ha descubierto que son las portadoras de OAM de duración mínima a lo largo de su propagación en su anillo brillante.

En estas ondas-X mínimas el OAM induce oscilaciones dentro de los brazos X. La frecuencia de dichas oscilaciones temporales en número iguala la carga topológica a cualquier distancia radial del vórtice. Su frecuencia se reparte radialmente desde las frecuencias más altas en la proximidad del vórtice hasta las más pequeñas hacia la periferia. Al mismo tiempo toda la onda-X mínima experimenta en conjunto un corrimiento hacia frecuencias más altas directamente proporcional a la carga topológica. Debido a estos dos efectos, hemos encontrado que la frecuencia en el anillo brillante se mantiene constante porque el radio del anillo brillante crece compensando estos corrimientos en la frecuencia. Así, la frecuencia en el anillo de luz brillante que rodea al vórtice no depende de la carga topológica y está solamente determinado por el espectro de la fuente con el que se crea.

Índice

Agradecimientos	iii
Abstract	iv
Resumen	v
Lista de Figuras	viii
Abreviaturas y acrónimos	xi
1 Introducción	1
1.1 Momento angular orbital de la luz	3
1.2 Pulsos ultracortos con OAM	4
2 Limitaciones al momento angular orbital	9
2.1 Vórtices ultrarrápidos de Laguerre-Gauss	10
2.1.1 Modelo isodifractante	11
2.1.2 Limitación al momento angular orbital en el caso isodifractante	12
2.1.3 Paquetes mínimos con momento angular orbital	16
3 Generalización del límite al Momento Angular Orbital	19
3.1 Vórtices ultrarrápidos de Laguerre-Gauss generales	20
3.1.1 El factor g_0 de la fuente	21
3.1.2 Resultados previos y problemas abiertos	23
3.2 Restricciones generales de las propiedades del pulso en el anillo brillante	25
3.3 Corrimiento de la frecuencia	26
3.4 Restricciones a la duración y al ancho de banda	28
3.5 Cambios en la forma del pulso en su propagación y con la carga topológica, y estados localmente comprimidos de momento angular orbital	32
4 Ondas-X con momento angular orbital con gran ancho de banda	39
4.1 Ondas localizadas superlumínicas con momento angular orbital	41
4.1.1 Superancho de banda de ondas-X con momento angular orbital	42
4.1.2 Ondas-GX con momento angular orbital	47
4.2 Ancho de banda más representativo experimentalmente	50
5 Conclusiones	53
Producción científica derivada de la tesis	55

Referencias	57
Anexo A: Cálculo del máximo de fluencia	63
Anexo B: Producto ancho de banda – duración	65

Lista de Figuras

1.1	Representación de un haz con OAM	3
2.1	Envolvente de varios LG pulsados con $s_0(\omega) \equiv s_0$ en el foco y diferentes valores de l	12
2.2	Dos pulsos de un ciclo de duración con dos espectros diferentes, ambos preparados para que $ l < 22,5$	15
2.3	UFVs de la menor duración posible para una carga topológica $ l $	17
3.1	Pulso y espectro de un pulso con espectro potencial-exponencial con $\omega_0 = 2,5$ rad/fs usado como fuente para el UFV	22
3.2	Comparación del campo eléctrico de los UFVs focalizados en su anillo brillante frente a la fuente de pulsos ultracortos que lo genera para diferentes valores de g_0 y $ l $, y distintos puntos de su distancia de propagación.	24
3.3	Corrimiento de la frecuencia en el anillo brillante de un UFV	27
3.4	Límite inferior del número de oscilaciones de los UFV en función de la distancia de propagación para diferentes valores de g_0	30
3.5	Cambio en el número de oscilaciones de dos UFVs en el anillo brillante, con $g_0 = 1$ y $g_0 = -1$ a lo largo de su propagación para diferentes duraciones del pulso fuente que los genera.	33
3.6	Variación del número de oscilaciones para un UFV en el máximo del límite inferior para $g_0 = \pm 1$ al aumentar $ l $ y el aumento de la envolvente temporal del campo eléctrico.	34
3.7	Cambios en la fase con densidad espectral constante de dos UFVs	35
3.8	Cambio en el número de oscilaciones de un UFVs en el anillo brillante, con $g_0 = -1$ a lo largo de su propagación, comparación de su campo eléctrico para diferentes valores de z con el pulso fuente que lo genera y su fase de Gouy.	37
4.1	Densidad espectral del haz de Bessel de banda ancha y número de ondas transversales respecto a la frecuencia de una Onda-X y una Onda-GX.	40
4.2	Parte real del campo eléctrico de una onda-X para diferentes valores de $ l $ normalizados a su valor pico.	42
4.3	Parte real del campo eléctrico de ondas-X para diferentes distancias radiales y sus respectivos espectros de frecuencias.	44
4.4	Frecuencia central instantánea $\omega_c(r)$ y perfil radial de la fluencia para diferentes valores de $ l $ para una onda-X.	45

4.5	Parte real del campo eléctrico de ondas-GX sin OAM ($l = 0$) y con OAM ($l \neq 0$)	47
4.6	Parte real del campo eléctrico para ondas-GX a diferentes distancias radiales y sus respectivos espectros de frecuencias.	48
4.7	Frecuencia central instantánea $\omega_c(r)$ y perfil radial de la fluencia para diferentes valores de $ l $ para una onda-GX	49
4.8	Perfil radial de la fluencia para una onda-GX con espectro truncado superiormente y la parte real del campo eléctrico en el anillo brillante.	51

Abreviaturas y acrónimos

UPM Universidad Politécnica de Madrid

SAM Momento Angular de Espín (*Spin Angular Momentum*)

OAM Momento Angular Orbital (*Orbital Angular Momentum*)

UFV Vórtice Ultrarrápido (*Ultrafast Vortex*)

LG Laguerre-Gauss

FWHM Anchura a mitad de altura del máximo (*Full Width at Half Maximum*)

CEP Fase absoluta (*Carrier-Envelope Phase*)

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la luz y sus interacciones ha sido un tema de interés central en la física durante siglos. La invención de dispositivos que permiten controlar y manipular la luz ha revolucionado tanto nuestra comprensión fundamental como nuestras capacidades tecnológicas. Entre estos avances, el desarrollo de los láseres pulsados marcó un hito que ha transformado numerosos campos de la ciencia y la tecnología.

Un pulso de luz es una emisión de radiación electromagnética concentrada en un intervalo temporal corto, por tanto, una de las características más notables de los pulsos de luz ultracortos es su alta potencia pico. La energía total de un pulso (E) está concentrada en un intervalo temporal extremadamente breve (Δt), lo que implica que la potencia instantánea o pico (P_{pico}) del pulso es mucho mayor que la de una fuente continua con la misma energía: $P_{pico} = \frac{E}{\Delta t}$. Por ejemplo, un láser capaz de emitir una energía de apenas unos milivatios de potencia promedio puede alcanzar potencias pico de gigavatios (10^9 W) o incluso teravatios (10^{12} W) cuando se comprime en pulsos de femtosegundos (10^{-15} s) o attosegundos (10^{-18} s). Esta propiedad es crucial porque permite acceder a regímenes físicos que serían inalcanzables con fuentes continuas de luz. Entre las aplicaciones de los pulsos de luz, destacan:

1. **Óptica no lineal:** A altas intensidades, los materiales ópticos presentan comportamientos no lineales, donde la respuesta del medio deja de ser proporcional al campo eléctrico incidente. Esto permite fenómenos como la generación de armónicos [1] (multiplicación de frecuencia), la mezcla de frecuencias y la autofocalización, procesos esenciales en la generación de nuevos rangos espectrales y en la fabricación de dispositivos fotónicos [2].
2. **Generación de pulsos de attosegundos:** La combinación de pulsos ultracortos y fenómenos de óptica no lineal ha permitido generar luz en escalas de tiempo de attosegundos [3]. Estos pulsos permiten observar y controlar el movimiento de electrones dentro de los átomos y moléculas, proporcionando herramientas únicas para explorar la dinámica cuántica.
3. **Micromecanizado y procesamiento de materiales:** Los pulsos ultracortos pueden cortar, perforar o modificar materiales con una precisión extrema, minimizando los efectos térmicos [4]. Esto es vital en la fabricación de dispositivos microelectrónicos, componentes médicos y sistemas de ingeniería de alta precisión [5].

4. **Generación de rayos X blandos y fuentes de luz coherente:** Los pulsos ultracortos de alta intensidad pueden interactuar con plasmas para generar rayos X coherentes, fundamentales para la obtención de imágenes de alta resolución de estructuras biológicas y materiales complejos [6].
5. **Aceleradores de partículas compactos:** La alta potencia pico también ha permitido explorar nuevas técnicas de aceleración de partículas mediante pulsos láser ultracortos [7]. Este enfoque podría reducir significativamente el tamaño de los aceleradores de partículas, abriendo nuevas posibilidades en física de altas energías y medicina.
6. **Cirugía láser de alta precisión:** En medicina, la capacidad de aplicar energía de manera localizada y controlada ha dado lugar a técnicas quirúrgicas avanzadas, como la cirugía ocular LASIK y tratamientos dermatológicos que requieren alta precisión sin dañar tejidos circundantes [8].

El desarrollo de los láseres pulsados comenzó con la invención del láser de rubí por Theodore Maiman en 1960 [9]. Este dispositivo utilizaba un cristal de rubí como medio activo, excitado mediante una lámpara de flash. Los primeros láseres de rubí generaban pulsos de luz intensos y coherentes en el rango de nanosegundos. Aunque rudimentarios en comparación con los estándares actuales, estos dispositivos demostraron la viabilidad de la emisión coherente de pulsos de luz, lo que estimuló una rápida evolución de la tecnología láser.

Durante las décadas siguientes, se produjeron avances significativos en el diseño y funcionamiento de los láseres pulsados. En la década de 1960, los láseres de gas, como los de dióxido de carbono [10] y helio-neón [11], ofrecieron mejoras en eficiencia y control. La llegada de los láseres de estado sólido, junto con las técnicas de Q -switching [12] y sincronización de modos (mode-locking) [13], marcó un nuevo punto de inflexión, permitiendo generar pulsos en el rango de los picosegundos y, posteriormente, de los femtosegundos.

En la actualidad, los láseres de titanio:zafiro y las técnicas avanzadas de compresión de pulsos han permitido alcanzar duraciones de pulso de solo unas pocas oscilaciones del campo eléctrico, conocidos como pulsos de ciclo único.

La duración de un pulso de luz está directamente relacionada con la anchura de su espectro de frecuencias mediante una relación dada por el pulso limitado por la transformada de Fourier, expresado matemáticamente como: $\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$, donde σ_t y σ_ω representan la desviación típica de la duración del pulso y de la anchura espectral, respectivamente. Pero es habitual trabajar óptica ultrarrápida con la duración del pulso y la anchura del espectro en términos de la semianchura equivalente gaussiana, definida como la anchura a la cual la intensidad ha decaído en $1/e$ de su valor máximo. La relación entre ambas medidas es $\Delta t = 2\sigma_t$ para la duración temporal y $\Delta\omega = 2\sigma_\omega$ para la anchura espectral. Con estas definiciones, el producto duración del pulso-anchura de banda toma la forma:

$$\Delta t \Delta \omega \geq 2, \tag{1.1}$$

siendo Δt duración del pulso y $\Delta\omega$ la anchura espectral. Por tanto, en principio, la duración de un pulso puede ser extremadamente corta siempre que se disponga de un espectro lo suficientemente amplio, lo que ha permitido generar pulsos en la escala de attosegundos,

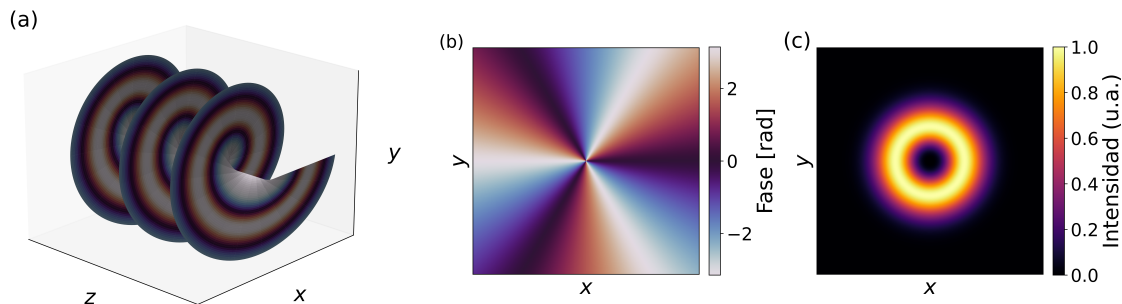


Figura 1.1: Representación de un haz con OAM. (a) Superficies de fase constante que forman frentes de onda helicoidales a lo largo de la propagación en el eje z . (b) Fase de la sección transversal para $l = 3$. (c) Distribución de la amplitud en el plano transversal para $l = 3$, mostrando el patrón anular propio de los haces con vórtice.

como se ha mencionado anteriormente. Pero el desarrollo de los pulsos de luz ultracortos se ha abierto a desarrollos de haces más complejos en los laboratorios cuyas propiedades fundamentales no han sido estudiadas. Un ejemplo relevante de estos haces son los vórtices ópticos pulsados ultracortos, tema central de esta tesis doctoral, donde ciertos tipos específicos de haces complejos presentan limitaciones que impiden alcanzar la duración mínima que permitiría su ancho de banda. Para comprender estas limitaciones, es necesario estudiar y describir claramente qué propiedades fundamentales adicionales aparecen al considerar estos haces complejos.

1.1 Momento angular orbital de la luz

Hasta la década de 1990, la luz era descrita por su energía, frecuencia y polarización (asociado al momento angular de espín - en inglés SAM). Sin embargo, en 1992, se demostró que la luz también puede portar momento angular orbital - OAM en inglés-, vinculado a la estructura helicoidal de su frente de onda [14], por lo cual también se llaman vórtices de luz. Este hallazgo amplió considerablemente la comprensión de las propiedades dinámicas de los haces de luz.

El OAM se refiere a la capacidad de un haz de luz para girar alrededor de su eje de propagación. Esta propiedad se manifiesta en haces cuyos frentes de onda tienen forma helicoidal, como se ilustra en la Fig. 1.1(a). Cada fotón en un haz con OAM posee un momento angular orbital proporcional a un número entero l , denominado carga topológica, que describe cuántas veces el frente de onda gira en torno al eje de propagación por longitud de onda. Este comportamiento se puede visualizar como un helicoide que avanza a lo largo del eje del haz, realizando un movimiento helicoidal. Una sección transversal de la fase y la amplitud de un haz con OAM con carga topológica $l = 3$ se muestra en las Figs. 1.1(b) y 1.1(c).

La primera demostración experimental del OAM de la luz consistió en la generación de haces con vórtices ópticos, los cuales tienen un frente de onda helicoidal y una intensidad nula en el centro. Esta configuración permitió transferir momento angular a partículas microscópicas suspendidas en un fluido, haciendo que giraran alrededor del eje del haz, lo cual supuso

un avance significativo en la manipulación óptica de la materia [14, 15]. Este fenómeno se diferenció claramente del momento angular de espín, el cual puede tomar los valores $\pm\hbar$, mientras que el OAM puede tomar valores múltiplos de \hbar ilimitados.

Desde su descubrimiento, el estudio del momento angular orbital de la luz ha experimentado un crecimiento exponencial, impulsando aplicaciones innovadoras en diversos campos. Entre las más destacadas se encuentran:

1. **Manipulación óptica de partículas:** Los haces con OAM son capaces de transferir momento angular a partículas microscópicas, permitiendo rotarlas y posicionarlas con precisión. Esta propiedad ha sido clave en el desarrollo de pinzas ópticas, utilizadas en biología para manipular células [16].
2. **Comunicaciones ópticas avanzadas:** Gracias a la posibilidad de generar múltiples modos de OAM, es posible multiplexar señales ópticas, aumentando la capacidad de transmisión de datos en redes de fibra óptica. Esto abre nuevas perspectivas para las comunicaciones de alta velocidad y el procesamiento cuántico de información [17].
3. **Microscopía y holografía:** Los haces con OAM mejoran la resolución en técnicas de microscopía de superresolución y permiten la creación de hologramas tridimensionales de alta precisión, con aplicaciones en visualización médica e ingeniería [18].
4. **Criptografía cuántica:** La capacidad de los haces de OAM para transportar grandes cantidades de información de forma segura ha sido aprovechada en protocolos de criptografía cuántica, incrementando la complejidad y seguridad de los sistemas de transmisión de datos [19].
5. **Generación de pulsos ultracortos con OAM:** La combinación de pulsos de luz ultracortos con momento angular orbital ha abierto nuevas oportunidades para explorar fenómenos ultrarrápidos y no lineales, y se estudia su aplicación en la generación de pulsos de attosegundos con estructuras complejas [20].

1.2 Pulsos ultracortos con OAM

Con todo esto, en la última década ha habido un gran interés en la generación y aplicación de vórtices ultrarrápidos (UFV por sus siglas en inglés), o pulsos ultracortos portadores de OAM, particularmente aquellos con pocos ciclos ópticos que se aproximan al régimen de un solo ciclo, por las aplicaciones que tienen tanto los pulsos ultracortos como el OAM al mismo tiempo. Las mejoras técnicas han permitido acercarse al régimen de duración de un solo ciclo y alcanzar cargas topológicas de dos dígitos en los vórtices [21]. Por otro lado, el uso de estos UFVs tanto en interacciones luz-materia de campo fuerte, como en los experimentos de generación de altos armónicos y attosegundos [20, 22, 23, 24, 25, 26, 27], ha llevado a la generación de UFVs de alta carga topológica, típicamente unas pocas docenas, incluso ondas exóticas con fracciones de cargas topológicas y variables en el tiempo [28, 29]. Propuestas recientes [30] que imitan la generación de altos armónicos basadas en moduladores espaciales de luz únicamente en su fase permiten aumentar la carga topológica a demanda.

Teniendo en cuenta estos enormes esfuerzos experimentales, resulta algo sorprendente la escasa

cantidad de trabajos teóricos sobre las características de propagación de los UFVs [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37], incluso en la situación a priori más sencilla de propagación en vacío. Esta tesis se centra en el estudio de esta dinámica de propagación de los UFVs, la cual difiere en aspectos importantes de la dinámica de los pulsos fundamentales sin OAM debido a un fuerte acoplamiento entre los grados de libertad temporal y del OAM en el UFV.

Así, el propósito general de esta Tesis es desvelar hasta qué punto el momento angular orbital (OAM) condiciona la estructuración espacio-temporal de los pulsos ópticos ultracortos y, en particular, qué límites fundamentales impone a su duración mínima y a la forma que adoptan durante la propagación.

Para ello el primer objetivo fue cuantificar el límite inferior a la duración de los vórtices ultrarrápidos de tipo Laguerre-Gauss (LG) ampliando los resultados pioneros de [34] al caso no isodifractante, incorporando el factor de Porras g_0 para describir fuentes láser con longitud de Rayleigh dependiente de la frecuencia. Una vez alcanzado este objetivo, se buscó explorar alternativas no difractivas basadas en ondas-X con el fin de superar las limitaciones impuestas por la difracción y la dispersión en modos LG, y determinar la estructura espacio-temporal mínima que pueden portar estas ondas manteniendo un OAM dado.

En el Capítulo 2 se repasan los **UFVs isodifractantes** de tipo Laguerre-Gauss. Se dice que un UFV es isodifractante cuando todas sus componentes espectrales tienen la misma longitud de difracción o rango de Rayleigh. Estos pulsos juegan un papel central en la teoría de la propagación de los UFVs porque son los únicos cuya forma temporal del pulso no cambia durante la propagación, independientemente de lo corto que sea el pulso y de lo alta que sea la carga topológica, como se señala en [34]. Para estos UFVs, la Ref. [34] establece un fuerte acoplamiento entre la forma temporal del pulso en el anillo brillante que rodea la singularidad del vórtice y la magnitud de la carga topológica que establece un límite superior a la carga topológica que puede llevar un UFV de un cierto número de oscilaciones, y viceversa, establece un límite inferior al número de oscilaciones de un UFV de una magnitud dada de la carga topológica $|l|$. En consecuencia, un UFV sintetizado con un determinado ancho de banda debe aumentar su duración respecto al mínimo esperado por su ancho de banda cuando se incrementa su carga topológica [35].

Sin embargo, las fuentes láser de femtosegundo que emiten con una distancia de Rayleigh independiente de la frecuencia parecen ser más la excepción que la regla [38, 39, 40, 41] (véase [42] para una posible excepción). El objetivo inicial de esta Tesis era buscar ese límite superior a la carga topológica en el anillo brillante pero para **UFVs generales**, no solo isodifractantes, y también el estudiar sus fenómenos de propagación generales. Por ello en el Capítulo 3 se generaliza el límite inferior a la duración de los UFVs, el cual viene dado por el llamado factor g_0 , o factor de Porras, introducido por primera vez en [43], y que caracteriza la variación del rango de Rayleigh con la frecuencia.

El factor g_0 determina múltiples propiedades de pulsos ultrarrápidos de pocos ciclos. Para los haces gaussianos ultrarrápidos, aparece un pequeño desplazamiento de la frecuencia portadora al rojo o al azul experimentado durante la propagación que está determinado por su factor g_0 . Más importante aún, el factor g_0 determina la distribución de la fase absoluta o CEP ("carrier-envelope-phase") de la portadora del pulso en el volumen focal [38, 39, 40, 41, 42,

43, 44, 45, 46]. Por ello, el factor g_0 de la fuente ha demostrado ser un parámetro crucial en las interacciones luz-materia sensibles a la fase, como en [38, 39] para la fotoemisión de electrones y en [40] para la aceleración de electrones con pulsos polarizados radialmente, ya que el resultado de los experimentos depende crucialmente del factor g_0 de la fuente. Viceversa, el uso de interacciones sensibles a la fase permite medir el mapa focal de la CEP y a partir de él determinar el factor g_0 de la fuente [38]. El valor $g_0 = 0$ corresponde a la geometría isodifractante en haces gaussianos ultrarrápidos y UFVs. Hoff et al. [38] informan de valores medios $g_0 = -1,95$ y $g_0 = -1,2$ en dos experimentos con la misma fuente pero con diferentes "tunings"; Jolly [40] sugiere que los láseres de alta potencia se caracterizarían por $g_0 \simeq 1$; las mediciones de la fase de la envolvente portadora en [41, 42] utilizando láseres de titanio:zafiro con acoplamiento de modos de lente Kerr de pocos ciclos sugieren que estas fuentes se caracterizarían por $-1 < g_0 < 0$. La mayoría de estas mediciones indican variaciones significativas de la distancia de Rayleigh con la frecuencia.

En el Capítulo 3 se extiende el límite inferior al número de ciclos de un pulso de luz ultracorto con momento angular orbital, encontrando que depende de la localización axial. A su vez explica las distorsiones temporales que experimenta un UFV con OAM general en la propagación.

Una vez estudiados los UFVs del tipo Laguerre-Gauss, se buscó extender este estudio a otro tipo de haces pulsados ultracortos con momento angular orbital. Uno de los principales problemas en las comunicaciones en espacio libre son la difracción y dispersión, así como la desintegración del OAM debida a la turbulencia en la atmósfera y otros fenómenos. La difracción también limita en gran medida la región donde la luz intensa puede interactuar con la materia en experimentos de óptica no lineal como la de generación de armónicos altos. Por tanto, las aplicaciones mencionadas se beneficiarían de la elección de modos diferentes de los UFV de Laguerre-Gauss estándar, que exhiban comportamiento sin difracción ni dispersión, además de resistencia a la turbulencia. Se sabe desde la década de 1990 que las ondas-X (X-waves) poseen todas estas propiedades, pero solo recientemente ha surgido interés en el estudio de ondas-X con OAM. Recientemente, ya han sido generadas ondas-X con OAM en experimentos, aunque en ellos han utilizado un espectro temporal de frecuencias estrecho, siendo este casi monocromático, y por ello su duración está en el rango de los picosegundos [47]. Así otro objetivo de la Tesis pasó por buscar las características, la propagación y la existencia de otro posible límite temporal debido a la carga topológica en las **ondas-X ultracortas** de tipo Bessel, de pocos ciclos, que portan vórtices y por tanto OAM.

En el Capítulo 4 se estudia la estructura espacio-temporal de las ondas X de banda ancha que portan OAM, caracterizada por fuertes acoplamientos entre los grados de libertad temporales y espaciales, en particular el grado de libertad azimutal (OAM). Además, cuanto más ancho es el espectro de frecuencias, más resolución espacial tendrá.

En concreto, en [48, 49] las ondas-X con OAM también presentan una limitación parecida a su duración en función de su OAM. En el Capítulo 4 se estudian dichos acoplamiento espacio-temporales para las ondas-X mínimas que pueden portar l unidades de OAM. Incluso para espectros de frecuencia ultra-anchos que podrían dar lugar a un pulso unipolar, el acoplamiento temporal-OAM induce oscilaciones temporales y fuertes corrimientos al rojo y al azul a distintas distancias del vórtice, estando todos los colores del espectro distribuidos radialmente como en un arcoiris.

En conjunto los UFVs de tipo Laguerre-Gauss o de tipo Bessel de duraciones tan cortas y cargas topológicas tan altas consideradas en esta Tesis no han sido sintetizadas a día de hoy por problemas técnicos, siendo el récord de un UFV con carga topológica $l = 5$ y una duración del orden de 6 fs [50], donde ya podrían observarse los fenómenos explicados en esta Tesis.

Se espera que en los próximos años se mejoren tecnologías que permitan sintetizar UFVs con duración más corta y mayor OAM.

Capítulo 2

Limitaciones al momento angular orbital

En este Capítulo se estudian los UVVs que portan OAM en el caso llamado isodifractante. Se ha optado por haces de Laguerre-Gauss (LG) por ser los más usados y tener aplicaciones en multitud de campos, desde la comunicación óptica cuántica y la criptografía hasta la generación de pulsos de attosegundos y la manipulación de partículas mediante pinzas ópticas.

La principal novedad radica en el establecimiento de una restricción fundamental para la carga topológica de los UVVs y, por tanto, para el OAM transportado, dado que son proporcionales. Mientras que en haces monocromáticos de duración larga o indefinida la carga topológica puede considerarse arbitrariamente alta, para pulsos de duración muy reducida, de pocos ciclos, se pone de manifiesto la existencia de un límite superior relacionado con el ancho espectral del pulso y su frecuencia central. Este límite implica que, a mayor valor de la carga topológica, más larga debe ser la duración mínima del pulso y más dificultades se presentan para mantener la forma de pulso estable durante su propagación.

Un vórtice óptico se caracteriza por una variación de fase $e^{il\phi}$ en la dirección azimutal ϕ , perpendicular a la dirección de propagación z . En el centro del haz, $r = 0$, la fase es indeterminada y la intensidad es nula, creando una distribución de intensidad en forma de anillo. La carga topológica l es un número entero positivo o negativo y que se corresponde con un valor del OAM $l\hbar$ por fotón.

Los haces de LG son ejemplos prototípicos de vórtices ópticos y pueden generarse fácilmente con redes de difracción con dislocación, a modo de tenedor, o láminas de fase en espiral [15]. Desde la constatación de que los haces de LG portan OAM, se ha abierto la puerta a múltiples aplicaciones en campos como la astrofísica, la biomedicina, las pinzas ópticas [51], la ablación láser [52] o las comunicaciones clásicas y cuánticas [53, 54].

Con la llegada de pulsos ultracortos (duraciones de pocos ciclos ópticos) que además portan OAM, estas aplicaciones se extienden a regímenes de muy alta intensidad y resolución temporal. En este escenario, la creencia de que la carga topológica es ilimitada, y por tanto el OAM, se ha demostrado que es falsa. En el artículo [34] se muestra que existe una restricción fundamental a la carga topológica y, en consecuencia, al OAM que puede transportar un pulso ultracorto

de cierta duración. En este Capítulo se repasan los resultados del artículo [34] en el que se establece por primera vez tal restricción, dado que su extensión a casos más generales es el objetivo de esta Tesis.

2.1 Vórtices ultrarrápidos de Laguerre-Gauss

La expresión del campo eléctrico de un pulso óptico ultracorto con carga topológica l en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) puede escribirse como

$$E(r, \phi, z, t') = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{E}(r, \phi, z, \omega) \exp(-i\omega t') d\omega, \quad (2.1)$$

denotando $t' = t - z/c$ como el tiempo local y c la velocidad de la luz en el vacío, siendo este campo una superposición de haces de LG

$$E(r, \phi, z, \omega) = \hat{a}(\omega) \frac{e^{-i(|l|+1)\psi(\omega, z)} e^{-il\phi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R(\omega)}\right)^2}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{s(\omega, z)}\right)^{|l|} e^{\frac{i\omega r^2}{2cq(\omega, z)}}, \quad (2.2)$$

todas ellas con la misma carga topológica l y orden radial $p = 0$, pero con diferentes frecuencias ω y pesos $\hat{a}(\omega)$, $q(\omega, z) = z - iz_R(\omega)$ es el parámetro complejo del haz, $\psi(\omega, z) = \tan^{-1}(z/z_R(\omega))$ es la fase de Gouy,

$$s(\omega) = \sqrt{\frac{2cz_R(\omega)}{\omega}} \quad (2.3)$$

es la cintura del haz Gaussiano fundamental ($l = 0$),

$$s(\omega, z) = s(\omega) \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2(\omega)}} \quad (2.4)$$

es la anchura de la cintura del haz fundamental Gaussiano y $z_R(\omega)$ es la longitud de Rayleigh, cuya dependencia con la frecuencia, y por tanto del resto de los parámetros depende de la fuente láser de pocos ciclos y se estudiará más adelante. Además, el parámetro de haz complejo se escribe habitualmente como

$$\frac{1}{q(\omega, z)} = \frac{1}{R(\omega, z)} + i \frac{2c}{\omega s^2(\omega, z)}, \quad (2.5)$$

donde $1/R(\omega, z) = z/(z^2 + z_R^2(\omega))$ es la curvatura de los frentes de onda. Al estar limitado a frecuencias positivas, el campo óptico E en la Ec. (2.1) es la representación compleja analítica del campo óptico real $\text{Re}\{E\}$ [55].

Dado que la Ec. (2.1) se anula en $r = 0$ y $r \rightarrow \infty$, presentará un anillo brillante alrededor de cierto radio. Es natural estudiar, desde un punto de vista teórico y aplicativo, la forma temporal del pulso en el anillo brillante, o en el más brillante si hay varios. Como se mencionó, analizamos si esta forma de pulso y la carga topológica l pueden ser tomadas arbitrariamente o si existe algún tipo de relación.

2.1.1 Modelo isodifractante

Un requisito previo para hablar sobre la forma temporal de un UFV es, *stricto sensu*, que permanezca sin cambios durante la propagación (excepto por una amplitud compleja global, como se entiende habitualmente). La Fig. 2.1 ilustra la situación con el modelo usual de un campo en el cual el ancho de la cintura $s(\omega) \equiv s_0$ es independiente de la frecuencia [20]. Para este caso la Ec. (2.2) en $z = 0$ se reduce a

$$\hat{E}(r, \phi, 0, \omega) = \hat{P}(\omega) \left[\frac{\sqrt{2}r}{s_0} \right]^{|l|} e^{-\frac{r^2}{s_0^2}} e^{-il\phi}, \quad (2.6)$$

siendo integrable la Ec. (2.1) y quedando el Laguerre-Gauss pulsado ultracorto en $z = 0$,

$$E(r, \phi, 0, t) = P(t) \left[\frac{\sqrt{2}r}{s_0} \right]^{|l|} e^{-\frac{r^2}{s_0^2}} e^{-il\phi}. \quad (2.7)$$

Se ha utilizado un pulso $P(t) = \text{sinc}^2(t/T) \exp(-i\omega_0 t)$, donde $\omega_0 = 2,417 \text{ fs}^{-1}$ y $T = 3,9 \text{ fs}$. Mientras que para un haz gaussiano pulsado de pocos ciclos ($l = 0$) la forma del pulso en su máximo (en $r = 0$) se mantiene sustancialmente inalterada tras una propagación de un rango de Rayleigh, el mismo pulso de pocos ciclos en el anillo brillante se ensancha y distorsiona a esta misma distancia de propagación, especialmente para $|l|$ alto, como se observa en la Fig. 2.1. Las curvas han sido evaluadas numéricamente con las condiciones iniciales dadas y las Ecs. (2.1) y (2.2). El origen de las distorsiones es una dispersión, particularmente aumentada para $|l|$ alto y para pulsos cortos, inducida por la fase de Gouy cuando $z_R(\omega)$ depende de la frecuencia. Una dispersión similar afecta, para $|l|$ suficientemente alto, la forma del pulso en cualquier otro modelo en el cual $z_R(\omega)$ depende de la frecuencia. Por lo tanto, el denominado modelo isodifractante, en el cual $z_R(\omega) \equiv z_R$ es independiente de la frecuencia, se vuelve particularmente relevante como el único tipo de UFV para el cual un pulso ultracorto puede mantener su forma durante la propagación independientemente del valor de $|l|$. Con z_R independiente de ω , $\psi(\omega, z) \equiv \psi(z)$, $q(\omega, z) \equiv q(z)$, y $R(\omega, z) \equiv R(z)$ también son independientes de ω , y la anchura gaussiana $s(\omega, z)$ es inversamente proporcional a $\sqrt{\omega}$.

Para el análisis, se introduce el factor

$$D(\phi, z) = \frac{e^{-il\phi} e^{-i(|l|+1)\psi(z)}}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}} \quad (2.8)$$

que contiene la difracción a lo largo de z y el término azimutal, y el radio escalado

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{2z_R c [1 + (z/z_R)^2]}} \quad (2.9)$$

para cada distancia z , el cual representa un hiperboloide de revolución alrededor del eje z , también llamada superficie cáustica, a lo largo de la cual se expande el pulso.

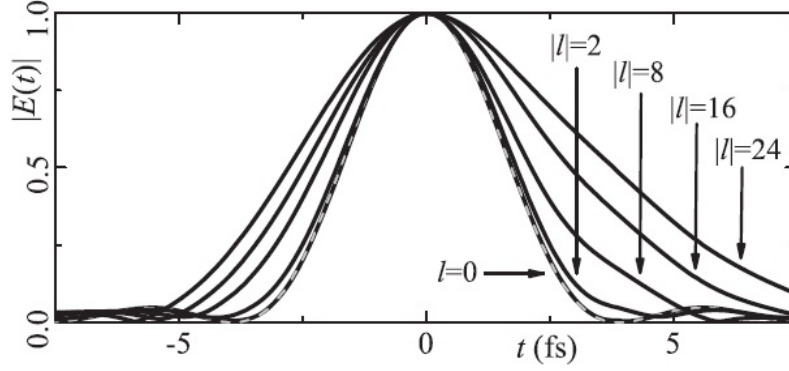


Figura 2.1: LG pulsado en el foco ($z = 0$) con un ancho de cintura independiente de la frecuencia ($s_0(\omega) \equiv s_0$). Curva punteada gris: Envolvente del pulso fundamental ($l = 0$) de un solo ciclo. Curvas negras: Para los valores indicados de l , envolvente del pulso en el anillo brillante a una distancia de propagación igual al rango de Rayleigh. Todos los valores máximos se normalizan a la unidad y se han desplazado a $t = 0$ para una mejor comparación. *Figura reproducida con permiso del autor, tomada de la referencia [34].

Las Ecs. (2.8) y (2.9) no tienen dependencia de la frecuencia en un vórtice isodifractante, por lo que permiten trabajar de una forma más compacta. Así la integral en la Ec. (2.1), con las Ecs. (2.2), (2.8) y (2.9), se escribe como

$$E = D(\phi, z) (\sqrt{2}\rho)^{|l|} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{a}_\omega \omega^{|l|/2} e^{-\rho^2 \omega} e^{-i\omega t''} d\omega; \quad (2.10)$$

donde $t'' \equiv t_0 - r^2/2cR(z)$ y donde se observa que la forma del pulso depende de la superficie cáustica particular ρ pero no cambia a lo largo de la propagación z al estar incluida en el radio escalado y estando toda la atenuación incluida en $D(\phi, z)$. Si en $z = 0$ el pulso alcanza su máximo en el tiempo $t' = 0$, lo hace en $z \neq 0$ en el tiempo determinado por $t'' = t' - r^2/2cR(z) = 0$, lo que define un frente de pulso esférico de radio $R(z)$ en cada distancia z .

2.1.2 Limitación al momento angular orbital en el caso isodifractante

Primero se intenta encontrar la expresión de un UFV que tiene cierta forma temporal $P(t) = (1/\pi) \int_0^\infty \hat{P}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$ con espectro de frecuencia $\hat{P}(\omega)$ en una superficie cáustica particular ρ_p . Igualando la Ec. (2.10) particularizada en ρ_p a $DP(t)$, obtenemos $\hat{a}(\omega) = e^{\rho_p^2 \omega} \omega^{-|l|/2} (\sqrt{2}\rho_p)^{-|l|} \hat{P}(\omega)$ y la Ec. (2.10) se convierte en:

$$E = D(\phi, z) \left(\frac{\rho}{\rho_p} \right)^{|l|} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{P}(\omega) e^{-(\rho^2 - \rho_p^2)\omega} e^{-i\omega t''} d\omega = D(\phi, z) \left(\frac{\rho}{\rho_p} \right)^{|l|} P \left[t'' - i(\rho^2 - \rho_p^2) \right], \quad (2.11)$$

donde $e^{-(\rho^2-\rho_p^2)\omega}$ solo produce un desplazamiento del espectro hacia el rojo si $\rho > \rho_p$ o al azul si $\rho < \rho_p$.

La cáustica brillante es la región del pulso donde la densidad de energía es máxima. Siendo la energía por unidad de área transversal, o fluencia, dada por

$$\mathcal{E}(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} [\text{Re}E(r, z, t')]^2 dt' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |E(r, z, t')|^2 dt' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 d\omega, \quad (2.12)$$

la cual desaparece en el centro del vórtice en $r = 0$ y en el infinito para un campo localizado y por tanto toma un valor máximo en un determinado radio r_{max} en cada distancia de propagación, en adelante denominado radio del anillo brillante. La forma temporal del pulso en este radio es particularmente relevante en los experimentos, especialmente en aquellos que implican propagación no lineal e interacciones con la materia. La fluencia de la Ec. (2.11) es

$$\mathcal{E} = |D(\phi, z)|^2 \left(\frac{\rho}{\rho_p} \right)^{2|l|} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\hat{P}(\omega)|^2 e^{-2(\rho^2-\rho_p^2)\omega} d\omega. \quad (2.13)$$

Derivando la Ec. (2.13) respecto a ρ para obtener el máximo, después de algunos cálculos algebraicos, queda

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\rho} = \frac{\mathcal{E} [2|l| - 4\rho^2\bar{\omega}(\rho)]}{\rho}, \quad (2.14)$$

donde $\bar{\omega}(\rho)$ es la frecuencia media del pulso en la cáustica ρ , definido como

$$\bar{\omega}(\rho) = \frac{\int_0^{\infty} |\hat{P}(\omega)|^2 e^{-2(\rho^2-\rho_p^2)\omega} \omega d\omega}{\int_0^{\infty} |\hat{P}(\omega)|^2 e^{-2(\rho^2-\rho_p^2)\omega} d\omega}. \quad (2.15)$$

Así, una superficie cáustica ρ_s de densidad de energía máxima o mínima satisface $d\mathcal{E}/d\rho = 0$, obteniendo así $\rho_s^2 = |l|/2\bar{\omega}(\rho_s)$. La segunda derivada de la energía se puede evaluar de manera similar y, en los máximos o mínimos en ρ_s , se obtiene,

$$\left. \frac{d^2\mathcal{E}}{d\rho^2} \right|_{\rho_s} = -8\mathcal{E}(\rho_s)\bar{\omega}(\rho_s) \left[1 - \frac{|l|\sigma^2(\rho_s)}{\bar{\omega}^2(\rho_s)} \right], \quad (2.16)$$

siendo σ^2 la varianza del espectro del pulso en cada cáustica definida como

$$\sigma^2(\rho) = \frac{\int_0^{\infty} |\hat{P}(\omega)|^2 e^{-2(\rho^2-\rho_p^2)\omega} [\omega - \bar{\omega}(\rho)]^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\hat{P}(\omega)|^2 e^{-2(\rho^2-\rho_p^2)\omega} d\omega}. \quad (2.17)$$

Por lo tanto, la superficie cáustica ρ_p tiene un máximo de fluencia si $|l| < \bar{\omega}^2(\rho_s)/\sigma^2$ y un mínimo si $|l| > \bar{\omega}^2(\rho_s)/\sigma^2$. Entonces, para que $P(t)$ sea la forma del pulso en una cáustica de energía máxima o mínima, debe estar ubicado en $\rho_p^2 = |l|/2\bar{\omega}$, donde $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\rho_p)$ es la frecuencia media de $P(t)$. La cáustica es de energía máxima si

$$|l| < \frac{\bar{\omega}^2}{\sigma^2}, \quad (2.18)$$

donde $\sigma^2 \equiv \sigma^2(\rho_p)$ es la varianza del espectro del pulso. Si fuese un mínimo de energía sería $|l| > \bar{\omega}^2/\sigma^2$, además de tener otros dos puntos donde la energía se anula, que son en $\rho = 0$ y en $\rho \rightarrow \infty$. Por lo que debe existir al menos dos máximos ρ_s que rodean el mínimo en ρ_p . En cualquiera de estos máximos, por ejemplo, el máximo global, la condición de máximo $|l| < \bar{\omega}^2(\rho_s)/\sigma^2(\rho_s)$ se satisface. En conclusión, todos los anillos brillantes del pulso verifican la Ec. (2.18) entre su carga topológica y la forma del pulso en su anillo brillante.

Con el radio no escalado r , la cáustica brillante $\rho_p^2 = |l|/2\bar{\omega}$ se convierte en

$$r_p = \sqrt{\frac{|l|}{2}} s(\bar{\omega}, z), \quad (2.19)$$

donde $s(\bar{\omega}, z) = s(\bar{\omega})/\sqrt{1 + (z/z_R)^2}$ y $s(\bar{\omega}) = \sqrt{2z_{RC}/\bar{\omega}}$. Además, la Ec. (2.11) con $\rho_p^2 = |l|/2\bar{\omega}$ puede escribirse de manera más explícita, usando la Ec. (2.5), como

$$E(r, \phi, z, t_0) = \frac{e^{-i(|l|+1)\Psi(z)} e^{il\phi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}} \left(\sqrt{\frac{2}{|l|}} \frac{r}{s(\bar{\omega}, z)} \right)^{|l|} P\left(t' - \frac{r^2}{2cq(z)} + i\frac{|l|}{2\bar{\omega}}\right). \quad (2.20)$$

Esta ecuación describe un UFV de forma que $P(t)$ sea de máxima energía en el radio r_p de la Ec. (2.19) si $P(t)$ se elige para satisfacer $\sigma^2/\bar{\omega}^2 < 1/|l|$. De lo contrario, la Ec. (2.20) es solo una forma poco práctica de especificar un UFV con una forma de pulso diferente de máxima energía tal que $\sigma^2/\bar{\omega}^2 < 1/|l|$ en otro lugar.

La restricción de la Ec. (2.18) se aplica a cualquier tipo de pulso de duración arbitrariamente corta. Esto significa que la limitación en la carga topológica l no depende de si el pulso tiene una frecuencia central $\bar{\omega}$ y una envolvente bien definida $A(t) = P(t)e^{i\bar{\omega}t}$, es decir, al menos un ciclo de duración. La Ec. (2.18) solo involucra la densidad espectral $|\hat{P}_\omega|^2$ y no otras características como la duración del pulso. Por ello, el límite en la carga topológica es el mismo tanto para un pulso con la menor duración posible (con un gran ancho de banda) como para un pulso temporalmente ensanchado con fases espectrales inhomogéneas (donde diferentes componentes espectrales del pulso tienen fases relativas distintas). En la práctica, la raíz cuadrada de la varianza, σ , suele ser demasiado pequeña para medir el ancho de banda del pulso, pero se puede tomar la anchura equivalente gaussiana $\Delta\omega \equiv 2\sigma$. Esta mide el decaimiento de e^2 respecto al valor máximo para $|\hat{P}_\omega|^2$. En términos de $\Delta\omega$, la Ec. (2.18) implica que $|l| < 4\bar{\omega}^2/\Delta\omega^2$.

La Fig. 2.2 muestra un ejemplo que permite entender el significado de la restricción impuesta por la carga topológica l en la Ec. (2.18). Se generan UFVs cuya carga topológica es creciente, mientras se mantiene constante la forma del pulso en el anillo brillante. En el caso de la Fig. 2.2(a) se usa un pulso

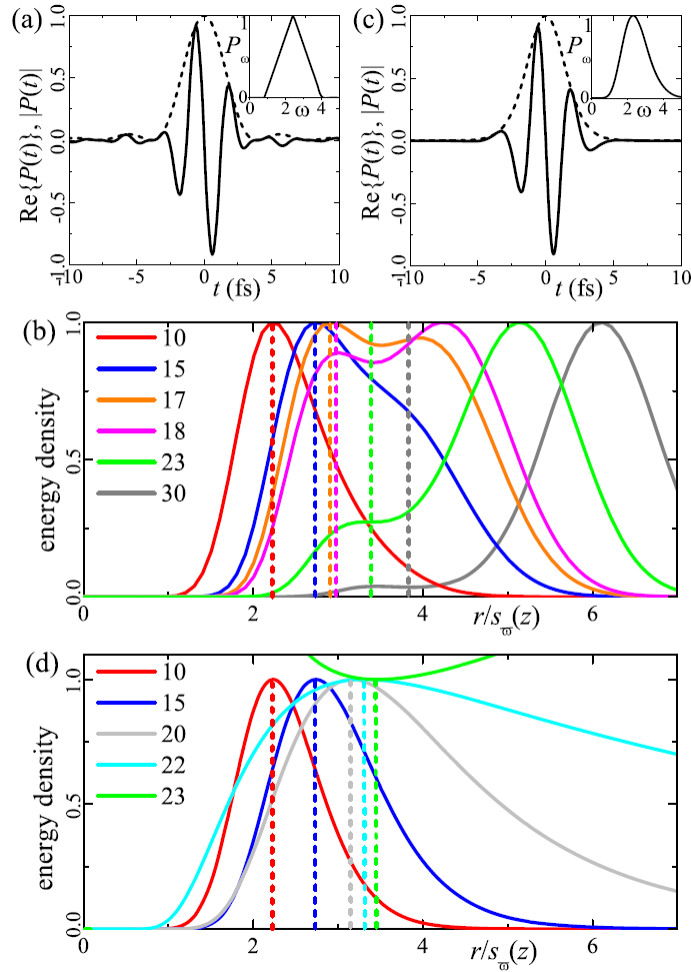


Figura 2.2: (a) Parte real y envolvente de $P(t)$ en la Ec. (2.21) con $\omega_0 = 2,417 \text{ fs}^{-1}$ y $T = 3,9 \text{ fs}$ y su espectro en el recuadro superior con $\sigma^2 = 0,26 \text{ fs}^{-2}$. (b) Perfiles de fluencia para distintos valores de l (normalizados al valor máximo en cada caso) en función del radio dados por la Ec. (2.20) con los valores indicados de $|l|$. Las líneas verticales punteadas en $\sqrt{l}/2$. (c) Parte real y envolvente de $P(t)$ en la Ec. (2.23) con $\bar{\omega} = 2,417 \text{ fs}^{-1}$, $\alpha = 11,25$ y $\Phi = \pi/2$, y su espectro en el recuadro con $\sigma^2 = 0,26 \text{ fs}^{-2}$. (d) Lo mismo que en (b) pero para el pulso en (c). *Figura reproducida con permiso del autor, tomada de la referencia [34].

$$P(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) e^{-i(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} \quad (2.21)$$

siendo $\bar{\omega} = \omega_0$ y $\text{sinc}(x) \equiv \sin(\pi x)/(\pi x)$, con los valores $\omega_0 = 2,417 \text{ fs}^{-1}$ (que corresponde a una longitud de onda de 780 nm) y $T = 3,9 \text{ fs}$. Este periodo corresponde a un pulso de un ciclo con un período portador $T_0 = 2\pi/\omega_0$ en su FWHM de intensidad $|P(t)|^2$. El espectro correspondiente de este pulso es

$$\hat{P}(\omega) = \frac{T}{2} \text{tri}\left(\frac{2T(\omega - \omega_0)}{\pi}\right) \quad (2.22)$$

siendo $\text{tri}(x) \equiv 1 - |x|$ en $0 < |x| < 1$, $1 + |x|$ en $-1 < |x| < 0$, y 0 para $|x| > 1$. Se ha impuesto la condición $|l| < \bar{\omega}^2/\sigma^2 = 22,5$ utilizando para ello que $\sigma^2 = 0,26 \text{ fs}^{-2}$. La Fig. 2.2(b) representa perfiles de fluencia para diferentes valores de $|l|$. Las líneas verticales del mismo color se encuentran situadas en los máximos de fluencia obtenidos en la Ec. (2.19), pero como la fluencia está representada en función de $r/s(\bar{\omega}, z)$, los máximos se encuentran en la gráfica en $\sqrt{|l|/2}$. Para valores bajos de $|l|$, la energía tiene un solo máximo para el radio esperado $r/s(\bar{\omega}, z)$ (en rojo el valor más bajo que es $l = 10$), pero a medida que se aumenta el valor de la carga topológica, empieza a formarse una protuberancia (en la Fig. 2.2(b) para $|l| \simeq 15$ en azul) que se convierte ya en un segundo máximo con $|l| = 17$ (naranja), y ya en $|l| = 18$ (morado), este segundo máximo se ha convertido en el máximo absoluto de energía, mientras que el primer máximo de la Ec. (2.19), ahora secundario, permanece en $\sqrt{|l|/2}$. Con $|l| = 23$, (verde), al superarse la cota 22.5, el máximo de la Ec. (2.19) en efecto desaparece y se convierte en un mínimo incipiente, tal y como se predijo, ya que aparece un nuevo máximo muy débil a su izquierda, ya claramente observable con $l = 30$. Este ejemplo ilustra dos hechos. Primero que no puede existir máximo por encima de la cota en la Ec. (2.18). Segundo, que para una forma de pulso cualquiera, como la de este ejemplo, no siempre se alcanza el límite máximo de momento angular, es decir, no se satura la desigualdad. En este ejemplo, se detiene en valores de la carga topológica $|l| > 17$ en lugar de $|l| > 22,5$.

2.1.3 Paquetes mínimos con momento angular orbital

A partir de este resultado, surge la pregunta de si es posible diseñar un UFV óptimo donde la Ec. (2.18) se iguale, es decir, si $|l|$ puede alcanzar la parte entera de $\bar{\omega}^2/\sigma^2$. La respuesta es que este es el caso de los pulsos

$$P(t) = \left(\frac{-i\alpha}{\bar{\omega}t - i\alpha}\right)^{\alpha+1/2} e^{-i\Phi}, \quad (2.23)$$

siendo $\alpha > 1/2$ un parámetro que ajusta la anchura de la función y el número de oscilaciones dentro, y Φ una fase arbitraria. La Ec. (2.23) es una forma conveniente de expresar los pulsos comúnmente utilizados con el espectro de tipo potencia-exponencial (PE)

$$\hat{P}(\omega) \propto (\omega/\bar{\omega})^{\alpha-1/2} e^{-\alpha\omega/\bar{\omega}} e^{-i\Phi}, \quad (2.24)$$

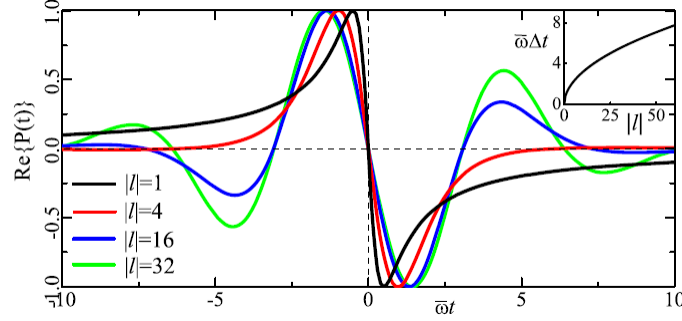


Figura 2.3: Pulsos portadores de vórtice de carga topológica l más cortos. Cuanto mayor sea la carga, mayor será la duración mínima del impulso $\Delta t = \sqrt{|l|}/\omega$ necesaria, como se ve en el recuadro. *Figura reproducida con permiso del autor, tomada de la referencia [34].

donde la frecuencia media aparece explícitamente. La forma del pulso está determinada por el parámetro α y escalada por $\bar{\omega}$. El semiancho de banda (equivalente gaussiano) está dado por $\Delta\omega = 2\sigma = \sqrt{2/\alpha\bar{\omega}}$ y la semiduración del pulso es $\Delta t = \sqrt{2\alpha/\bar{\omega}}$. El producto entre el ancho de banda y la duración dado por la Ec. (15) en este caso es mínima: $\Delta t\Delta\omega = 2$, es decir, el pulso es lo más corto posible para la anchura espectral que tiene. Para los valores más bajos de α , la Ec. (2.23) no tiene un portador y envolvente físicamente significativas, pero a medida que α crece, la Ec. (2.23) se comporta como una función gaussiana con un número creciente de oscilaciones y duración gaussiana Δt , y Φ se convierte en la fase de la envolvente-portadora; por ejemplo, un pulso de un solo ciclo tipo gaussiano corresponde a $\alpha \approx 13,75$. Con esta clase de pulsos, la Ec. (2.18) se reduce simplemente a $|l| < 2\alpha$. Para el pulso con $\alpha = 2,5$ en [48], se obtiene el valor $|l| < 5$, lo que está en línea con el valor $|l| < 4$ obtenido en [48] para ondas X, a pesar de la diferente geometría del haz. Para un pulso de un solo ciclo estándar con $\alpha = 13,75$, $|l| < 27,5$; es decir, puede llevar hasta 27 unidades de OAM. La densidad de energía del UFV, normalizada a su valor máximo en $z = 0$,

$$\mathcal{E}(r, z) = |D(\phi, z)|^2 \left(\frac{2}{|l|} \frac{r^2}{s^2(\bar{\omega}, z)} \right)^{|l|} \left(\frac{\alpha}{\frac{r^2}{s^2(\bar{\omega}, z)} - \frac{|l|}{2} + \alpha} \right)^{2\alpha}, \quad (2.25)$$

se observa que presenta, para todos los valores $|l| < 2\alpha$, un único máximo bien definido en $r/s(\omega, z) = \sqrt{|l|/2}$, que se transforma en un mínimo para $|l| > 2\alpha$. En este último caso, la densidad de energía tiende a ∞ en $r = 0$ y en $r = \infty$, lo cual no representa una UFV físico. Para compararlo con las Figs. 2.2(a) y 2.2(b), se selecciona un pulso con un espectro de tipo PE como en de la Ec. (2.24) para la Fig. 2.2(c) con $\alpha = 11,25$ de tal forma que la Ec. (2.18) tenga el mismo límite de $|l| < 22,5$. Los perfiles de fluencia para diferentes valores de l se muestran en la Fig. 2.2(d) donde se conserva un único máximo en $r/s(\omega, z) = \sqrt{|l|/2}$ hasta $|l| = 22$ (en vez de $|l| = 18$ en el ejemplo anterior). A partir de $|l| > 22$ aparece un mínimo rodeado de máximos infinitos, careciendo así de significado físico. Siendo la Ec. (2.18) una desigualdad estricta para esta clase de pulsos, no se puede mejorar para otros UFVs generales.

Se ha encontrado que el UFV, Ec. (2.20), con el pulso PE, Ec. (2.23), en su anillo brillante para $|l| < 2\alpha$, a diferencia de otros pulsos en los que la estructura puede cambiar dependiendo de la posición radial, tiene la particularidad de mantener la misma forma de pulso PE en todas las cáusticas, con la única diferencia de que el pulso está escalado en frecuencia experimentando un desplazamiento a frecuencias más altas que la frecuencia media $\bar{\omega}$ cuando $r/s(\bar{\omega}, z) < \sqrt{|l|/2}$ y un desplazamiento a frecuencias más bajas que la frecuencia media $\bar{\omega}$ cuando $r/s(\bar{\omega}, z) > \sqrt{|l|/2}$. La frecuencia media en cada radio r está dada por $\bar{\omega}(r) = \bar{\omega}/\{1 - [r^2/s^2(\bar{\omega}, z) - |l|/2]/\alpha\}$. Entonces, tiene sentido hablar sobre la forma del pulso del UFV en su conjunto.

Los resultados obtenidos muestran que existe un límite fundamental en la duración de los pulsos que transporta un UFV de carga l y, en particular, un paquete de ondas mínimo que puede llevar un solo vórtice. Para un $|l|$ dado, el semiancho de banda del UFV en el anillo brillante satisface la desigualdad $\Delta\omega/\bar{\omega} < (2/\sqrt{|l|})$, que se alcanza con un pulso PE con el parámetro $\alpha = |l|/2 + \epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0$, de duración $\Delta t = 2/\Delta\omega$. Esto a su vez impone una restricción en la duración mínima para cualquier UFV

$$\bar{\omega}\Delta t > \sqrt{|l|}. \quad (2.26)$$

La Fig. 2.3 muestra los UFV más cortos, dados por la Ec. (2.23) con $\alpha = |l|/2 + \epsilon$. En todas las cáusticas del UFV, la forma del pulso se mantiene re-escalada simplemente reemplazando $\bar{\omega} \rightarrow \bar{\omega}(r)$. Estos UFVs son de la menor duración posible para una carga topológica dada $|l|$. También pueden obtenerse siguiendo un ajuste alternativo en la referencia [48] con pesos independientes de l de la forma $\hat{a}(\omega) \propto (\omega/\bar{\omega})^{\epsilon-1/2} e^{-\epsilon(\omega/\bar{\omega})}$ para los constituyentes de los modos de LG. El acoplamiento de los grados de libertad temporal y de OAM [48] hace que el espectro $\hat{P}(\omega) \propto (\omega/\bar{\omega})^{\epsilon+|l|/2-1/2} e^{-(\epsilon+|l|/2)(\omega/\bar{\omega})}$, y las formas de pulso correspondientes en la Fig. 2.3, se adapten para soportar el vórtice de carga l .

En el siguiente Capítulo se va a ver que esta restricción de la duración de los pulsos en función de la carga topológica l no es constante a lo largo del eje de propagación en los casos más generales no-autodifractantes. La variación de la restricción depende de cómo varíe $z_R(\omega)$ con la frecuencia ω siendo en promedio el valor obtenido aquí para los UFV isodifractantes y permitiendo bajo ciertas condiciones obtener pulsos más cortos que este límite medio.

Capítulo 3

Generalización del límite al Momento Angular Orbital

En el Capítulo 2 se ha establecido la existencia de un límite en la duración de los pulsos ultracortos con OAM isodifractantes sintetizados con un determinado ancho de banda que debe aumentar su duración respecto a lo esperado por su ancho de banda cuando se incrementa su carga topológica $|l|$ [49]. Este resultado, que impone un mínimo de $\sqrt{|l|}$ oscilaciones en un vórtice pulsado, se obtuvo suponiendo que el pulso mantiene su duración temporal inalterada a lo largo de su propagación, independientemente de lo corto que sea el pulso y de lo alta que sea la carga topológica, como se señala en [34]. Este es el caso de los UFVs isodifractantes, los cuales se caracterizan por tener una longitud de Rayleigh $z_R(\omega)$ independiente de la frecuencia de sus componentes monocromáticas de LG. La dependencia de $z_R(\omega)$ con la frecuencia se caracteriza por el factor g_0 , introducido por primera vez en [43], siendo el valor $g_0 = 0$ el correspondiente al modelo isodifractante.

Este capítulo analiza la focalización de UFV tipo LG más allá del modelo isodifractante, es decir, los generados por fuentes láser de femtosegundo con $g_0 \neq 0$. En lugar de detallar la dinámica de cada clase de UFV —tarea que merece estudios específicos—, nos centramos en extraer leyes de acoplamiento temporal-OAM derivadas de los límites inferiores que rigen la duración del pulso y explican los fenómenos numéricos observados. Para mayor claridad, comparamos a menudo los fenómenos encontrados aquí con los ya conocidos en haces gaussianos ultrarrápidos y UFVs isodifractantes. Encontramos que el límite inferior del número de oscilaciones del pulso en el anillo brillante proporcional a $\sqrt{|l|}$ sigue manteniéndose para los UFVs generales, con variaciones axiales ascendentes y descendentes que promedian en $\sqrt{|l|}$ o un valor superior cuya localización viene dictada por el factor g_0 de la fuente. Así, al igual que en el caso de los UFV isodifractantes, la duración de los UFV generales aumenta en comparación con lo esperado a partir del ancho de banda disponible de la fuente con el aumento de la carga topológica. A diferencia de los haces gaussianos ultrarrápidos y los UFV isodifractantes, la duración y la forma de los UFVs generales cambian durante la propagación como resultado de la variación axial del límite inferior, siendo estas variaciones más pronunciadas a medida que $|l|$ y $|g_0|$ son mayores y se acercan al régimen de un ciclo. En ciertas ubicaciones axiales es posible disminuir el número de oscilaciones por debajo de

$\sqrt{|l|}$, pero esto solo es factible en la práctica con fuentes con $0 < g_0 \leq 1$ en el campo lejano y fuentes con $-1 \leq g_0 < 0$ en la cintura o el foco; la situación óptima es el uso de una fuente con $g_0 = -1$. Incluso si es posible superar localmente el límite de $\sqrt{|l|}$ en una especie de “estado comprimido” de OAM, el UFV se amplía a un número de oscilaciones muy superior a $\sqrt{|l|}$ en una pequeña fracción de la profundidad de foco debido a los fuertes efectos dispersivos de la fase de Gouy y el desfase de los frentes de ondas a altas cargas topológicas.

3.1 Vórtices ultrarrápidos de Laguerre-Gauss generales

Como se ha visto en el capítulo 2, se puede representar el campo eléctrico de un UFV mediante la Ec. (2.1) propagándose en vacío como la superposición de haces de luz monocromáticos de LG, todos ellos con la misma carga topológica l , según la Ec. (2.2), todos de orden radial $p = 0$ por simplicidad. En la Ec. (2.2), $a(\omega)$ son diferentes pesos según su frecuencia generalmente de valor complejo, z es la dirección de propagación paraxial, (r, z, ϕ) son coordenadas cilíndricas y $t' = t - z/c$ es el tiempo local. El ángulo de divergencia en el campo lejano puede evaluarse a partir de $\theta(\omega) = \sqrt{2c/\omega z_R(\omega)}$. Al estar limitado a frecuencias positivas, el campo óptico E en la Ec. (2.1) es la señal analítica del campo óptico real $\text{Re}\{E\}$ [55]. También consideramos la distribución de la densidad de energía o la fluencia, dada en la Ec. (2.12).

El campo óptico en las Ecs. (2.1) y (2.2) puede considerarse como generado en una fuente plana en $z = 0$. Alternativamente, y más relacionado con los experimentos actuales, las Ecs. (2.1) y (2.2) también representan el campo óptico focalizado en la aproximación de Debye (sin corrimiento focal o *focal shift*) [43], con el foco en $z = 0$, cuando un sistema focalizador ideal de focal f , como un espejo esférico, o una lente, es iluminado por un campo de entrada en forma de un UFV colimado

$$E_L(r, t)e^{il\phi} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{E}_L(r, \omega)e^{-i\omega t} e^{il\phi} d\omega \quad (3.1)$$

compuesto de haces LG monocromáticos colimados

$$\hat{E}_L(r, \omega)e^{il\phi} = \hat{A}(\omega) \left[\frac{\sqrt{2}r}{S(\omega)} \right]^{|l|} e^{-r^2/S^2(\omega)} e^{il\phi} \quad (3.2)$$

con la distancia de Rayleigh $Z_R(\omega)$, la anchura gaussiana $S(\omega) = \sqrt{2Z_R(\omega)c/\omega}$ en el sistema focalizador, y el ángulo de divergencia $\Theta(\omega) = \sqrt{2c/\omega Z_R(\omega)}$. Más adelante se da la relación entre rango de Rayleigh, anchura y divergencia del UFV colimado (con mayúsculas) y el focalizado (con minúsculas). No entro en los detalles de las sofisticadas técnicas experimentales para la generación de vórtices de duración de femtosegundos como en las Ecs. (3.1) y (3.2), pero la distancia de Rayleigh $Z_R(\omega)$ y el espectro $\hat{A}(\omega)$ en estas ecuaciones están estrechamente relacionados con la geometría y el espectro de la fuente láser de femtosegundo. El espectro $\hat{A}(\omega)$ se caracteriza por una determinada frecuencia media

$$\omega_0 = \frac{\int_0^\infty |\hat{A}(\omega)|^2 \omega d\omega}{\int_0^\infty |\hat{A}(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.3)$$

o frecuencia del sistema láser, y corresponde en el dominio del tiempo a una determinada forma de pulso

$$A(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.4)$$

que tiene una frecuencia portadora físicamente significativa ω_0 si, de acuerdo con la definición estándar [45], la duración a media altura (FWHM en inglés) de $|A(t)|^2$ cubre al menos un período de la portadora $2\pi/\omega_0$. En la aproximación de focalización de Debye, la distancia de Rayleigh y los espectros del UFV focalizado y del UFV proveniente de la fuente de femtosegundos están relacionados por [56]

$$z_R(\omega) = \frac{f^2}{Z_R(\omega)}, \quad \hat{a}(\omega) = -i \frac{f}{z_R(\omega)} \hat{A}(\omega). \quad (3.5)$$

Para su uso posterior, dada una función dependiente de la frecuencia $f(\omega)$, introducimos la notación

$$\overline{f(\omega)} = \frac{\int_0^\infty |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 f(\omega) d\omega}{\int_0^\infty |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 d\omega} \quad (3.6)$$

para el valor medio con la densidad espectral $|\hat{E}(r, \omega, z)|^2$ del UFV, y para cualquier función $g(t')$ del tiempo, la notación

$$\overline{g(t')} = \frac{\int_{-\infty}^\infty |E(r, z, t')|^2 g(t') dt'}{\int_{-\infty}^\infty |E(r, z, t')|^2 dt'} \quad (3.7)$$

para el valor medio con la intensidad $|E(r, t', z)|^2$ del UFV. Cabe señalar que, en general, estos valores medios dependen de r y z porque $|\hat{E}(r, \omega, z)|^2$ y $|E(r, t', z)|^2$ dependen de r y z , y porque $f(\omega)$ y $g(t')$ pueden ser funciones de r y z también. La varianza de $f(\omega)$ es $\sigma_{f(\omega)}^2 = \overline{[f(\omega) - \overline{f(\omega)}]^2} = \overline{f^2(\omega)} - \overline{f(\omega)}^2$, y de forma similar para una función del tiempo. En particular, $\bar{\omega}$ es la frecuencia media o portadora en cualquier punto del UFV y $\sigma_\omega^2 = \overline{\omega^2} - \bar{\omega}^2$ es la varianza de ω con la densidad espectral. Del mismo modo, \bar{t} es la posición temporal media y $\sigma_t^2 = \overline{t^2} - \bar{t}^2$ es la varianza del tiempo con la intensidad del pulso. Medidas adecuadas del ancho de banda espectral y de la duración del UFV en un punto dado (r, z) son las llamadas semianchura y semiduración equivalentes gaussianas, dadas por $\Delta\omega = 2\sigma_\omega$ y $\Delta t = 2\sigma_t$ respectivamente, que corresponde al decaimiento $1/e^2$ de la semianchura para la densidad espectral e intensidad gaussianas. El producto $\Delta t \Delta\omega$ es siempre mayor o igual a 2, alcanzándose el valor mínimo de 2 para la densidad espectral gaussiana $|\hat{E}(r, \omega, z)|^2$ con fases espectrales uniformes. Además, el producto $\bar{\omega} \Delta t / \pi = 2\Delta t / T$, donde $T = 2\pi / \bar{\omega}$ es el periodo medio de la portadora, es el número de oscilaciones en la duración completa gaussiana $2\Delta t$, pero para evitar los factores π en las fórmulas relevantes nos referiremos de aquí en adelante a $\bar{\omega} \Delta t$ como el número de oscilaciones.

3.1.1 El factor g_0 de la fuente

En el Capítulo 2 se consideró que $Z_R(\omega)$, y por tanto $z_R(\omega)$, es independiente de la frecuencia en el modelo isodifractante de los UFVs, en cuyo caso la forma temporal del UFV no cambia con

la distancia de propagación. Si bien esta propiedad confiere a los UFVs isodifractantes un lugar destacado desde el punto de vista teórico, las actuales fuentes de láser de femtosegundo emiten pulsos con diferentes distancias de Rayleigh para diferentes frecuencias, como se ha demostrado recientemente [38, 39]. Dado que la función $Z_R(\omega)$ es generalmente desconocida, se suelen utilizar varios modelos simples [40]. Por ejemplo, el modelo $Z_R(\omega) = Z_R(\omega_0) (\omega/\omega_0)^{g_0}$ produce, utilizando las relaciones anteriores entre $Z_R(\omega)$, $S(\omega)$ y $\Theta(\omega)$, $S(\omega) = S(\omega_0) (\omega/\omega_0)^{(g_0-1)/2}$ y $\Theta(\omega) = \Theta(\omega_0) (\omega_0/\omega)^{(g_0+1)/2}$ para el UFV de entrada, y utilizando las Ecs. (3.5), $z_R(\omega) = z_R(\omega_0) (\omega_0/\omega)^{g_0}$, $s(\omega) = s(\omega_0) (\omega_0/\omega)^{(g_0+1)/2}$, y $\theta(\omega) = \theta(\omega_0) (\omega/\omega_0)^{(g_0-1)/2}$ para el UFV focalizado. En particular, $g_0 = 0$ es el modelo isodifractante, $g_0 = 1$ describe un UFV de entrada con anchura constante, y por tanto un UFV focalizado con ángulo de convergencia constante y anchura focal inversamente proporcional a la frecuencia, y $g_0 = -1$ describe un UFV de entrada con ángulo de divergencia constante y anchura inversamente proporcional a la frecuencia, lo que corresponde a un UFV focalizado con ángulo de convergencia inversamente proporcional a la frecuencia y anchura constante en el foco. Con otros valores de g_0 , ninguno de los parámetros es constante. La fórmula anterior para $Z_R(\omega)$ es un modelo sencillo que se utilizará en los ejemplos siguientes, pero obviamente las fuentes reales no tienen por qué ajustarse a ella.

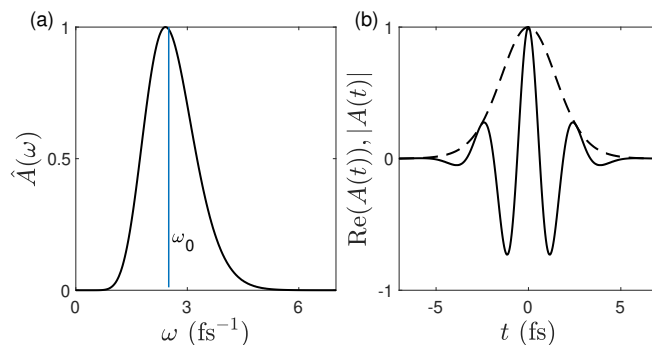


Figura 3.1: (a) Espectro potencial-exponencial $\hat{A}(\omega) \propto (\omega/\omega_0)^{\alpha-1/2} \exp(-\alpha\omega/\omega_0)$ con $\alpha = 14, 25$ y $\omega_0 = 2, 5$ rad/fs. (b) Forma del pulso cuasi-gaussiano $A(t) = [-i\alpha/(\omega_0 t - i\alpha)]^{\alpha+1/2}$ de frecuencia portadora ω_0 . $\alpha = 14, 25$ dando un pulso de un ciclo. Con $\alpha > 14, 25$, $\hat{A}(\omega)$ se aproxima a un espectro gaussiano pero sin componente DC en $\omega = 0$, y $A(t)$ se aproxima a un pulso gaussiano, como se detalla, por ejemplo, en [57, 58].

Afortunadamente, para los pulsos con al menos una oscilación de la portadora, se ha sugerido teóricamente y se ha demostrado experimentalmente que es sólo la variación de la distancia de Rayleigh con la frecuencia en la proximidad de la frecuencia de la portadora ω_0 lo que determina la mayor parte de las propiedades de propagación de los haces pulsados [43, 38, 46]. Las diferentes situaciones se describen adecuadamente mediante un único parámetro adimensional denominado factor g_0 , definido como [43]

$$g_0 = \left. \frac{dZ_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} \frac{1}{Z_R(\omega_0)} \omega_0 = - \left. \frac{dz_R(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} \frac{1}{z_R(\omega_0)} \omega_0, \quad (3.8)$$

que caracteriza la variación del rango de Rayleigh con la frecuencia en torno a la frecuencia de la portadora ω_0 . El símbolo g_0 es el mismo que en el modelo del párrafo anterior porque

coinciden en ese modelo. Así, $g_0 = 1$ significa anchura constante $S(\omega)$ sólo alrededor de ω_0 , $g_0 = -1$ divergencia constante alrededor de ω_0 , y así sucesivamente. Estudios recientes subrayan la necesidad de medir el factor g_0 para cada fuente láser de femtosegundo en particular, ya que se ha demostrado que su valor afecta en gran medida al resultado de los experimentos con estas fuentes, en particular los que implican interacciones luz-materia sensibles a la fase [38, 39, 40, 41, 42]. Mediciones directas recientes arrojan valores de g_0 entre -1 y -2 para fuentes de femtosegundo que utilizan compresores de fibra de núcleo hueco [38]. Se sugiere que los láseres de alta potencia tienen $g_0 = 1$ [40], y los valores inferidos a partir de las mediciones de la fase absoluta o CEP (carrier-envelope-phase) de los pulsos focalizados de pocos ciclos de láseres de titanio:zafiro con “Kerr-lens mode locking” están en el rango $-1 < g_0 < 0$ [41, 42]. Por lo tanto, de acuerdo con la literatura anterior, asumimos aquí que $|g_0|$ no excede de 2.

3.1.2 Resultados previos y problemas abiertos

Las Figs. 3.1 y 3.2 ilustran los resultados conocidos anteriormente para haces gaussianos y para UFVs isodifractantes, comparados con los fenómenos en la propagación de UFVs generales considerados aquí. En todos los casos representados en la Fig. 3.2, el espectro de la fuente $\hat{A}(\omega)$, mostrado en la Fig. 3.1(a), es el mismo y corresponde en el dominio del tiempo al pulso aproximadamente gaussiano $A(t)$ mostrado en la Fig. 3.1(b) que contiene una única oscilación en el FWHM de $|A(t)|^2$, es decir, un ciclo de duración. Este pulso $A(t)$ está en todos los casos de la Fig. 3.2 de fondo en color naranja para poder compararlo. Todos los gráficos de la Fig. 3.2 representan las formas del pulso $\text{Re}E$ y las amplitudes $|E|$ de los UFVs focalizados en los radios r_{max} de máxima fluencia para cada distancia de propagación.

En las Figs. 3.2(a)-3.2(c) se muestra la focalización de un pulso gaussiano fundamental [$l = 0$ en las Ecs. (2.1) y (2.2) y $r_{\text{max}} = 0$] de un ciclo de duración en su máximo de fluencia, que al no tener momento angular orbital está en $r_{\text{max}} = 0$. En las tres figuras se cambia el valor de g_0 pero el resultado sigue siendo el mismo pulso gaussiano de un solo ciclo a lo largo de toda su propagación [59], produciéndose únicamente un pequeño desplazamiento de la frecuencia alrededor del foco y con diferentes mapas de la CEP en el volumen focal, como se estudia en detalle en [43, 46]. El corrimiento de la frecuencia media en $g_0 > 0$ es al azul y en $g_0 < 0$ al rojo [60, 61, 43].

En las Figs. 3.2(d)-3.2(f) se representa el mismo espectro de la fuente pulsada de un solo ciclo para un UFV focalizado isodifractante ($g_0 = 0$) en el foco ($z = 0$) para una carga topológica $|l|$ creciente. El número de oscilaciones del UFV isodifractante aumenta monótonamente con la magnitud de la carga topológica respecto de la esperada del pulso de la fuente $A(t)$, sin importar el medio técnico con el que se genere, y el UFV isodifractante focalizado mantiene esta forma temporal durante todo el proceso de focalización, sin que haya un corrimiento apreciable de la frecuencia en el anillo brillante, $\bar{\omega} \simeq \omega_0$. El aumento del número de oscilaciones con $|l|$ es una consecuencia del límite superior del ancho de banda relativo $\sigma_\omega/\bar{\omega} < 1/\sqrt{|l|}$ en el anillo brillante descrito en [34] o a causa de la relación $\Delta t \Delta \omega \geq 2$ [Demostrada en el Anexo B en la Ec. (15)], el límite inferior $\bar{\omega} \Delta t > \sqrt{|l|}$ al número de oscilaciones [34]. Además, con $\bar{\omega} \simeq \omega_0$ para el UFV isodifractante [37], $\Delta t > \sqrt{|l|}/\omega_0$ impone directamente un límite inferior

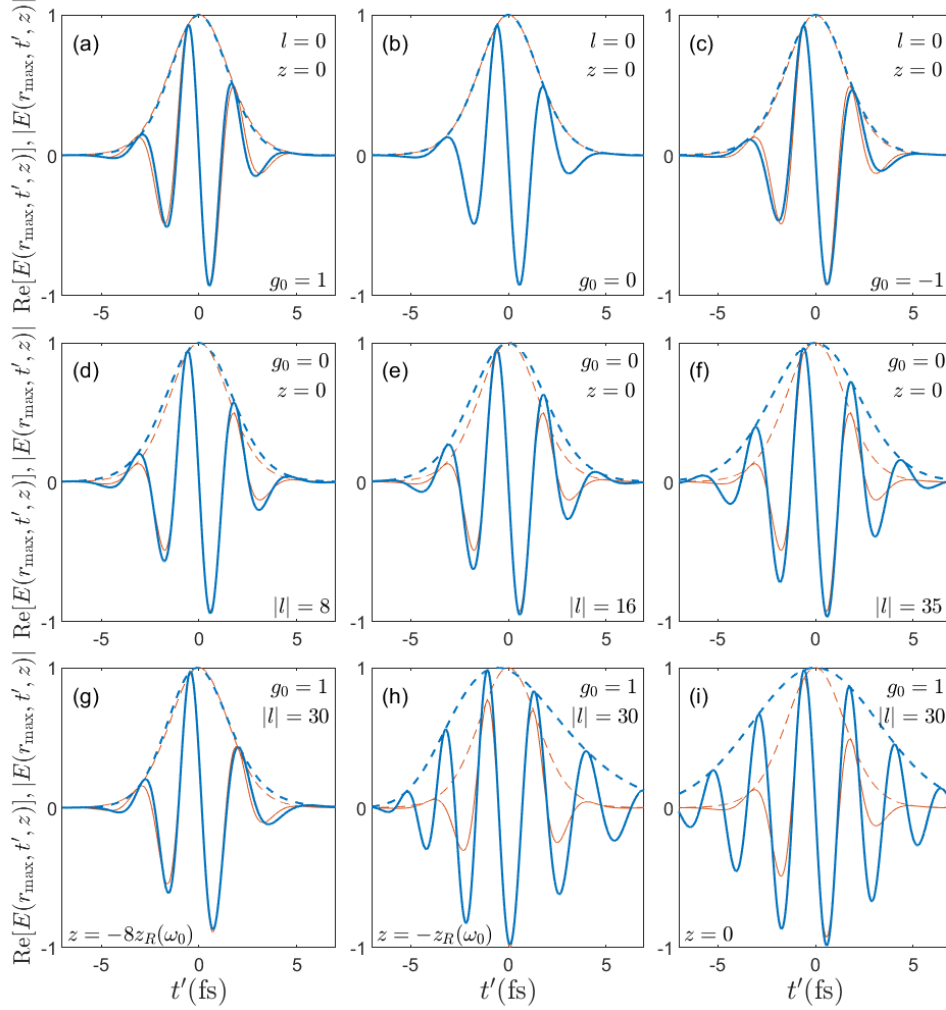


Figura 3.2: Campo eléctrico y amplitudes de los pulsos focalizados en el radio r_{\max} de máxima fluencia. Todas ellas se evalúan numéricamente a partir de las Ecs. (2.1), (2.2) y (3.5) con $f = 20$ cm y con el mismo espectro $\hat{A}(\omega)$ del pulso de un solo ciclo de la Fig. 3.1 de fondo en todas ellas en color naranja. (a)-(c) Comparación de un pulso gaussiano fundamental ($l = 0$) para tres valores diferentes de g_0 en el foco $z = 0$: (a) $g_0 = 1$, (b) $g_0 = 0$, y (c) $g_0 = -1$. (d)-(f) Comparación de un pulso isodifractante $g_0 = 0$ en el foco $z = 0$ para tres cargas topológicas diferentes: (d) $|l| = 8$, (e) $|l| = 16$, y (f) $|l| = 35$. (g)-(i) Comparación de un pulso con $g_0 = -1$ y carga topológica $|l| = 30$ para diferentes distancias de propagación: (g) $z = -8z_R(\omega_0)$, (h) $z = -z_R(\omega_0)$, y (i) $z = 0$.

a la duración del pulso. Así, independientemente de lo amplio que sea el espectro de la fuente o de lo corto que sea el pulso de la fuente $A(t)$ que se puede sintetizar con ella, el UFV se adapta a un número de oscilaciones que satisfacen $\omega_0\Delta t > \sqrt{|l|}$ [35].

Una de las intenciones principales de esta Tesis es comprender los fenómenos de propagación de UFVs con $g_0 \neq 0$, como los observados en las Figs. 3.2(g)-3.2(i). He escogido el ejemplo de $g_0 = 1$ donde la anchura $S(\omega) \equiv S(\omega_0)$ del UFV de entrada se toma como independiente de la frecuencia, y según las Ecs. (3.1) y (3.2) el campo de entrada es $E_L(r, t)e^{il\varphi} = A(t)[\sqrt{2}r/S(\omega_0)]^{|l|}e^{-r^2/S^2(\omega_0)}e^{il\varphi}$. Una vez focalizado, se trata de un UFV isodivergente $\theta(\omega) \equiv \theta$. En primer lugar, a diferencia de los haces gaussianos pulsados y los UFV isodifractantes, la forma del pulso en r_{\max} cambia durante la focalización. La distorsión del pulso es débil para $|l|$ pequeños pero bastante pronunciada para $|l|$ grandes, como en las Figs. 3.2(g)-3.2(i). En segundo lugar, la carga topológica y la duración del UFV de entrada en la Fig. 3.1(b) y su etapa inicial de focalización en la Fig. 3.2(g) se eligen de manera que se incumple la desigualdad $\omega_0\Delta t > \sqrt{|l|}$, contradiciendo aparentemente los resultados de [34]. Sin embargo, esta cota inferior sólo se aplica a la situación más fundamental de UFVs con forma de pulso invariable por propagación. De hecho, no hay ninguna restricción, por motivos físicos, para producir el campo factorizado espacio-temporal $E_L(r, t)e^{il\varphi} = A(t)[\sqrt{2}r/S(\omega_0)]^{|l|}e^{-r^2/S^2(\omega_0)}e^{il\varphi}$, con $A(t)$ tan corto y $|l|$ tan grande como se desee en un plano transversal, sólo cuestiones técnicas. En el foco, sin embargo, el UFV está distorsionado y ensanchado, como en las Figs. 3.2(h) y 3.2(i), por lo que la desigualdad $\bar{\omega}\Delta t > \sqrt{|l|}$ se satisface con creces. En las siguientes secciones demostramos que este comportamiento es el resultado de restricciones más generales sobre el número de oscilaciones en el anillo brillante que generalizan $\bar{\omega}\Delta t > \sqrt{|l|}$ para UFVs isodifractantes a UFVs generales.

3.2 Restricciones generales de las propiedades del pulso en el anillo brillante

Tras ver que se produce una dilatación temporal del pulso ultracorto en su anillo brillante para ciertos valores de la propagación, surge la necesidad de identificar el efecto que lo produce. Para ello, voy a realizar los pasos que se dan en el Capítulo 2 buscando primero el máximo de la distribución de fluencia en cada plano transversal. Derivando respecto a r la fluencia en la Ec. (2.12) con la densidad espectral $|\hat{E}(r, z, \omega)|^2$ de la Ec. (2.2), se obtiene, tras algo de álgebra [ver Anexo A],

$$\frac{d\mathcal{E}}{dr} = \frac{2}{r} \int_0^\infty d\omega |\hat{E}|^2 \left[|l| - \frac{2r^2}{s^2(\omega, z)} \right], \quad (3.9)$$

que igualada a cero, y como se detalla en Anexo A, conduce a la ecuación implícita

$$r_{\max}^2 = \frac{|l|}{2} \frac{1}{1/s^2(\omega, z)|_{r_{\max}}} \quad (3.10)$$

para un máximo o un mínimo de fluencia, donde se ha escrito explícitamente que el valor medio de $1/s^2$ dependiente de (r, z) está evaluado en el radio r_{\max} del anillo brillante. Derivando de nuevo respecto a r (ver Anexo A), la segunda derivada da lugar a una expresión, que evaluada de nuevo en el anillo brillante r_{\max} conduce a una expresión más simple

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{E}}{dr^2} \right|_{r_{\max}} = -8\mathcal{E}(r_{\max}) \left(\overline{\frac{1}{s^2(\omega, z)}} \right) (r_{\max}) \left[|l| + 1 - |l| \frac{\overline{1/s^4(\omega, z)}(r_{\max})}{\overline{1/s^2(\omega, z)}^2(r_{\max})} \right] \quad (3.11)$$

donde de nuevo los valores medios se evalúan en r_{\max} . La condición de máxima fluencia en la Ec. (3.11) conduce a la siguiente desigualdad

$$\frac{\overline{1/s^4(\omega, z)}(r_{\max})}{\overline{1/s^2(\omega, z)}^2(r_{\max})} < \frac{|l| + 1}{|l|} \quad (3.12)$$

o, de forma equivalente, a la desigualdad

$$\frac{\sigma_{1/s^2(\omega, z)}^2}{\overline{1/s^2(\omega, z)}^2} = \frac{\overline{1/s^4(\omega, z)} - \overline{1/s^2(\omega, z)}^2}{\overline{1/s^2(\omega, z)}^2} < \frac{1}{|l|}, \quad (3.13)$$

que se satisface para cualquier UFV en su máxima fluencia a cualquier distancia de propagación. En la Ec. (3.13) hemos vuelto a omitir r_{\max} en los valores medios y la varianza para simplificar la notación, pero debe entenderse a partir de ahora que se evalúan en este radio. La Ec. (3.13) es el principal resultado matemático de este Capítulo, y afirma que la varianza relativa de la función de la frecuencia $1/s^2(\omega, z)$ en el radio de máxima fluencia de los UFV generales está restringida por el límite superior del lado derecho de la desigualdad (3.13). La interpretación física y las consecuencias de esta restricción son el objetivo del resto de este Capítulo.

Aunque la desigualdad (3.13) es válida para UFVs arbitrariamente cortos, es decir, también para pulsos inferiores al ciclo de forma temporal arbitraria y espectro de ultra banda ancha, a partir de ahora limitamos nuestras consideraciones a pulsos con al menos una oscilación de la portadora como se define en [45], con un espectro relativamente estrecho, como en el ejemplo de la Fig. 3.1, y por lo tanto con una frecuencia de portadora físicamente significativa. Con esta limitación, la desigualdad (3.13) puede transformarse, bajo aproximaciones adecuadas, en desigualdades útiles que implican la frecuencia de la portadora, el ancho de banda, la carga topológica y la duración de los UFV.

3.3 Corrimiento de la frecuencia

Para transformar la desigualdad (3.13) en desigualdades útiles, primero investigamos la frecuencia portadora real de las oscilaciones de los UFV en su anillo brillante. Se ha demostrado en [37] que la frecuencia portadora de los UFVs isodifractantes, $\bar{\omega}$, no se desplaza de forma apreciable respecto a la frecuencia de la fuente ω_0 , es decir, $\bar{\omega} \simeq \omega_0$, en consonancia con lo que ocurre con el haz gaussiano pulsado fundamental [62]. Para los UFVs con $g_0 \neq 0$

hay corrimientos al azul o al rojo significativos, aunque no grandes, de la frecuencia de la portadora, que también son similares a los de los haces gaussianos pulsados fundamentales del mismo valor de g_0 [43] y resultan ser sustancialmente independientes de la carga topológica.

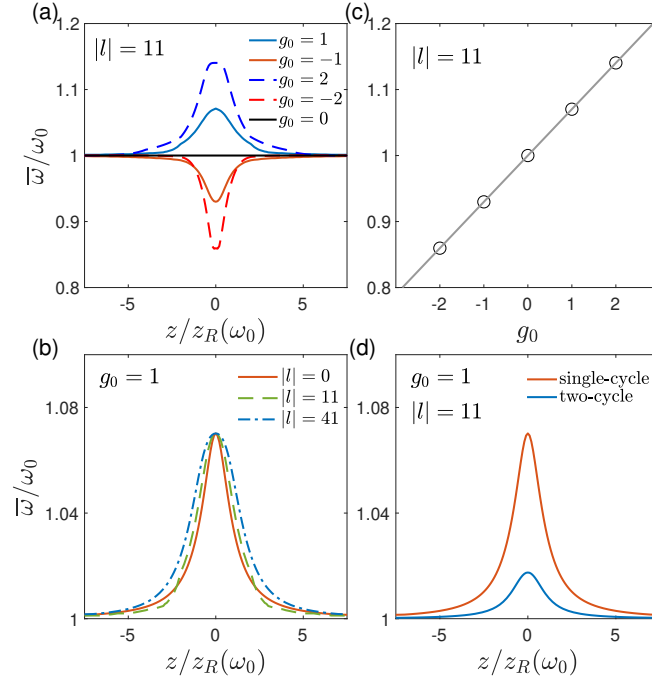


Figura 3.3: Corrimientos de frecuencia de los UFV en su anillo brillante respecto a la frecuencia portadora de la fuente ω_0 . Se evalúan numéricamente con las Ecs. (2.1), (2.2) y (3.5) para un UFV de un ciclo (a)-(c), y un UFV de dos ciclos (d). Corrimiento de frecuencia a lo largo de la propagación para varios valores de g_0 (a) y para diferentes valores de $|l|$ con $g_0 = 1$ (b). (c) Corrimientos de frecuencia en el foco $z = 0$ como función de g_0 . (d) Corrimiento de frecuencia en función de la distancia de propagación para un UFV con dos duraciones diferentes de la fuente que lo genera, uno de un ciclo y el otro de dos ciclos.

La Fig. 3.3 resume como varía la frecuencia de la portadora $\bar{\omega}$ en el anillo brillante para UFVs respecto de la frecuencia portadora de la fuente $A(t)$. La fuente de pulsos tiene un espectro $\hat{A}(\omega) = (\omega/\omega_0)^{\alpha-1/2} \exp(-\alpha\omega/\omega_0)$ donde con $\alpha = 14,25$ se genera un pulso $A(t)$ de un ciclo de duración y con $\alpha = 57,11$ el pulso $A(t)$ es de dos ciclos de duración. En la Fig. 3.3(a) se representa esta relación entre frecuencias ($\bar{\omega}/\omega_0$) para UFVs con la misma carga topológica y diferentes valores de g_0 frente a la distancia de propagación z alrededor del foco. En todos los casos la frecuencia portadora de los UFVs es $\bar{\omega} \simeq \omega_0$ lejos del foco, pero la frecuencia de la portadora en el anillo brillante se desplaza de la frecuencia portadora de la fuente al aproximarse al foco y es diferente en función del valor de g_0 . Para $g_0 > 0$ se produce un corrimiento al azul que aumenta con g_0 y para valores $g_0 < 0$ se produce un corrimiento al rojo que aumenta al aumentar $|g_0|$. Como se puede ver en la Fig. 3.3(b) para $g_0 = 1$, el corrimiento de la frecuencia en el foco no depende de forma apreciable de l y es aproximadamente igual al que afecta al haz gaussiano fundamental del mismo valor de g_0 . Fuera del foco, la dependencia del corrimiento de frecuencia de la carga topológica es también débil. En la Fig. 3.3(c) se

representa el corrimiento de la frecuencia portadora en el foco $z = 0$ para los diferentes valores de g_0 , observándose que se ajustan a una variación lineal. Para pulsos más largos, como para el pulso de dos ciclos de la fuente $A(t)$ en la Fig. 3.3(d), los corrimientos de frecuencia son mucho menos pronunciados y desaparecen en el límite monocromático, como se esperaba.

Lo que nos muestra la Fig. 3.3 es que los corrimientos máximos de frecuencia son, por supuesto, relevantes en los experimentos, pero para los valores $|g_0| \leq 2$ se ve que no superan una variación relativa del 15% con respecto a la frecuencia portadora de la fuente, lo que justifica las aproximaciones que se harán en la siguiente sección. Aunque en la Fig. 3.3 se utilizan fuentes espectrales potencial-exponencial particulares, correspondientes a pulsos de entrada de forma aproximadamente gaussiana, hemos observado en simulaciones numéricas adicionales con otros espectros de fuente corrimientos de frecuencia relativos similares entre el 10% y el 20%.

3.4 Restricciones a la duración y al ancho de banda

Para $z_R(\omega)$ independiente de la frecuencia, puede verse fácilmente a partir de la Ec. (2.4) que la Ec. (3.13) se reduce a la desigualdad previamente conocida $\sigma_\omega/\bar{\omega} < 1/\sqrt{|l|}$ para UFVs isodifractantes que implica propiedades físicamente significativas del pulso en r_{\max} . Teniendo en cuenta que $\Delta\omega = 2\sigma_\omega$ y que $\Delta\omega\Delta t \geq 2$, el número de oscilaciones de UFVs isodifractantes satisface $\bar{\omega}\Delta t \geq \sqrt{|l|}$ [34].

También pueden obtenerse, de forma aproximada, restricciones similares para el ancho de banda y la duración en r_{\max} de los UFV generales con al menos un ciclo. Utilizando la igualdad aproximada utilizada frecuentemente en estadística [63]

$$\sigma_{f(\omega)}^2 \simeq \left[\left. \frac{df(\omega)}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} \right]^2 \sigma_\omega^2 \quad \text{para } f(\omega) = 1/s^2(\omega, z), \quad (3.14)$$

evaluando la derivada de $f(\omega)$ como $df(\omega)/d\omega = -[1/s^4(\omega, z)]ds^2(\omega, z)/d\omega$ por comodidad, y aproximando $\overline{f(\omega)}$ en el denominador de la desigualdad (3.13) a través de una serie de Taylor de primer orden

$$\overline{f(\omega)} \simeq \overline{f(\bar{\omega}) + \left. \frac{df(\omega)}{d\omega} \right|_{\bar{\omega}} (\omega - \bar{\omega})} = f(\bar{\omega}) + \frac{1}{2} \overline{f''(\bar{\omega})(\omega - \bar{\omega})^2} = f(\bar{\omega}), \quad (3.15)$$

obtenemos

$$\sigma_\omega < \frac{1}{\sqrt{|l|}} \left| \left. \frac{s^2(\bar{\omega}, z)}{ds^2(\omega, z)/d\omega} \right|_{\bar{\omega}} \right|. \quad (3.16)$$

Introduciendo el ancho de banda $\Delta\omega = 2\sigma_\omega$ y utilizando que $\Delta\omega\Delta t \geq 2$, la desigualdad (3.16) arroja

$$\Delta t > \sqrt{|l|} \left| \frac{\frac{ds^2(\omega, z)}{d\omega} \Big|_{\bar{\omega}}}{s^2(\bar{\omega}, z)} \right|. \quad (3.17)$$

Realizando la evaluación explícita de la derivada

$$\frac{ds^2(\omega, z)}{d\omega} = \frac{s^2(\omega, z)}{\omega} \left(1 - \frac{z'_R(\omega)}{z_R(\omega)} \omega \frac{1 - \frac{z^2}{z_R^2(\omega)}}{1 + \frac{z^2}{z_R^2(\omega)}} \right). \quad (3.18)$$

e introduciéndola en la Ec. (3.16) primero y después en la Ec. (3.17) dan los resultados

$$\frac{\sigma_\omega}{\bar{\omega}} < \frac{1}{\sqrt{|l|}} \frac{1}{\left| 1 + g(\bar{\omega}) \frac{1 - z^2/z_R^2(\bar{\omega})}{1 + z^2/z_R^2(\bar{\omega})} \right|} \quad (3.19)$$

y

$$\bar{\omega} \Delta t > \sqrt{|l|} \left| 1 + g(\bar{\omega}) \frac{1 - z^2/z_R^2(\bar{\omega})}{1 + z^2/z_R^2(\bar{\omega})} \right|, \quad (3.20)$$

donde $g(\omega) = -\omega[dz_R(\omega)/d\omega]/z_R(\omega)$. El lado derecho de la desigualdad (3.20) impone un límite inferior al número de oscilaciones del pulso que es diferente para cada distancia de propagación. Sin embargo, su evaluación es difícil porque hay que conocer las funciones de frecuencia $z_R(\omega)$ y $g(\omega)$ y luego evaluarlas para la frecuencia portadora $\bar{\omega}$ en el anillo brillante a cada distancia de propagación. Experimentalmente esto requeriría una cuidadosa caracterización de la fuente de entrada determinando $Z_R(\omega)$ como función de la frecuencia y midiendo $\bar{\omega}$ en el anillo brillante a cada distancia seleccionada. En una simulación numérica de un experimento, habría que especificar los modelos de $\hat{A}(\omega)$ y $Z_R(\omega)$ del pulso de entrada, utilizar las Ecs. (3.5), calcular el campo óptico focalizado con las Ecs. (2.1) y (2.2), y extraer los valores de $\bar{\omega}$. Como se ha visto en la sección anterior, la frecuencia de la portadora $\bar{\omega}$ en r_{\max} puede estar desplazada al rojo o al azul con respecto a la frecuencia de la portadora ω_0 de la fuente, pero este corrimiento no supera un valor relativo del 10-20 % para el caso extremo de pulsos de un solo ciclo, para $|g_0| \leq 2$, con cualquier carga topológica, y desaparece a medida que aumenta el número de oscilaciones, independientemente de la elección particular de $\hat{A}(\omega)$ y $Z_R(\omega)$. Así, podemos transformar el límite superior de la desigualdad (3.19) y el límite inferior de la desigualdad (3.20) en límites superiores e inferiores aproximados pero mucho más fáciles de evaluar, sustituyendo $\bar{\omega}$ por la frecuencia de la fuente ω_0 en el lado derecho de las desigualdades (3.19) y (3.20) para obtener

$$\frac{\sigma_\omega}{\bar{\omega}} < \frac{1}{\sqrt{|l|}} \frac{1}{\left| 1 + g_0 \frac{1 - z^2/z_R^2(\omega_0)}{1 + z^2/z_R^2(\omega_0)} \right|} \quad (3.21)$$

y

$$\bar{\omega} \Delta t > \sqrt{|l|} \left| 1 + g_0 \frac{1 - z^2/z_R^2(\omega_0)}{1 + z^2/z_R^2(\omega_0)} \right|, \quad (3.22)$$

cuyos miembros derechos vienen determinados por propiedades estándar de la fuente, como su frecuencia portadora ω_0 y la distancia de Rayleigh $z_R(\omega_0) = f^2/Z_R(\omega_0)$ a la frecuencia portadora. La aparición del factor g_0 subraya la necesidad de medirlo para la fuente láser disponible. La desigualdad (3.22), complementada con la desigualdad (3.21), es el principal resultado práctico de este Capítulo que impone una cota inferior dependiente de z y proporcional a $\sqrt{|l|}$ sobre el número de oscilaciones en el anillo brillante de los UFV generales y generaliza la cota inferior independiente de $\sqrt{|l|}$ en el caso isodifractante.

Es posible derivar de forma más intuitiva los resultados anteriores examinando más de cerca la densidad espectral

$$\left| \hat{E}(r, \omega, z) \right|^2 = \frac{f^2}{z_R^2(\omega)} \frac{s^2(\omega)}{s^2(\omega, z)} \left| \hat{A}(\omega) \right|^2 \left[\frac{2r^2}{s^2(\omega, z)} \right]^{|l|} e^{-2r^2/s^2(\omega, z)}. \quad (3.23)$$

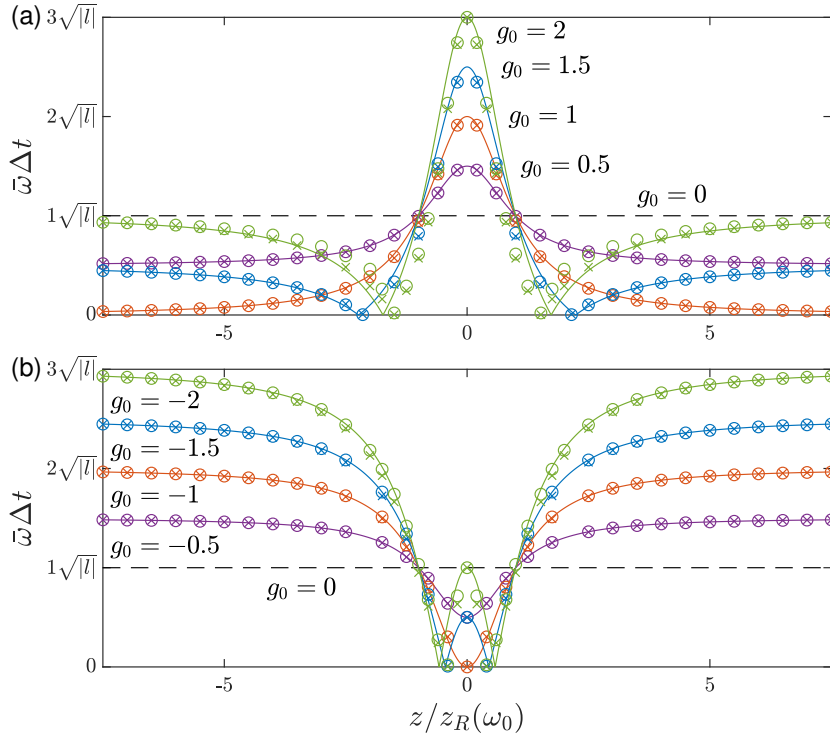


Figura 3.4: Límite inferior del número de oscilaciones de los UFV en función de la distancia de propagación para varios valores (a) positivos y (b) negativos del factor g_0 . Las curvas sólidas muestran el límite inferior dado por el lado derecho de la Ec. (3.22). Los símbolos muestran el límite inferior evaluado a partir del lado derecho de la Ec. (3.20) utilizando simulaciones numéricas de pulsos de un solo ciclo. Los círculos corresponden a un pulso gaussiano y las cruces a un pulso tipo sinc^2

Utilizando la aproximación $x^{2m}e^{-x^2} \simeq e^{-2(x-\sqrt{m})^2}$, que se hace más precisa a medida que aumenta el parámetro positivo m , la densidad espectral puede aproximarse por

$$\left| \hat{E}(r, \omega, z) \right|^2 \simeq \frac{f^2}{z_R^2(\omega)} \frac{s^2(\omega)}{s^2(\omega, z)} \left| \hat{A}(\omega) \right|^2 e^{-2[\sqrt{2}r/s(\omega, z) - \sqrt{|l|}]^2} \quad (3.24)$$

donde hemos omitido el factor irrelevante $(m/e)^m$. Los dos primeros factores están también presentes con $l = 0$ e inducen corrimientos de la frecuencia de la portadora pero no alteran significativamente el ancho de banda del espectro de la fuente $\hat{A}(\omega)$ de la misma manera que en los haces gaussianos pulsados. El último factor es propio de los UFV y actúa como un filtro pasabanda cuando $s(\omega, z)$ depende de la frecuencia que limita el ancho de banda y, por tanto, la duración. Aproximando $1/s(\omega, z) \simeq 1/s(\omega_0, z) + d[1/s(\omega, z)]/d\omega|_{\bar{\omega}}(\omega - \bar{\omega})$, expresando por comodidad la derivada como $d[1/s(\omega, z)]/d\omega = -[ds^2(\omega, z)/d\omega]/2s^3(\omega, z)$, y evaluando la densidad espectral en $r_{\max}^2 = (|l|/2)[1/1/s^2(\omega, z)] \simeq (|l|/2)s^2(\omega, z)$, se llega a

$$|\hat{E}(r_{\max}, \omega, z)|^2 \simeq \frac{f^2}{z_R^2(\omega)} \frac{s^2(\omega)}{s^2(\omega, z)} |\hat{A}(\omega)|^2 e^{-(\omega - \bar{\omega})^2/2\sigma_G^2} \quad (3.25)$$

con

$$\sigma_G = \frac{1}{\sqrt{|l|}} \left| \frac{s^2(\bar{\omega}, z)}{\frac{ds^2(\omega, z)}{d\omega}|_{\bar{\omega}}} \right|. \quad (3.26)$$

Como producto de $|\hat{A}(\omega)|$ y el último factor gaussiano de la Ec. (3.25), la densidad espectral del UFV en r_{\max} no puede ser más ancha que σ_G , es decir, $\sigma_\omega < \sigma_G$, lo que coincide con la Ec. (3.16), de la que se derivan el resto de las desigualdades.

El límite inferior dependiente de z para el número de oscilaciones en el anillo brillante de los UFVs, tal y como viene dado por el lado derecho de la desigualdad (3.22), se representa en las Figs. 3.4(a) y 3.4(b) mediante curvas sólidas para varios valores de g_0 . Para valores positivos de g_0 el límite inferior en la región focal $[-z_R(\omega_0), z_R(\omega_0)]$ está por encima del límite $\sqrt{|l|}$, fuera de la región focal está por debajo de $\sqrt{|l|}$, y en los bordes $\pm z_R(\omega_0)$ de la región focal es igual a $\sqrt{|l|}$. Lo contrario ocurre con valores negativos de g_0 . Para cualquier $|g_0|$ el límite inferior máximo es $(1 + |g_0|)\sqrt{|l|}$, alcanzado en el foco para g_0 positivo y lejos del foco para g_0 negativo.

Notablemente, para $|g_0| \geq 1$ existen posiciones axiales aisladas

$$z_b = \pm \sqrt{\frac{g_0 + 1}{g_0 - 1}} z_R(\omega_0), \quad (3.27)$$

situadas fuera de la región focal para $g_0 \geq 1$ y dentro de la región focal para $g_0 \leq -1$, donde el límite inferior desaparece y, por tanto, no hay restricción en la duración mínima del UFV. En z_b , el límite inferior desaparece porque $ds^2(\omega, z_b)/d\omega|_{\omega_0} = 0$, es decir, la anchura gaussiana de los constituyentes monocromáticos de LG es constante en torno a la frecuencia de la portadora, lo que significa, según la Ec. (3.25) con $\sigma_G = \infty$, que la densidad espectral es sustancialmente la misma que $|\hat{A}(\omega)|^2$ de la fuente, excepto por los pequeños cambios asociados a los corrimientos de frecuencia. La ausencia de un límite inferior cuando la anchura gaussiana es independiente de la frecuencia se deduce directamente de la desigualdad (3.13) y, por tanto, esta conclusión no se limita a los UFV con al menos un ciclo. De hecho, si $s(\omega, z)$ es independiente de ω en algún punto axial, la varianza $\sigma_{1/s^2(\omega, z)}^2$ desaparece y la desigualdad (3.13) se satisface automáticamente con cualquier ancho de banda, duración y carga topológica del UFV. En la práctica, la ausencia de un límite inferior significa que la duración mínima del

UFV sólo está limitada por el espectro de la fuente $\hat{A}(\omega)$ a la duración de $A(t)$. Este resultado generaliza a diferentes posiciones z_b el ejemplo introductorio de las Figs. 3.2(g)-3.2(i), donde $z_b = \pm\infty$ para $g_0 = 1$.

Las Figs. 3.4(a) y 3.4(b) también sirven para apoyar la validez de la desigualdad (3.22) para aproximar la desigualdad (3.20). Los símbolos de estas figuras representan el límite inferior más preciso proporcionado por el miembro derecho de la desigualdad (3.20), que requiere especificar modelos particulares de $Z_R(\omega)$ y $\hat{A}(\omega)$ calculando el campo óptico focalizado y su frecuencia portadora real $\bar{\omega}$ en el anillo brillante a cada distancia. En estas figuras, los círculos corresponden a una fuente de un ciclo con la forma temporal gaussiana $A(t) = [-i\alpha/(\omega_0 t - i\alpha)]^{\alpha+1/2}$, con $\alpha = 14,25$ y $\omega = 2,5$ rad/fs. Las cruces corresponden a una fuente de un ciclo con la forma temporal $A(t) = \text{sinc}^2 t/T e^{-i\omega_0 t}$, con $T = 3,9$ fs y $\omega_0 = 2,5$ rad/fs. Los corrimientos de frecuencia son mayores y, entonces, las discrepancias entre las desigualdades (3.22) y (3.20) podrían ser más pronunciadas. Sin embargo, las desviaciones son pequeñas y, de hecho, serían inapreciables si, por ejemplo, los símbolos se evaluaran utilizando pulsos de entrada de varios ciclos. Estas simulaciones apoyan que el miembro derecho de la desigualdad (3.20) depende débilmente de estos detalles finos de la fuente y, por tanto, el límite inferior del número de oscilaciones puede determinarse con precisión mediante la fórmula analítica del miembro derecho de la desigualdad (3.22), que está determinada exclusivamente por los tres parámetros ω_0 , $z_R(\omega_0)$ y g_0 pertenecientes a la fuente.

3.5 Cambios en la forma del pulso en su propagación y con la carga topológica, y estados localmente comprimidos de momento angular orbital

El cambio en el número de oscilaciones del UFW al propagarse, como en el ejemplo introductorio de las Figs. 3.2(g)-3.2(i), puede explicarse como consecuencia de la existencia del límite inferior variable en z en la desigualdad (3.22).

Las curvas negras y grises sólidas de la Fig. 3.5(a) representan $\bar{\omega}\Delta t$ en el anillo brillante del UFW en función de la distancia de propagación para los UFW de entrada $E_L(r, t)e^{il\varphi} = A(t)[\sqrt{2}r/S(\omega_0)]^{|l|}e^{-r^2/S(\omega_0)^2}e^{il\varphi}$ con $g_0 = 1$ porque $Z_R(\omega)$ es tal que $S(\omega) = S(\omega_0)$ es independiente de la frecuencia y el UFW focalizado es $\theta(\omega) = \theta(\omega_0)$ independiente de la frecuencia. Los espectros de la fuente $\hat{A}(\omega) = (\omega/\omega_0)^{\alpha-1/2} \exp(-\alpha\omega/\omega_0)$ se eligen para representar pulsos de tipo gaussiano $A(t)$ de una (con $\alpha = 14,25$), dos (con $\alpha = 57,11$) y tres oscilaciones (con $\alpha = 128,30$), cuyos valores de $\omega_0\Delta t$ se representan como líneas azules discontinuas para referencia. Como puede observarse, el número de oscilaciones de los respectivos UFW (negro, gris oscuro y gris claro) se mantiene a cualquier distancia de propagación por encima del límite inferior, representado como curva roja. El límite inferior actúa como una especie de barrera efectiva que requiere un ensanchamiento significativo de los UFWs de un ciclo y dos ciclos de entrada. Una situación similar, pero invirtiendo la región focal y el campo lejano, se da con $g_0 = -1$, como se ilustra en la Fig. 3.5(b). El UFW de entrada viene dado por las Ecs. (3.1) y (3.2) con $Z_R(\omega)$ tal que $\Theta(\omega) = \Theta(\omega_0)$, y por tanto $s(\omega) = s(\omega_0)$ en el foco, es independiente de la frecuencia y con $\hat{A}(\omega)$ tal que $A(t)$ comprende una, dos y tres oscilaciones, como se

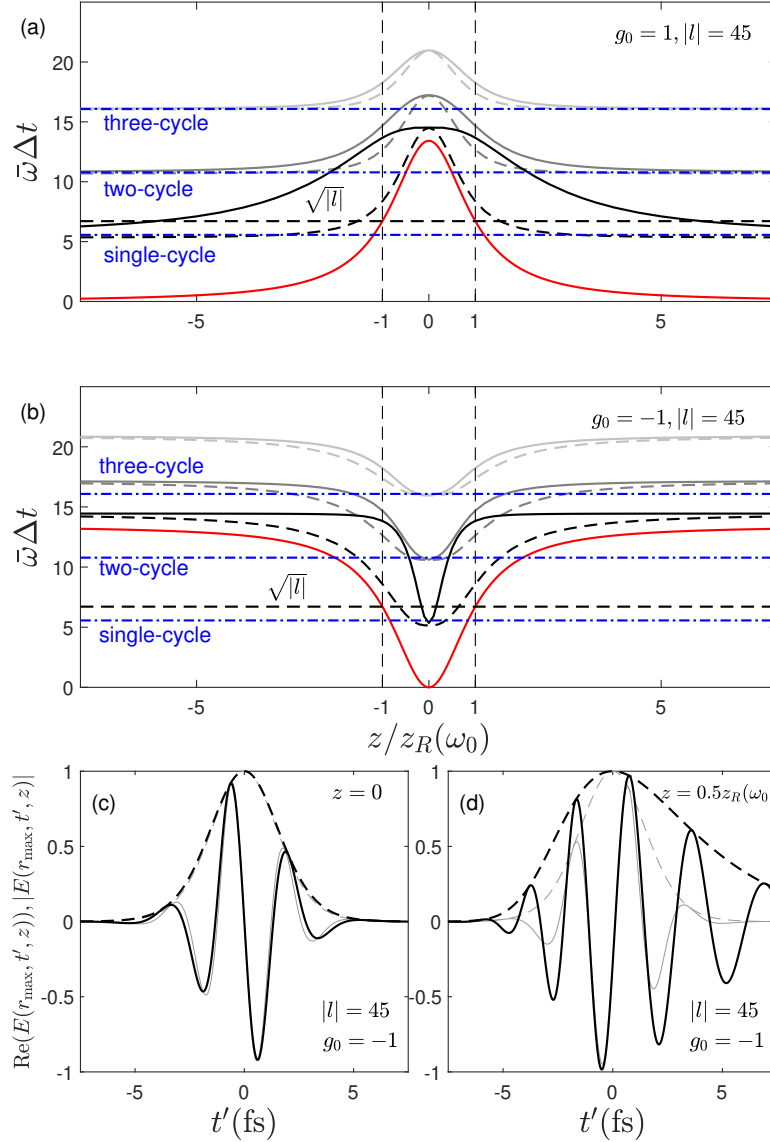


Figura 3.5: (a) y (b) Las curvas sólidas negras y grises muestran el cambio del número de oscilaciones $\bar{\omega}\Delta t$ en el anillo brillante de UFVs durante la propagación evaluado numéricamente con las Ecs. (2.1), (2.2) y (3.5), con un pulso de tipo gaussiano para un ciclo de dos ciclos y tres ciclos de duración con $|l| = 45$. En (a) $g_0 = 1$ y en (b) $g_0 = -1$. La curva roja sólida muestra el límite inferior de la Ec. (3.22). Las curvas discontinuas muestran el número de oscilaciones $\bar{\omega}\Delta t$ evaluadas suponiendo que el pulso tiene fase espectral uniforme y verifica $\Delta t \simeq 2/\Delta\omega$, como se explica más adelante en el texto. Las líneas azules horizontales discontinuas muestran $\bar{\omega}\Delta t$ para los pulsos de la fuente. La línea horizontal discontinua muestra el límite inferior isodifractante $\sqrt{|l|}$. (c) y (d) Formas de los pulsos en el anillo brillante a las distancias indicadas (curvas negras) del pulso de un solo ciclo de la fuente (curvas grises).

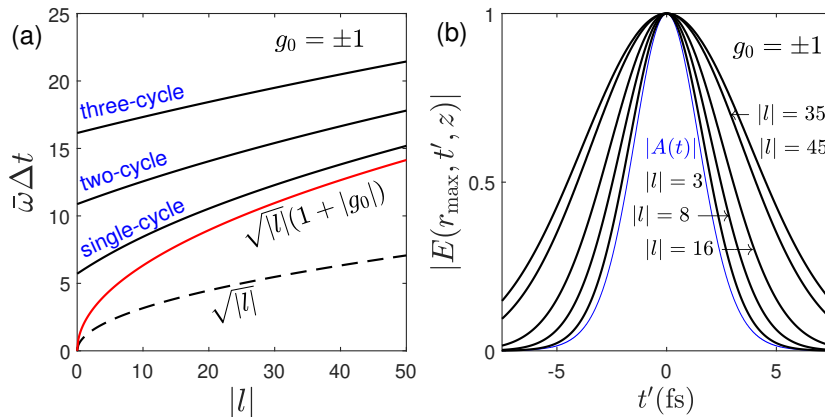


Figura 3.6: (a) Número de oscilaciones $\bar{\omega}\Delta t$ en el anillo brillante en el plano focal para $g_0 = 1$ y en el campo lejano para $g_0 = -1$, con las mismas condiciones que en la Fig. 3.5, en función de la carga topológica impresa. Nótese que según la Ec. (3.22) la cota inferior es la misma para $g_0 = 1$ en el plano focal que para $g_0 = -1$ en el campo lejano, representada ambos casos por la curva roja. La curva negra discontinua representa la cota inferior para UFVs isodifractantes. (b) Amplitudes ensanchadas para varios valores de $|l|$ en el plano focal con $g_0 = 1$ y en el campo lejano con $g_0 = -1$, en comparación con la amplitud de la fuente (en color azul).

ha indicado anteriormente. Independientemente de lo bajo que sea $\omega_0\Delta t$ del pulso de origen (líneas discontinuas azules), el número de oscilaciones del UFV sintetizado en el sistema de focalización y al dirigirse hacia el foco (curvas continuas negra, gris oscura y gris clara) está por encima del límite inferior (curva roja), y sólo cuando el límite inferior disminuye en la región focal, este UFV particular se comprime a una duración también permitida por el límite inferior en esta región y siempre por encima o igual a la duración de $A(t)$. Para duraciones de entrada más largas, como el UFV de tres ciclos en ambos ejemplos, estos cambios en la forma del pulso durante la propagación son cada vez menos pronunciados.

La proporcionalidad de la cota inferior a $\sqrt{|l|}$ implica un aumento del número de oscilaciones con $|l|$ en cualquier ubicación particular z , de la misma manera que para los UFVs isodifractantes [34]. Para los mismos UFV de entrada que en las Figs. 3.5(a) y 3.5(b), el número de oscilaciones y el límite inferior $\sqrt{|l|(1+|g_0|)}$ se representan en la Fig. 3.6(a) como funciones de $|l|$ en el plano focal para $g_0 = 1$ y en el campo lejano para $g_0 = -1$. La existencia de un límite inferior que crece monótonamente con $|l|$ en cada localización particular z impone el incremento del número de oscilaciones con el aumento de la magnitud de la carga topológica impuesta respecto a las de $A(t)$. Como los corrimientos de la frecuencia media son pequeños (no así el “chirp”, como en la Fig. 3.5), las envolventes mostradas en la Fig. 3.6(b) se ensanchan cada vez más en el foco para $g_0 = 1$ y en el campo lejano para $g_0 = -1$ (son idénticas) al aumentar $|l|$ en comparación con la envolvente de $A(t)$. Curiosamente, este efecto en un lugar importante como el plano focal es más pronunciado que para los UFV isodifractantes. La Fig. 3.6(a) también pone de manifiesto que el efecto de ensanchamiento con la magnitud de la carga topológica está especialmente potenciado y es observable con fuentes que emiten pulsos de duración entre uno y dos ciclos y con cargas topológicas dadas inferiores a diez, por

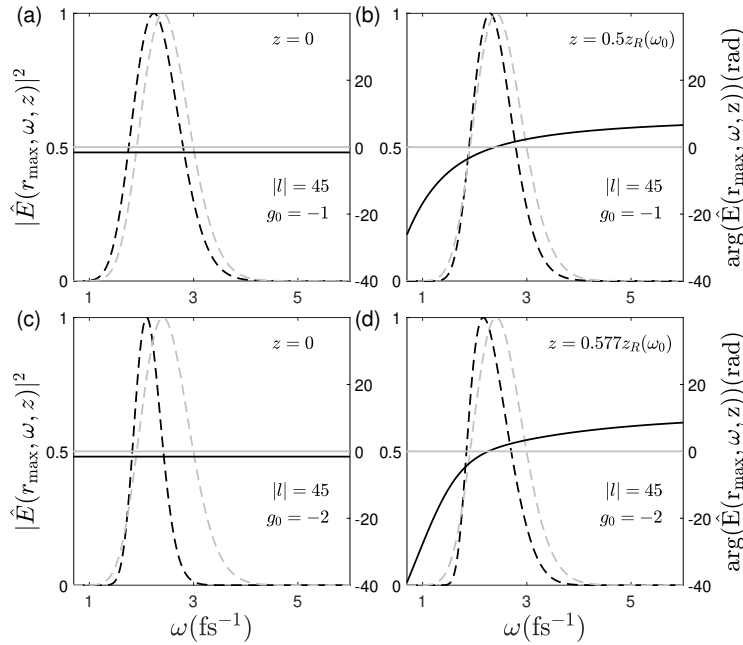


Figura 3.7: De (a) a (d), las curvas negras continuas y discontinuas representan la fase y la densidad espectrales de los pulsos correspondientes a Figs.3.5(c), 3.5(d), 3.8(b) y 3.8(c). Las curvas grises continuas y discontinuas muestran las mismas magnitudes para el pulso de un solo ciclo de la fuente $A(t)$. Todas las densidades espectrales están normalizadas a la unidad y el valor absoluto de la fase espectral es arbitrario; únicamente importa su variación.

ejemplo, un pulso de fuente de un ciclo con $g_0 = 1$ adquiriría medio ciclo adicional en el foco si se le obliga a llevar carga topológica $|l| = 10$. Por el contrario, la pendiente de las curvas negras de la Fig. 3.6(a) disminuye con el aumento del número de ciclos, lo que significa que el ensanchamiento con el aumento de la carga topológica es gradualmente menos pronunciado en el régimen de muchos ciclos y desaparece en el límite monocromático.

Los dos ejemplos anteriores también ilustran lo que denominaremos UFVs en estados localmente comprimidos de OAM, entendidos como UFVs cuyo número de oscilaciones está localmente por debajo del límite inferior $\sqrt{|l|}$ para UFVs isodifractantes, representado en las Figs. 3.5(a) y 3.5(b) como líneas negras discontinuas horizontales. De hecho, el límite $\sqrt{|l|}$ para UFVs isodifractantes sigue desempeñando un papel destacado para UFVs generales con $g_0 = 0$ con forma de pulso axialmente variable. Observe que para $0 < |g_0| \leq 1$, el valor medio de los valores mínimo y máximo del límite inferior, $\sqrt{|l|}(1 - |g_0|)$ y $\sqrt{|l|}(1 + |g_0|)$, respectivamente, a lo largo de la propagación es justo el valor en el caso de isodifracción $\sqrt{|l|}$. Así, como en la Fig. 3.5(a) para una fuente con $g_0 = 1$ y ciclo único $A(t)$, el UFV en el campo lejano con $\bar{\omega}\Delta t < \sqrt{|l|}$ (línea negra discontinua) puede considerarse como un UFV comprimido de este tipo porque necesariamente aumenta su número de oscilaciones hasta un valor $\bar{\omega}\Delta t > \sqrt{|l|}$. Por el contrario, para la fuente con $g_0 = -1$ y ciclo único $A(t)$, es posible crear, como en la Fig. 3.5(b), un UFV con $\bar{\omega}\Delta t < \sqrt{|l|}$ en la región focal, pero se ensancha inmediatamente

hasta $\bar{\omega}\Delta t > \sqrt{|l|}$. Estos UFVs localmente comprimidos se sitúan en torno al mínimo del límite inferior en cada caso, pero sólo pueden implementarse en la práctica, como se justifica más adelante, cuando el límite inferior mínimo $\sqrt{|l|(1 - |g_0|)}$ se encuentra en el campo lejano (sistema de focalización) o en el foco, es decir, con fuentes con $|g_0| \leq 1$, y pueden implementarse de forma óptima con $g_0 = \pm 1$ porque los límites inferiores mínimos desaparecen. En estos dos casos, el valor de $\bar{\omega}\Delta t$ en el campo lejano o en el foco puede alcanzar el mínimo valor posible para el espectro de la fuente dada, como en las Figs. 3.5(a) y 3.5(b), donde la forma del pulso en el anillo brillante es casi idéntica a $A(t)$, excepto por el pequeño corrimiento al rojo en el foco, como se observa en la Fig. 3.5(c).

En principio, estos estados comprimidos del OAM podrían sobrevivir, como permite el límite inferior, a todo el campo lejano $|z| > z_R(\omega_0)$ o a toda la región focal $|z| < z_R(\omega_0)$. Sin embargo, como característica general, están mucho más localizados axialmente, por ejemplo, sólo existen en una fracción del campo lejano en la Fig. 3.5(a) o en una fracción de la región focal en la Fig. 3.5(b). Esta limitación tiene su origen en las fases espectrales no lineales que se adquieren durante la propagación cuando el rango de Rayleigh depende de la frecuencia, y que por tanto tienen un efecto dispersivo que amplía y distorsiona la forma del pulso. Estas fases espectrales no lineales son introducidas por la fase Gouy dependiente de ω que es $-(|l| + 1)\tan^{-1}[z/z_R(\omega)]$, la cual está fuertemente potenciada para grandes $|l|$, y por las fases $\omega r_{\max}^2/2cR(\omega, z)$ debidas a los frentes de onda dependientes de ω , o desajustes del frente de onda, cuando el UFV se aproxima a la región focal desde el exterior o se encuentra inmediatamente fuera de foco. Las Figs. 3.7(a) y 3.7(b), que muestran las fases y densidades espectrales de los pulsos de la Fig. 3.5(c) en el foco y la Fig. 3.5(d) a la mitad de la distancia de Rayleigh, evidencian que las densidades espectrales son similares, pero esta última se ensancha y distorsiona debido a las fases espectrales no lineales. El efecto limitante de estas dispersiones en la longitud axial del estado comprimido también queda claro al comparar las duraciones de los pulsos, representadas como las curvas negras y las curvas de trazos en las Figs. 3.5(a) y 3.5(b). Estas curvas discontinuas representan el número de oscilaciones que tendría el pulso sin las dispersiones debidas a la fase de Gouy y el desajuste de los frentes de onda, evaluadas como si el pulso siguiera teniendo una forma casi gaussiana con fases espectrales uniformes a partir de la relación $\bar{\omega}\Delta t \simeq 2\bar{\omega}/\Delta\omega$, donde $\Delta\omega$ es el ancho de banda calculado. Esta comparación evidencia que la longitud de los estados comprimidos se reduce desde casi todo el campo lejano y casi toda la región focal a pequeñas fracciones de ellos por efecto de estas dispersiones en los casos respectivos de $g_0 = 1$ y $g_0 = -1$.

Con fuentes caracterizadas por $|g_0| > 1$, como la utilizada en [38], la situación es peor a efectos de focalizar a un pulso lo más corto posible en un UFV comprimido. En primer lugar, el valor medio del número máximo y mínimo de oscilaciones a lo largo de la propagación es $\sqrt{|l|(1 + |g_0|)}/2$, por encima del límite inferior isodifractante $\sqrt{|l|}$. En segundo lugar, los puntos z_b en los que desaparece el límite inferior no están en el infinito sino en algún lugar fuera de la región focal para $g_0 > 1$ y no en el foco sino en algún lugar de la región focal para $g_0 < -1$, como se ilustra en la Fig. 3.8. Los posibles estados comprimidos situados alrededor de z_b no lo están debido a las fases espectrales no lineales introducidas por las dispersiones debidas a la fase de Gouy y el desajuste de los frentes de onda, que hacen que los pulsos se ensanchen y distorsionen. Con las mismas condiciones de entrada que en la Fig. 3.5(a), excepto que

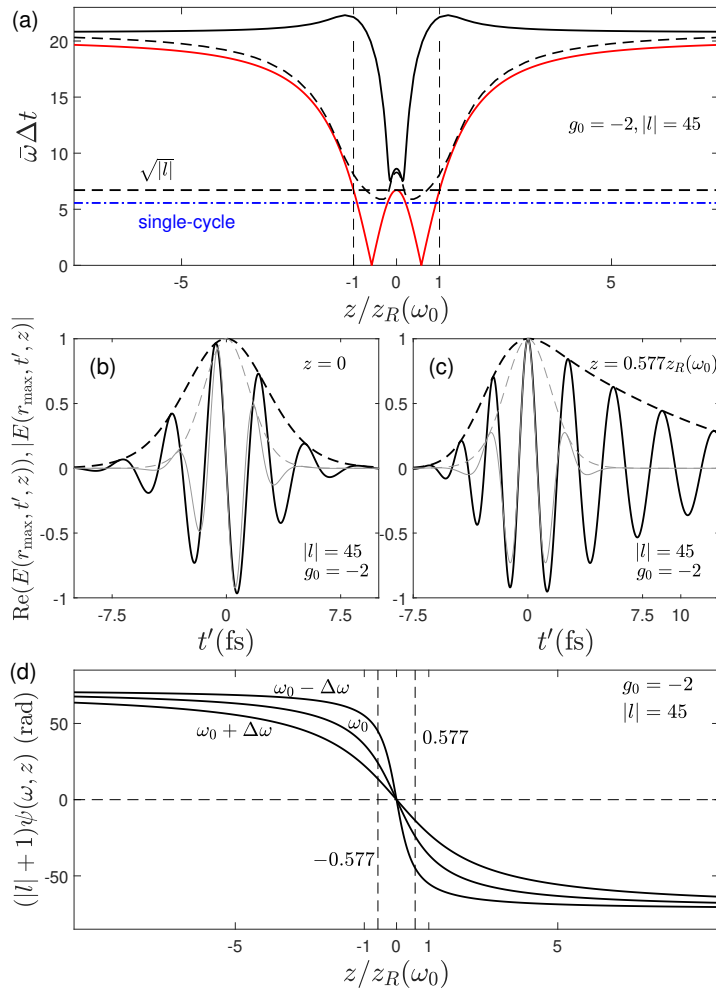


Figura 3.8: (a) La curva negra continua muestra el cambio en el número de oscilaciones $\bar{\omega}\Delta t$ en el anillo brillante de los UFVs durante la propagación, evaluado numéricamente con Ecs. (2.1), (2.2) y (3.5), usando un pulso de un solo ciclo y $|l| = 45$. La curva roja muestra la cota inferior de la Ec. (3.22). La curva negra discontinua muestra el número de oscilaciones $\bar{\omega}\Delta t$ evaluado a partir del ancho de banda con $\Delta t = 2/\Delta\omega$, es decir, duración “transform-limited”. La línea azul de trazo y punto en horizontal muestra $\bar{\omega}\Delta t$ para el pulso de la fuente. La línea negra discontinua horizontal muestra la cota inferior isodifractante $\sqrt{|l|}$. (b) y (c) Campo eléctrico del pulso en el anillo brillante a las distancias indicadas (curvas negras) para el pulso con una fuente de un solo ciclo (representado con las curvas grises). (d) Fases de Gouy de los haces LG monocromáticos a la frecuencia portadora de la fuente ω_0 y a las frecuencias $\omega_0 + \Delta\omega$ y $\omega_0 - \Delta\omega$ en el borde del espectro de la fuente.

$g_0 = -2$, se observa en la Fig. 3.8(a) que el número de oscilaciones del UFV (curva negra continua) aumenta enormemente en el sistema focalizador mientras se dirige hacia el foco en comparación con el pulso de un solo ciclo de la fuente (línea azul punteada), como impone el límite inferior (curva roja). Eliminando artificialmente las dispersiones debidas al desajuste de los frentes de onda y a la fase de Gouy, el UFV se focalizaría alrededor de $z_b = 0,577z_R(\omega_0)$ en un estado comprimido (curva gris discontinua) con el número de oscilaciones por debajo de $\sqrt{|l|}$ (línea horizontal discontinua). El pulso en el foco de la Fig. 3.8(b) está significativamente ensanchado en comparación con $A(t)$, como impone el límite inferior; la forma del pulso en z_b en la Fig. 3.8(c) está aún más ensanchada y distorsionada como resultado de la dispersión. Las fases y densidades espectrales de estos dos pulsos se representan en las Figs. 3.7(c) y 3.7(d) para evidenciar que con anchos de banda similares el segundo es sustancialmente más largo que el primero debido a las fases espectrales no uniformes. La figura 3.8(d) ayuda a visualizar la dispersión en la fase de Gouy, es decir, los diferentes valores de la fase de Gouy para diferentes componentes espectrales, que es el principal origen de la distorsión para cargas topológicas altas.

Para concluir, debe quedar claro que alcanzar el número mínimo de oscilaciones del pulso de la fuente $A(t)$, es decir, la línea azul punteada de la Fig. 3.8(a), no es imposible, porque el límite inferior desaparece realmente en z_b , sino que es muy difícil en la práctica. Requeriría medir las fases espectrales no uniformes del UFV en (r_{\max}, z_b) y precompensarlas antes del sistema de focalizado, es decir, e introducir fases espectrales $(|l| + 1)\tan^{-1}[z_b/z_R(\omega)]$ opuestas a la fase de Gouy y $-\omega r_{\max}^2/2cR(\omega, z_b)$ opuestas para cada frecuencia particular. Sin embargo, esta precompensación es específica para el punto concreto (r_{\max}, z_b) y el UFV resultante sería un estado localmente comprimido del OAM en torno a z_b .

Capítulo 4

Ondas-X con momento angular orbital con gran ancho de banda

Las ondas-X con momento angular orbital son paquetes de ondas que ni se dispersan ni se difractan, localizadas tanto en el espacio como en el tiempo, y presentan velocidades de grupo superlumínicas arbitrarias en el espacio libre [64, 65]. Como miembros particulares de la familia más amplia de ondas localizadas -también llamadas paquetes de onda espacio-temporales-, han sido objeto de estudio durante décadas. No obstante, la mayor parte de estos trabajos experimentales se han centrado hasta ahora en ondas-X localizadas sin momento angular orbital [65, 66, 67, 68].

Como se ha explicado en el capítulo 3, los pulsos de Laguerre-Gauss son los más utilizados en los experimentos con momento angular orbital. El problema de estos es que sufren difracción, mientras que las ondas-X con OAM no (además de tener otras propiedades como un comportamiento auto-regenerativo y resistencia a la turbulencia [69]), lo que podrían mejorar el rendimiento de los sistemas de comunicación y criptográficos cuánticos basados en OAM [70, 71], así como la eficiencia de la generación de altos armónicos y pulsos de attosegundo con OAM [20, 22]. Debido a estas características, ha surgido un renovado interés en las ondas-X con vórtice y otros pulsos no difractantes con momento angular orbital.

Las ondas localizadas con simetría cilíndrica se construyen como superposiciones coherentes de haces de Bessel no difractantes de orden $l = 0$ (sin OAM) o $l \neq 0$ (con OAM) de diferentes frecuencias ω y pesos $f(\omega)$. El número entero l es la carga topológica del vórtice en su centro. Las ondas localizadas no tienen dispersión porque el ángulo cónico de los haces de Bessel dependiente de ω , $\theta(\omega)$, es tal que el número de onda axial (proyección del vector de onda sobre la dirección de propagación, z) sigue una variación lineal con la frecuencia

$$k_z(\omega) = a + \frac{\omega}{v_g} = \frac{\omega}{c} \cos \theta(\omega), \quad (4.1)$$

donde a es una constante arbitraria, y v_g la velocidad de grupo. Para esta tesis se han escogido ondas localizadas con parámetro $a = 0$ (ondas-X) y $a > 0$ (ondas-X genéricas u ondas-GX), ambas con velocidad de grupo superlumínica ($v_g > c$) ya que estas no sufren difracción en

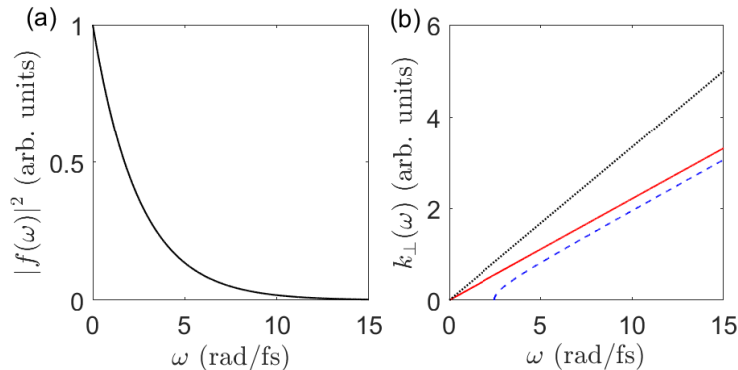


Figura 4.1: (a) Densidad espectral del haz de Bessel de banda ancha $f(\omega) = \exp(-\epsilon\omega)$ con $\epsilon = 0,2$ fs, que abarca el espectro visible y más allá. (b) Números de onda transversales de la onda-X con $v_g = 0,0004$ mm/fs (línea sólida), de la onda-GX con la misma velocidad y $\omega_z = 2,5$ rad/fs ($a = 2,083 \times 10^3$ mm $^{-1}$) (curva discontinua), y ω/c (línea de puntos).

toda su propagación ni dispersión temporal.

Los recientes estudios teóricos [37, 48, 72] sobre las ondas-X con OAM han revelado una estructura acoplada temporal-OAM que obedece a ciertas restricciones universales. En [48, 72] se han examinado los acoplamientos OAM-temporales en la vecindad inmediata de la singularidad del vórtice. Con el mismo espectro $f(\omega)$, el número de oscilaciones y su frecuencia aumentan con la magnitud de la carga topológica, $|l|$. Por otra parte, en [37] se estudia el anillo brillante que rodea al vórtice. En las ondas-X construidas con la misma $f(\omega)$, las ondas-X tienen una duración creciente en este anillo cuando se incrementa $|l|$, mientras que la frecuencia local de las oscilaciones no experimenta un cambio apreciable con $|l|$, sino que está determinada únicamente por el espectro particular $f(\omega)$ de los haces de Bessel, por ejemplo, la frecuencia central ω_f para los espectros en forma de campana. La dependencia de la duración de las ondas-X con respecto a l tiene su origen en el límite inferior $\Delta t \gtrsim |l|/\omega_f$ que cumplen todas las ondas-X en su anillo brillante.

Hasta la fecha, no existe una imagen completa de la estructura espacio-temporal de las ondas-X con OAM, excepto en las proximidades del vórtice y del anillo brillante. En este capítulo se describe la estructura espacio-temporal de las ondas-X y GX con OAM y con el espectro de banda ancha $f(\omega) = e^{-\epsilon\omega}$, donde ϵ es una cantidad pequeña para que $f(\omega)$ abarque desde una componente de frecuencia nula hasta el espectro óptico y más allá, como en la Fig. 4.1(a). Sin OAM, la onda-X fundamental no es oscilante en el tiempo y, por tanto, tiene poco interés en la óptica; de hecho, sólo se han generado ondas-X con espectros más estrechos sobre las frecuencias de microondas [73] y ópticas [65], denominadas ondas Bessel-X [74]. Sin embargo, la introducción del OAM elimina cualquier componente alrededor de $\omega = 0$ e induce lo que puede calificarse como oscilaciones temporales intrínsecas asociadas al OAM, cuya frecuencia puede sintonizarse en cualquier rango del espectro electromagnético. Los acoplamientos OAM-temporales previamente descritos [48, 72, 37] surgen aquí de forma natural como resultado de toda la estructura acoplada espacio-temporal de estas ondas-X con OAM.

Las oscilaciones inducidas por el OAM presentan un número de ceros aproximadamente igual a $|l|$, y por tanto $|l|/2$ oscilaciones. Dado que el mismo número de oscilaciones llena el interior de los brazos X a cualquier distancia radial de la singularidad del vórtice, su frecuencia sufre un corrimiento en dirección radial al alejarse del vórtice hacia el rojo hasta llegar a cero en el infinito (con amplitud cero). Al aumentar $|l|$, toda la onda-X sufre corrimiento hacia el azul, al mismo tiempo que el anillo brillante se desplaza hacia el exterior, lo que da lugar a una frecuencia en este anillo independiente de la carga topológica. La estructura de las ondas-GX se asemeja mucho a la de las ondas-X en su parte interior, pero el número de oscilaciones es cada vez mayor que el de las ondas-X del mismo OAM cuando nos trasladamos hacia su periferia. Además, las oscilaciones se extienden temporalmente fuera de los brazos X en la parte radial exterior, y su frecuencia se aproxima a un valor constante no nulo.

La duración de las ondas-X con gran ancho de banda en su anillo brillante coincide con el límite inferior $|l|/\omega_f$ descrito en [37]. Por lo tanto, las ondas-X de banda ancha son **ondas-X de duración mínima capaces de transportar una cantidad determinada de OAM**. Al ser libres de difracción, libres de dispersión y portadoras de OAM máximo para su duración (además de otras propiedades como el comportamiento de auto-reparación y la resistencia a la turbulencia [75]), las ondas-X de gran ancho de banda aparecen como ondas óptimas en muchas aplicaciones, particularmente en las comunicaciones por multicanales de alta capacidad en el espacio libre [69], y en los sistemas de comunicaciones cuánticas en el espacio libre [53, 70], comúnmente basados en modos del tipo Laguerre-Gauss.

4.1 Ondas localizadas superlumínicas con momento angular orbital

Una expresión general de las ondas localizadas con simetría cilíndrica y OAM es $E(r, \phi, z, t) = E(r, z, t) e^{il\phi}$, con

$$E(r, z, t) = \frac{e^{iaz}}{\pi} \int_0^\infty d\omega f(\omega) J_l[k_\perp(\omega) r] e^{-i\omega t'} \quad (4.2)$$

donde (r, ϕ, z) son coordenadas cilíndricas, $t' = t - z/v_g$ es el tiempo local para la velocidad de grupo v_g , y $k_\perp(\omega) = (\omega/c) \sin[\theta(\omega)] = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_z^2(\omega)}$ es el vector de ondas transversal (módulo de la proyección transversal del vector de ondas), o, dada la variación lineal de $k_z(\omega)$ de la Ec. (4.1),

$$k_\perp(\omega) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(a + \frac{\omega}{v_g}\right)^2}. \quad (4.3)$$

La integral se ha limitado a frecuencias positivas para obtener la representación compleja de la señal analítica del campo eléctrico, cuya parte real es el campo eléctrico real. La limitación a $k_\perp(\omega)$ real expresa la restricción de que el número de onda axial $a + \omega/v_g$ no puede ser mayor que ω/c . El campo eléctrico de las ondas-X ($a = 0$, $v_g > c$) no depende de z . El número de

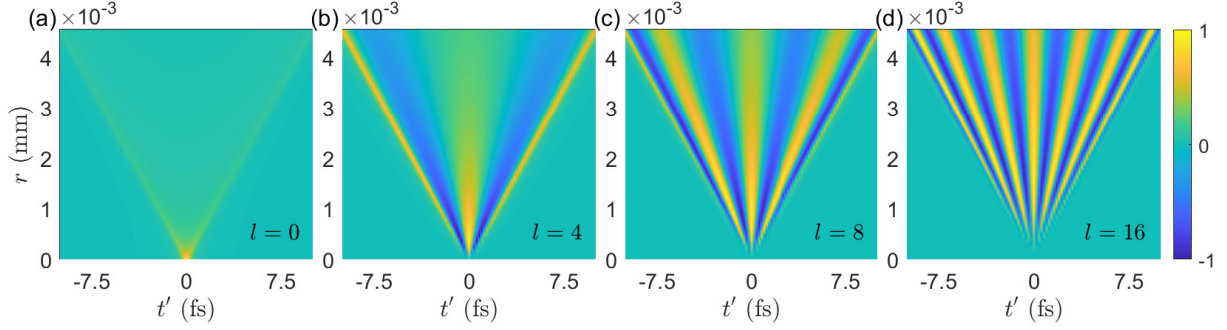


Figura 4.2: Parte real del campo eléctrico de una onda-X con $v_g = 0,0004$ mm/fs, $\omega = 0,2$ fs y la carga topológica indicada. Todos los campos están normalizados a sus valores pico.

onda transversal es la recta $k_{\perp}(\omega) = (\sin\theta/c)\omega$ que cruza el origen $\omega = 0$ con pendiente $\sin\theta/c$ [Fig. 4.1(b)], correspondiente a un ángulo cónico constante $\theta = \sin^{-1}\left(c\sqrt{1/c^2 - 1/v_g^2}\right)$. Para las ondas-GX ($a \neq 0$, $v_g > c$) el campo eléctrico oscila con período axial $2\pi/a$. El número de onda transversal $k_{\perp}(\omega)$ es una rama de la hipérbola que comienza en alguna frecuencia positiva ω_z (la otra rama está enteramente en $\omega < 0$) con la misma pendiente asintótica $\sin\theta/c$ que la onda-X de la misma v_g [Fig. 4.1(b)], y un ángulo cónico dependiente de ω que se aproxima a θ para valores grandes de ω . Fijando la frecuencia ω_z como una frecuencia importante de las ondas-GX se calcula el parámetro a como

$$a = \omega_z \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{v_g} \right), \quad (4.4)$$

de modo que $\omega_z = 0$ especifica una onda-X, y $\omega_z > 0$ una onda-GX [ver Fig. 4.1(b)].

4.1.1 Superancho de banda de ondas-X con momento angular orbital

Tomando, como en [64], el espectro exponencial de gran ancho de banda $f(\omega) = \exp(-\epsilon\omega)$, y fijando $a = 0$ ($\omega_z = 0$) y $k_{\perp}(\omega) = (\sin\theta/c)\omega$, la integral en la Ec. (4.2) puede llevarse a cabo para obtener

$$E(r, z, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{(\epsilon + it')^2 + \left(\frac{\sin\theta}{c} r\right)^2}} \frac{\left(\frac{\sin\theta}{c} r\right)^{|l|}}{\left[\sqrt{(\epsilon + it')^2 + \left(\frac{\sin\theta}{c} r\right)^2} + \epsilon + it' \right]^{|l|}} \quad (4.5)$$

(y multiplicada por $(-1)^{|l|}$ si $l < 0$). La Ec. (4.5) ya fue derivada en el trabajo pionero de Lu y Greenleaf [64]: Las integrales involucradas en la obtención de la expresión para la onda-X fundamental, sin OAM, se realizaron en este trabajo. La expresión con $l \neq 0$, sin embargo, no recibió atención ni en ese trabajo ni posteriormente, hasta donde sabemos.

El campo eléctrico se aproxima a cero como $r^{|l|}$ cerca de la singularidad del vórtice, y como $1/r$ a distancias suficientemente grandes, llevando entonces energía infinita, como la onda-X sin OAM y todas las ondas no difractantes. En las Figs. 4.2(a-d) se puede comparar el campo eléctrico real de las ondas-X sin y con OAM. No hay luz en tiempos inmediatamente fuera de los brazos X, de modo que la duración en cada distancia radial es el tiempo entre los brazos X, $2\Delta t = 2(\sin\theta/c)r$.

La diferencia más evidente y relevante es que con $l = 0$ el campo eléctrico es un pulso unipolar que al alejarse del centro se divide en dos pulsos unipolares, mientras que con $l \neq 0$ la forma del pulso temporal en cualquier distancia radial tiene aproximadamente $|l|$ ceros, o más exactamente, el menor número par mayor o igual a $|l|$, por ejemplo, con $|l| = 1, 2$ tiene 2 ceros; con $|l| = 3, 4$ hay 4 ceros, y así sucesivamente, como puede verse por inspección de la gráficas. El número de oscilaciones puede diferir ligeramente según el criterio particular que se escoja. Según el análisis de la frecuencia instantánea que se realiza a continuación, el número de oscilaciones dentro de los brazos de la onda X es $|l|/2$ independientemente de si l es par o impar. Estas oscilaciones se ven más claramente en las Figs. 4.3(a-c) para $|l| = 8$ a diferentes distancias radiales. Por lo tanto, el aumento del número de oscilaciones con la magnitud de la carga topológica no sólo pertenece a la vecindad del vórtice, como se describió en [48], sino a toda la onda-X. Se trata de oscilaciones intrínsecas asociadas al OAM, y resultan del hecho de que la transformada inversa de Fourier $\int_0^\infty J_l[(\sin\theta/c)\omega r]e^{-i\omega t}d\omega$ tiene estos ceros y oscilaciones. La exponencial $e^{-\epsilon\omega}$ no las elimina, sino que sólo hace que las que se encuentran en las partes final y inicial del pulso tengan una amplitud cada vez menor hacia el centro del vórtice, como se observa en las formas temporales Figs. 4.3 de (a) a (c). Esta suavización es el resultado de la creciente apodización de la función de Bessel por el espectro exponencial hacia el centro del vórtice, como se observa en las respectivas densidades espectrales en las Figs. 4.3 de (d) a (f).

Con un número fijo de oscilaciones a toda distancia radial dentro de un intervalo de tiempo linealmente creciente $2\Delta t = 2(\sin\theta/c)r$ entre los brazos X, su frecuencia debe disminuir aproximadamente de forma inversamente proporcional a r . Además, con un número de oscilaciones proporcional a $|l|$, su frecuencia en cualquier radio particular r debe aumentar proporcionalmente a $|l|$.

Para un análisis más cuantitativo, consideramos la frecuencia instantánea, definida como $\omega_i = -d\arg E/dt'$, la cual puede evaluarse como

$$\omega_i(r, t') = -\text{Re} \left\{ \frac{\int_0^\infty e^{-\omega(\epsilon+it')} J_l[k_\perp(\omega)r] \omega d\omega}{\int_0^\infty e^{-\omega(\epsilon+it')} J_l[k_\perp(\omega)r] d\omega} \right\}, \quad (4.6)$$

que se puede obtener

$$\omega_i(r, t') = \text{Re} \left\{ \frac{|l| \sqrt{(\epsilon + it')^2 + \left(\frac{\sin\theta}{c}r\right)^2} + (\epsilon + it')}{(\epsilon + it')^2 + \left(\frac{\sin\theta}{c}r\right)^2} \right\}. \quad (4.7)$$

Una simple inspección muestra que $\omega_i(r, t')$ toma un valor mínimo

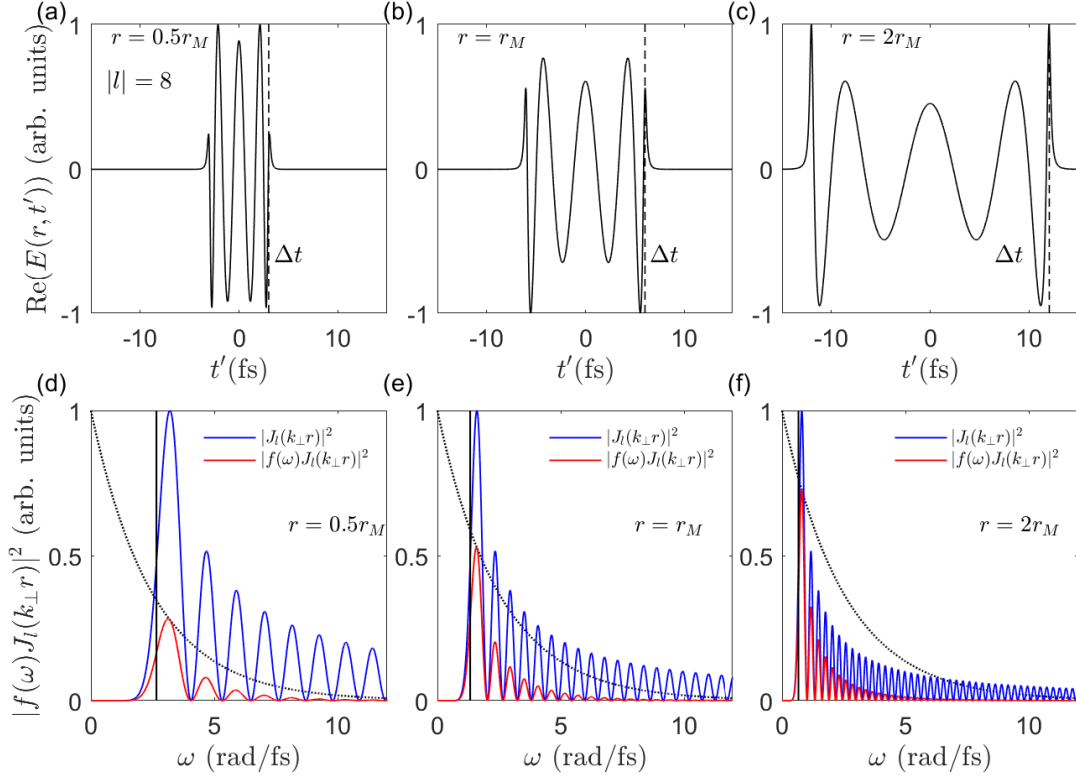


Figura 4.3: (a-c) Parte real del campo eléctrico de ondas-X con $v_g = 0,0004$ mm/fs, $\epsilon = 0,2$ fs y $|l| = 8$ para (a) $r = 0,5r_M$, (b) $r = r_M$ y (c) $r = 2r_M$, donde r_M es la distancia radial del máximo de fluencia. $\Delta t = (\sin\theta/c)r$ indica la localización de los brazos X, donde la onda-X termina. Todos los campos están normalizados a sus valores máximos. (d-f) Respective espectros de potencia (curvas azules continuas), el factor de Bessel $J_l(k_\perp r)$ (curvas rojas continuas) y el factor de espectro de banda ancha $f(\omega) = e^{-\epsilon\omega}$ (curvas punteadas). Las líneas verticales indican la frecuencia central en torno a $t' = 0$, $\omega_c(r)$, que coincide con la primera subida de las funciones de Bessel en cada caso.

$$\omega_c \equiv \omega_i(r, t' = 0) = \frac{|l|\sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{\sin\theta}{c}r\right)^2} + \epsilon}{\epsilon^2 + \left(\frac{\sin\theta}{c}r\right)^2}, \quad (4.8)$$

para $t' = 0$, o frecuencia central instantánea, que permanece casi constante en el tiempo, excepto en las proximidades de los brazos X, y se representa como una función de r para varios valores de $|l|$ en la Fig. 4.4(a). Como frecuencia mínima en cada distancia radial, coincide con la primera subida de la función de Bessel en el espectro, indicada por las líneas verticales en las Figs. 4.3(d-f). De hecho, puede obtenerse una buena aproximación a la Ec. (4.8) igualando el argumento $x = k_\perp r = (\sin\theta/c)\omega r$ de la función de Bessel $J_l(x)$ con el de la primera subida de la función de Bessel, $x \simeq |l|$, lo que da como resultado

$$\omega_c(r) \simeq \frac{|l|}{(\sin\theta/c)r}. \quad (4.9)$$

En la Fig. 4.4(a) se observa que esta igualdad aproximada se ajusta con exactitud a la Ec. (4.8), excepto en una diminuta región radial [véase la Fig. 4.4(a)] alrededor del vórtice (en comparación con el radio de máxima energía de la onda-X, r_M). Así, excepto en esa región, la frecuencia $\omega_c(r)$ es independiente del espectro de banda ancha particular definido por ϵ , y es inversamente proporcional a r , como se esperaba. Para $r \rightarrow 0$, la fórmula exacta de la Ec. (4.8) arroja el valor finito

$$\omega_c(0) = \frac{|l| + 1}{\epsilon}, \quad (4.10)$$

que es similar al resultado de las Refs. [48, 72]. A partir de esta última relación y la Ec. (4.9), también concluimos que el corrimiento al azul proporcional a la magnitud de la carga topológica no solo tiene lugar en la vecindad del vórtice, sino que afecta a toda la onda-X.

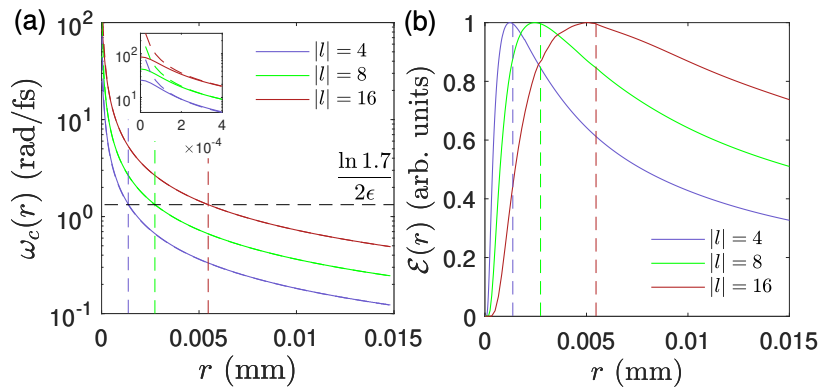


Figura 4.4: (a) Frecuencia central instantánea de las oscilaciones, $\omega_c(r)$, en función del radio r para los valores indicados de $|l|$ de las ondas-X con $v_g = 0,0004$ mm/fs y $\epsilon = 0,2$ fs, según la expresión exacta de la Ec. (4.8) (curvas sólidas) y la expresión aproximada en la Ec. (4.9) (curvas discontinuas). Son casi indistinguibles excepto en la vecindad inmediata de la singularidad del vórtice. Esta región se amplía en el recuadro. (b) Perfiles radiales de fluencia de las mismas ondas-X, evaluadas numéricamente a partir de la Ec. (4.13), y normalizadas a sus valores máximos. En (a) y (b) las líneas verticales son r_M dadas por la Ec. (4.14), localizando aproximadamente los radios de máxima fluencia. La línea horizontal en (a) ayuda a visualizar que la frecuencia instantánea central $\omega_f = \ln(1,7)/2\epsilon$ es la misma en los respectivos radios de máxima fluencia, es decir, independiente de l .

La Ec. (4.7) para la frecuencia instantánea en cualquier tiempo nos permite evaluar el número de oscilaciones dentro de los brazos X. De la misma manera que $\omega_c(r)$, $\omega_i(r, t')$ en la Ec. (4.7) resulta ser casi independiente de ϵ , excepto en las proximidades de los brazos X, y viene dada aproximadamente por

$$\omega_i(t, r') \simeq \frac{|l|}{\sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{c}r\right)^2 - t'^2}} \quad (4.11)$$

siempre que $|t'| < \Delta t = (\sin\theta/c)r$, es decir, dentro de los brazos X. Al promediar entre en este intervalo de tiempo (integrando y dividiendo por $2\Delta t$) se obtiene una frecuencia instantánea media en cada radio como

$$\bar{\omega}_i(r) = \frac{\pi}{2} \frac{|l|}{(\sin\theta/c)r}. \quad (4.12)$$

Con este resultado, se puede evaluar el número de oscilaciones como la duración total $2\Delta t$ entre el periodo medio $2\pi/\bar{\omega}_i(r)$, lo que da lugar a un número de oscilaciones igual a $|l|/2$.

El corrimiento al azul global de las ondas-X con $|l|$ podría hacer pensar que toda la onda-X se vuelve más y más azul con el aumento de la magnitud de la carga topológica. Sin embargo, esto sólo ocurre en las inmediaciones del vórtice, como se ve en la Ec. (4.10). Según la Ec. (4.9), cualquier frecuencia dada sufre un corrimiento en la dirección radial a medida que se aleja del vórtice incrementada por $|l|$. Como se muestra a continuación, el radio de máxima fluencia, o anillo brillante, para un detector sin resolución temporal, también se desplaza hacia la periferia con el aumento de $|l|$ de tal manera que la frecuencia del anillo brillante es independiente de l , y en este sentido se puede decir que las ondas-X son del mismo color independientemente de su OAM.

La fluencia está dada por $\varepsilon(r) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{Re}E)^2 dt' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 dt'$, o, en términos de la densidad espectral, por

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\epsilon\omega} |J_l(k_{\perp}(\omega)r)|^2 d\omega, \quad (4.13)$$

que se representa en la Fig. 4.4(b) para varios valores de $|l|$ a modo de ilustración. Aunque la integral anterior no admite una integración analítica, la inspección numérica detallada muestra que el área del producto $e^{-2\epsilon\omega}$ y $|J_l(k_{\perp}r)|^2$ es máxima, y entonces la fluencia, en el radio r_M donde la frecuencia del primer aumento de $|J_l(k_{\perp}r)|^2$, es decir, $\omega_c(r_M)$, coincide con la frecuencia ω_f en la que la densidad espectral de banda ancha $e^{-2\epsilon\omega}$ ha decaído en aproximadamente $1/1,7 = 0,588$ respecto a su valor en $\omega = 0$, es decir, $\omega_f \simeq \ln(1,7)/2\epsilon$. Con esta posición relativa, la función de Bessel no está demasiado amortiguada ni es demasiado oscilante, como se ejemplifica en las Figs. 4.3 de (d) a (f). La frecuencia en el anillo brillante, $\omega(r_M) \simeq \omega_f$, es entonces independiente de l , como se ilustra en la Fig. 4.4(a). El hecho de que la frecuencia en el anillo brillante esté determinada únicamente por $f(\omega)$ también fue descrito en [34] para ondas-X con espectros con forma de campana, y para pulsos Laguerre-Gauss ultracortos en [34, 35, 76]. A partir de la Ec. (4.9) igualado a ω_f , obtenemos el radio del anillo brillante como

$$r_M \simeq \frac{|l|}{\omega_f(\sin\theta/c)}, \quad (4.14)$$

que es proporcional a $|l|$, y proporciona una buena aproximación al radio exacto, como se ve en la Fig. 4.4(b).

También en la Ref. [34], el límite inferior de la duración en el anillo brillante de las ondas-X que llevan l unidades de OAM se establece como $\Delta t \gtrsim |l|/\omega_f$ (media duración). Las ondas-X tratadas aquí tienen justo la duración mínima $\Delta t = (\sin\theta/c)r_M = |l|/\omega_f$, y son por tanto **las ondas-X de duración mínima capaces de transportar l unidades de OAM.**

4.1.2 Ondas-GX con momento angular orbital

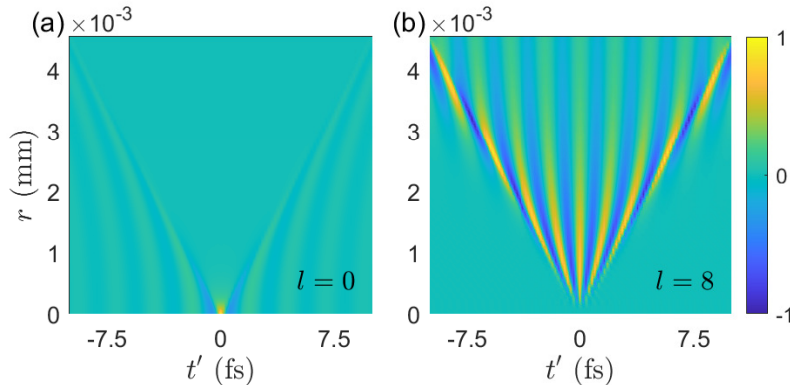


Figura 4.5: Parte real del campo eléctrico de las ondas-GX con $\omega_z = 2,5 \text{ fs}^{-1}$ y $v_g = 0,0004 \text{ mm/fs}$ para a) $l = 0$ (sin OAM) y b) $l = 8$.

La integral de la Ec. (4.2) con el espectro del haz de Bessel que decae exponencialmente y $k_{\perp}(\omega)$ para la Ec. (4.3) con $\omega_z \neq 0$ ($a \neq 0$) no puede realizarse analíticamente, pero la estructura espacio-temporal de estas ondas-GX puede entenderse fácilmente a partir de la de la onda-X con $a = 0$ de la misma velocidad de grupo y vorticidad. Sin OAM, las ondas-GX y las ondas-X difieren sustancialmente [como se ve al comparar la Fig. 4.2(a) con la Fig. 4.5(a)] porque el espectro $f(\omega)J_l(k_{\perp}r)$ de las ondas-GX con $l = 0$ tiene un alto pico en la frecuencia de corte positiva ω_z (donde $k_{\perp}r = 0$) responsable de las infinitas oscilaciones temporales observadas a cualquier distancia radial. Para las ondas-GX con OAM, sin embargo, el espectro $f(\omega)J_l(k_{\perp}r)$ desaparece en ω_z , lo que elimina estas oscilaciones y hace que la onda-GX con OAM se parezca mucho más a la onda-X con OAM [como se observa al comparar la Fig. 4.2(c) con la Fig. 4.5(b)].

En las proximidades del vórtice el número de oscilaciones es efectivamente el mismo que el de la onda-X de la misma vorticidad [Fig. 4.6(a)]. Esta característica puede entenderse a partir del hecho de que la pendiente de $k_{\perp}(\omega)$ a altas frecuencias es la misma que la de la onda-X [Fig. 4.1(b)], y que estas altas frecuencias se encuentran en las proximidades del vórtice. La frecuencia de corte ω_z juega un papel insignificante en el espectro a estas distancias [Fig. 4.6(d)]. Avanzando hacia la periferia el número de oscilaciones se hace gradualmente mayor que el de la onda-X, creciendo sin límite y acercándose a la frecuencia constante ω_z [Fig. 4.6(b)] porque el espectro se aproxima a ω_z [Fig. 4.6(e)] con el aumento del radio. A radios suficientemente grandes [Fig. 4.6(c)] las oscilaciones van más allá de los brazos X, como para la onda-GX sin OAM, porque el espectro pasa a estar dominado a estas grandes distancias por la frecuencia de corte [Fig. 4.6(f)].

Una expresión aproximada para la distribución radial de frecuencias en el centro temporal de

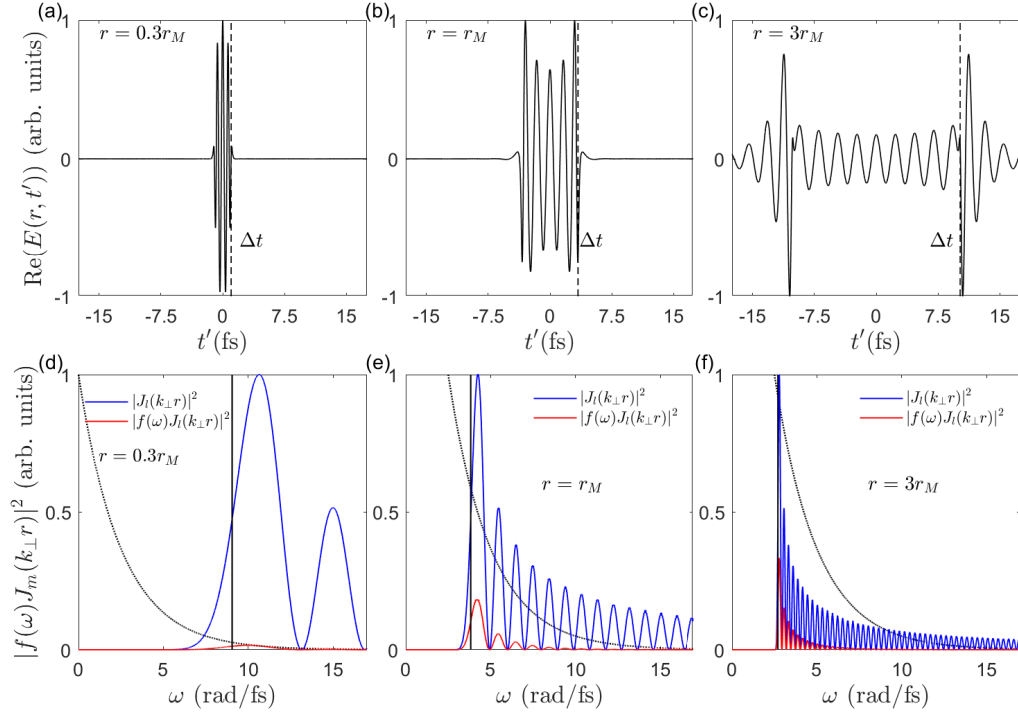


Figura 4.6: (a-c) Parte real del campo eléctrico de ondas-GX con $v_g = 0,0004$ mm/fs, $\omega_z = 2,5$ rad/fs, $\epsilon = 0,2$ fs y $|l| = 8$ en $r = 0,3r_M$, $r = r_M$ y $r = 3r_M$, donde el radio de máxima fluencia viene dado por Ec. (4.17). $\Delta t = (\sin\theta/c)r$ indica la ubicación de los brazos X. (d-f) Espectros de potencia respectivos (curvas azules continuas), el factor de Bessel $J_l(k_\perp r)$ (curvas rojas continuas) y el factor de espectro de banda ancha $f(\omega) = e^{-\epsilon\omega}$ (curvas punteadas). Las líneas verticales indican la frecuencia central $\omega_c(r)$ dada por Ec. (4.15), y que coincide con la subida de las funciones de Bessel en cada caso.

la onda-GX, $t' = 0$, puede obtenerse como para las ondas-X. Igualando el argumento de $J_l(x)$, con $x = k_\perp(\omega)r$ y $k_\perp(\omega)$ dado por la Ec. (4.3), a la ubicación de la primera subida de $J_l(x)$, $x \simeq |l|$, obtenemos una ecuación cuadrática en ω cuya solución positiva es

$$\omega_c(r) \simeq \omega_z + \frac{c^2}{\sin^2\theta} \left(-\frac{a}{c} + \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2} \frac{l^2}{r^2}} \right), \quad (4.15)$$

que es independiente de ϵ , como para las ondas-X, y se aproxima a ω_z en radios grandes, como era de esperar [Fig. 4.7]. La Ec. (4.15) sólo falla en las proximidades del vórtice, donde la frecuencia pasa a depender de ϵ y alcanza aproximadamente el mismo valor $\omega_c(0) \simeq (|l| + 1)/\epsilon$ que para las ondas-X.

En la Fig. 4.7 se representa la frecuencia central instantánea ($\omega_c(r)$) según la Ec. (4.15) y el perfil de la fluencia para una onda-GX con $v_g = 0,0004$ mm/fs, $\epsilon = 0,2$ fs y $\omega_z = 2,5$ rad/fs para tres valores diferentes de l .

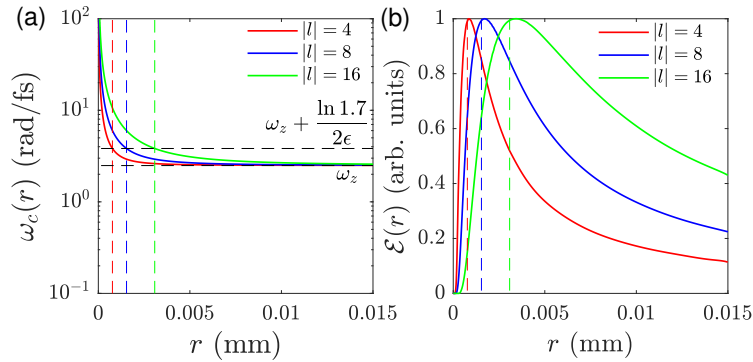


Figura 4.7: (a) $\omega_c(r)$ para los valores indicados de $|l|$ de las ondas-GX. En la vecindad inmediata de la singularidad del vórtice $\omega_c(r)$ no se aproxima al infinito sino a $\omega_c(0) \simeq (m + 1)/\epsilon$. (b) Perfiles radiales de fluencia de las mismas ondas-GX, evaluadas numéricamente a partir de la Ec. (4.13), y normalizadas a sus valores máximos. En (a) y (b) las líneas verticales son r_M dadas por la Ec. (4.14), localizándose aproximadamente en los radios de máxima fluencia. Las líneas horizontales en (a) ayudan a visualizar que la frecuencia instantánea central $\omega'_f = \omega_z + \ln(1,7)/2\epsilon$ es la misma en los respectivos radios de máxima fluencia, es decir, independiente de l , y que la frecuencia se aproxima a ω_z en radios grandes.

También se observa en la Fig. 4.7(a) que la frecuencia central $\omega_c(r_M)$ en el anillo de máxima fluencia es sustancialmente independiente de $|l|$ y está determinada únicamente por la frecuencia donde $|f(\omega)|^2 = e^{-2\epsilon\omega}$ ha decaído aproximadamente el mismo valor $1/1,7 = 0,588$ que para las ondas-X desde su valor en la frecuencia de corte ω_z , es decir,

$$\omega'_f = \omega_z + \ln(1,7)/2\epsilon. \quad (4.16)$$

Igualando ω'_f a $\omega_c(r)$ en la Ec. (4.15) obtenemos el radio de máxima fluencia como

$$r_M \simeq \frac{|l|}{\sqrt{\omega_f'^2 \frac{\sin^2 \theta}{c^2} + 2\omega_f' \frac{a}{c}}}. \quad (4.17)$$

La expresión (4.17) proporciona una aproximación al radio de máxima fluencia el cual está representado en la Fig. 4.7 como líneas horizontales para cada valor de l . En la Fig. 4.7(b) se muestra que esta aproximación al radio es razonablemente buena al representar el perfil radial de la fluencia normalizada de las onda-GX y ver que su máximo coincide con el calculado por la Ec. (4.17). Este radio sigue siendo proporcional a $|l|$, pero es menor que para las ondas-X.

4.2 Ancho de banda más representativo experimentalmente

Hemos empleado un espectro de frecuencias excepcionalmente amplio, lo cual hace muy difícil que sea reproducible en un experimento real. Tal como se vio en la Ec. (4.12), existe una relación entre el radio y la frecuencia, de modo que las frecuencias más altas se concentran en radios pequeños y las más bajas en radios mayores. Dado que en la práctica nos interesa trabajar cerca del radio de máxima fluencia r_M (donde típicamente se concentra la mayor parte de la energía y, por tanto, la señal experimental más relevante), el objetivo es que el modelo sea fiable en dicha región.

En la Fig. 4.8 se ha recreado una onda-GX con un espectro de banda súper ancho con $\omega_z = 2,5$ rad/fs, el cual ha sido truncado de modo que su componente espectral máxima sea $\omega = 9,7$ rad/fs. En la Fig. 4.8 se ha representado la fluencia y la forma temporal del pulso para esta onda-GX truncada con $l = 8$ y radio $r_M = 2,735 \times 10^{-3}$ cm (curva azul sólida) y se ha comparado con la misma onda-GX cuyo espectro está sin truncar (curva roja punteada). Se puede observar cómo la fluencia y la forma temporal del pulso en r_M reproducen adecuadamente lo predicho por el modelo teórico de onda-X, confirmando que el espectro puede abarcar tanto las frecuencias bajas como las altas necesarias para describir ese rango radial.

Al representar la forma temporal del campo eléctrico en la Fig. 4.8(b) de esta onda-GX truncada (en azul sólido) y la de la onda-GX con espectro completo (en rojo punteada) se puede ver cómo comienza a diferir fuera de los brazos X. Esto se debe a que, al excluir los radios más pequeños, se están también suprimiendo (o limitando) algunas de las componentes espectrales más altas y dichas frecuencias son las que generan ciertas oscilaciones en el pulso fuera de los brazos X, de modo que su eliminación hace que la forma resultante se desvíe del ideal de onda-X.

Este ejemplo pone de manifiesto la necesidad de ajustar cuidadosamente el rango radial en los experimentos para abarcar las frecuencias más relevantes cerca de r_M . Si el rango escogido es demasiado pequeño, se corre el riesgo de suprimir contribuciones espectrales clave que son fundamentales para reproducir fielmente la forma temporal del pulso. No obstante, se confirma que, siempre que se mantenga un intervalo radial adecuado en torno a r_M , la fluencia se conserva prácticamente igual y el modelo teórico de onda-X describe de forma fiable la

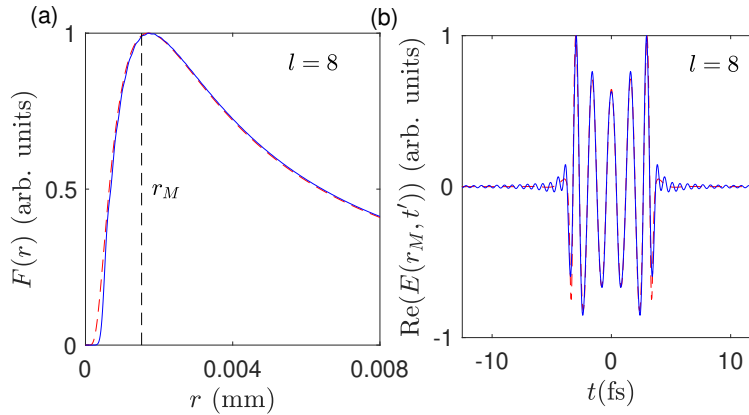


Figura 4.8: (a) Perfil radial de la densidad de energía (fluencia) para $|l| = 8$ en una onda-GX con velocidad de grupo superlumínica $v_g = 0,0004$ mm/fs y $\omega_z = 2,5$ rad/fs. Se ven dos perfiles radiales: uno con un espectro de banda súper ancha con línea roja discontinua y otro para un espectro truncado con frecuencia de corte en $\omega_h = 9,7$ rad/fs con línea azul sólida. (b) Forma temporal del campo eléctrico en el radio de máxima fluencia, r_M , para el espectro truncado (línea azul sólida) y para un espectro sin truncar (línea roja punteada) que muestra como el espectro truncado afecta principalmente a los lóbulos laterales.

estructura espaciotemporal donde resulta más interesante para la aplicación experimental.

A modo de conclusión parcial, en este capítulo se ha descrito la estructura espacio-temporal fuertemente acoplada de las ondas localizadas superlumínicas de banda súper ancha con OAM. Se muestran oscilaciones temporales en todas las frecuencias del espectro de banda ancha a diferentes radios entre los brazos X, con un número fijo de oscilaciones dictado por el OAM. Un pronunciado corrimiento hacia el rojo con la distancia radial, junto con un pronunciado corrimiento hacia el azul de toda la onda-X o GX con la magnitud de la carga topológica, da como resultado un color invariable en el anillo de máxima densidad de energía, cuya frecuencia sólo está determinada por el espectro de los haces de Bessel (que estaría directamente relacionado con el espectro de la fuente láser).

Capítulo 5

Conclusiones

- **Límite fundamental a la duración de un pulso con OAM.** Esta Tesis ha examinado los límites que los acoplamientos espacio-temporales imponen a la estructura espaciotemporal de haces ultrarrápidos con OAM. Debido a un acoplamiento azimutal-temporal, se ha encontrado la existencia de un límite a la duración de los pulsos ultracortos con momento angular orbital de tipo Laguerre-Gauss que es proporcional a la raíz cuadrada de la carga topológica que portan. Fuera del modelo isodifractante, este límite está modulado axialmente a lo largo de su propagación. La forma que tiene esta modulación está determinada por el factor g_0 de Porras de la fuente pulsada que genere el vórtice ultrarrápido. Debido a esto, se hace hincapié en la necesidad de medir este factor g_0 para un correcto diseño experimental con haces pulsados ultracortos con momento angular orbital.
- **Distorsiones del pulso en la propagación.** Debido a la existencia de este límite fundamental y a que a que las diferentes componentes monocromáticas acumulan fases muy distintas durante la propagación (diferentes fases de Gouy y curvaturas de los frentes de onda), los pulsos ultracortos de Laguerre-Gauss experimentan un ensanchamiento y una distorsión en su forma temporal, al contrario de lo que ocurre con pulsos ultracortos en el modo fundamental Gaussiano. Estos ensanchamientos y distorsiones ocurren fundamentalmente en la zona focal. La distorsiones debidas a los desfases se pueden pre-compensar, en principio, pero no aquellas que se deben a la existencia del límite fundamental.
- **Ondas no-difractantes mínimas con OAM.** Se han encontrado las ondas más cortas existentes que pueden portar OAM a la vez que no se difractan, ondas-X superlumínicas con gran ancho de banda. Aunque su espectro de frecuencias temporales es compatible con duraciones menores que un ciclo, el OAM impone un número de ciclos mínimo, y por tanto una duración mínima proporcional a la carga topológica. Se ha estudiado con detalle su estructura espacio-temporal. Todas las frecuencias en el gran ancho de banda están distribuidas radialmente, experimentando un corrimiento hacia el rojo hacia la periferia de la onda-X y, al mismo tiempo, un corrimiento global al azul proporcional a la carga topológica. El anillo más brillante también tiene un radio proporcional a la carga topológica, de modo que su frecuencia media resulta ser independiente de la carga

topológica. La onda-GX muestra un comportamiento espacio temporal parecido a la onda-X con la misma velocidad de grupo, pero ya no son mínimas respecto del momento angular.

- **Perspectivas futuras.** Estos resultados podrían ampliarse a otros tipos de ondas. Para los pulsos ultracortos de tipo Laguerre-Gauss, a aquellos que tienen índice radial distinto de cero. Para los no-difractantes, a otros tipos descritos en la literatura que tienen velocidades sublumínicas. La perspectiva futura más importante es la comprobación experimental de la existencia de estos límites fundamentales por medio de la observación de sus efectos, ya que las tecnologías actuales no han producido todavía pulsos suficientemente cortos y con suficientemente alto OAM para estos efectos se manifiesten.

Producción científica derivada de la tesis

[A] y [B] son las publicaciones en revistas JCR de Q1. [C], [D], [E] y [F] son congresos a los que he asistido durante la Tesis.

- [A] Miguel A. Porras y Raúl García-Álvarez. “General laws of the propagation of few-cycle optical pulses with orbital angular momentum in free space”. En: *Physical Review A* 102 (sep. de 2020). DOI: [10.1103/PhysRevA.102.033522](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.033522).
- [B] Miguel A. Porras y Raúl García-Álvarez. “Broadband X waves with orbital angular momentum”. En: *Physical Review A* 105 (1 ene. de 2022), pág. 013509. DOI: [10.1103/PhysRevA.105.013509](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.105.013509).
- [C] R. García-Álvarez y M.A. Porras. “Spatiotemporal structure of ultrafast pulses with orbital angular momentum”. En: *Optics InfoBase Conference Papers*. 2020. DOI: [10.1364/FIO.2020.JW6B.10](https://doi.org/10.1364/FIO.2020.JW6B.10).
- [D] Raúl García-Álvarez y Miguel A. Porras. “Ultrabroadband X-waves: The shortest carriers of orbital angular momentum”. En: *Reunión Nacional de Óptica 2021*. 2021.
- [E] Raúl García-Álvarez y Miguel A. Porras. “The shortest focused X-Waves with Orbital Angular Momentum”. En: *XXXVIII Reunión Bienal de la RSEF*. 2022.
- [F] M.A. Porras y R. García-Álvarez. “Minimal X-Waves Carrying Orbital Angular Momentum”. En: *2022 Conference on Lasers and Electro-Optics, CLEO 2022 - Proceedings*. 2022.

Referencias

- [1] G. Vampa et al. “Linking high harmonics from gases and solids”. En: *Nature* 522.7557 (jun. de 2015), págs. 462-464. DOI: [10.1038/nature14517](https://doi.org/10.1038/nature14517).
- [2] M. Campbell et al. “Fabrication of photonic crystals for the visible spectrum by holographic lithography”. En: *Nature* 404.6773 (mar. de 2000), págs. 53-56. DOI: [10.1038/35003523](https://doi.org/10.1038/35003523).
- [3] P. M. Paul et al. “Observation of a Train of Attosecond Pulses from High Harmonic Generation”. En: *Science* 292.5522 (jun. de 2001), págs. 1689-1692. DOI: [10.1126/science.1059413](https://doi.org/10.1126/science.1059413).
- [4] Rafael R. Gattass y Eric Mazur. “Femtosecond laser micromachining in transparent materials”. En: *Nature Photonics* 2.4 (abr. de 2008), págs. 219-225. DOI: [10.1038/nphoton.2008.47](https://doi.org/10.1038/nphoton.2008.47).
- [5] Mangirdas Malinauskas et al. “Ultrafast laser processing of materials: from science to industry”. En: *Light: Science & Applications* 5.8 (mar. de 2016), e16133-e16133. DOI: [10.1038/lsa.2016.133](https://doi.org/10.1038/lsa.2016.133).
- [6] Henry N. Chapman et al. “Femtosecond X-ray protein nanocrystallography”. En: *Nature* 470.7332 (feb. de 2011), págs. 73-77. DOI: [10.1038/nature09750](https://doi.org/10.1038/nature09750).
- [7] S. P. D. Mangles et al. “Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions”. En: *Nature* 431.7008 (sep. de 2004), págs. 535-538. DOI: [10.1038/nature02939](https://doi.org/10.1038/nature02939).
- [8] Hung-Yuan Lin et al. “Clinical safety and efficacy of elliptical thin-flap LASIK using a low-pulse energy femtosecond laser”. En: *Scientific Reports* 14.1 (oct. de 2024), pág. 24563. DOI: [10.1038/s41598-024-76215-1](https://doi.org/10.1038/s41598-024-76215-1).
- [9] T. H. Maiman. “Stimulated Optical Radiation in Ruby”. En: *Nature* 187.4736 (ago. de 1960), págs. 493-494. DOI: [10.1038/187493a0](https://doi.org/10.1038/187493a0).
- [10] A. J. Beaulieu. “Transversely excited atmospheric pressure CO₂ lasers”. En: *Applied Physics Letters* 16.12 (jun. de 1970), págs. 504-505. DOI: [10.1063/1.1653083](https://doi.org/10.1063/1.1653083).
- [11] L. Allen, D. Jones y M. Sayers. “The onset of oscillation in a He-Ne laser”. En: *IEEE Journal of Quantum Electronics* 2.10 (oct. de 1966), págs. 690-692. DOI: [10.1109/JQE.1966.1073750](https://doi.org/10.1109/JQE.1966.1073750).
- [12] F. J. McClung y R. W. Hellwarth. “Giant Optical Pulsations from Ruby”. En: *Journal of Applied Physics* 33.3 (mar. de 1962), págs. 828-829. DOI: [10.1063/1.1777174](https://doi.org/10.1063/1.1777174).
- [13] L. E. Hargrove, R. L. Fork y M. A. Pollack. “LOCKING OF He-Ne LASER MODES INDUCED BY SYNCHRONOUS INTRACAVITY MODULATION”. En: *Applied Physics Letters* 5.1 (jul. de 1964), págs. 4-5. DOI: [10.1063/1.1754025](https://doi.org/10.1063/1.1754025).

- [14] L. Allen et al. “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes”. En: *Physical Review A* 45.11 (jun. de 1992), págs. 8185-8189. DOI: [10.1103/PhysRevA.45.8185](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185).
- [15] Alison M. Yao y Miles J. Padgett. “Orbital angular momentum: origins, behavior and applications”. En: *Advances in Optics and Photonics* 3 (jun. de 2011), pág. 161. DOI: [10.1364/aop.3.000161](https://doi.org/10.1364/aop.3.000161).
- [16] David G. Grier. “A revolution in optical manipulation”. En: *Nature* 2003 424:6950 424.6950 (2003), págs. 810-816. DOI: [10.1038/nature01935](https://doi.org/10.1038/nature01935).
- [17] Jian Wang et al. “Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing”. En: *Nature Photonics* 2012 6:7 6.7 (jun. de 2012), págs. 488-496. DOI: [10.1038/nphoton.2012.138](https://doi.org/10.1038/nphoton.2012.138).
- [18] Alexander Jesacher et al. “Shadow effects in spiral phase contrast microscopy”. En: *Physical Review Letters* 94.23 (jun. de 2005). DOI: [10.1103/PHYSREVLETT.94.233902/FIGURES/3/THUMBNAIL](https://doi.org/10.1103/PHYSREVLETT.94.233902/FIGURES/3/THUMBNAIL).
- [19] Gabriel Molina-Terriza, Juan P. Torres y Lluís Torner. “Twisted photons”. En: *Nature Physics* 2007 3:5 3.5 (2007), págs. 305-310. DOI: [10.1038/nphys607](https://doi.org/10.1038/nphys607).
- [20] Carlos Hernández-García et al. “Attosecond extreme ultraviolet vortices from high-order harmonic generation”. En: *Physical Review Letters* 111.8 (ago. de 2013). DOI: [10.1103/PHYSREVLETT.111.083602/FIGURES/4/THUMBNAIL](https://doi.org/10.1103/PHYSREVLETT.111.083602/FIGURES/4/THUMBNAIL).
- [21] N. Apurv Chaitanya, M. V. Jabir y G. K. Samanta. “Efficient nonlinear generation of high power, higher order, ultrafast "perfect" vortices in green”. En: *Optics Letters* 41 (abr. de 2016), pág. 1348. DOI: [10.1364/ol.41.001348](https://doi.org/10.1364/ol.41.001348).
- [22] Genevieve Gariepy et al. “Creating high-harmonic beams with controlled orbital angular momentum”. En: *Physical Review Letters* 113 (oct. de 2014). DOI: [10.1103/PhysRevLett.113.153901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.153901).
- [23] R. Géneaux et al. “Synthesis and characterization of attosecond light vortices in the extreme ultraviolet”. En: *Nature Communications* 7 (ago. de 2016). DOI: [10.1038/ncomms12583](https://doi.org/10.1038/ncomms12583).
- [24] D. Gauthier et al. “Tunable orbital angular momentum in high-harmonic generation”. En: *Nature Communications* 8 (abr. de 2017). DOI: [10.1038/ncomms14971](https://doi.org/10.1038/ncomms14971).
- [25] Fanqi Kong et al. “Controlling the orbital angular momentum of high harmonic vortices”. En: *Nature Communications* 8 (abr. de 2017). DOI: [10.1038/ncomms14970](https://doi.org/10.1038/ncomms14970).
- [26] Carlos Hernández-García. “High harmonic generation: A twist in coherent X-rays”. En: *Nature Physics* 13 (abr. de 2017), págs. 327-329. DOI: [10.1038/nphys4088](https://doi.org/10.1038/nphys4088).
- [27] Kevin M. Dorney et al. “Controlling the polarization and vortex charge of attosecond high-harmonic beams via simultaneous spin-orbit momentum conservation”. En: *Nature Photonics* 13 (feb. de 2019), págs. 123-130. DOI: [10.1038/s41566-018-0304-3](https://doi.org/10.1038/s41566-018-0304-3).
- [28] Alex Turpin et al. “Extreme Ultraviolet Fractional Orbital Angular Momentum Beams from High Harmonic Generation”. En: *Scientific Reports* 7 (mar. de 2017). DOI: [10.1038/srep43888](https://doi.org/10.1038/srep43888).
- [29] Laura Rego et al. “Generation of extreme-ultraviolet beams with time-varying orbital angular momentum”. En: *Science* 364 (2019). DOI: [10.1126/science.aaw9486](https://doi.org/10.1126/science.aaw9486).
- [30] Wuhong Zhang Wuhong Zhang y Lixiang Chen Lixiang Chen. “High-harmonic-generation-inspired preparation of optical vortex arrays with arbitrary-order topological charges”. En: *Chinese Optics Letters* 16 (2018), pág. 030501. DOI: [10.3788/col201816.030501](https://doi.org/10.3788/col201816.030501).

- [31] Simin Feng y Herbert G. Winful. “Higher-order transverse modes of ultrashort iso-diffracting pulses”. En: *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* 63 (2001). DOI: [10.1103/PhysRevE.63.046602](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.046602).
- [32] G. Pariente y F. Quéré. “Spatio-temporal light springs: extended encoding of orbital angular momentum in ultrashort pulses”. En: *Optics Letters* 40 (mayo de 2015), pág. 2037. DOI: [10.1364/ol.40.002037](https://doi.org/10.1364/ol.40.002037).
- [33] Jianye Nie et al. “Propagation characteristics of ultra-short Gaussian vortex beams”. En: *Optik* 141 (jul. de 2017), págs. 99-104. DOI: [10.1016/j.ijleo.2017.05.052](https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2017.05.052).
- [34] Miguel A. Porras. “Upper Bound to the Orbital Angular Momentum Carried by an Ultrashort Pulse”. En: *Physical Review Letters* 112.123904 (29 de mar. de 2019). DOI: [10.1103/PhysRevLett.122.123904](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.123904).
- [35] Miguel A. Porras. “Effects of orbital angular momentum on few-cycle and sub-cycle pulse shapes: coupling between the temporal and angular momentum degrees of freedom”. En: *Optics Letters, Vol. 44, Issue 10, pp. 2538-2541* 44.10 (mayo de 2019), págs. 2538-2541. DOI: [10.1364/OL.44.002538](https://doi.org/10.1364/OL.44.002538).
- [36] Miguel A. Porras. “Attosecond helical pulses”. En: *Physical Review A* 100.3 (sep. de 2019). DOI: [10.1103/PHYSREVA.100.033826](https://doi.org/10.1103/PHYSREVA.100.033826)/FIGURES/5/THUMBNAIL.
- [37] Miguel A. Porras, Claudio Conti y Claudio Conti. “Couplings between the temporal and orbital angular momentum degrees of freedom in ultrafast optical vortices”. En: *Physical Review A* 101 (jun. de 2020). DOI: [10.1103/PhysRevA.101.063803](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.063803).
- [38] Dominik Hoff et al. “Tracing the phase of focused broadband laser pulses”. En: *Nature Physics* 13 (oct. de 2017), págs. 947-951. DOI: [10.1038/nphys4185](https://doi.org/10.1038/nphys4185).
- [39] Yinyu Zhang et al. “Observing the Importance of the Phase-Volume Effect for Few-Cycle Light-Matter Interactions”. En: *Physical Review Letters* 124 (abr. de 2020). DOI: [10.1103/PhysRevLett.124.133202](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.133202).
- [40] Spencer W. Jolly. “On the importance of frequency-dependent beam parameters for vacuum acceleration with few-cycle radially polarized laser beams”. En: *Optics Letters* 45 (jul. de 2020), pág. 3865. DOI: [10.1364/ol.394493](https://doi.org/10.1364/ol.394493).
- [41] T. Tritschler et al. “Variation of the carrier-envelope phase of few-cycle laser pulses owing to the Gouy phase: ?a solid-state-based measurement”. En: *Optics Letters* 30 (abr. de 2005), pág. 753. DOI: [10.1364/ol.30.000753](https://doi.org/10.1364/ol.30.000753).
- [42] F. Lindner et al. “Gouy Phase Shift for Few-Cycle Laser Pulses”. En: *Physical Review Letters* 92 (mar. de 2004). DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.113001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.113001).
- [43] Miguel A. Porras. “Characterization of the electric field of focused pulsed Gaussian beams for phase-sensitive interactions with matter”. En: *Optics Letters* 34 (mayo de 2009), pág. 1546. DOI: [10.1364/ol.34.001546](https://doi.org/10.1364/ol.34.001546).
- [44] Ebrahim Karimi et al. “Influence of generalized focusing of few-cycle Gaussian pulses in attosecond pulse generation”. En: *Optics Express* 21 (oct. de 2013), pág. 24991. DOI: [10.1364/oe.21.024991](https://doi.org/10.1364/oe.21.024991).
- [45] Thomas Brabec y Ferenc Krausz. “Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime”. En: *Physical Review Letters* 78 (abr. de 1997), págs. 3282-3285. DOI: [10.1103/PhysRevLett.78.3282](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.3282).
- [46] Miguel A. Porras, Zoltán L. Horváth y Balázs Major. “Three-dimensional carrier-envelope-phase map of focused few-cycle pulsed Gaussian beams”. En: *Physical Review A* 98 (dic. de 2018). DOI: [10.1103/PhysRevA.98.063819](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.063819).

- [47] Ayman F. Abouraddy et al. “Space-time wave packets”. En: *Advances in Optics and Photonics*, Vol. 14, Issue 3, pp. 455-570 14.3 (sep. de 2022), págs. 455-570. DOI: [10.1364/AOP.450016](https://doi.org/10.1364/AOP.450016).
- [48] Marco Ornigotti, Claudio Conti y Alexander Szameit. “Effect of Orbital Angular Momentum on Nondiffracting Ultrashort Optical Pulses”. En: *Physical Review Letters* 115 (sep. de 2015). DOI: [10.1103/PhysRevLett.115.100401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.100401).
- [49] Miguel A. Porras y Claudio Conti. “Couplings between the temporal and orbital angular momentum degrees of freedom in ultrafast vortices with propagation-invariant temporal shape”. En: (nov. de 2019). DOI: [10.1103/PhysRevA.101.063803](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.063803).
- [50] M. Bock, T. Elsaesser y R. Grunwald. “Spatial and temporal transformation of propagating few-cycle pulses with orbital angular momentum”. En: *2016 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO)*. 2016, págs. 1-2.
- [51] H. He et al. “Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity”. En: *Physical Review Letters* 75 (1995), págs. 826-829. DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.826](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.826).
- [52] Takashige Omatsu et al. “Metal microneedle fabrication using twisted light with spin”. En: *Optics express* 18.17 (ago. de 2010), pág. 17967. DOI: [10.1364/OE.18.017967](https://doi.org/10.1364/OE.18.017967).
- [53] Hao Huang et al. “100 Tbit/s free-space data link enabled by three-dimensional multiplexing of orbital angular momentum, polarization, and wavelength”. En: *Optics Letters* 39 (ene. de 2014), pág. 197. DOI: [10.1364/ol.39.000197](https://doi.org/10.1364/ol.39.000197).
- [54] Gabriel Molina-Terriza, Juan P. Torres y Lluís Torner. “Management of the Angular Momentum of Light: Preparation of Photons in Multidimensional Vector States of Angular Momentum”. En: *Physical Review Letters* 88.1 (dic. de 2001), pág. 013601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.88.013601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.013601).
- [55] Max Born y Emil Wolf. *Principles of Optics*. 7.^a ed. Cambridge University Press, 2019. DOI: [10.1017/9781108769914](https://doi.org/10.1017/9781108769914).
- [56] J. P. Taché. “Derivation of ABCD law for Laguerre-Gaussian beams”. En: *Applied Optics* 26 (jul. de 1987), pág. 2698. DOI: [10.1364/ao.26.002698](https://doi.org/10.1364/ao.26.002698).
- [57] Miguel A. Porras. “Nonsinusoidal few-cycle pulsed light beams in free space”. En: *Journal of the Optical Society of America B* 16 (sep. de 1999), pág. 1468. DOI: [10.1364/josab.16.001468](https://doi.org/10.1364/josab.16.001468).
- [58] C. F.R. Caron y R. M. Potvliege. “Free-space propagation of ultrashort pulses: Space-time couplings in Gaussian pulse beams”. En: *Journal of Modern Optics* 46 (1999), págs. 1881-1891. DOI: [10.1080/09500349908231378](https://doi.org/10.1080/09500349908231378).
- [59] Miguel A. Porras. “Diffraction effects in few-cycle optical pulses”. En: *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* 65 (2002). DOI: [10.1103/PhysRevE.65.026606](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.026606).
- [60] C. J.R. Sheppard y Xiaosong Gan. “Free-space propagation of femto-second light pulses”. En: *Optics Communications* 133 (ene. de 1997), págs. 1-6. DOI: [10.1016/S0030-4018\(96\)00487-7](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(96)00487-7).
- [61] A. E. Kaplan. “Diffraction-induced transformation of near-cycle and subcycle pulses”. En: *Journal of the Optical Society of America B* 15 (mar. de 1998), pág. 951. DOI: [10.1364/josab.15.000951](https://doi.org/10.1364/josab.15.000951).

- [62] Miguel A. Porrás. “Ultrashort pulsed Gaussian light beams”. En: *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* 58 (1998), págs. 1086-1093. DOI: [10.1103/PhysRevE.58.1086](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.1086).
- [63] Jay M. Ver Hoef. *Who invented the delta method?* 2012. DOI: [10.1080/00031305.2012.687494](https://doi.org/10.1080/00031305.2012.687494).
- [64] Jian Yu Lu y James F. Greenleaf. “Nondiffracting X Waves-Exact Solutions to Free-Space Scalar Wave Equation and Their Finite Aperture Realizations”. En: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 39.1 (1992), págs. 19-31. DOI: [10.1109/58.166806](https://doi.org/10.1109/58.166806).
- [65] Peeter Saari y Kaido Reivelt. “Evidence of X-Shaped Propagation-Invariant Localized Light Waves”. En: *Physical Review Letters* 79.21 (nov. de 1997), pág. 4135. DOI: [10.1103/PhysRevLett.79.4135](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.4135).
- [66] Peeter Saari y Kaido Reivelt. “Generation and classification of localized waves by Lorentz transformations in Fourier space”. En: *Physical Review E* 69.3 (mar. de 2004), pág. 036612. DOI: [10.1103/PhysRevE.69.036612](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.036612).
- [67] Hugo E. Hernández-Figueroa, Michel Zamboni-Rached y Erasmo Recami. “Localized Waves”. En: *Localized Waves* (ene. de 2007), págs. 1-369. DOI: [10.1002/9780470168981](https://doi.org/10.1002/9780470168981).
- [68] Hugo E. Hernández-Figueroa, Erasmo Recami y Michel Zamboni-Rached. “Non-diffracting waves”. En: *Non-diffracting Waves* (oct. de 2013), págs. 1-481. DOI: [10.1002/9783527671519](https://doi.org/10.1002/9783527671519).
- [69] Shuhui Li y Jian Wang. “Adaptive free-space optical communications through turbulence using self-healing Bessel beams”. En: *Scientific Reports* 7 (feb. de 2017). DOI: [10.1038/srep43233](https://doi.org/10.1038/srep43233).
- [70] C. Paterson. “Atmospheric turbulence and orbital angular momentum of single photons for optical communication”. En: *Physical Review Letters* 94 (abr. de 2005). DOI: [10.1103/PhysRevLett.94.153901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.153901).
- [71] Yequn Zhang, Ivan B. Djordjevic y Xin Gao. “On the quantum-channel capacity for orbital angular momentum-based free-space optical communications”. En: *Optics Letters* 37 (ago. de 2012), pág. 3267. DOI: [10.1364/ol.37.003267](https://doi.org/10.1364/ol.37.003267).
- [72] Marco Ornigotti, Claudio Conti y Alexander Szameit. “Universal form of the carrier frequency of scalar and vector paraxial X waves with orbital angular momentum and arbitrary frequency spectrum”. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 92 (oct. de 2015). DOI: [10.1103/PhysRevA.92.043801](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.043801).
- [73] I. Besieris, M. Abdel-Rahman y A. Shaarawi A. Chatzipetros. “Two Fundamental Representations of Localized Pulse Solutions to the Scalar Wave Equation”. En: *Progress In Electromagnetics Research* 19 (1998), págs. 1-48. DOI: [10.2528/pier97072900](https://doi.org/10.2528/pier97072900).
- [74] D. Mugnai, A. Ranfagni y R. Ruggeri. “Observation of superluminal behaviors in wave propagation”. En: *Physical Review Letters* 84 (2000), págs. 4830-4833. DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.4830](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4830).
- [75] Heiki Sõnajalg, Margus Rätsep y Peeter Saari. “Demonstration of the Bessel-X pulse propagating with strong lateral and longitudinal localization in a dispersive medium”. En: *Optics Letters* 22 (mar. de 1997), pág. 310. DOI: [10.1364/ol.22.000310](https://doi.org/10.1364/ol.22.000310).
- [76] Miguel A. Porrás y Raúl García-Álvarez. “General laws of the propagation of few-cycle optical pulses with orbital angular momentum in free space”. En: *Physical Review A* 102 (sep. de 2020). DOI: [10.1103/PhysRevA.102.033522](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.033522).

- [77] John Benedetto y Matthew Dellatorre. “Uncertainty principles and weighted Norm Inequalities”. En: *Contemporary Mathematics* (2017), págs. 55-78. DOI: [10.1090/conm/693/13944](https://doi.org/10.1090/conm/693/13944).

Anexo A: Cálculo del máximo de fluencia

Para determinar la fluencia máxima de un haz pulsado ultracorto con momento angular orbital de tipo Laguerre-Gauss, partimos de la expresión de la fluencia dada en la Ec. (2.12).

$$\mathcal{E}(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 d\omega,$$

Al introducir la Ec.(2.2) la fluencia se reescribe como

$$\mathcal{E}(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\hat{a}(\omega)|^2 \left[\frac{\sqrt{2}r}{s(\omega, z)} \right]^{2|l|} e^{-\frac{2r^2}{s^2(\omega, z)}} d\omega. \quad (1)$$

Para localizar un máximo (o mínimo) de una función se deriva con respecto a la variable en la que se busca el extremo; en nuestro caso, el radio r :

$$\frac{d\mathcal{E}(r, z)}{dr} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2|l|}{r} - \frac{4r}{s^2(\omega, z)} \right) |\hat{a}(\omega)|^2 \left[\frac{\sqrt{2}r}{s(\omega, z)} \right]^{2|l|} e^{-\frac{2r^2}{s^2(\omega, z)}} d\omega. \quad (2)$$

El integrando vuelve a contener el término $|\hat{E}(r, \omega, z)|^2$. Al extraer los factores independientes de r llegamos a la Ec. (3.9) del Cap. 3.

$$\frac{d\mathcal{E}(r, z)}{dr} = \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty d\omega |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 \left[|l| - \frac{2r^2}{s^2(\omega, z)} \right].$$

La condición de extremo se impone anulando la primera derivada:

$$\begin{aligned} |l| \mathcal{E} - 2r^2 \int_0^\infty d\omega |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 \left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right) d\omega &= 0, \\ \frac{|l|}{2} &= r^2 \frac{\int_0^\infty |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 \left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right) d\omega}{\int_0^\infty |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 d\omega}. \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando la Ec. (3.6), con $f(\omega) = 1/s^2(\omega, z)$, se obtiene directamente la Ec. (3.10).

$$r_{\max}^2 = \frac{|l|}{2} \left(\overline{\frac{1}{s^2(\omega, z)}} \right)^{-1} \Big|_{r_{\max}}.$$

Con esto se obtiene la posición del anillo brillante. Sin embargo, para confirmar que corresponde a un máximo (y no a un mínimo) debe examinarse la segunda derivada:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dr^2} = \left[-\frac{2|l|}{r^2} \mathcal{E} + \frac{2}{r} \frac{d\mathcal{E}}{dr} - 4 \overline{\left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right)} \mathcal{E} - 4r \frac{d}{dr} \overline{\left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right)} \mathcal{E} \right]_{r_{\max}} < 0. \quad (4)$$

Puesto que la evaluación se realiza en $r = r_{\max}$, el término que contiene $d\mathcal{E}/dr$ se anula. El término desconocido a calcular es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \overline{\left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right)} \Big|_{r_{\max}} &= \frac{d}{dr} \left[\frac{\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{s^2(\omega, z)} |\hat{E}(r, z, \omega)|^2 d\omega}{\mathcal{E}} \right] \Big|_{r_{\max}} \\ &= \frac{2|l|}{r^2} \overline{\left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right)} \Big|_{r_{\max}} - 4r \overline{\left(\frac{1}{s^4(\omega, z)} \right)} \Big|_{r_{\max}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Al sustituir la Ec. (5) en la Ec. (4) y exigir que el resultado sea negativo, se obtiene:

$$-\frac{2|l|}{r^2} - 4 \overline{\left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right)} - 8|l| \overline{\left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right)} + 16r^2 \overline{\left(\frac{1}{s^4(\omega, z)} \right)} < 0. \quad (6)$$

Por último, introduciendo $r = r_{\max}$ se llega a la condición que aparece en la Sección 3.2:

$$\begin{aligned} -8(1 + |l|) \overline{\left(\frac{1}{s^2(\omega, z)} \right)}^2 + 8|l| \overline{\left(\frac{1}{s^4(\omega, z)} \right)} &< 0 \\ \frac{1}{|l|} &> \frac{\overline{1/s^4(\omega, z)} - \overline{1/s^2(\omega, z)}^2}{\overline{1/s^2(\omega, z)}^2}, \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.12})$$

Anexo B: Producto ancho de banda – duración

Al estudiar la dualidad tiempo-frecuencia de un pulso (o de cualquier señal de energía finita) necesitamos un límite cuantitativo que nos diga cuánto puede concentrarse simultáneamente en ambos dominios. El resultado fundamental es el producto entre el ancho de banda y la duración del pulso: cuando concentras la energía de la señal en el tiempo, su contenido espectral se ensancha y viceversa. Para ello voy a definir primero una función $f(t)$ y su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ utilizando para ello el campo eléctrico y espectral utilizado en la Tesis:

$$\hat{f}(\omega) = A \int e^{\pm i\omega t} f(t) dt \rightarrow \hat{E}(\omega) = A \int E(t) e^{i\omega t} dt, \quad (7)$$

$$f(t) = B \int e^{\mp i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega \rightarrow E(t) = \frac{1}{\pi} \int \hat{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (8)$$

Antes de buscar la constante A es necesario tener en cuenta que $\omega = 2\pi f$,

$$E(t) = \int 2\hat{E}(\omega) e^{-i2\pi f t} df \Rightarrow \hat{f}(\omega) = 2\hat{E}(\omega), \quad (9)$$

$$2\hat{E}(\omega) = \int E(t) e^{i\omega t} dt \Rightarrow \hat{E}(\omega) = \int \frac{E(t)}{2} e^{i\omega t} dt. \quad (10)$$

Con estas expresiones ya podemos calcular la constante A utilizando para ello el teorema de Parseval. Este demuestra que la transformada de Fourier es unitaria; es decir, que la integral del cuadrado de una función es igual a la integral del cuadrado de su transformada.

$$\begin{aligned} \int |E_f|^2 df &= \int |E(t)|^2 dt \\ 4 \int |\hat{E}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} &= \int |E(t)|^2 dt \\ \int |E(t)|^2 dt &= \frac{2}{\pi} \int |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Con estas expresiones ya se puede proceder a calcular la desigualdad para el tiempo y la frecuencia utilizando [77]

$$\left[\int ||t||^2 |E(t)|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int ||f||^2 |E(f)|^2 df \right]^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi} \int |E(t)|^2 dt, \quad (12)$$

en cuya expresión hay que hacer el cambio $f = \frac{\omega}{2\pi}$ y también hacer un cambio en la expresión de la derecha utilizando de nuevo el teorema de Parseval

$$\left[\int ||t||^2 |E(t)|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int \frac{||\omega||^2}{4\pi^2} 4 |\hat{E}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \right]^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi} \int |E(t)|^2 dt \left[\int |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (13)$$

que operando un poco queda:

$$\sqrt{\frac{\int ||t||^2 |E(t)|^2 dt}{\int |E(t)|^2 dt}} \sqrt{\frac{\int ||\omega||^2 |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega}{\int |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega}} \geq \frac{1}{2}. \quad (14)$$

El término de la izquierda se corresponde con la definición de la varianza temporal y la varianza espectral, que pueden definirse como la semianchura gaussiana mediante la relación $2\sigma_t = \Delta t$ y $2\sigma_\omega = \Delta\omega$, respectivamente. Con esta definición, se llega a la expresión definitiva

$$\Delta t \Delta \omega \geq 2 \quad (15)$$