

AGRUPACIÓN NO SUPERVISADA DE LOS PÍXELES

C. Platero Dueñas, J. Sanguino Botella, P.M. González Manchón, M.C. Tobar Punte, G. Asensio Madrid
Grupo de Bioingeniería Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid, carlos.platero@upm.es,
javier.sanguino@upm.es, pedro.gmanchon@upm.es, m.carmen.tobar@upm.es, gabriel.asensio@upm.es

Resumen

La adquisición de las imágenes presenta diferentes escalas espaciales en función de los objetos capturados de la escena. Muchas veces, las técnicas de segmentación requieren de un procesamiento previo que ayude a decidir en la partición de la imagen. La preparación de los datos exige: 1. La eliminación del ruido inherente del proceso de captura de la imagen, 2. La agrupación de los píxeles con conectividad y con similares características y 3. La separación o realce de los grupos anteriormente formados respecto a otros grupos del entorno. El planteamiento propuesto es la búsqueda de una algoritmia que localice la combinación óptima entre la difusión directa con los píxeles vecinos con características similares, combinada con difusión inversa entre los grupos naturales formados. Bajo esta idea, el trabajo se ha desarrollado en el marco de las ecuaciones en derivadas parciales (PDE, Partial Differential Equations) y el Cálculo Variacional. Estas técnicas han presentado excelentes resultados en la eliminación del ruido y en la preservación de los bordes. Sin embargo, el mayor inconveniente está en la sensibilidad en la elección de sus parámetros de control y en los tiempos de evolución de sus dinámicas. Una familia de filtros PDE sin parámetros de control ha sido presentada por Tsurkov[17]. El objetivo es mostrar una dinámica PDE óptima, sin necesidad de sintonizar los parámetros de difusión, para el agrupamiento no supervisado de los píxeles.

Palabras Clave: Difusión no lineal, PDE, Cálculo Variacional, Análisis de las imágenes.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones en derivadas parciales (PDE, Partial Differential Equations) y el Cálculo Variacional se presentan como una magnífica herramienta para el análisis de las imágenes digitales. El objetivo consiste en la eliminación del ruido de las imágenes pero preservando los detalles e incluso realizando los bordes. Con esta idea, la modelización más habitual consiste en el planteamiento de una ecuación de difusión no lineal, obtenida bien, de manera directa, considerando que la eliminación del ruido es un

proceso evolutivo o bien, a partir de la minimización de un funcional mediante la ecuación de Euler-Lagrange. Perona y Malik [12] fueron los pioneros de aplicar un filtro de difusión no lineal, planteando la ecuación:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \operatorname{div}(g(|\nabla u|) \cdot \nabla u) & u(0) &= u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial N} &= 0 & \partial \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

En la ecuación, u_0 (condición inicial) es la imagen sin filtrar y $u(t)$ es la procesada. Insertando la condición de contorno de Neumann, se asegura que no hay pérdida de masa (valor de gris) por los límites de la imagen, haciendo que la evolución sea conservativa y formulable en términos de variación del flujo. Esto es, teniendo en cuenta el Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_{\Omega} u(x,t) dx \\ H'(t) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(g(|\nabla u|) \cdot \nabla u) dx = \int_{\partial \Omega} g(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial N} dx = 0 \\ H(t) &= H(0) = \int_{\Omega} u_0 dx = CTE \end{aligned} \quad (2)$$

La media del nivel de gris de la imagen se mantiene constante a lo largo del proceso de difusión.

A $g(|\nabla u|)$ se le llama la difusividad, normalmente, de carácter monótonamente decreciente con el módulo del gradiente. Habitualmente, estas funciones de difusividad, contienen un parámetro de contraste, λ , el cual determinan el umbral entre la difusión directa y la difusión inversa.

El objetivo de este trabajo consiste en establecer un procesamiento de manera que aparezca de forma natural la agrupación de los píxeles a diferentes escalas, sin necesidad de realizar ajustes de parámetros en el proceso evolutivo. Esta formulación del problema lleva de forma implícita al realce de los bordes en diferentes rangos de pendiente y la reducción del ruido. Para proceder a este requisito, la propuesta común suele ser la aplicación de difusión inversa en la variabilidad de la componente normal a la curva de nivel (*level set*) combinado con una difusión directa en la componente tangencial[3][7]. Esta estrategia está muy unida a los filtros shock[11].

Para plantear este procesamiento se requiere considerar un procedimiento de regularización de las imágenes. Regularizar una imagen es minimizar un funcional de energía que mida las variaciones de la imagen global; presentándose como un problema del Cálculo Variacional:

$$E(u) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |u_0 - u|^2 dx \quad (3)$$

La primera componente trata de suavizar la imagen, mientras la segunda busca la fidelidad de la imagen de salida con la entrada. Este segundo término resulta perjudicial para el realce, ya que no permite evolucionar la imagen hacia una separación de los grupos naturales existentes. Centrados sobre el proceso de optimización del suavizado, al insertar la condición necesaria de Euler-Lagrange y la localización del óptimo mediante el método del gradiente descendiente, queda el siguiente marco evolutivo[2]:

$$\partial_t u = \operatorname{div} \left(\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \cdot \nabla u \right) = \operatorname{div} (g(|\nabla u|) \cdot \nabla u) \quad (4)$$

Esta expresión une la difusión no lineal con el proceso de regularización de la imagen. Desarrollando la anterior ecuación se llega a la expresión que permite introducir los conceptos de difusión directa e inversa:

$$\partial_t u = \operatorname{div} \left(\frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \cdot \nabla u \right) = \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\xi\xi} + \phi''(|\nabla u|) u_{\eta\eta} \quad (5)$$

Siendo $\vec{\eta}$ el vector normal unitario a la curva de nivel y $\vec{\xi}$ el vector perpendicular al anterior y positivamente orientado. Atendiendo al valor de las segundas derivadas de $\phi(|\nabla u|)$, el proceso evolutivo PDE se clasifica en convexo ($\phi''(|\nabla u|) > 0$) y en cóncavo ($\phi''(|\nabla u|) < 0$). Los primeros filtros son propios de tareas de suavizado, mientras los segundos están especializados en el realce de la imagen. Los ejemplos de funcionales convexos van desde la difusión homogénea o funcional de Tikhonov[16] hasta los de mínima superficie[5] o el funcional de Green[6]. La difusividad de Perona-Malik procede de un funcional que pasa de convexo a cóncavo y viceversa, en función del módulo del gradiente y del parámetro de contraste. Un funcional puramente cóncavo es BFB (*Balanced Forward Backward*)[7] especializado en el realce de bordes en diferentes niveles de escala. El filtro TV (*Total Variation*)[14] tiene origen en un funcional límite entre la convexidad y la concavidad, $\phi''(|\nabla u|) = 0$;

su característica más sobresaliente es el suavizado de las regiones, preservando parcialmente los bordes, aunque con una tendencia a disminuir la discrepancia entre los grupos.

El artículo se estructura del siguiente modo. Primero, en la sección 2 se introducen las problemáticas de funcionales no convexos para el filtrado y realzado de las imágenes. En la sección 3 se presenta una formulación general de la difusión no lineal en términos de variación del flujo sobre las componentes normal y tangencial, unidas con el laplaciano orientado. Posteriormente se procede aplicarlo en la familia de difusividad de Tsurkov. En la sección 4, se presenta la implementación y los resultados experimentales. Finalmente, en la sección 5 se tienen las conclusiones.

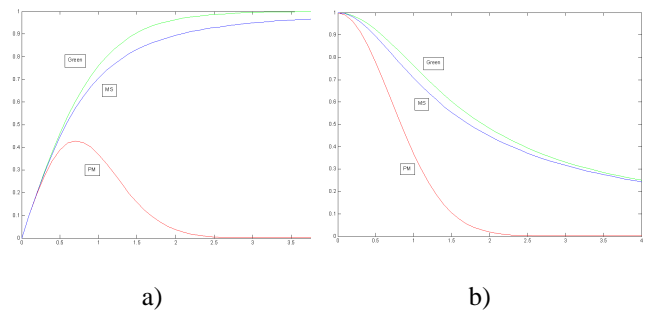


Figura 1: a) Difusividades, $g(s)$, de algunos funcionales [5][6][12] b) Los flujos, $g(s)s$, o primera derivada del funcional.

2. PROBLEMÁTICA DE FUNCIONALES NO CONVEXOS

Uno de los primeros objetivos, cuando se utilizan funcionales no convexos, es sintonizar los parámetros de control y los tiempos de difusión adecuados para evitar la ruptura del principio del máximo con la evolución de esta PDE. El origen de la inestabilidad se encuentra en la aplicación de la difusión inversa. Eventualmente, se ha resuelto el mal condicionamiento del problema en el espacio continuo con un suavizado en su discretización[8]. Sin embargo, la evolución del realce de los bordes de la imagen digital, con estas estrategias, produce un redondeado no deseado en las esquinas (efecto de viscosidad numérico, bien por la implementación digital en derivadas centrales, bien por la convolución previa de la imagen con una máscara de Gauss).

Por otro lado, en la difusión en los bordes aparece una mayor influencia de la componente normal sobre la tangencial. El proceso de difusión se explica mayormente por el vector gradiente. En el caso del filtro no lineal de Perona-Malik, cuando el módulo del gradiente supera el parámetro de control λ , la

difusión es inversa. Si la pendiente del borde es moderada se produce el realce. Sin embargo, cuando la pendiente del borde es elevada se produce una escalera en el borde o varias transiciones intermedias entre los extremos del borde[9].

Para evitar los inconvenientes citados, se suele ajustar el parámetro de contraste λ , de manera que disminuya con el paso del tiempo. En las primeras iteraciones, se fomenta la difusión directa, regularizando la imagen, lo cual impide la segmentación a tramos de los bordes, aunque se hace más insensible a las pequeñas estructuras. Con la evolución del tiempo, se disminuye la difusión directa y se potencia el realce con la inversa[19][9].

Ambos inconvenientes, redondeos de las esquinas y la aparición de los efectos escaleras, se resuelven ajustando los parámetros de control y los tiempos de difusión. Éstas son tareas tediosas y en sentido contrario a la automatización del análisis de las imágenes. Estos inconvenientes son el objeto de este trabajo: buscar un compromiso entre la difusión directa e inversa sin necesidad de sintonizar los diversos parámetros de la evolución PDE, con el propósito de que éstos estén implícitos en su dimensión analítica.

3. FLUJO PARA EL AGRUPAMIENTO NATURAL DE LOS PÍXELES

Antes de establecer los argumentos fundamentales del planteamiento presente, es importante establecer ciertas definiciones. Se llama ‘vector de flujo’ a:

$$F(u) = g(|\nabla u|) \cdot \nabla u = \phi'(|\nabla u|) \cdot \vec{\eta} \quad (6)$$

Se entiende que el flujo en la dirección x_i es la variación del vector de flujo en la dirección x_i proyectada sobre esta componente. Esto es, el flujo será un escalar. De esta manera la ecuación de difusión no lineal se expresa:

$$\partial_t u = \text{div}(g(|\nabla u|) \cdot \nabla u) = \sum_i \partial_{x_i} (g(|\nabla u|) \cdot \partial_{x_i} u) \quad (7)$$

Un análisis para la localización del comportamiento óptimo entre las fuerzas de cohesión y de repulsión entre los píxeles, se hace a través de una formulación mediante una ponderación de vector flujo en las distintas componentes alrededor de un píxel.

Desde un punto de vista conceptual, se piensa que es importante expresar la ecuación de difusión en términos establecidos por la dirección del gradiente en cada punto de las curvas de nivel. De esta manera

se obtiene una formulación intrínseca y geométrica del problema que da una expresión en función de un sistema de vectores $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$; función del vector gradiente en cada punto de la curva de nivel. De esta manera, surge de manera natural el ‘flujo tangencial’, asociado a la componente tangencial y el ‘flujo normal’ unido a la componente normal. Esto es, se propone una expresión para la difusión no lineal de la forma[15]:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \vec{\xi} \cdot \nabla_{\vec{\xi}} (F(u)) + \vec{\eta} \cdot \nabla_{\vec{\eta}} (F(u)) \\ \partial_t u &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\frac{F(\vec{x} + \Delta h \cdot \vec{\xi}) - F(\vec{x})}{\Delta h} \cdot \vec{\xi} \right) + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\frac{F(\vec{x} + \Delta h \cdot \vec{\eta}) - F(\vec{x})}{\Delta h} \cdot \vec{\eta} \right) \\ \partial_t u &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\frac{F(\vec{x} + \Delta h \cdot \vec{\xi}) \cdot \vec{\xi}}{\Delta h} \right) + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\frac{F(\vec{x} + \Delta h \cdot \vec{\eta}) \cdot \vec{\eta} - |F(\vec{x})|}{\Delta h} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

El primer término está asociado a la difusión tangencial en la curva de nivel y el segundo a la componente normal. Esta nueva formulación tiene una gran ventaja: el análisis de la variación del flujo alrededor del sistema de referencia de la curva de nivel, pudiendo explicar el comportamiento del flujo proyectado en términos de variación alrededor del píxel (derivadas parciales de la intensidad). Con la expresión clásica de la ecuación (5), las variaciones de flujo están implícitas en las derivadas del funcional y en las componentes del laplaciano orientado, esto es, el flujo aparece en función de la segundas derivadas y no como una función monovariable explícita de las primeras derivadas parciales.

Buscar el equilibrio entre los flujos tangenciales y normales supone aplicar la difusión inversa en la componente normal y directa en la tangencial. La primera tenderá a aumentar la separación entre las curvas de nivel, mientras la segunda tratará de suavizar dichas curvas, volviéndolas convexas y cerradas. Por ejemplo, la aplicación de curvatura media, que plantea sólo difusión directa en la componente tangencial, hace que los grupos naturales o superpíxeles eliminen sus elementos espurios y se vuelva convexo y cerrado[10]. En el otro extremo, la difusión inversa estabilizada, con el operador *minmod*, produce un realce de los bordes según el signo del laplaciano[11]. El objetivo es buscar un compromiso óptimo entre ambos flujos, tangencial y normal. Ejemplo de este hecho se puede localizar en Álvarez y Mazorra[3]. En cualquier caso, esta búsqueda del flujo óptimo está condicionada por la localización de un funcional cuya primera derivada del funcional sea positiva y la segunda negativa, $\phi'(|\nabla u|) > 0, \phi''(|\nabla u|) < 0$, consiguiendo una difusión directa e inversa.

3.1 FAMILIA DE DIFUSIVIDAD SIN PARÁMETROS DE CONTROL

Una familia de funciones de difusividad sin parámetros de control ha sido tratada por Tsurkov[17], sin ser aplicadas al análisis de las imágenes:

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{|\nabla u|^p} \quad F(u) = \frac{\bar{\eta}}{|\nabla u|^{p-1}} \quad p \in \mathfrak{R}, p \geq 0 \quad (9)$$

En esta familia está contenida la difusión homogénea [16], $p=0$, TV[14], $p=1$, y BFB [7], $p=2$. El funcional quedará definido por:

p	$\phi(s)$	$g(s)=\phi'(s)/s$	$\phi''(s)$	$\phi''(\nabla u)/g(s)$
$p \geq 0$ $p \neq 2$	$\frac{s^{2-p}}{2-p}$	$\frac{1}{s^p}$	$(1-p)s^{-p}$	$(1-p)$
$p = 2$	$\log(s)$	$\frac{1}{s^2}$	$-\frac{1}{s^2}$	-1

Para esta familia, la componente tangencial siempre corresponde a una difusión directa. En cuanto a la componente normal, el proceso de difusión es directo si $p < 1$ y se convierte en difusión inversa cuando $p > 1$. En la figura 2 se muestra la familia de difusividad para diferentes valores de p y su correspondiente flujo en 1D.

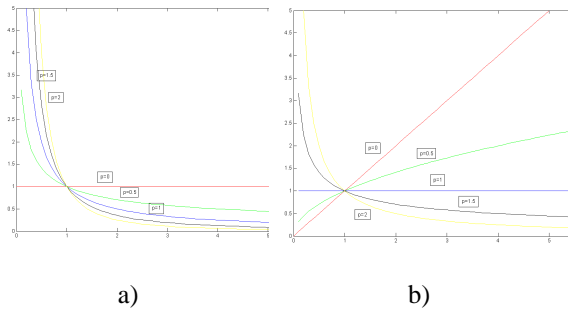


Figura 2: a) Difusividades, $g(s)$, de la familia de Tsurkov para distintos valores de p b) Los correspondientes flujos 1D

Como ya se ha comentado, la aplicación de una difusión inversa en la componente normal requiere $p > 1$. Ahora, ¿cuánto debe de ser p ? El valor de p es un compromiso entre la difusión directa y la inversa. En definitiva, el problema comentado en la introducción: buscar el óptimo entre el flujo normal y tangencial. Para su análisis, la variación del flujo se expresa de forma explícita y en segundas derivadas:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\frac{F(\bar{x} + \Delta h \cdot \bar{\xi}) \cdot \bar{\xi}}{\Delta h} \right) + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\frac{F(\bar{x} + \Delta h \cdot \bar{\eta}) \cdot \bar{\eta} - |F(\bar{x})|}{\Delta h} \right) \\ \partial_x u &= \frac{1}{|\nabla u|^p} (u_{\xi\xi} + (1-p) \cdot u_{\eta\eta}) \end{aligned} \quad (10)$$

La relación entre el flujo de normal y tangencial se mantiene constante con valor $1-p$, con independencia del valor del módulo del gradiente. El análisis sólo se plantea para $p > 1$.

Efectivamente, el flujo tangencial es dominante cuando p es próximo a 1. Se caracterizará por una regularización de las curvas de nivel. A medida de que aumenta p , el flujo normal empieza a ser de la misma entidad que el tangencial. Aparecen fuerzas de repulsión entre las curvas de nivel. Si p se hace grande, hay más variabilidad en el flujo normal, por lo que máximos (mínimos) locales se verán afectados, pudiendo romper el Principio del Máximo e inestabilizar la imagen resultado. También es verdad que el realce se amplifica a medida que aumenta el valor de p . Experimentalmente se ha llegado a la conclusión que un compromiso entre el flujo tangencial y normal está para $p = 1.5$.

4. NUMÉRICO – EXPERIMENTAL

La resolución de las dinámicas PDE en el espacio discreto no necesariamente exhiben el mismo comportamiento que en el continuo; tal cual se observó en la implementación de difusión digital de Perona-Malik[8]. La formulación de la divergencia como un balance del flujo alrededor del píxel, permite establecer un escenario numérico de forma conservativa que para el caso 1D queda como:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(u_{i-p}^k, u_{i-p+1}^k, \dots, u_{i+q}^k) - F(u_{i-p-1}^k, u_{i-p}^k, \dots, u_{i+q-1}^k)] \quad (11)$$

Donde k es el número de la iteración y F es la función del flujo numérico. Obviamente, deberá de imponerse algunas condiciones de consistencia entre el flujo discreto y el flujo continuo. En la implementación suele utilizarse $p=0$ y $q=1$:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(u_i^k, u_{i+1}^k) - F(u_{i-1}^k, u_i^k)] \quad (12)$$

Este marco es fácilmente extensible a 2D[13]. Uno de los mayores inconvenientes de esta familia de funciones de difusividad está en la carencia de límite cuando el módulo del gradiente tiende a ser nulo. Una solución a este problema ha sido desarrollada en el ámbito de la regularización TV, añadiendo una pequeña constante ϵ [1]. La familia de Tsurkov quedaría como:

$$g(|\nabla u|^2) = \frac{1}{(|\nabla u|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{p}{2}}} \quad p \in \mathfrak{R}, p \geq 0 \quad (13)$$

Sin embargo, resulta más adecuado el cálculo de la difusividad reemplazando el módulo, para valores bajos, por la pequeña constante ε , $g(\max\{s, \varepsilon\})$. En cualquier caso, el límite de difusividad, cuando el módulo del gradiente tiende a ser nulo, es $\frac{1}{\varepsilon^p}$. En un escenario conservativo explícito la condición de estabilidad sería $\Delta t \leq \frac{\varepsilon^p}{2 \cdot D}$ (siempre se considera que Δh es unitario). Esta solución tiene algunos inconvenientes. Para valores bajos de la constante, el nivel de paso de cada iteración, Δt , en el escenario explícito es muy bajo, haciendo que el proceso de difusión sea muy lento. Por el contrario, si se eleva Δt hay pérdidas de consistencia entre el flujo numérico y el flujo continuo. Un solución de compromiso, para imágenes en el rango de 0 a 255 niveles de grises, es $\varepsilon = 0.001$ [4].

Una forma de acelerar la dinámica PDE planteada es utilizar un método semi-implícito como es AOS[18]. Una adaptación del método se requiere para utilizar un planteamiento de diferencias progresivas y regresivas del escenario conservativo en vez de diferencias centrales utilizadas en AOS:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = A(u^k)u^{k+1} \quad A(u^k) = (a_{ij}(u^k))$$

$$a_{ij}(u^k) = \begin{cases} \frac{g_{ij}}{\Delta h^2} & j \in N(i) \\ -\sum_{j \in N(i)} \frac{g_{ij}}{\Delta h^2} & i = j \\ 0 & j \notin N(i) \end{cases} \quad (14)$$

$$(I - \Delta t \cdot A(u^k))u^{k+1} = u^k$$

4.1 EXPERIMENTAL

Siguiendo a Keeling[7] se ha utilizado una señal de test 1D formada por diferentes pendientes de bordes, construida a partir de la suma de seis funciones de la forma $a(1 + bx^2)^c$. Los filtros han sido probados con la señal y con una mezcla de ruido blanco, con SNR de 22dB. El número de iteraciones es de 10, manteniéndose el mismo coste computacional para todos los filtros. Los parámetros de control y el paso han sido sintonizados para obtener los mejores resultados. El parámetro de control ha sido calculado empleando como umbral el de menor valor para las pendientes más pequeñas de los bordes. Cuando la

imagen no está contaminada el parámetro de control resulta evidente, $\lambda = 0.003$. Con ruido, hay que buscar un compromiso entre el ruido y el nivel de la pendiente.

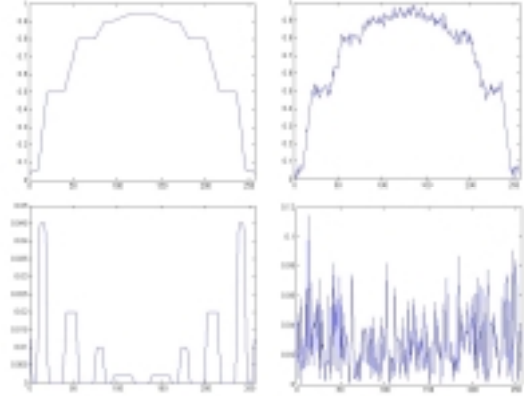


Figura 3: a) Señal sintética con diferentes pendientes en los bordes, b) Señal de entrada (sintética+ruido blanco), SNR = 22db, c) diferencia progresiva de la señal sintética, d) diferencia de la señal de entrada

El paso para la familia de Tsurkov es establecido experimentalmente a partir de los resultados obtenidos con la implementación semi-implícita AOS. Dos factores se siguieron:

1. Cuasi invarianza hacia las rotaciones: al descomponerse la solución de cada iteración en las componentes X e Y, debido al algoritmo de Thomas, un fuerte incremento en el paso no considera las interacciones entre ambas componentes.
2. Compromiso entre el flujo tangencial y normal: a medida que aumenta el valor de p, la variabilidad del flujo normal es más elevado, pudiendo volver inestable el resultado. Por tanto, el paso debe disminuir a medida que aumenta el valor de p.

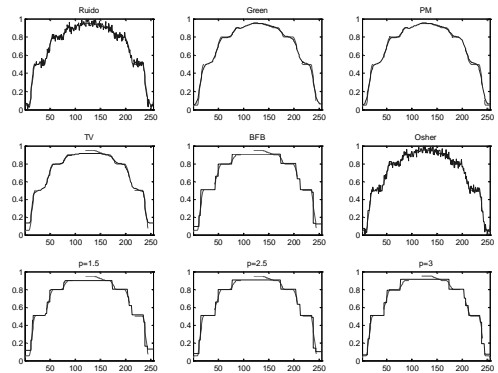


Figura 3: Resultados con diferentes difusividades, parámetros de control y paso. Número de iteraciones 10.

A partir de la señal 1D se ha construido una imagen sintética mediante el proceso de revolución con un eje axial, buscando simetría radial en el resultado. La

imagen sintética también servirá para determinar el nivel de paso de evolución del AOS para que sea consistente el flujo continuo y el discreto. El paso para la familia de Tsurkov fue: 0.1 ($p=1$), 0.01 ($p=1.5$), 0.005 ($p=2$). Los resultados han sido comparados con el funcional de Perona-Malik y el shock de Álvarez y Mazorra. Sus parámetros fueron sintonizados, con la única condición de que el resultado final se tuviera en 10 iteraciones. La señal sintética se mezcló con ruido blanco, con un SNR de 11.5 dB.

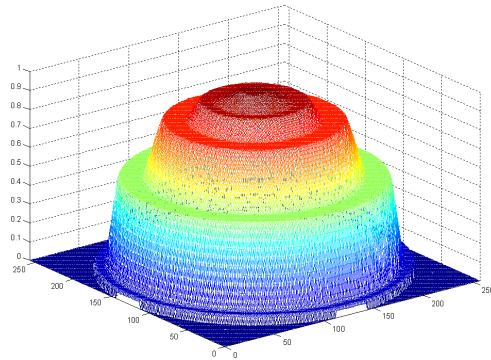


Figura 4: Representación 3D de la imagen sintética con diferentes pendientes en los bordes

El algoritmo de agrupación 2D de los píxeles se basa en que las derivadas progresivas y regresivas de los píxeles deben ser prácticamente nulas:

$$\partial_x^+ u = \partial_x^- u = \partial_y^+ u = \partial_y^- u \approx 0 \quad (15)$$

El procesamiento morfológico de etiquetamiento sobre la imagen resultante muestra los grupos formados. Para una mejor visualización, a cada grupo se le ha dado un color diferente.

Los experimentos también se han realizado sobre otros tipos de imágenes.

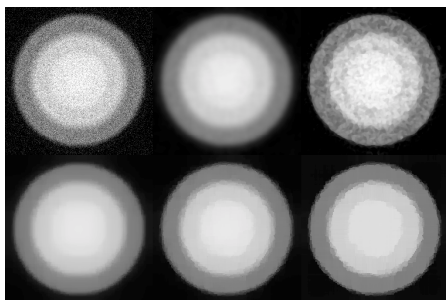


Figura 5: a) señal de entrada, b)Perona Malik, c) Alvarez-Mazorra, d)TV, e)p=1.5, f)BFB

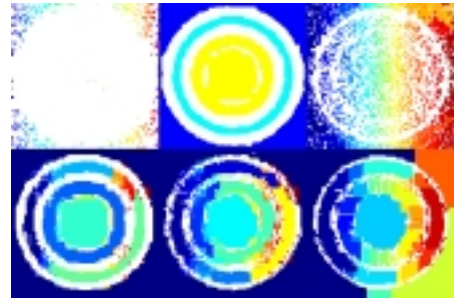


Figura 6: Agrupación de los píxeles, a) Sin procesar, b) Perona-Malik, c) Shock Álvarez-Mazorra, d) TV, e)p=1.5, f)BFB



Figura 7: a) señal de entrada, b)Perona Malik, c) Alvarez-Mazorra, d)TV, e)p=1.5, f)BFB



Figura 8: Agrupación de los píxeles, a) Sin procesar, b) Perona-Malik, c) Shock Álvarez-Mazorra, d) TV, e)p=1.5, f)BFB

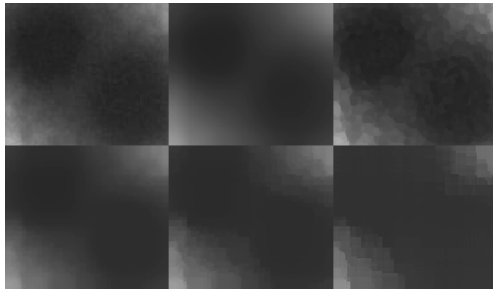


Figura 9: a) señal de entrada, b)Perona Malik, c) Alvarez-Mazorra, d)TV, e)p=1.5, f)BFB

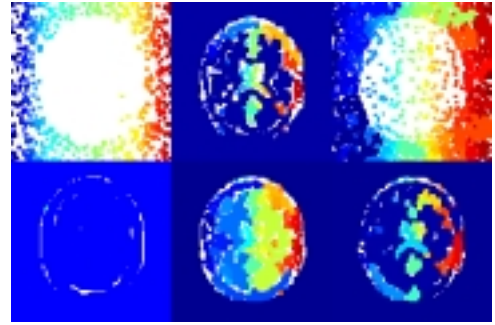


Figura 12: Agrupación de los píxeles, a) Sin procesar, b) Perona-Malik, c) Shock Álvarez-Mazorra, d) TV, e)p=1.5, f)BFB

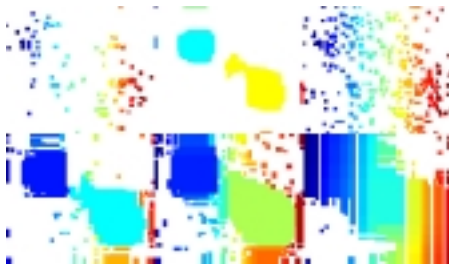


Figura 10: Agrupación de los píxeles, a) Sin procesar, b) Perona-Malik, c) Shock Álvarez-Mazorra, d) TV, e)p=1.5, f)BFB

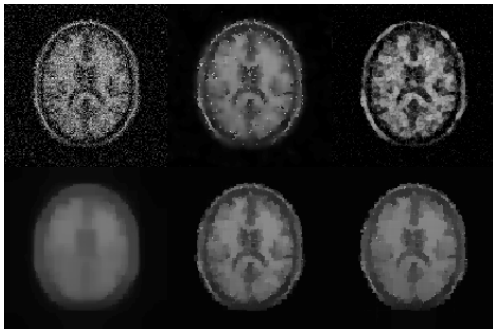


Figura 11: a) señal de entrada, b)Perona Malik, c) Alvarez-Mazorra, d)TV, e)p=1.5, f)BFB

5. CONCLUSIÓN

Los algoritmos de procesamiento de las imágenes para las tareas de segmentación precisan agrupar los píxeles y realzar los grupos naturales formados. Ambas acciones son contradictorias. El agrupamiento requiere de la eliminación del ruido y de otro lado, la separación de los grupos exige del realce de un amplio rango de pendientes de los bordes. La solución es un compromiso entre ambas tendencias.

El trabajo realizado se ha presentado en el marco PDE y del Cálculo de Variaciones. El filtro resultante tiene una evolución PDE, sin parámetros de control y correspondiente a la familia de Tsurkov. Además se ha observado sobre diferentes tipos de imágenes 2D que se puede mantener fijo el paso de tiempo. Ambas propiedades, no hay parámetros de control y el incremento de tiempo es fijo, resultan ser muy importantes para la automatización de los algoritmos de segmentación, ya que evitan la tediosa operación de sintonización de los parámetros de control y de la evolución temporal.

El planteamiento para la localización del compromiso se ha realizado a través de la redefinición de la difusión no lineal en términos de variación del flujo. Se han explicitado las propiedades de los flujos tangenciales y normales de los píxeles, así como su relación con el laplaciano orientado. Experimentalmente se ha localizado el compromiso entre ambos flujos para $p=1.5$. Sobre diferentes imágenes 2D se ha aplicado una batería de diferentes filtros (Perona-Malik, Alvarez y Mazorra, TV, BFB y el propuesto). Se fijó el número de iteraciones y se sintonizaron los parámetros de control y de tiempo, en aquellos filtros que lo requerían. Posteriormente, se aplicó la condición de que las derivadas parciales en X e Y deberían ser prácticamente nulas para la definición del grupo

natural. Los resultados fueron coloreados, dando a cada grupo natural un color distinto. El filtro propuesto genera mejores resultados en el agrupamiento no supervisado de los píxeles.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la financiación de Ayudas Puente UPM a los grupos de investigación.

Referencias

[1] R. Acar and C.R. Vogel, Analysis of Bounded Variation Penalty Methods for ill-posed Problems, *Inverse Problems*, Vol. 10, pp. 1217 – 1229, 1994.

[2] L. Alvarez, F. Guichard, P.-L. Lions, and J.-M. Morel, Axioms and Fundamental Equations in Image Processing, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 123, pp. 199 – 257, 1993.

[3] L. Alvarez, L. Mazorra, Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion, *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 31, No. 2, pp. 590-605, 1994.

[4] T. Brox, From Pixels to Regions: Partial Differential Equations in Image Analysis, Ph Thesis, Saarland University, 2005.

[5] P. Charbonnier, G. Aubert, M. Blanc-Féraud, and M. Barlaud. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume II, 168-172, 1994.

[6] P.J. Green. Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified em algorithm. *IEEE Trans. Med. Imaging*, MI-9(1):84-93, March 1990.

[7] S. L. Keeling and R. Stollberger. Nonlinear anisotropic diffusion filters for wide range edge sharpening. *Inverse Problems*, 18:175–190, January 2002.

[8] S. Kichenassamy. The Perona–Malik paradox. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 57:1343–1372, 1997.

[9] X. Li and T. Chen, Nonlinear Diffusion with Multiple Edginess Thresholds, *Pattern Recognition*, Vol. 27, pp. 1029 – 1037, 1994.

[10] R. Malladi, J. Sethian, and B. Vemuri, Shape modeling with front propagation: A level set approach, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17 (1995), pp. 158-175.

[11] S.J. Osher and L. I. Rudin, Feature-oriented image enhancement using shock filters, *SIAM J. Numer. Anal.* 27, pp. 919-940, 1990.

[12] P. Perona and J. Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:629–639, 1990.

[13] I. Pollak, “Nonlinear Scale-Space Analysis in Image Processing,” Ph.D. dissertation, Lab. Inform. Decision Syst., Mass. Inst. Technol., Cambridge, MA, 1999.

[14] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physical D*, 60:259-268, 1992.

[15] J. Sanguino, Relaciones de las curvas de nivel con la ecuación del calor, trabajo interno del Grupo de Bioingeniería Aplicada (UPM), 2005 (web)

[16] A.N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Soviet. Math. Dokl.*, 4:1624-1627, 1963.

[17] V. I. Tsurkov. An analytical model of edge protection under noise suppression by anisotropic diffusion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 39(3):437–440, 2000.

[18] J. Weickert, B. M. ter Haar Romeny, and M. A. Viergever. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):398–410, March 1998.

[19] R.T. Whitaker and S.M. Pizer, A Multi-Scale Approach to Non uniform Diffusion, *CVGIP: Image Understanding*, Vol. 57, pp. 99 – 110, 1993.