



# Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

[www.elsevier.es/rimni](http://www.elsevier.es/rimni)



## Modelación del movimiento del agua en medios porosos no lineales mediante un esquema de diferencias finitas. Aplicación al sobrevertido en presas de escollera

M.Á. Toledo\*, R. Morán y H. Campos

Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Caminos Canales y Puertos, Departamento de Ingeniería Civil: Hidráulica y Energética, C/. Profesor de Aranguren S/N, 28040, Madrid, España

### INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

#### Historia del artículo:

Recibido el 16 de mayo de 2011

Aceptado el 2 de agosto de 2011

On-line el 15 de agosto de 2012

#### Palabras clave:

Filtración  
Medios porosos  
Diferencias finitas  
Escollera  
Presa  
Sobrevertido

### R E S U M E N

La circulación del agua a través de medios porosos gruesos, como la escollera, la grava o incluso la arena de mayor tamaño, tiene la particularidad de exhibir una relación no lineal entre el gradiente hidráulico y la velocidad de filtración. Uno de los problemas de ingeniería en que se observa esto es cuando se produce un sobrevertido en una presa de escollera y el agua, pasando sobre su coronación, se infiltra en el espaldón y circula por su interior. La modelación numérica del problema se resuelve aquí mediante un esquema de diferencias finitas, que se implementa en el código MNLEE.RDS para su aplicación al sobrevertido en presas de escollera. Además, se proporciona un procedimiento para resolver el acoplamiento del movimiento del agua en lámina libre de la introducción del talud de la presa y de filtración por el interior del espaldón, mediante la introducción del concepto «ley de intercambio de caudales».

© 2011 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Modeling flow through non linear coarse porous media by a finite difference scheme, with application to rockfill dams overtopping

#### A B S T R A C T

Flow through coarse porous media, as rockfill, gravel or sand of big size, exhibit a non linear relation between hydraulic gradient and seepage velocity. This behavior is observed when water flows over the crest of a rockfill dam, seeps into the downstream shoulder and moves through the rockfill voids. A finite difference scheme is used here to solve this problem through numerical modeling. It is implemented in the code MNLEE.RDS for solving dam overtopping problems. In addition, a procedure is provided to solve the coupled problem of flow over and through the rockfill dam. For that purpose, the concept of «law of flow exchange» is introduced.

© 2011 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

#### Keywords:

Seepage  
Porous media  
Finite differences  
Rockfill  
Dam  
Overtopping

### 1. Introducción

Al realizar estudios de filtración del agua a través de medios porosos finos, como el núcleo de arcilla de una presa de materiales sueltos, se considera una relación lineal entre el gradiente de carga y la velocidad de filtración, de acuerdo con la conocida ley de Darcy. La experiencia ha demostrado que en medios porosos gruesos (escolleras, gravas y arenas gruesas) esta ley no es válida, pues dicha relación no es lineal. En este sentido

podemos hablar de medios porosos no lineales. Como ejemplo de ello podemos citar la filtración en acuíferos de grano grueso o en materiales granulares utilizados como elemento de drenaje. También es el caso de la circulación de agua que se establece por el interior del espaldón de una presa de escollera cuando excepcionalmente, debido a la insuficiencia de capacidad de su aliviadero, durante una avenida el agua llega a pasar sobre su coronación. Actualmente, las distintas administraciones hidráulicas de gran número de países están abando el estudio y mejora de la seguridad de sus presas, teniendo en este contexto una importancia singular el problema del sobrevertido en presas de materiales sueltos, pues ha sido causa de gran número de roturas en este tipo de presas. Los principales mecanismos involucrados en la rotura de una presa de escollera por sobrevertido son el deslizamiento

\* Autor para correspondencia.

Correos electrónicos: [matoledo@caminos.upm.es](mailto:matoledo@caminos.upm.es) (M.Á. Toledo),  
[rmoran@caminos.upm.es](mailto:rmoran@caminos.upm.es) (R. Morán), [hibber.campos@upm.es](mailto:hibber.campos@upm.es) (H. Campos).

en masa y el arrastre de partículas. Además, existe el peligro de que se produzca migración interna de partículas. Por tanto, para evaluar la seguridad o para diseñar una presa resistente a este fenómeno, es condición previa conocer las presiones intersticiales y los gradientes hidráulicos y, por tanto, resolver el problema de filtración en un medio granular no lineal. Para ello, es necesario conocer la fórmula de resistencia que expresa la antes referida relación gradiente/velocidad y, a partir de ella, establecer una ecuación de campo que caracterice el fenómeno de filtración en este tipo de medios granulares gruesos. Las condiciones de frontera particularizarán el problema a resolver, de modo que el problema quede adecuadamente planteado. La resolución por métodos numéricos implica la discretización del dominio de filtración y la resolución del sistema de ecuaciones resultante. Se expone en apartados sucesivos cada uno de los aspectos señalados. Debe llamarse la atención sobre la necesidad de que la relación entre el tamaño del dominio de filtración y el tamaño de partícula sea suficientemente alta para asegurar la aplicabilidad de los procedimientos diferenciales que aquí se emplean. Esta consideración, que siempre aplica, puede resultar condicionante en el caso de que el tamaño de grano del material poroso sea grande, como sucede en la escollera.

## 2. Fórmula de resistencia

Diversos autores han propuesto leyes alternativas para medios no lineales, siendo las más usadas las leyes cuadrática y exponencial.

Ley cuadrática:

$$i = aV_d + bV_d^2 \quad a, b : \text{constantes.} \quad (1)$$

Ley exponencial:

$$i = cV_d^m \quad c, m : \text{constantes características del material.} \quad (2)$$

Siendo  $i$  el gradiente hidráulico y  $V_d$  la velocidad de filtración. La sección de paso total, incluidos huecos y esqueleto sólido.

George y Hansen (1992)[1] obtuvieron unas fórmulas que permiten determinar los coeficientes de la fórmula cuadrática a partir del coeficiente y el exponente de la fórmula exponencial y viceversa.

Conversión de  $i = cV_d^m$  a  $i = aV_d + bV_d^2$

$$a = \frac{12c(V_{d,max})^{m-1}(2-m)}{(m+2)(m+3)} \quad (3)$$

$$b = \frac{20c(V_{d,max})^{m-2}(m-1)}{(m+2)(m+3)} \quad (4)$$

Siendo  $i = 0$  para  $V_d = 0$  y  $V_{d,max}$  el valor máximo de la velocidad de filtración en el intervalo considerado.

Conversión de  $i = aV_d + bV_d^2$  a  $i = cV_d^m$

$$m = \frac{5a + 6bV_{d,max}}{5a + 3bV_{d,max}} \quad (5)$$

$$c = \frac{(5a + 4bV_{d,max})(4a + 3bV_{d,max})}{4(5a + 3bV_{d,max})(V_{d,max})^{m-1}} \quad (6)$$

La modelación se ha realizado partiendo de una fórmula de resistencia de tipo exponencial. No obstante, si se dispone de una fórmula de tipo cuadrático para un material determinado, basta con la conversión mediante las anteriores fórmulas de George y Hansen. A partir de resultados obtenidos empíricamente, Parkin, Trollope y Lawson (1966)[2] definieron un nomograma que permite obtener el coeficiente  $c$  de la fórmula exponencial a partir del índice de huecos y la superficie específica del medio granular considerado. Así mismo, llegaron a la conclusión de que el exponente de dicha fórmula varía

poco en torno al valor 1,85 próximo al valor 2 correspondiente a movimiento totalmente turbulento, y alejado del valor 1 correspondiente a movimiento laminar. La causa de que el exponente de la fórmula exponencial tenga un valor próximo a 2, pero sin llegar al mismo, ha sido objeto de controversia. Con independencia de cuál sea la explicación, es un hecho comprobado que el valor de dicho exponente se encuentra, en efecto, en dicho rango de variación.

## 3. Movimiento del agua. Planteamiento general del problema

Una vez conocida la fórmula de resistencia, puede plantearse el estudio del movimiento del agua a través de la escollera. El análisis diferencial conduce a un modelo matemático diferencial que se plantea como un problema de campo. El análisis se limitará al caso de movimiento permanente, bidimensional de un fluido viscoso e incompresible, el agua, en un medio poroso homogéneo e isótropo. El agua, en un medio poroso homogéneo e isótropo, el agua, en un medio poroso homogéneo e isótropo debe conocerse la ecuación de campo que caracteriza el fenómeno físico: movimiento del agua a través de un medio poroso determinado, y las condiciones de frontera, que particularizan el problema para un caso concreto. Como resultado final del cálculo, se obtiene un campo de presiones y un campo de velocidades, si bien la ecuación de campo puede plantearse en términos de otras magnitudes, típicamente su potencial. En cualquier caso, una vez resuelto el problema, es posible conocer la presión y la velocidad en cualquier punto del dominio de filtración y, a través de la velocidad, el caudal de agua filtrado. Por tanto, el planteamiento del problema consiste en la definición de la ecuación de campo y de las condiciones de frontera. Cuando hablamos de resolver el problema, nos referimos a la determinación de las presiones y velocidades en cada punto del medio. Se dice que el problema está bien planteado cuando la solución existe y es única. Por otra parte, al plantear un campo se cumple en todo el dominio. El incumplimiento de esta condición invalida el planteamiento del problema.

## 4. Ecuación de campo

Consideremos una partícula de medio poroso de dimensiones suficientemente reducidas en relación con el dominio de filtración para que los procedimientos diferenciales sean aplicables:  $dx dy$ , y unos ejes de coordenadas ortogonales  $(x, y)$ . Sea el vector velocidad de filtración en un punto:

$$\mathbf{V} = u\mathbf{x} + v\mathbf{y} \quad (7)$$

siendo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  vectores unitarios de dirección la de los ejes de coordenadas  $x$  e  $y$  respectivamente y sentido el definido como positivo. (fig. 1)

El caudal de agua que entra en la partícula de medio poroso es:

$$u dy + v dx \quad (8)$$

El caudal que sale es:

$$\left(u + \frac{\delta u}{\delta x}\right) dy + \left(v + \frac{\delta v}{\delta y}\right) dx \quad (9)$$

Admitiendo que ni el agua ni los elementos sólidos sufren deformación volumétrica y que la partícula está saturada, el caudal de agua que entra en ella tiene que ser igual que el que sale (ley de conservación de la masa o principio de continuidad), de donde se obtiene:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \quad (10)$$

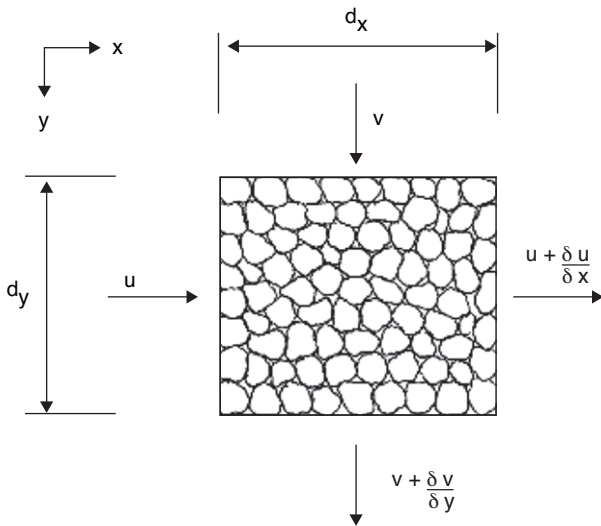


Fig. 1. Partícula diferencial del medio poroso.

#### 4.1. Medios porosos lineales

Si se cumple la ley de Darcy, tendremos que:

$$V = Ki \quad (11)$$

siendo  $K$  el coeficiente de permeabilidad e  $i$  el gradiente hidráulico. Por tanto:

$$u = K \frac{dh}{dx} \quad ; \quad v = K \frac{dh}{dy} \quad (12)$$

siendo:

$$h = z + \frac{p}{\gamma} \quad : \text{ carga piezométrica}$$

Donde:  $z$  es la altura sobre el plano de referencia y  $p$  es la presión. En realidad,  $h$  es la carga hidráulica total, pero la carga de velocidad tiene en la práctica un valor muy bajo, despreciable frente al de la carga piezométrica. Sustituyendo (12) en (10) tenemos que:

$$\frac{\delta}{\delta x} \left( K \frac{\delta h}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left( K \frac{\delta h}{\delta y} \right) = 0 \quad (13)$$

En un medio homogéneo e isótropo el coeficiente de permeabilidad es constante en todo el dominio. Por tanto:

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h}{\delta y^2} = 0 \quad (14)$$

Esta es la conocida ecuación de Laplace, que gobierna el movimiento del agua en un medio poroso cuando se cumple la ley de Darcy. Se trata, por tanto, de la ecuación de campo para movimiento lineal.

Si consideramos el operador laplaciano:

$$\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \quad (15)$$

la ecuación de Laplace puede expresarse:

$$\Delta h = 0 \quad (16)$$

#### 4.2. Medios porosos no lineales

Diversos autores han desarrollado ecuaciones de campo para medios porosos no lineales basándose en una fórmula de resistencia de tipo exponencial o cuadrático.

Engelund (1953)[3] y otros, considerando una fórmula de resistencia cuadrática con término lineal nulo, han llegado a la siguiente ecuación de campo.

$$\frac{\delta^2 h}{\delta V^2} + \frac{2}{V^2} \frac{\delta^2 h}{\delta \alpha^2} = 0 \quad (17)$$

siendo:  $h$  carga piezométrica,  $V$  la velocidad de filtración y  $\alpha$  la inclinación del vector velocidad. A continuación veremos el desarrollo completo de las ecuaciones de campo de Parkin y de Volker para movimiento no lineal.

##### 4.2.1. Ecuación de campo de Parkin

La ecuación de campo de Parkin (1971)[4] se basa en una ley exponencial:

$$i = c V^m \quad (18)$$

admitiendo que los coeficientes  $c$  y  $m$  son constantes en el dominio de filtración. Estos coeficientes no varían en el dominio de filtración. En el rango de velocidades que se dan en la práctica, por lo que la hipótesis resulta aceptable. De (18) se obtiene que:

$$V = (i/c)^{1/m} \quad (19)$$

Tanto la velocidad como la pérdida unitaria de energía se refieren a la dirección de avance del agua en el punto considerado (línea de corriente del movimiento en el medio poroso). En general, la relación puede expresarse en forma vectorial. Teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{i} = \mathbf{grad} H \quad (20)$$

donde, despreciando la carga de velocidad queda:

$$\mathbf{V} = \left( \frac{1}{c} \right)^{1/m} |\mathbf{grad} h|^{\frac{1}{m}-1} \mathbf{grad} h \quad (21)$$

Admitiendo que el coeficiente  $c$  es constante, puede expresarse:

$$\mathbf{V} = \left( \frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{m}-1} |\mathbf{grad} h|^{\frac{1}{m}-1} \mathbf{grad} \left( \frac{h}{c} \right) = \left| \mathbf{grad} \left( \frac{h}{c} \right) \right|^{\frac{1}{m}-1} \mathbf{grad} \left( \frac{h}{c} \right) \quad (22)$$

y llamando:

$$\phi = \frac{h}{c} \quad (23)$$

Se tiene:

$$\mathbf{V} = \left| \mathbf{grad} \phi \right|^{\frac{1}{m}-1} \mathbf{grad} \phi \quad (24)$$

Por definición del operador gradiente:

$$\mathbf{grad} \phi = \frac{\delta \phi}{\delta x} \mathbf{x} + \frac{\delta \phi}{\delta y} \mathbf{y} \quad (25)$$

Siendo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  los vectores unitarios en las direcciones de los ejes cartesianos  $x$  e  $y$  respectivamente.

Sustituyendo en (24):

$$\mathbf{V} = \left| \frac{\delta \phi}{\delta x} \mathbf{x} + \frac{\delta \phi}{\delta y} \mathbf{y} \right|^{\frac{1}{m}-1} \left( \frac{\delta \phi}{\delta x} \mathbf{x} + \frac{\delta \phi}{\delta y} \mathbf{y} \right) \quad (26)$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta \phi}{\delta x} \mathbf{x} + \frac{\delta \phi}{\delta y} \mathbf{y} \right|^{\frac{1}{m}-1} &= \left| \frac{\delta \phi}{\delta x} \mathbf{x} + \frac{\delta \phi}{\delta y} \mathbf{y} \right|^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m}-1 \right)^2} \\ &= \left( \left| \frac{\delta \phi}{\delta x} \mathbf{x} + \frac{\delta \phi}{\delta y} \mathbf{y} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m}-1 \right)} = \left[ \left( \frac{\delta \phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta \phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m}-1 \right)} \quad (27) \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en (26):

$$\mathbf{V} = \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \mathbf{x} + \frac{\delta\phi}{\delta y} \mathbf{y} \right) \quad (28)$$

En consecuencia, las componentes del vector velocidad

$$\mathbf{V} = u\mathbf{x} + v\mathbf{y} \quad (29)$$

son:

$$u = \frac{\delta\phi}{\delta x} \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} (1/m - 1)} \quad (30)$$

$$v = \frac{\delta\phi}{\delta y} \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} (1/m - 1)} \quad (31)$$

Como hemos visto en el apartado anterior, la ecuación de continuidad aplicada a una partícula de medio poroso indeformable conduce a:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \quad (32)$$

Derivando las expresiones (30) y (31) respecto a x e y respectivamente, obtenemos:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - 1 \right)} + \frac{\delta\phi}{\delta x} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \cdot \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - 1 \right)} \cdot \left( 2 \frac{\delta\phi}{\delta x} \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta\phi}{\delta y} \frac{\delta^2\phi}{\delta y \delta x} \right) \quad (33)$$

$$\frac{\delta v}{\delta y} = \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - 1 \right)} + \frac{\delta\phi}{\delta y} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \cdot \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - 1 \right)} \cdot \left( 2 \frac{\delta\phi}{\delta x} \frac{\delta^2\phi}{\delta x \delta y} + 2 \frac{\delta\phi}{\delta y} \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} \right) \quad (34)$$

Sustituyendo las expresiones (33) y (34) en la ecuación de continuidad (32), obtenemos la ecuación de campo de Parkin.

$$\left( \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} \right) \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right] + \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta\phi}{\delta x} \frac{\delta\phi}{\delta y} \frac{\delta^2\phi}{\delta x \delta y} + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} \right] = 0 \quad (35)$$

donde recordemos que:

$$\phi = \frac{h}{c} ; \quad h = z + \frac{p}{\gamma}$$

Parkin, Trollope y Lawson (1966)[2] hacen notar que, supuesto constante el coeficiente c, la anterior ecuación de campo es equivalente a otra en la que  $\phi$  se sustituya por  $h$ , para obtener directamente la carga piezométrica. En consecuencia, la carga piezométrica ( $h$ ) y por tanto la presión ( $p$ ), dependen únicamente del exponente ( $m$ ) de la fórmula de resistencia. La ecuación de campo (35) se reduce a la ecuación de Laplace, válida para movimiento lineal, cuando  $m=1$ , o lo que es lo mismo, cuando se cumple la ley de Darcy.

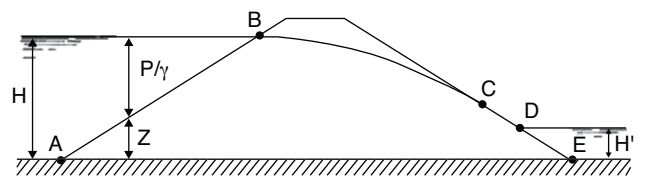


Fig. 2. Presa homogénea sin elemento impermeable.

## 5. Condiciones de frontera

El fenómeno de filtración del agua a través del espaldón de una presa de escollera sometida a sobrevertido da origen a un problema de frontera mixto con superficie libre. Consideremos en primer lugar el movimiento del agua a través de una presa homogénea (fig. 2). Las condiciones de frontera son:

- Tramo AB: la carga piezométrica es constante e igual a la altura de agua sobre la base ( $H$ ). Se trata de una condición de tipo Dirichlet.
- Tramo DE: análogamente, la carga piezométrica es en este caso  $H'$ . También es una condición de tipo Dirichlet.
- Tramo AE: admitiendo que la pesa es impermeable, el caudal que circula a través de este tramo de frontera es nulo. Por tanto, se trata de una condición tipo Neumann.
- Tramo BC: se trata de una superficie libre, cuya situación se desconoce a priori. La presión en todos sus puntos debe ser nula (referida a la presión atmosférica) y no puede circular agua a través de la misma. Se trata de una condición por la Cauchy.
- Tramo CD: la carga piezométrica viene dada por la altura sobre el plano de referencia, ya que la presión es nula por encontrarse en contacto con la atmósfera. La condición es de tipo Dirichlet.

Si el agua supera la cota de coronación se producirá el sobrevertido. Cuando la altura de lámina vertiente ( $H_L$ ) sea pequeña, la circulación superficial o exterior, sobre la coronación y el talud de aguas abajo, se reducirá a unos pocos metros. A partir de un determinado punto, solo se producirá circulación interna a través del cuerpo de la presa (fig. 3a). A medida que aumenta la altura de lámina vertiente, el punto extremo de infiltración se desplazará hacia aguas abajo sobre el talud de la presa y el D lo hará hacia aguas arriba. Cuando la lámina sea suficientemente elevada, por ser el caudal de llegada al embalse netamente superior al que puede circular por el interior de la presa, se producirá movimiento superficial sobre toda la longitud del talud de aguas abajo (fig. 3b). La condición de frontera en la coronación y el paramento de aguas abajo puede plantearse como de potencial impuesto, pero desconocido a priori, que es preciso determinar mediante tanteos sucesivos de modo semejante a como se procede con los problemas de superficie libre. En realidad,

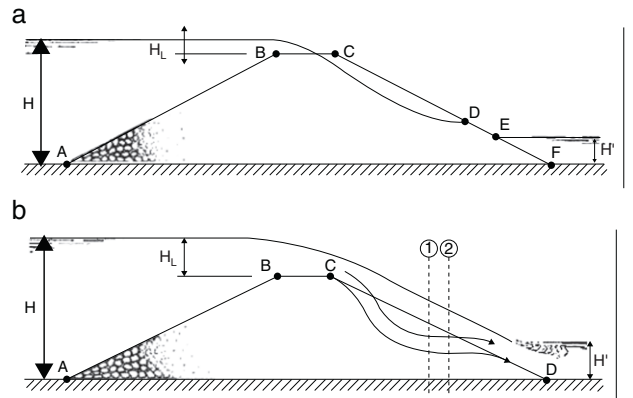


Fig. 3. Fases de movimiento del agua sobre la presa a) Fase inicial b) Fase final.

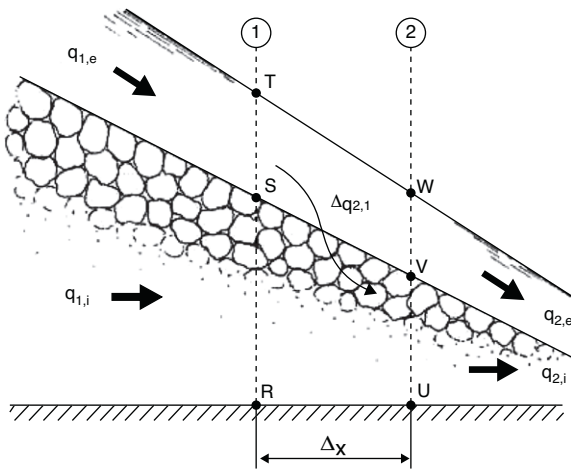


Fig. 4. Caudales circulantes a través de las secciones paralelas.

se trata de determinar la geometría de la superficie libre del agua que circula sobre el talud de la presa. Por tanto, para determinar la situación de una superficie libre se sigue el siguiente proceso:

- 1.º Se estima la situación de la superficie libre.
- 2.º Se calcula la solución al problema, obteniéndose la presión en la superficie libre.
- 3.º Se verifica si la presión es nula en todos los puntos de la misma, se modifica su geometría, elevándola en la zona donde es positiva y reduciendo su cota donde es negativa.
- 4.º Se vuelve a realizar el cálculo y el proceso se repite hasta que se consigue que la presión sea nula en todos los puntos de la superficie libre.

En el caso de que exista circulación sobre el talud de la presa, la condición que debe cumplirse es la que se explica a continuación. Se consideran dos secciones verticales separadas una cierta distancia  $\Delta x$ , siendo:

- $q_{1(2),e(i)}$ : caudal que atraviesa la sección 1 (2) circulando exteriormente (interiormente) sobre el talud de la presa (a través del cuerpo de la presa).
- $\Delta q_{1,2}$ : caudal que pasa del exterior al interior de la presa (o viceversa, si el signo es negativo) entre las secciones 1 y 2.

Aplicando el principio de continuidad al recinto de medio poroso RSVU (fig. 4), tenemos:

$$q_{2,i} = q_{1,i} + \Delta q_{1,2} \quad (36)$$

El movimiento del agua sobre el talud es de caudal variable, dado que existe un intercambio de caudales con el interior de la presa.

El movimiento del agua sobre el talud y a través del cuerpo de la presa son fenómenos acoplados, no siendo posible en pura teoría calcular uno de ellos con independencia del otro. En efecto, para resolver el movimiento del agua a través de la presa es preciso conocer la carga piezométrica en el talud de aguas abajo, y por tanto el perfil del agua que circula sobre el mismo. Pero para determinar este perfil tenemos que conocer el caudal que se añade o sustrae en cada punto del talud, que se determina mediante la expresión (36), previa resolución del movimiento del agua a través de la presa.

En consecuencia, debe seguirse un  $\Delta q$  iterativo.

- 1.º Estimar una ley de variación del caudal circulante exteriormente.
- 2.º Modelar el movimiento del agua sobre la presa, determinando la carga piezométrica y el potencial a lo largo de la frontera.

- 3.º Modelar el movimiento del agua a través de la presa. Conocido el campo de velocidades puede determinarse la ley de intercambio de caudales con el exterior y la ley de variación del caudal circulante exteriormente.
- 4.º Comparar esta ley con la estimada en el primer paso.
- 5.º Si coinciden, el problema está resuelto. En caso contrario, debe modificarse la ley y reiterar el proceso.

En definitiva, vemos que la condición de frontera correspondiente a la coronación y el paramento de aguas abajo obliga, en pura teoría, a resolver el problema mediante tanteos sucesivos. Desde un punto de vista práctico, debe tenerse en cuenta que en general la altura de lámina vertiente sobre la presa será pequeña, muy inferior a las alturas de presión existentes en el dominio de filtración, por lo que la hipótesis de presión nula a lo largo del talud de aguas abajo resulta en general aceptable, salvo en el caso de que la lámina vertiente sea importante. Esta hipótesis de presión nula simplifica notablemente la modelación, ya que hace innecesaria la iteración.

## 6. Solución del problema mediante un esquema de diferencias finitas

El método de las diferencias finitas resulta más intuitivo y conduce a una formulación más sencilla que el método de los elementos finitos. En cambio, este último tiende a ser más rápido y permite un mejor tratamiento de contornos de geometría complicada (Volker, 1969; Parkin, 1971)[5,4]. Para el desarrollo de la formulación en diferencias finitas se utilizará la siguiente notación simplificada:

$$\phi_x = \frac{\delta\phi}{\delta x} \quad (37)$$

$$\phi_y = \frac{\delta\phi}{\delta y} \quad (38)$$

$$\phi_{xx} = \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} \quad (39)$$

$$\phi_{yy} = \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} \quad (40)$$

$$\phi_{xy} = \frac{\delta^2\phi}{\delta x\delta y} \quad (41)$$

y denominaremos  $N=1/m$ , quedando la ecuación diferencial de campo de Parkin:

$$(\phi_{xx} + \phi_{yy})(\phi_x^2 + \phi_y^2) + (N-1)(\phi_x^2\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{yy}) = 0 \quad (42)$$

### 6.1. Formulación general en un nudo interior

Se considera una malla rectangular de lados  $b_x$  y  $b_y$  en las direcciones ortogonales de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente. Denominamos nudo interior al que está rodeado por otros 8 nudos interiores al dominio de filtración. (fig. 5)

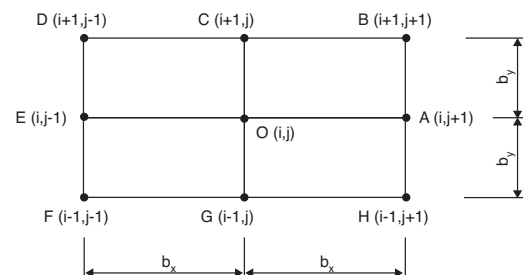


Fig. 5. Nudo interior.

Las derivadas en un nudo interior pueden aproximarse mediante las siguientes expresiones:

$$\phi_x = \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_O = \frac{\phi_A - \phi_E}{2b_x} \quad (43)$$

$$\phi_y = \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)_O = \frac{\phi_C - \phi_G}{2b_y} \quad (44)$$

$$\phi_{xx} = \left( \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} \right)_O = \frac{\left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_{OA} - \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_{EO}}{b_x} \quad (45)$$

Por tanto:

$$\phi_{xx} = \frac{\phi_A - 2\phi_O + \phi_E}{b_x^2} \quad (46)$$

Por otra parte:

$$\phi_{yy} = \left( \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} \right)_O = \frac{\left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)_{OC} - \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)_{GO}}{b_y} \quad (47)$$

y por tanto:

$$\phi_{yy} = \frac{\phi_C - 2\phi_O + \phi_G}{b_y^2} \quad (48)$$

Finalmente:

$$\phi_{xy} = \left( \frac{\delta^2\phi}{\delta x \delta y} \right)_O = \left[ \frac{\delta}{\delta y} \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_O \right]_O = \frac{\left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_C - \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)_G}{2b_y} \quad (49)$$

de donde:

$$\phi_{xy} = \frac{\frac{\phi_B - \phi_D}{2b_x} - \frac{\phi_H - \phi_F}{2b_x}}{2b_y} = \frac{\phi_B - \phi_D - \phi_H + \phi_F}{4b_x b_y} \quad (50)$$

Por tanto, las derivadas de la función potencial  $\phi(x, y)$  en un nudo interior  $O(i, j)$  pueden aproximarse así:

$$\phi_x(i, j) = \frac{1}{2b_x} [\phi(i, j+1) - \phi(i, j-1)] \quad (51)$$

$$\phi_y(i, j) = \frac{1}{2b_y} [\phi(i+1, j) - \phi(i-1, j)] \quad (52)$$

$$\phi_{xx}(i, j) = \frac{1}{b_x} [\phi(i, j+1) - 2\phi(i, j) + \phi(i, j-1)] \quad (53)$$

$$\phi_{yy}(i, j) = \frac{1}{b_y} [\phi(i+1, j) - 2\phi(i, j) + \phi(i-1, j)] \quad (54)$$

$$\phi_{xy}(i, j) = \frac{1}{4b_x b_y} [\phi(i+1, j+1) - \phi(i+1, j-1) - \phi(i-1, j+1) + \phi(i-1, j-1)] \quad (55)$$

Para obtener una formulación más sencilla, llamaremos:

$$K_x(i, j) = \frac{1}{b_x^2} [\phi(i, j+1) + \phi(i, j-1)] \quad (56)$$

$$K_y(i, j) = \frac{1}{b_y^2} [\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j)] \quad (57)$$

De este modo queda:

$$\phi_{xx}(i, j) = K_x(i, j) - \frac{2}{b_x^2} \phi(i, j) \quad (58)$$

$$\phi_{yy}(i, j) = K_y(i, j) - \frac{2}{b_y^2} \phi(i, j) \quad (59)$$

Por tanto, en el punto  $O(i, j)$ , omitiendo los subíndices que en todos los casos son  $(i, j)$ :

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = K_x - \frac{2}{b_x^2} \phi + K_y - \frac{2}{b_y^2} \phi \quad (60)$$

y operando:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = K_x + K_y - 2 \left( \frac{1}{b_x^2} + \frac{1}{b_y^2} \right) \phi \quad (61)$$

Para simplificar nuevamente la formulación, llamaremos:

$$K_{xy} = K_x + K_y \quad (62)$$

$$b_{xy} = 2 \left( \frac{1}{b_x^2} + \frac{1}{b_y^2} \right) \quad (63)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de campo tenemos:

$$\begin{aligned} & (K_{xy} - b_{xy}\phi)(\phi_x^2 + \phi_y^2) + (N-1) \\ & \times \left[ \phi_x^2 \left( K_x - \frac{2}{b_x^2} \phi \right) + 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y^2 \left( K_y - \frac{2}{b_y^2} \phi \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

Denominando:

$$K_1 = \phi_x^2 + \phi_y^2 \quad (65)$$

$$K_2 = 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} \quad (66)$$

queda:

$$\begin{aligned} & (K_1 K_{xy} - K_1 b_{xy}\phi) + (N-1) \\ & \times \left[ \phi_x^2 K_x - \frac{2}{b_x^2} \phi_x^2 \phi + K_2 + \phi_y^2 K_y - \frac{2}{b_y^2} \phi_y^2 \phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Llamando ahora:

$$K_3 = K_1 b_{xy} \quad (68)$$

$$K_4 = \phi_x^2 K_x + \phi_y^2 K_y \quad (69)$$

$$K_5 = \frac{2\phi_x^2}{b_x^2} \quad (70)$$

$$K_6 = \frac{2\phi_y^2}{b_y^2} \quad (71)$$

se obtiene:

$$K_1 K_{xy} - K_3 \phi + (N-1)(K_4 - K_5 \phi - K_6 \phi) = 0 \quad (72)$$

Si llamamos:

$$K_7 = K_4 + K_2 \quad (73)$$

$$K_8 = K_5 + K_6 \quad (74)$$

tenemos:

$$K_1 K_{xy} - K_3 \phi + (N-1)(K_7 - K_8 \phi) = 0 \quad (75)$$

de donde:

$$K_1 K_{xy} - K_3 \phi + (N-1)K_7 - (N-1)K_8 \phi = 0 \quad (76)$$

y finalmente, denominando:

$$K_9 = K_1 K_{xy} + (N-1)K_7 \quad (77)$$

$$K_{10} = K_3 + (N-1)K_8 \quad (78)$$

queda la expresión simple:

$$K_9 - K_{10} \phi = 0 \quad (79)$$



Esta formulación en diferencias finitas se ha implementado en el código que se ha denominado Movimiento No Lineal en Espaldón de Escollera. Red de filtración (MNLEE.RDF).

### 7. Resultados del modelo numérico

Una vez resuelto el problema definido por la ecuación diferencial de campo y las condiciones de contorno (mediante el código MNLEE.RDF), el potencial de velocidad ( $\phi$ ) es conocido en todos los nudos del dominio de filtración. A partir de ellos puede obtenerse también en cada nudo la velocidad de filtración y el gradiente hidráulico, que definen sendos campos vectoriales, y el campo escalar de presiones del agua. También puede obtenerse el caudal filtrado a través de la escollera.

#### 7.1. Presión del agua

El potencial de velocidad en un punto del dominio de filtración es:

$$\phi = \frac{h}{c} \tag{98}$$

siendo «h» la carga hidráulica o carga piezométrica, ya que la carga de velocidad es despreciable frente a la suma de altura y presión.

$$h = z + \frac{p}{\gamma_w} \tag{99}$$

y c la constante de la fórmula de resistencia:

$$i = c V^m \tag{100}$$

Por tanto, conocido  $\phi(i, j)$  en cada nudo del dominio, una vez resuelto el problema, de forma inmediata puede obtenerse la carga  $h(i, j)$  correspondiente.

$$h(i, j) = c \phi(i, j) \tag{101}$$

y la presión del agua

$$p(i, j) = \gamma_w [h(i, j) - z(i, j)] \tag{102}$$

Si bien la presión es fluctuante en las proximidades del talud, debido a la turbulencia, la fluctuación se atenúa rápidamente hacia el interior del medio poroso (Detert et al., 2010)[6].

#### 7.2. Velocidad de filtración

Como se vio al presentar la ecuación de campo de Parkin, las componentes del vector velocidad de filtración son:

$$u = \frac{\delta\phi}{\delta x} \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - 1 \right)} \tag{103}$$

$$v = \frac{\delta\phi}{\delta y} \left[ \left( \frac{\delta\phi}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta\phi}{\delta y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - 1 \right)} \tag{104}$$

A partir de estas ecuaciones puede obtenerse el vector velocidad de filtración en cada nudo del dominio. Su módulo será:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{105}$$

y el ángulo de avance respecto a la horizontal

$$\alpha = \arctan \left( \frac{v}{u} \right) \tag{106}$$

con sentido antihorario positivo.

#### 7.3. Gradiente hidráulico

El vector gradiente hidráulico en un punto lleva la dirección de la velocidad de filtración, o sea, es tangente a la línea de filtración que pasa por ese punto, y su módulo puede obtenerse directamente a partir de su propia definición o bien aplicando la fórmula de resistencia, una vez conocida la velocidad de filtración en el punto considerado. Por la propia definición de gradiente hidráulico:

$$i = \mathbf{grad} h \tag{107}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\phi = \frac{h}{c} \tag{108}$$

donde c es una constante, tenemos:

$$i = c \mathbf{grad} \phi \tag{109}$$

Las coordenadas de  $\mathbf{grad} \phi$  son:

$$\left( \frac{\delta\phi}{\delta x}, \frac{\delta\phi}{\delta y} \right) \tag{110}$$

Por tanto, el módulo del gradiente hidráulico puede obtenerse en el nudo (i, j):

$$i(i, j) = c \sqrt{\left[ \frac{\delta\phi}{\delta x}(i, j) \right]^2 + \left[ \frac{\delta\phi}{\delta y}(i, j) \right]^2} \tag{111}$$

En cada nudo los valores de las derivadas pueden obtenerse mediante las expresiones deducidas con anterioridad. También puede aplicarse la fórmula de resistencia, una vez calculada la velocidad en cada nudo como se vio anteriormente. El gradiente hidráulico tendrá el siguiente módulo:

$$i(i, j) = c [V(i, j)]^m \tag{112}$$

Obviamente, el valor obtenido por medio de cualquiera de las dos expresiones debe ser idéntico en todos los nudos, como se ha comprobado mediante el código MNLEE.RDF.

#### 7.4. Caudales filtrados

Admitiendo que el espaldón de aguas abajo está totalmente saturado por el agua que vierte sobre la coronación de la presa, el caudal que circula a través de distintas secciones produce una aportación o detracción de agua a través del talud (fig. 7).

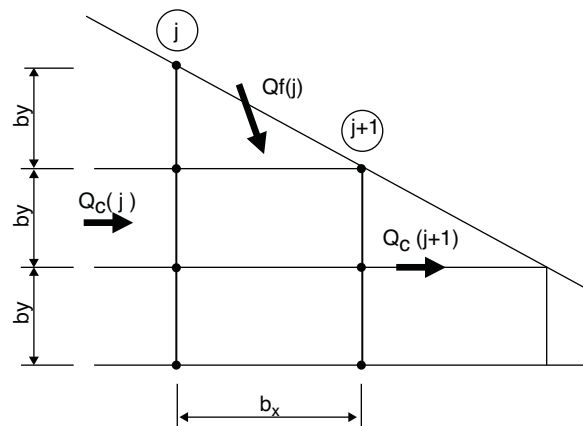


Fig. 7. Intercambio de caudales entre el interior y el exterior del espaldón de escollera.

Denominaremos:  $Q_c(j)$  el caudal que circula a través de la sección definida por la columna  $j$ ,  $Q_f(j)$  caudal que se filtra a través del talud entre las secciones definidas por las columnas « $j$ » y « $j + 1$ ». El caudal  $Q_c(j)$ , y análogamente  $Q_c(j + 1)$ , puede obtenerse por suma de los caudales circulantes entre cada dos nudos. Conocida la componente horizontal de la velocidad en cada nudo, puede considerarse una velocidad media en el interespacio entre cada dos nudos consecutivos en la misma vertical. Por tanto:

$$Q_c(j) = \sum_{i=1}^{i=n_j} \frac{1}{2} [u(i, j) + u(i + 1, j)] b_y \quad (113)$$

siendo  $n_j$  el número de nudos de la columna  $j$ .

Por diferencia entre los caudales circulantes entre cada dos secciones verticales, definidas por 2 columnas consecutivas, puede obtenerse el caudal que se filtra a través del talud, con sentido positivo, de entrada, o negativo, de salida, entre las dos secciones consideradas:

$$Q_f(j) = Q_c(j + 1) - Q_c(j) \quad (114)$$

Es claro que la suma de todos los caudales  $Q_f(j)$  debe ser nula, ya que el caudal que entra al cuerpo de presa por la parte superior sale por la parte inferior. Esto se ha comprobado al utilizar el código MNLEE.RDF.

Por otra parte, la suma de todos los caudales  $Q_f(j)$  positivos define el caudal máximo que circula por el interior del espaldón, que se denominará caudal de saturación y se denotará por  $Q_f$ . Por tanto, siguiendo el proceso expuesto puede definirse la ley de caudales entrantes y salientes a través del talud sometido a vertido, que se denominará ley de intercambio de caudales, así como el caudal que circula por el interior del espaldón, que es variable al considerar sucesivas secciones debido al intercambio de caudal que se produce a través del talud, y particularmente se podrá calcular el valor del caudal de saturación. También es posible, observando la sección en que el caudal  $Q_f(j)$  pasa de ser positivo a ser negativo, conocer la longitud de la zona de infiltración del talud, a través de la cual el agua entra en el espaldón y la longitud de la zona de emergencia, a través de la cual el agua sale del espaldón.

## 8. Código MNLEE.RDS

Como se indicó anteriormente, la formulación definida permitió implementar un código para realizar el cálculo de la red de filtración y las presiones asociadas y caudales circulantes considerando la no linealidad del movimiento. Las principales hipótesis consideradas en dicho programa se resumen en:

- Geometría definida en la [figura 8](#)
- Espaldón completamente saturado.
- Situación estacionaria.

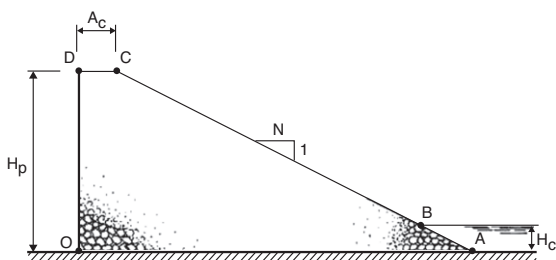


Fig. 8. Definición geométrica de la sección del espaldón en el código MNLEE.RDS.

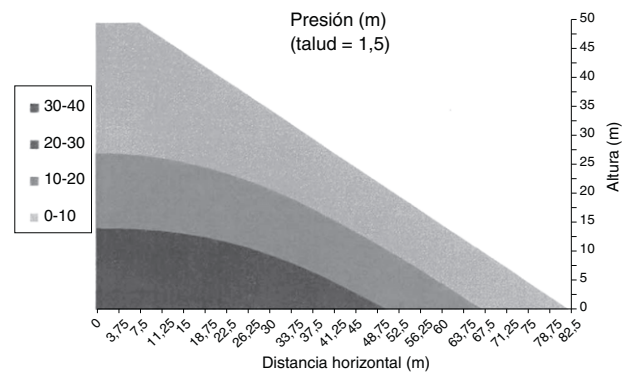


Fig. 9. Campo de presiones intersticiales representado mediante líneas isobaras.

- Movimiento no lineal (fórmula de resistencia exponencial y ecuación de campo de Parkin).
- Lámina de agua sobre el talud despreciable.

La determinación del potencial de velocidad se realiza mediante un procedimiento iterativo. Se ha definido inicialmente un valor máximo del error admisible en la determinación del potencial de velocidad en cada punto de la malla. Después de realizar el cálculo del potencial en cada nudo de dicha malla, se ha comprobado el error cometido. En el caso de que el error sea mayor que el máximo admisible se realiza una corrección del valor del resuelto para volver a realizar el cálculo. El potencial de velocidad está ajustado en todos los puntos de la malla.

En el caso de que la lámina de agua no fuera despreciable con relación al campo de potenciales existentes en el interior del dominio de filtración, el diagrama de flujo habría de completarse introduciendo un proceso iterativo para utilizar la ley de intercambio de caudales como elemento de ajuste.

## 9. Campos de presiones, velocidades y gradientes hidráulicos en una presa de escollera sometida a sobrevuerto

El código MNLEE.RDF de cálculo numérico desarrollado ha permitido modelar el movimiento del agua a través del espaldón de aguas abajo de diversos casos de presas de escollera obteniendo como resultado los campos de presiones, velocidades y gradientes hidráulicos, así como cuantificar el caudal de sobrevuerto necesario para saturar completamente el referido espaldón.

En la [figura 9](#) se representa el campo de presiones intersticiales en el espaldón de una presa de 50 m de altura y talud 1,5:1 sometido a la circulación de agua como consecuencia de un vertido sobre la coronación de la presa. La presión intersticial se expresa en metros de columna de agua, tanto en esta figura como en las demás. La modelación numérica del fenómeno de filtración se ha realizado considerando una relación no lineal entre el gradiente hidráulico y la velocidad de filtración dada por la ley de resistencia  $i = 7,13 \cdot 10^{-2} v_d^{1.85}$ . Se observa que las líneas isobaras tienden, en su recorrido de aguas arriba hacia aguas abajo, a colocarse progresivamente cada vez más paralelas al talud de la presa. El paralelismo ocurre cuando la presión del agua es la hidrostática, valor máximo que puede alcanzar la presión del agua en movimiento de lámina libre. Por tanto, el patrón de isobaras observado indica que las presiones se aproximan a ese máximo posible para cada punto, en función de su situación, en la zona del pie de presa. Esto deberá tenerse en cuenta a la hora de analizar la estabilidad



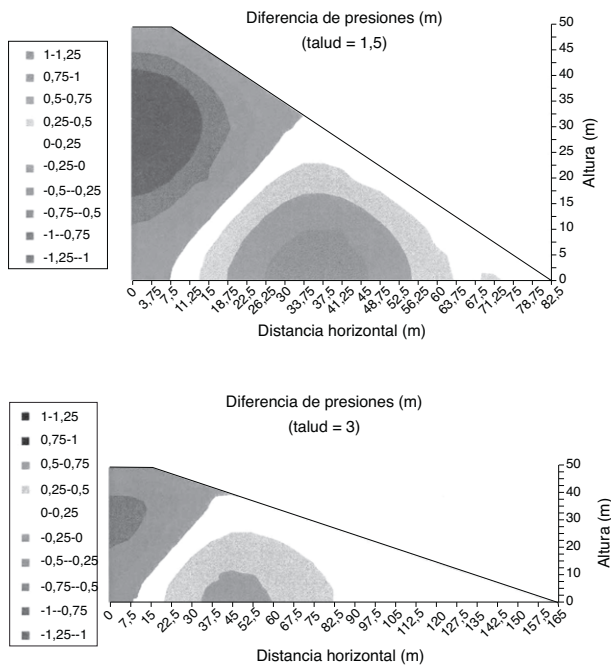


Fig. 14. Error de linealización, en presiones.

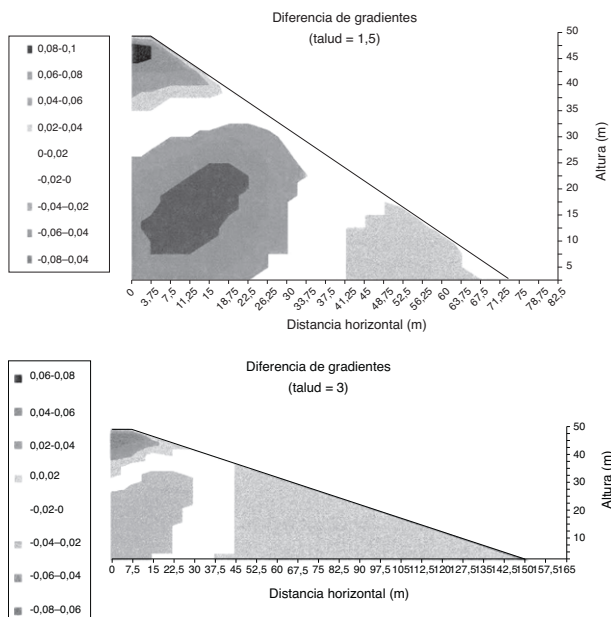


Fig. 15. Error de linealización, en gradientes hidráulicos.

vienen a representar el error de linealización, es decir, el error cometido como consecuencia de asumir una ley de Darcy cuando en realidad la ley de resistencia no es lineal. Los resultados pueden verse en las figuras 14 y 15.

Respecto de las presiones intersticiales, se observa que una línea aproximadamente ortogonal al talud separa 2 zonas en las que el error de linealización es de signo contrario: las presiones obtenidas mediante el modelo lineal son menores en la zona de pie de presa y mayores en la zona de coronación que las obtenidas mediante

el modelo no lineal. Los errores máximos se producen en zonas internas del espaldón, alejadas del talud, donde los errores son mínimos. Dado que la estabilidad de la presa depende esencialmente de las presiones intersticiales en las proximidades del talud, con los resultados obtenidos puede decirse que las presiones obtenidas mediante un modelo lineal tienen una precisión suficiente a efectos prácticos para estudiar a partir de ellas la estabilidad de la presa. Por otra parte, se aprecia que con el talud más suave el error de linealización es menor.

Respecto de los gradientes hidráulicos, se aprecia que el error de linealización es por defecto en las zonas de coronación y pie de presa, mientras que en una amplia zona central el error es por exceso. En la zona crítica de pie de presa el error de linealización no supera el valor 0,02 en ninguno de los casos, lo que supone un error moderado respecto de los gradientes de flujo en pie de presa de 0,67 para el caso de talud 1,5:1 y de 0,33 para el caso de talud 3:1.

## 11. Conclusiones

El movimiento del agua sobre y a través del espaldón de aguas abajo de una presa de escollera sometida a sobrevertido tiene algunas características particulares: a) el movimiento del agua a través de la escollera es no lineal en el sentido de que la relación entre la velocidad de filtración y el gradiente hidráulico no es lineal; b) el movimiento del agua externo, sobre el talud de escollera, es espacialmente variado, con caudales decrecientes en la zona superior, de infiltración, y crecientes en la zona inferior, de emergencia, y c) los movimientos de filtración a través de la escollera y exterior, sobre caudales de aguas abajo, están acoplados. La ley de intercambio de caudales, que define los caudales unitarios que se infiltran hacia el interior del espaldón o que emergen al exterior por el mismo, puede utilizarse como elemento de ajuste para resolver el problema acoplado de forma iterativa. Si los caudales de agua sobre el talud son suficientemente reducidos frente al campo de presiones interior, el problema de filtración puede resolverse de forma independiente obteniendo como resultado el espaldón de presiones y gradientes y también el espaldón de escollera, y también la ley de intercambio de caudales. Esto puede hacerse mediante el esquema de diferencias finitas que aquí se presenta, y que se ha implementado en el código MNLEE.RDS. La resolución del problema de filtración y, por tanto, el conocimiento de los campos de presiones, velocidades de filtración y gradientes hidráulicos, proporciona los datos necesarios para abordar el cálculo de la estabilidad de la presa y del problema de arrastre de partículas en una presa de escollera sometida a sobrevertido, abriendo la posibilidad de estudiar la seguridad de este tipo de presas en tal situación. También es posible acometer el desarrollo de criterios de diseño para que las presas de escollera sean seguras hasta un determinado caudal de sobrevertido.

## Agradecimientos

Al Ministerio de Ciencia e Innovación, como entidad financiadora del proyecto de investigación del Plan Nacional de I+D 2007-2011 denominado «Caracterización de la rotura de las presas de escollera por sobrevertido y desarrollo de criterios para evaluar la seguridad del conjunto presa-área afectada durante una avenida», (XPRES) con código de identificación BIA2007-68120-C03-02.

## Bibliografía

- [1] G.H. George, D. Hansen, Conversion between quadratic and power law for non-Darcy flow, ASCE, J. Hydraul. Eng. 118 (5) (1992) 792–797.

- [2] A. Parkin, D.H. Trollope, J.D. Lawson, Rockfill structures subject to water flow, ASCE, J. Soil. Mech. Foundations. Div. Asce. 92 (6) (1966) 135–151.
- [3] F. Englund, On laminar and turbulent flow of groundwater in homogeneous sand, Trans. Dan. Acad. Tech. Sci. 3 (1953) 1–105.
- [4] A. Parkin, Field solutions for turbulent seepage flow, ASCE, J. Soil Mech. Found. Div. 97 (1) (1971) 209–218.
- [5] R.E. Volker, Nonlinear flow in porous media by finite elements, ASCE, J. Hydraulics Div. 95 (6) (1969) 2093–2114.
- [6] M. Detert, et al., Laboratory measurements on turbulent pressure fluctuations in and above gravel beds, ASCE, J. Hydraulic Eng. 136 (10) (2010) 779–789.
- [7] M. Gerodetti, Model studies of an overtopped rockfill dam, Water Power & Dam Construct. 33 (9) (1981) 25–31.