Una caja informática de herramientas matemáticas

Alfonsa García, Francisco García
Universidad Politécnica de Madrid.
Departamento de Matemática Aplicada. E.U. Informática
alfonsa.garcia@eui.upm.es , gmazario@eui.upm.es

Gerardo Rodríguez
Universidad de Salamanca.
Departamento de Matemática Aplicada. E.P.S. de Zamora
gerardo@usal.es

Victoria Rodríguez
IES La Ería. Oviedo
victoria@educastur.princast.es

Agustín de la Villa
Universidad Pontificia Comillas.
Departamento de Matemática Aplicada y Computación. ETSI (ICAI)
Universidad Politécnica de Madrid
Departamento de Matemática Aplicada. E.U.I.T. Industrial.
avilla@upco.es

Abstract

In this paper one approach of one teaching model based in competences will be analyzed. We promote the use of a Computer Algebra System and we suggest the students have to design their own toolbox, implementing elementary algorithms to be used further (in Mathematics or other related topics). As an example we propose a toolbox with several tools for the study of planar geometry to be used in the first year in High School.

Dedicado a *Eugenio Roanes Macías*,
gran amante de la Educación Matemática y de la Geometría

Resumen

Se presenta en este trabajo una propuesta de actividad para un modelo de aprendizaje basado en competencias y con apoyo de herramientas informáticas. Se sugiere que el estudiante diseñe y elabore una "caja de herramientas" con la implementación, en un sistema informático, de algoritmos matemáticos elementales, que podrá utilizar posteriormente en la resolución de problemas tanto de matemáticas como de otras asignaturas. Como ejemplo se propone una caja que contiene herramientas relacionadas con aspectos de la geometría del plano estudiados en primer curso de Bachillerato.

Introducción

En la actualidad se nos está pidiendo a los profesores que cambiemos el modelo de enseñanza tradicional para adaptarnos al "aprendizaje basado en competencias". Se trata de definir lo que tiene que ser capaz de hacer el estudiante, tras haber cursado una determinada materia y diseñar una serie de actividades que le permitan alcanzar las competencias marcadas.

El cambio puede ser un fracaso si no se pone en ello una buena dosis de esfuerzo, imaginación, sentido común e ilusión. Hay que contar con la inercia del sistema y la dificultad para diseñar actividades efectivas, ya que los profesores, en general, tenemos una gran experiencia en preparar y dar clases expositivas, más o menos participativas, y hemos trabajado mucho para encontrar la forma más adecuada de introducir y presentar los conceptos y resultados, pero no tenemos experiencia en dirigir actividades de aprendizaje autónomo.

Además, parece que el uso de la tecnología se está imponiendo en mayor medida en el propio domicilio que en las aulas, tanto para profesores como para estudiantes (ver [4]). Casi todos los profesores y estudiantes de bachillerato hacen uso privado de Internet. Pero pocas planificaciones docentes incluyen un uso dirigido de tecnologías.

Por ejemplo, cuando se encarga a los alumnos la realización de trabajos que incluyen la búsqueda de información sobre algún tema, sabemos que muchos de ellos se limitan a hacer un "copy & paste" de Wikipedia, a veces sin ni siquiera leerlo para ver si se adapta al guión propuesto. En ocasiones, los profesores "se defienden" de esto pidiendo que entreguen el trabajo escrito a mano (para asegurarse de que al menos lo leen al copiarlo) o prohibiendo el uso de Internet. Pero lo interesante no sería esto, sino que se les dirija para hacer una verdadera labor de búsqueda, contraste de la información y elaboración propia del trabajo. Los profesores debemos asumir una tarea más: dirigir a los estudiantes para un uso adecuado de las herramientas tecnológicas.

Nuestra opinión es que estamos abocados a diseñar cursos de matemáticas en los que deben mezclarse: clases magistrales (teoría y problemas resueltos con detalle por el profesor), talleres de problemas y prácticas en el laboratorio (en los que el protagonista es el alumno) y actividades de trabajo dirigido, para que el alumno pueda alcanzar las competencias previstas. Las prácticas de laboratorio deben estar preparadas con unos objetivos claros. Nuestra propuesta es que el ordenador, con un sistema informático de cálculo matemático (Computer Algebra System o CAS) ayude a la realización automática de determinadas tareas en el proceso de resolución de problemas. Para ello, en ocasiones será adecuada la utilización de determinadas funciones o comandos que pueden venir incorporados al sistema o haber sido preparados por el profesor o construidos por los propios estudiantes. En el CD que acompaña a [1] se pueden ver algunos ejemplos de cómo llevar a la práctica estas ideas.

Además, el nuevo modelo de enseñanza va encaminado a un trabajo más autónomo del estudiante, que le permite el acceso a las tecnologías informáticas fuera de las prácticas regladas, por lo que es imprescindible que adquiera la capacidad de hacer un uso óptimo de ellas. Se debe potenciar las ventajas que poseen los CAS: visualización, potencia de cálculo, posibilidad de experimentación, evitando los posibles efectos perniciosos como falta de sentido crítico ante la respuesta del ordenador, incapacidad de interpretar los resultados obtenidos, etc.

En cualquier caso, todas las actividades propuestas, para que sean efectivas, se deben diseñar sin perder de vista los objetivos pretendidos, teniendo en cuenta fundamentalmente a los estudiantes a los que van dirigidas.

1. Diseño de la caja de herramientas matemáticas

Las asignaturas de Matemáticas del bachillerato o las de los primeros cursos de Ingeniería tienen como principal objetivo iniciar al estudiante en el lenguaje de la Ciencia y Tecnología y capacitarle para el uso correcto de determinados algoritmos en la resolución de problemas.

Con frecuencia, los profesores nos quejamos de que los estudiantes no son capaces de utilizar fuera del contexto de la asignatura (por ejemplo en cursos sucesivos) las destrezas matemáticas supuestamente adquiridas en los cursos básicos. Tienen una especie de "pereza mental" que les impide recordar y utilizar lo que aprendieron y en muchas ocasiones tampoco disponen de un modo rápido y eficaz de localizar la información y los métodos adecuados.

Los profesores que hacen uso en clase de algún CAS, a veces, piden a los estudiantes que definan algunas utilidades que les permiten automatizar determinadas tareas sencillas, como por ejemplo definir una función para calcular la tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto y usarla posteriormente en algún problema. Pero, en general, en estos casos no pretenden otra cosa que ayudarles a entender el algoritmo correspondiente y no aspiran a que el estudiante diseñe un recurso propio ni a que utilice en cursos sucesivos las funciones implementadas.

Una actividad formativa, a la vez que útil, es proponer a los estudiantes que construyan su propia "Caja de herramientas" bien ordenada, para la resolución de problemas matemáticos. Esta caja de herramientas no será otra cosa que un fichero o colección de ficheros de utilidades programadas en el lenguaje de programación propio de algún CAS (Derive, Maple, Maxima) o incluso en alguna calculadora con capacidades simbólicas o gráficas como la TI92 o la Casio ClassPad 300.

El acceso a la caja de herramientas tendrá carácter formativo o meramente instrumental dependiendo de que la programación de la herramienta utilizada sea o no visible al alumno. En el primer caso, el alumno puede repasar y ejecutar la herramienta y en el segundo caso simplemente ejecutarla. En un primer nivel, parece más aconsejable la utilización de un sistema informático que permita en todo momento que el alumno conozca qué está haciendo la herramienta que ha seleccionado.

El profesor deberá proponer una serie de herramientas imprescindibles, de acuerdo con la asignatura correspondiente, que debe contener la caja. Los estudiantes deberán definir las funciones correspondientes, probarlas y añadir las que consideren oportunas. Además deberán completar el trabajo redactando un "breve manual de uso" de su fichero de utilidades.

Si han hecho una buena caja de herramientas, además de haber entendido bien los algoritmos, dispondrán de un recurso propio que podrán utilizar en otras asignaturas del mismo curso o de cursos sucesivos.

Antes de acabar las ideas generales sobre las cajas de herramientas es necesario poner de manifiesto que prácticamente cualquier CAS es una caja de herramientas muy completa y que sólo por comodidad de uso o como estrategia docente será necesario o conveniente construir nuevas utilidades o bien modificar las ya existentes, para adaptarlas a las necesidades específicas del usuario.

2. Una caja de herramientas geométricas

Tras leer el libro “La experiencia de descubrir en Geometría” de Miguel de Guzmán [2], que es un buen ejemplo de cómo usar una caja de herramientas geométricas básicas, para abordar problemas complejos, experimentar y descubrir propiedades, surge la idea de proponer a estudiantes de primer curso de bachillerato una caja de herramientas geométricas elementales, que se puede utilizar para contrastar analítica y gráficamente la resolución de algunos problemas de Matemáticas y también de Dibujo Técnico.

Algunas de las herramientas básicas podrían ser funciones para:

- dibujar un segmento o un triángulo,
- calcular la distancia entre dos puntos dados,
- calcular el ángulo de dos vectores,
- obtener el punto medio de dos puntos dados,
- obtener el simétrico de un punto respecto a otro dado,
- calcular la ecuación de la recta que pasa por dos puntos,
- calcular una paralela a una recta por un punto dado,
- calcular la paralela a una recta a una distancia dada,
- calcular la distancia de un punto a una recta,
- calcular la perpendicular a una recta por un punto dado,
- calcular la altura de un triángulo relativa a un lado,
- calcular la mediatriz de un segmento,
- calcular las ecuaciones de las medianas, las bisectrices o las alturas de un triángulo,
- calcular las coordenadas del baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro de un triángulo,
- calcular el área de un triángulo a partir de las coordenadas de los vértices,
- obtener la ecuación de la circunferencia a partir del centro y el radio,

- obtener la ecuación de la circunferencia a partir del centro y uno de sus puntos,
- obtener la ecuación de la circunferencia a partir de su diámetro,
- calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos,
- calcular la ecuación de la circunferencia inscrita o circunscrita a un triángulo, etc.

Para definir, por ejemplo en DERIVE, este tipo de funciones no hace falta ser experto; cualquier estudiante puede hacerlo, si conoce los conceptos, sin más que escribir las ecuaciones correspondientes. Es un buen ejercicio, ya que les ayuda a afianzar sus conocimientos y facilita la experimentación. En el ANEXO I se muestran algunas de dichas funciones.

Cada vez que en la resolución de un problema haya que hacer una construcción típica los estudiantes pueden guardar la función correspondiente en su caja de herramientas.

Por ejemplo, si se tiene en la caja de herramientas la función `recta(P,Q)`, que devuelve la ecuación de la recta que pasa por los puntos `P` y `Q` y la función `puntomedio(P,Q)`, que calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos `P` y `Q`, se puede definir una función para que calcule las medianas de un triángulo: `mediana(P,Q,R):=recta(P,puntomedio(P,Q))`. Ahora, definiendo tres puntos de coordenadas arbitrarias `P:=[a,b], Q:=[c,d], R:=[e,f]`, se puede comprobar automáticamente que las tres rectas `mediana(P,Q,R), mediana(Q,R,P)` y `mediana(R,P,Q)` se cortan en un punto (el baricentro) de coordenadas `[(a+c+e)/3, (b+d+f)/3].`

A continuación, se puede incorporar a la caja de herramientas la función `baricentro(P,Q,R):= (P+Q+R)/3`, que permite obtener directamente las coordenadas de dicho punto.

Una característica de los problemas geométricos es que muchas veces se pueden abordar de distintas formas. Pero con frecuencia se renuncia a ello por la falta de tiempo y el tedio que puede producir el exceso de cálculos. También es frecuente que se resuelva el mismo problema en las asignaturas de Dibujo Técnico y Matemáticas con técnicas diferentes (geometría sintética en un caso y analítica en el otro). La caja de herramientas nos permite en muy poco tiempo aunar ambas construcciones obteniendo automáticamente dibujos y ecuaciones de los objetos geométricos que intervienen.

3. Ejemplos de uso de la caja de herramientas

3.1 Construir un cuadrado, dados dos vértices

Este problema tiene diferentes soluciones, según que los vértices A y B sean extremos de un lado del cuadrado o de la diagonal.

En un primer caso se obtiene una solución (y su simétrica correspondiente respecto del segmento AB) por el siguiente algoritmo (ver figura 1):

1. Se obtiene la circunferencia de diámetro AB.

2. Se halla la mediatriz del segmento AB y se elige uno de los puntos de intersección, O, con la circunferencia anterior.

3. Se hallan los simétricos de A y B respecto de O y esos son los otros dos vértices del cuadrado.

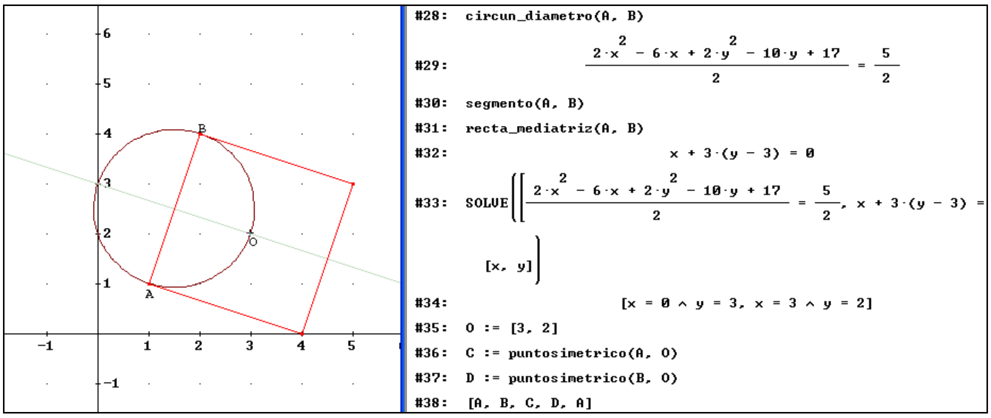

Figura 1: *Construcción de un cuadrado a partir de un lado*

En un segundo caso, se obtiene una solución (y su simétrica respecto del segmento AB) calculando las ecuaciones de los cuatro lados (ver figura 2).

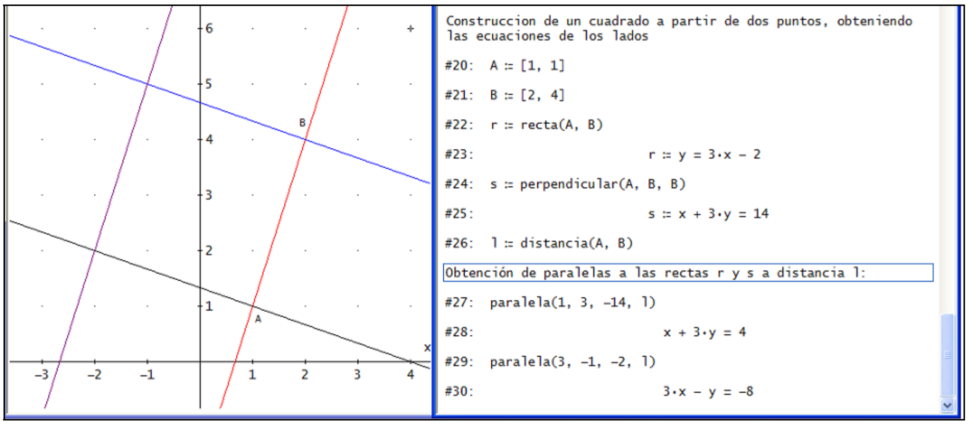

Figura 2: *Ecuaciones de los lados del cuadrado de lado* AB

Si A y B son los vértices de la diagonal del cuadrado, para obtener los otros vértices se puede usar el siguiente algoritmo (ver figura 3):

1. Obtener la ecuación de la recta r, que pasa por A y B (diagonal del cuadrado).
2. Obtener Q, punto medio de A y B.
3. Obtener la ecuación de la recta s, perpendicular a r que pasa por Q.
4. Obtener la ecuación de la circunferencia c, de centro Q, que pasa por A.
5. Determinar los puntos de intersección de s y c, que son los otros dos vértices del cuadrado.

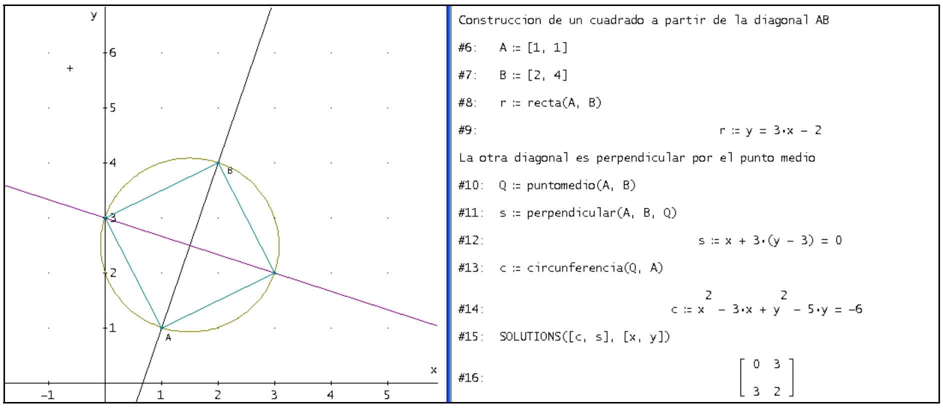

Figura 3: *Construcción de un cuadrado de diagonal* AB

3.2 Construir un pentágono regular a partir de un lado

Una construcción bastante elegante del pentágono regular, partiendo de uno de sus lados AB, es la que hace uso de que la razón entre la diagonal del pentágono regular y un lado es precisamente la razón áurea. Así, conocido el lado *l* se puede obtener la longitud de la diagonal $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y se pueden construir sendas circunferencias centradas respectivamente en A y B, y cuyo radio sea *d*. El vértice D estará en la intersección de dichas circunferencias. Una vez conocido D y el lado se pueden obtener los otros dos vértices (ver figura 4). Usando la caja de herramientas se puede hacer un seguimiento analítico y gráfico de esta construcción.

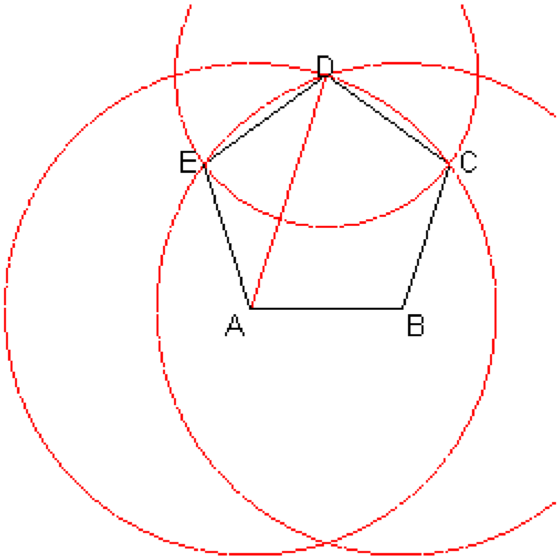

Figura 4: *Construcción de un pentágono regular*

4. Conclusiones

El uso de una caja de herramientas individualizada y acorde con las necesidades de cada estudiante permitirá a éste reforzar el proceso de aprendizaje. Con esta metodología los estudiantes participan de forma activa en el uso de los CAS y no se limitan a su uso como “caja negra”.

El artículo contiene una propuesta de uso de las herramientas informáticas para alumnos de Bachillerato, que sólo se ha probado de forma parcial, pero con resultados satisfactorios. (Se incluye como anexo en las dos páginas siguientes, después de las Referencias)

5. Referencias

1. GARCÍA, A.; GARCÍA, F; LÓPEZ, A.; RODRÍGUEZ, G.; DE LA VILLA, A. *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*, CLAG, Madrid, 2008.
2. GUZMÁN, M. *La experiencia de descubrir en Geometría*. Nivola, Madrid 2002.
3. LUELMO, M. J. *Construcciones geométricas: Una experiencia interdisciplinar de autoformación*. Epsilon, Rev. de la S.A.P.M. THALES, 38 (1997), págs.131-153.
4. PÉREZ, A. *El profesorado de matemáticas ante las tecnologías de la Informática y las Comunicaciones*. La Gaceta de la RSME vol. 9, n.2 (2006), págs. 512-544.