Galileo, Maxwell, Michell, Aroca: midiendo el rendimiento estructural

Jaime Cervera Bravo Mariano Vázquez Espí

v1.4 20111228

Resumen:
¿Qué es un hito estructural? Desde la óptica de la termodinámica, la medida que permite comparar distintas soluciones a un problema es el rendimiento. Galileo fue el primero en introducir una regla para su medida, entendida ésta como razón entre la carga útil soportada y la carga total necesaria, prediciendo la existencia de tamaños insuperables, aquellos que acotan el rango de soluciones a cada problema y para los cuales el rendimiento de la solución óptima es nulo. Una teoría de diseño se plantea, para cada problema, determinar aquellas formas que definen su tamaño insuperable y el máximo rendimiento teórico para tamaños menores o formas alternativas. Así es posible cuantificar el relativo mérito de cualquier solución y determinar si, efectivamente, se trata de un hito, es decir, un avance hacia ese máximo rendimiento.

Las investigaciones posteriores de Maxwell, Michell y otros ilustraron cómo determinar las formas óptimas para un rendimiento unidad (peso propio nulo), aunque ignorando el enfoque general de Galileo. Hacia 1970 Aroca vio la conexión entre ambos enfoques, definiendo las propiedades de la forma estructural (tamaño, esquema, proporción y grueso) y formulando una nueva síntesis del diseño de estructuras.

Además de ofrecer ejemplos de cómo distinguir entre auténticos hitos y meras vanidades lingüísticas, se examinarán las carencias actuales de la teoría y las líneas de investigación que permitirían subsanarlas.

Palabras clave: hito estructural, rendimiento, diseño.

Abstract:
What a structural milestone is? From a thermodynamical point of view, the efficiency is the measure that allows to compare solutions for a problem. Galileo was the first to introduce a rule for its measurement, as the ratio of useful weight to the whole supported weight. He foresaw that insurmountable sizes have to exist, those that bound the solution size for each problem and for which the efficiency of optimum solution is zero. A design theory aims to determine the shape for the insurmountable size of each problem and the maximum efficiency for lesser sizes or alternative forms. Only then it is possible to measure the relative merit of any solution and to determine if it is an actual milestone, that is to say, a move toward the maximum efficiency.

Latter researches by Maxwell, Michell and others enlightened how the optimum shapes could be determined in the case of a unity efficiency (the null self-weight case), but ignoring the general approach of Galileo. Near 1970 Aroca clearly saw the connection between both approaches, defining the properties of the structural form (size, scheme, proportion and thickness) and formulating a new synthesis of the structural design theory.

Some examples about how the theory makes the difference between very actual milestones and mere linguistic vanities will be presented. Furthermore, the current shortcomings of the theory will be examined and future research lines will be proposed to address them.

Keywords: design theory, efficiency, structural milestone.

email: Mariano.Vazquez.Espi@UPM.es

Índice

1. ¿Qué es un hito?

Esta es una pregunta clave para no razonar en el vacío. Proyectar y construir estructuras es un tema multifacético, de manera que cabe hablar de distintos tipos de hitos. Así hay hitos en cuanto a la eficacia: novedades en la puesta en obra o en los materiales estructurales que convierten en posible lo que antes no lo era. Y otros en cuanto a la eficiencia: una solución mejor para un problema que ya tenía solución.

La idea de eficiencia nos remite a la termodinámica, esa *economía de la Naturaleza* que unificó viejas ideas clásicas y vernáculas sobre los límites que la Naturaleza impone a algunos deseos humanos. En el siglo XX, la termoeconomía o la "teoría general de los ahorros exergéticos" hizo posible una contabilidad unificada de la eficiencia —incluso en problemas multifacéticos— a partir de la consideración de toda la energía útil, o exergía, gastada por una determinada solución para resolver un mismo problema (o para producir una misma cantidad de producto o servicio, etc).

A fin de evitar complicaciones innecesarias y ganar en claridad, en nuestra exposición nos referiremos a una definición muy simple de rendimiento estructural: la razón entre la carga útil que hay que soportar en el problema entre manos y la carga total que cada solución necesita equilibrar para resolverlo. Esto representa sólo una parte de la historia de una estructura —aunque una parte fundamental— pero el enfoque resultante es generalizable a la historia completa —no sin esfuerzo investigador adicional.

Nuestra exposición seguirá una hilo histórico en el que recorreremos los hitos —teóricos— fundamentales para establecer una forma razonable de medir el rendimiento estructural y, por tanto, poder determinar qué cosa sea un hito en términos de eficiencia.

2. Galileo: el rendimiento estructural

Los *Discorsi* de Galileo son, cosa rara, lo que dicen ser: discursear y demostrar cosas acerca de dos nuevas ciencias. La segunda jornada, al decir de Einstein, enuncia el *axioma cero* de la teoría de la relatividad ("the principle of relativity (in restricted sense)"—"the law of inertia"), teoría que, como es bien conocido, tiene que ver con un límite natural: el de la propagación de la luz. La primera jornada, que es la que nos interesa aquí, funda la

Teoría de Diseño de Estructuras y trata, también, de límites naturales: una de sus piedras angulares es la definición de tamaños insuperables para las estructuras.

El argumento de Galileo es bastante simple: imaginemos una columna de piedra que está al límite de su resistencia debido exclusivamente a su propio peso, es decir, que una suave brisa o el peso adicional de un ave ocasionaría su colapso; llamemos "alcance estructural de las columnas de piedra" a su altura ($\mathcal{L}$). Es obvio que una columna semejante es perfectamente inútil como estructura, pues es incapaz de resistir carga adicional o útil. Su rendimiento es nulo.

Para obtener una estructura útil, Galileo imagina un prisma igual que el anterior pero de un altura menor (L). Es obvio que esta columna menor podría resistir peso adicional hasta alcanzar su límite de resistencia, y que esa carga útil (Q) sería como máximo la diferencia de pesos entre ambas. Como el rendimiento (r) es la razón entre la carga útil y el peso total, resulta que:

$$r \leq \frac{\mathcal{L} - L}{\mathcal{L}} = 1 - \frac{L}{\mathcal{L}} = 1 - \chi \tag{1}$$

La semejanza algebraica de esta fórmula con el factor de Carnot de una máquina térmica es evidente, aunque este último tardaría todavía dos siglos en describirse. Pero los significados cambian. El alcance estructural de las columnas corresponde a un rendimiento nulo, y representa un límite insuperable. La razón entre la altura de una columna y el alcance es su talla (χ) relativa a las demás columnas, y no puede ser mayor que la unidad. El rendimiento de una columna es simplemente igual a la unidad menos su talla: el cien por cien para una estructura de tamaño nulo (una que no pesa y que no existe: el peso se apoya directamente en el suelo); nulo para una estructura tan grande como el tamaño insuperable del problema en consideración: es una ley de rendimientos decrecientes con el tamaño. La estructura totalmente eficiente no existe.

Siguiendo las definiciones habituales de la termoeconomía, el inverso del rendimiento es simplemente el coste total en carga (κ), es decir, la carga total necesaria por cada unidad de carga útil, siempre mayor que la unidad. Y el peso propio (P) de la estructura es simplemente:

$$\mathrm{P} \geq (\kappa - 1)\,\mathrm{Q} = \chi\,(\mathrm{Q} + \mathrm{P}) \qquad \text{con } \kappa = 1/r \tag{2}$$

Y salvo que usemos materiales que permitan tamaños insuperables enormes respecto al de la estructura de interés —caso de la piedra y la madera en la época de Galileo—, la definición da sentido a la medida del rendimiento estructural, pues en los siglos anteriores, no pocas construcciones alcanzaban frecuentemente tallas considerables para desesperación de sus constructores, que no pocas veces las veían caer antes de terminarlas —es el caso de todo tipo de muros de tapia, especialmente aquellas fabricadas con materiales de poca resistencia y considerable peso específico, caso de la tierra cruda—.

A día de hoy volvemos a toparnos en la misma situación incluso en el caso de materiales de alta resistencia, puesto que estructuras tales como los puentes van superando de forma continua el tamaño de los anteriores, acercándose al alcance de su forma o requiriendo materiales de mayor resistencia y/o menor peso para aumentar la distancia a su tamaño insuperable y evitar un coste desproporcionado..

La expresión anterior para el coste la denominaremos *regla de Galileo*. Ya se ve que para tallas pequeñas el coste es sólo ligeramente mayor que la unidad: por ejemplo, para una talla de un décimo, el rendimiento es 0,9, el coste 1,11, y el peso propio representa tan sólo el décimo de la carga total. Esta situación es la deseable, no sólo por razón del menor coste y del menor despilfarro de recursos, también porque pueden usarse reglas de semejanza en el diseño, dada la poca influencia del peso propio de la estructura.

La influencia del material en el alcance se limita a la razón entre su tensión (admisible, de rotura, etc) y su peso específico, denominada alcance estructural del material, $\mathcal{A}$. En el caso de las columnas de Galileo, el alcance de las columnas es exactamente el del material del que están hechas. Y un material de resistencia doble o de densidad mitad lo aumentaría al doble. Para fijar ideas, para un acero de 400N/mm^2, su alcance es de cinco kilómetros.

3. Maxwell: contabilidad global de costes y caracterización de problemas

Hay al menos tres áreas de conexión fuerte entre los trabajos de James Clerk Maxwell y de Galileo Galilei, pero la que nos interesa aquí es la consideración del coste de las estructuras. A Maxwell (1890:175–177) le interesaba encontrar cómo medir el coste total de una estructura o, al menos, cómo comparar los costes respectivos de dos soluciones a un mismo problema estructural. En la ingeniería de su tiempo, las estructuras eran de muy pequeña talla, de manera que pudo razonar, como era costumbre, sólo con la carga útil y despreciando el peso propio. Y él, versado en termodinámica, conocía la regla fundamental de la contabilidad: "la variación temporal de existencias (*stocks*) al interior de un sistema debe igualar el balance de flujos de entrada y salida desde y hacia el exterior". Su contribución a la medida de la eficiencia puede resumirse en tres puntos.

Primero. Descubre un invariante entre todas las soluciones a un problema estructural si éste es definido como el problema de conectar un conjunto conocido de fuerzas externas (acciones y reacciones) mediante una estructura material capaz de resistir los esfuerzos resultantes. Lo denominaremos en su recuerdo *número de Maxwell de un problema estructural* y es simplemente el trabajo virtual de las fuerzas exteriores a lo largo de una expansión uniforme y unitaria del espacio ($\varepsilon = 1$) si adoptamos para los esfuerzos de tracción el signo positivo—en el caso contrario, sustituyase "expansión" por contracción, lo que en palabras de Maxwell implica que la estructura se reduce a un punto.

Segundo. Define una estructura como un conjunto de esfuerzos internos en equilibrio capaz de superponerse a las fuerzas exteriores de un problema estructural y asegurar el equilibrio local en torno a cualquier punto, sobre el que actuará el subconjunto de fuerzas (interiores—esfuerzos— y exteriores) en el aplicadas. Se trata de una definición algo abstracta pero que desliga la forma estructural de su materialidad, permitiendo prestarla atención como variable estructural por derecho propio.

Tercero. Para dos de tales estructuras (de Maxwell en lo sucesivo), describe como la diferencia de coste total será proporcional a la diferencia de las sumas respectivas de los productos del valor absoluto de cada esfuerzo interno por la longitud en la que actúa. Como corolario demuestra que el número de Maxwell de un problema también puede calcularse como la diferencia de las sumas de tales productos en tracción y en compresión para una estructura cualquiera que resuelva el problema.

Quien conozca, ya sea algo de la biografía de Maxwell, ya alguno de sus trabajos, no le sorprenderá saber que todo lo anterior estaba dicho en tres párrafos, sin ningún formalismo matemático: Maxwell lo mismo unificaba el campo electromágnetico que preparaba una mezcla para eliminar manchas de grasa. Bien que es verdad que esos tres apuntes iban precedidos y seguidos de algunas demostraciones matemáticas sobre propiedades de las figuras recíprocas que reconocemos en el diagrama de fuerzas o de Cremona de una estructura articulada y su propio dibujo.

Se trataba de apuntes totalmente rigurosos, pero desafortunadamente crípticos en primera lectura, lo que hizo difícil su difusión en la comunidad científica. Y sin embargo, en esos tres apuntes estaban todos los ingredientes necesarios para evaluar el relativo mérito de cada forma estructural para un problema concreto.

Merece la pena destacar un corolario que es casi inmediato: si el diseñador se afana en mejorar la forma estructural de manera que disminuya la suma de los productos de tracciones por longitudes se encontrará, como cosa de magia, que debido a la invarianza del número de Maxwell la suma correspondiente a las compresiones disminuirá otro tanto. También al revés, si pretensamos una estructura en principio aumentamos su coste pues la suma de compresión aumentará al hacerlo la de tracción, de manera que sólo en situaciones muy peculiares las estructuras pre- o postensadas pueden ser mejores que las normales (cf. Arenas y Pantaleón, 1992:48); lo mismo cabe decir de las estructuras tensigrity: tales afanes tecnológicos sólo pueden justificarse, cuando sea el caso, por razones de eficacia:

por convertir en posible algo que no lo era. Pero es más frecuente el caso en que no tienen justificación alguna.

4. Michell: caracterización suficiente de soluciones óptimas

La estela de Maxwell no se perdió: un ingeniero australiano mucho más conocido por sus aportaciones a la mecánica de fluídos, supo ver la importancia de los apuntes de Maxwell y afinó el corpus teórico. En un artículo de poco más de ocho página, significativamente titulado "The Limits of Economy of Material in Frame-structures", MICHELL (1904) anotó con claridad algebraica la definición del número de Maxwell y comenzó a extraer consecuencias. Demostró que el volumen geométrico del material de una estructura sería mínimo si la suma de los productos del valor absoluto de los esfuerzos por las longitudes correspondientes también lo era. No se atrevió a bautizar a esa suma más allá de denominarla "la cantidad". Posteriormente se la ha denominado cantidad de estructura, trabajo estructural o volumen estructural. Puesto que cada esfuerzo por cada longitud es lo mismo que la tensión por el volumen se trata del volumen de tensiones necesario para poner en equilibrio las fuerzas externas de un problema de Maxwell. Proponemos en recuerdo de este trabajo denominar número de Michell (μ) al número adimensional que resulta de dividir la cantidad de estructura por la carga útil y el tamaño del problema (la luz de flexión, la altura de las columnas de Galileo, etc): es una propiedad de cada estructura, cuyo menor valor caracteriza el mayor rendimiento de su forma.

Michell demostró lo anterior en cinco párrafos. Después, en unos pocos más, demostró una condición suficiente —conocida como teorema de Michell— para que una forma estructural fuera mínima, es decir que su número de Michell fuera menor o igual que el de cualquier otra estructura aceptable para el problema. Se trata en esencia de que *si* todo el espacio en el que se encuentran las estructuras aceptables para el problema puede ser deformado de tal suerte que el valor absoluto de la deformación en todas las barras de una o varias de esas estructura sea máximo, *entonces* esas estructuras son óptimas y comparten el mismo número de Michell, que es el mínimo para el problema. En el resto del artículo simplemente ilustró algunos problemas básicos y las formas óptimas correspondientes.

Desafortunadamente, el teorema de Michell sólo es suficiente: si el diseñador no consigue demostrar que una forma es óptima, tampoco sabe si es buena o mala, salvo por el cálculo de su número de Michell y su comparación con otras formas alternativas. Sin embargo, el teorema de Michell tiene utilidad directa para mejorar diseños y su aplicación local a partes críticas de una estructura suele dar buenos réditos.

La estela de Michell fue seguida décadas después por otros investigadores. Cabe mencionar aquí a Henry Cox, quien alertado por el prof. Foulkes de la Universidad de Cambridge, vió la importancia del asunto "Michell" —hasta entonces olvidado— y lo divulgó en distintos artículos, informes y libros (véase por ejemplo COX, 1965 o OWEN, 1965); y a William HEMP (1958), quien en su informe de 1958 para la división de ingeniería aeronaútica de la OTAN puso en formato matemático estándar los trabajos de sus predecesores, apuntando además las carencias de la teoría y las líneas de investigación que habría que seguir para colmarlas.

5. Aroca: las características estructurales de la forma

Como hemos señalado, los teoremas de Maxwell y Michell son muy útiles para determinar estructuras de mínimo coste o simplemente para mejorar una forma concreta, pero paradójicamente sólo en el caso de las estructuras que no pesan, es decir, aquellas con una talla galileana muy pequeña o nula. Ciertamente, esto no niega en manera alguna su interés. En efecto, una talla pequeña anticipa un peso estructural despreciable frente a la carga útil, pero cuyo coste físico (en emisiones de dióxido de carbono por ejemplo, cf.

Vázquez, 2001) no es en absoluto desdeñable. Se trata, por tanto, de una paradoja sólo en parte.

En cualquier caso, por definición, los problemas de Maxwell no pueden incluir el peso propio de la estructura con los formalismos originales, puesto que las fuerzas externas, acciones y reacciones, tienen que estar totalmente determinadas antes de plantear soluciones.

Si las tallas son muy pequeñas, no hay problema: el peso resultante no invalida el análisis previo. Pero ¿qué ocurre para estructuras de mayor porte, tales como largos puentes o altas torres, en las que el peso propio pasa de ser marginal a, en ocasiones, convertirse en la carga dominante? ¿Como podría extenderse la teoría de diseño de Maxwell a todo el rango de la regla de Galileo?

Fue Ricardo Aroca, a partir de los años sesenta, quien supo ver la posible conexión de los aportes de sus tres predecesores, y quien tuvo la inspiración de construir un nuevo esquema conceptual del diseño de estructuras en el que podían colocarse de una forma ordenada muchas otras aportaciones que hasta entonces estaban dispersas.

No cabe aquí un recuento pormenorizado. Baste señalar cómo Aroca, desentendiéndose de los conceptos habituales de geometría y topología—que todavía hoy suelen figurar en muchos *papers* sobre optimación estructural—, construyó una descripción *ad hoc* de la forma estructural y de las características relevantes para su eficiencia. Éstas son el tamaño (la dimensión relativa al alcance, cuyo cociente es la talla galileana) que determina la máxima eficiencia alcanzable (o el mínimo coste esperable); el esquema, la parte de la forma que puede abstraerse del tamaño o de la proporción, y que determina en lo fundamental la eficiencia para tamaños y proporciones dadas; la proporción o esbeltez, que corresponde a la del menor prisma que contiene a la estructura, y que determina la eficiencia para cada esquema y tamaño y, sobre todo en problemas de flexión, determina la máxima rigidez compatible con un coste constante (y que por tanto es determinante en todos los problemas de deformación excesiva: flecha, fisuras, vibraciones, etc); y finalmente el grueso o dimensionado, que fijado todo lo anterior tan sólo altera la intensidad de carga útil soportable y que, en el caso de estructuras estrictas, no afecta en absoluto al rendimiento.

Ricardo Aroca es arquitecto y diseñador, no matemático. Por ello frente al dilema entre rigor y precisión nunca le tembló la mano por la última. De este modo, para extender la regla de Galileo, para hacerla operativa más allá de sus simples columnas, Aroca propuso una hipótesis muy razonable en una gran cantidad de casos de interés: supongamos que el peso propio es isomorfo con la carga útil. De este modo, las soluciones deducidas en el universo de Maxwell pueden extenderse, siquiera aproximadamente, más allá, hasta el tamaño insuperable del esquema considerado, de manera que surge una teoría si no unificada, en vías de conseguirlo (véase Cervera, 1989 y 1990, por ejemplo).

Cabe mencionar, tanto por su utilidad como por ser también ejemplo de lo anterior, su teorema sobre la esbeltez óptima que, no siendo una teorema sobre los problemas de Maxwell, puede aplicarse en casos de mucho interés, como es el de los puentes (véase Cervera, 1993 y 2008, por ejemplo).

El esquema conceptual que Aroca ha ido construyendo de forma socrática en la Escuela de Arquitectura de Madrid es una teoría de diseño en sentido estricto, pues encara de frente el problema principal del diseño: la composición formal. Sabíamos que este esquema no ha conseguido la difusión internacional que merece, pero lo que estamos descubriendo en nuestras actuales investigaciones es que incluso el esquema propuesto por Maxwell ha sido mal interpretado desde los años setenta, siendo sustituido por otros esquemas alternativos que ponen el acento en los aspectos matemáticos de la optimación de estructuras. Esta situación tiene efectos tanto académicos como culturales.

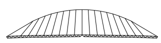
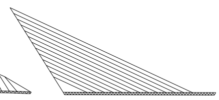
Por paradójico que resulte, todavía hoy, de las cuatro variables anteriores sólo suele introducirse la última en los cursos de iniciación a las estructuras: generaciones de estudiantes se enfrentarán a la pregunta de cuánto de gruesa tiene que ser una viga o una columna para soportar una carga dada, sin llegar a sospechar que puede jugarse con la forma y, lo que es peor, que superado el alcance estructural de una forma concreta da igual cuánto de gruesa hagamos la estructura, pues será inviable sin cambiar su forma.

Esta deriva hacia el instrumentalismo, la resolución de problemas, la formulación de intrincados formalismos matemáticos en torno a la variable de menor importancia (el grueso) no es, desgraciadamente, patrimonio exclusivo de la teoría de estructuras. Tras los alegatos de Clausius en el XIX contra la economía crematística como contrapuesta a los más elementales principios de la termodinámica cabía esperar un cambio de rumbo que no se produjo. No es de extrañar que apesar de que la actual crisis mundial es una magnífica demostración experimental de las tesis de Clausius, todavía los economistas siguen creyendo que más y mejor crecimiento del valor crematístico solventará nuestros agobiantes y actuales problemas sociales. Y cabría señalar como incentivo al desastre el que los flujos financieros resulten desligados del segundo principio de la termodinámica pese a que los flujos reales que tratan de gobernar no puedan hacerlo (cf. Vázquez, 2011).

En la teoría de estructuras la cosa no ha llegado a tanto gracias a la fuerza de la gravedad: los grandes disparates en ocasiones se caen, o no pueden financiarse y quedan inconclusos. Pero desgraciadamente no es así siempre. Sin embargo, contamos con instrumentos bastantes como para poder razonar acerca del relativo mérito en cuanto a la eficiencia de nuestros diseños. Siempre que queramos hacerlo.

Cuadro 1: Tres bocetos para un puente

Los puentes que inspiran cada boceto son: **A**, Apollo (Bratislava); **B**, La Barqueta (Sevilla); **C**, Hongshan (Changsha).
La talla $\frac{1}{10}$ se refiere a una luz del 10 % del alcance del material. El coste para esa talla (0,1) se calcula aplicando la regla de Galileo para el alcance de la solución: $r = 1 - 0{,}1\mathcal{A}/\mathcal{L}$ y $\kappa = 1/r$.

Boceto:	**A**	**B**	**C**
			
Año:	2005	1989	2005
Diseño original:			
Esbeltez λ	3,33	2,79	1,78
Número de Michell $\mathcal{Q} \div \mathrm{Q}L$	1,80	2,97	9,29
Alcance relativo $\mathcal{L} \div \mathcal{A}$	0,557	0,336	0,107
Talla $\frac{1}{10}$ (resistencia):			
Coste κ	1,22	1,42	15,3
Peso propio, P/Q	0,22	0,42	14,3
Diseño con esbeltez óptima:			
Esbeltez λ	1,20	1,07	0,469
Número de Michell $\mathcal{Q} \div \mathrm{Q}L$	1,14	1,99	4,58
Alcance relativo $\mathcal{L} \div \mathcal{A}$	0,874	0,503	0,218
Talla $\frac{1}{10}$ (resistencia):			
Coste κ	1,13	1,25	2,62
Peso propio, P/Q	0,13	0,25	1,62

6. Tres puentes

A fin de mostrar la potencia de la teoría de diseño de estructuras examinaremos el relativo mérito de tres puentes construidos entre 1989 y 2005. Pero no se trata de analizar los puentes en su materialidad, sino por el contrario, de analizar el esquema y la proporción que tales puentes proponen en todo el rango de tamaños en los que resulten viables, y todo ello para cualquier material, es decir, para una geometría medida usando como unidad el alcance del material $\mathcal{A}$ (de cualquier material). En lo que sigue denominaremos *boceto* a cada combinación de esquema y proporción. Basta añadir un tamaño y un grueso para obtener la forma de una estructura concreta.

Analizaremos los puentes para la hipótesis de carga dominante tal y como ha sido descrita por sus autores. Y por supuesto utilizaremos la hipótesis de Aroca acerca de la constancia (aproximada) del número de Michell con el tamaño del problema (y de la solución).

En el CUADRO 1 se muestra para cada una de los bocetos propuestos por los puentes sus características principales: su proporción (o esbeltez), su número de Michell para un tamaño nulo y el alcance de la forma (su tamaño insuperable) calculado con la hipótesis de Aroca, que dadas las formas empleadas es una hipótesis razonable en los tres casos.

En la mitad superior de la tabla, basta con comparar el número de Michell de cada solución para comprobar que el boceto **A** es mucho mejor que los otros dos para cualquier tamaño. Además hemos calculado el coste para un tamaño del décimo del alcance del material (que, para el acero citado más arriba, sería una luz entre apoyos de unos 500 metros), resultando que el boceto **C** es más de doce veces más costoso en carga que el **A**, y 65 veces más costoso en términos de volumen o peso de la estructura. En la mitad inferior se reflejan los resultados de aplicar el teorema de la esbeltez óptima a los tres bocetos originales. Como se ve, los diseños originales son demasiado esbeltos, aunque tal circunstancia no tiene demasiada incidencia en el boceto **A** —por ser bastante bueno—, pero es notable en el caso del boceto **C**: para el tamaño de referencia (1/10), al adoptar la esbeltez óptima, el boceto **C** reduce su coste en carga a poco más del sexto del boceto original, mientras que su peso propio se reduce a poco más del noveno—con una reducción similar en los honorarios de proyecto probablemente.

La anomalía del esquema **C** puede sintetizarse así: de los tres esquemas, es el único que para la talla considerada pesa más que la carga útil que hay que soportar, sea cual sea su esbeltez

La comparación entre bocetos es aún más dramática si tenemos en cuenta su rigidez, algo que visualmente puede apreciarse en la FIGURA 1, en la que sobre los tres bocetos actúa la misma carga viva (sin peso propio). Como puede apreciarse el boceto **A** no es sólo el de menor coste, es el más rigido a igualdad de todo lo demás. No es de extrañar por ello que en la literatura científica reciente sólo exista un *paper* sobre ese puente, que ilustra sobre la forma en que se construyó. Por el contrario, sobre el boceto **C**, hay más de media docena describiendo sus problemas de rigidez y vibraciones intolerables. Más misteriosa y difícil de explicar es la circunstancia de que el primer puente con esa forma, El Alamillo de Sevilla, fuera adoptado como modelo para el proyecto y construcción de otros, cuando ya se sabía de sus problemas de rigidez y de su disparatado coste.

7. Tareas pendientes

Aunque incompleto, el esquema conceptual de Ricardo Aroca sobre la teoría de estructuras es eficaz: con unos pocos parámetros y números permite obtener conclusiones rigurosas sobre los resultados que cabe esperar de las formas estructurales. Por tanto debe considerarse como un hito teórico en la teoría de diseño de estructuras en plano de igualdad con los logros de sus tres ilustres predecesores. Pero hay tareas pendientes.

Aunque la teoría ha sido publicada en revistas de ámbito internacional, e incluso se ha llamado la atención sobre la utilidad de usarla en el contexto de la optimación de estructuras (cf. VÁZQUEZ & VÁZQUEZ, 1997; VÁZQUEZ & CERVERA, 2011), lo cierto es que en la práctica su existencia es totalmente ignorada. Por tanto, lo más prioritario es realizar un esfuerzo divulgador, tanto de la formulación teórica como de ejemplos prácticos. Dado el número de personas que se reclaman discípulos del profesor Aroca, se nos antoja que no sería una tarea especialmente difícil: pero hay que hacerla—renunciando quizás a

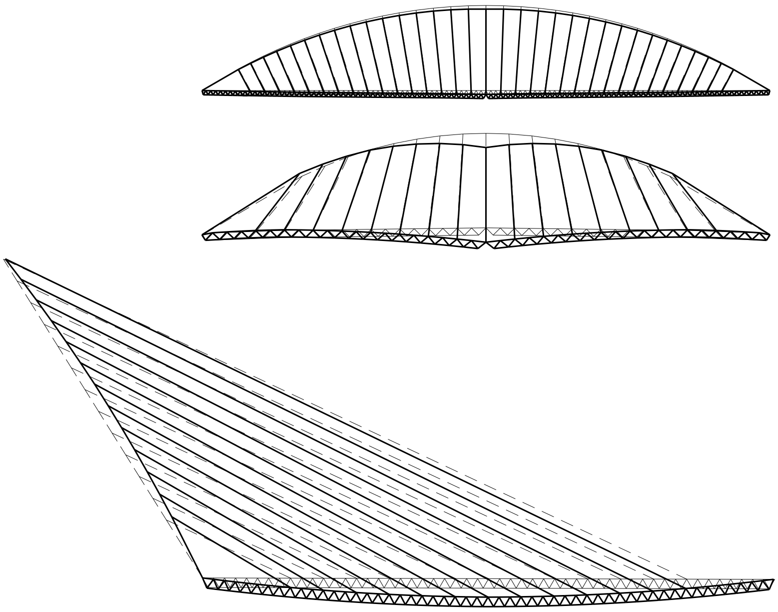


Figura 1: Tres puentes sometidos a carga uniforme

otras tareas de mayor rédito académico, pero de muchísima menor incidencia técnica y económica.

A parte de la tarea anterior, entre las más prioritarias están: ampliar el número de problemas cuya solución óptima para la talla nula sea conocida; fijar los criterios que deben caracterizar las formas óptimas para los tamaños insuperables y comenzar a rellenar un catálogo que hoy por hoy está vacío; acotar el error de la hipótesis de Aroca y, si fuera posible, sustituirla por una formulación exacta que habría que encontrar mediante la exploración sistemática del rango de tamaños para cada problema.

8. Bibliografía

Antuña, Joaquín; Vázquez, Mariano (2012) "¿Existen problemas estructurales irresolubles? Una cuestión abierta", *Informes de la Construcción*, (en imprenta).

Arenas, J.J., Pantaleón, M.J. (1992) "El puente de la Barqueta, sobre el viejo cauce del río Guadalquivir, en Sevilla", *Revista Nacional de Obras Públicas*, 139(3.311):47–63

Arenas, J.J., Pantaleón, M.J. (1992b) "Barqueta Bridge, Sevilla, Spain", *Structural Engineering International*, 4/92:251–252.

J. R. Casas (1995) "Full-scale dynamic testing of the Alamillo cable-stayed bridge in Seville (Spain)", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 24, pp. 35-51.

Casas, Joan R.; and Aparicio, Angel C. (2009) "Rain-wind-induced cable vibrations in the Alamillo cable-stayed bridge (Sevilla, Spain). Assessment and remedial action", *Structure and Infrastructure Engineering*, DOI: 10.1080/15732470903068607

Cervera Bravo, Jaime (1989) "Tres teoremas fundamentales de la teoría del diseño de estructuras", *Informes de la Construcción*, v. 40, nº 399, pp. 57–66.

— (1990) "Las estructuras y el peso propio", *Informes de la construcción*, v. 42, nº 407, pp. 73–86.

— (1993) *Diseño de estructuras en edificación.* Madrid: Instituto Juan de Herrera, `http://oa.upm.es/3785/`

— (2008) *Concebir y analizar estructuras.* Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, V2.0, 218 pp. `http://oa.upm.es/189/`

H. L. Cox (1965) *The design of structures of least weight.* Oxford: Pergamon.

De Luca, A. *et alii* (2010) «A steel suspended deck arch bridge over 'Torrente Gravina'», en *ARCH'10 6th International Conference on Arch Bridges*, pp 210–217.

De Zotti A., Pellegrino, C. and Modena C. (2007) «A parametric study of the hanger arrangement in arch bridges», En *Arch'2007, 5th International Conference of Arch Bridge*, Madeira, Portugal, 1214 September 2007, pp. 475–481.

French, M.J. (1990) "Function Costing: A Potential Aid to Designers", *Journal of Engineering Design*, 1(1):47–53.

French, M.J. (1999) "A Second Law for Structures: An Insightfull Approach to the Design of Plane Frames", *Transactions of the ASME*, 66:738–741

Gabler, G. (2006) "Apollo-Donaubrücke in Bratislava.", *Der Stahlbau*, 75(2):138–144.

Galvín, P.; M. Solís, A. Romero, J. Domínguez (2010) «Identificación dinámica de puentes de Sevilla mediante sus respuestas a cargas de servicio», XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. Asociación Española de Ingeniería Mecánica.

WS Hemp (1958) *Theory of structural design.* Report 214, Palais de Chaillot, Paris: North Atlantic Treaty Organization, Advisory Group for Aeronautical Research & Development

Maxwell, J.C. (1890) *Scientific Papers.* Tomo II, Camb. Univ. Press, pp. 161–207.

Michell, A.G.M. (1904) "The Limits of Economy of Material in Frame-structures", *Philosophical Magazine*, S.6, v. 8, nº 47, pp. 589–597.

J. B. B. Owen (1965) *The Analysis and Design of Light Structures* London: Edward Arnold (publishers) Ltd, viii+72 pp.

Vázquez Espí, C and Vázquez Espí, M (1997) "Sizing, Shape, and Topology Design Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm —discussion", *Journal of Structural Engineering*, 123:375–376

Mariano Vázquez (2001) "Construcción e impacto sobre el ambiente: el caso de la tierra y otros materiales", *Informes de la Construcción*, 52(471):29-43 (disponible también en `http://habitat.aq.upm.es/b/n20/`).

— (2011) "La descripción de la insostenibilidad (1945–1973)", *Boletín CF+S*, nº 46, `http://habitat.aq.upm.es/b/n46/`.

Vázquez Espí, M. and Cervera Bravo, J. (2011) "On the solution of the three forces problem and its application in optimal designing of a class of symmetric plane frameworks of least weight", *Struct. Mult. Optimization*, 44:723–727, doi: 10.1007/s00158-011-0702-3.

Shao, Xudong *et alii* (2005) "Design and Experimental Study of a Harp-Shaped Single Span Cable-Stayed Bridge", *Journal of Bridge Engineering*, November/December 2005:658–685.

A. Nomeclatura

$\mathcal{A}$: alcance del material

$\mathcal{L}$: alcance de una forma

$\mathcal{Q}$: volumen de tensiones o cantidad de estructura

L: tamaño del problema

P: peso propio

Q: carga útil

l: tamaño relativo a $\mathcal{A}$

e: esfuerzo, fuerza interna

f: tensión admisible

r: rendimiento

κ: coste en carga

μ: número de Michell

ρ: peso específico

σ: tensión

χ: talla relativa al alcance de la forma

B. Formulario

Alcance del material: $\mathcal{A} = \dfrac{f}{\rho}$

Cantidad de estructura: $\mathcal{V} = |e_i|\ell_i$

Número de Michell: $\mu = \mathcal{V} \div \mathrm{Q}L$

***compliance*:** $C = \varepsilon\mathcal{V}$

Hipótesis de Aroca: $\mathcal{V}(\mathrm{Q}+\mathrm{P}) \approx \mathcal{V}(\mathrm{Q}) \cdot \dfrac{\mathrm{Q}+\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} \qquad \partial\mu/\partial L \approx 0$

tamaño relativo: $l = L/\mathcal{A}$

rendimiento: $r = \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}+\mathrm{P}} = 1 - \dfrac{L}{\mathcal{L}} = 1 - \chi = 1 - \dfrac{l}{\mathcal{L}/\mathcal{A}}$

coste: $\kappa = \dfrac{1}{r} = \dfrac{\mathrm{Q}+\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \dfrac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}-L} = \dfrac{1}{1-\chi}$

Estimación del alcance de una forma

Con la hipótesis de Aroca:

$$\mathcal{V}(Q) = \mu Q L \qquad \mathcal{V}(P) \approx \mu P \mathcal{L} \qquad \mathcal{L} \approx \frac{\mathcal{V}(P)}{\mu P} = \frac{\mathcal{V}(P)}{\mu\rho\mathcal{V}(P)/\sigma} = \frac{\mathcal{A}}{\mu} \qquad \mu \approx \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{L}}$$

Estimación de la talla relativa: $\chi = \dfrac{L}{\mathcal{L}} = \dfrac{L/\mathcal{A}}{\mathcal{L}/\mathcal{A}} \approx l\mu$

Las dos caras del peso propio

$\mathrm{P} = \rho\dfrac{\mathcal{V}}{\sigma} \qquad \mathrm{P} = (\kappa - 1)\mathrm{Q}$

Para un diseño estricto con tensión f: $\mathrm{P} = \dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}}$

Coste por resistencia

rendimiento: $r \approx 1 - l\mu$

coste en carga: $\kappa \approx \dfrac{1}{1 - l\mu}$

Coste por *compliance* (rigidez)

Para que $C = \varepsilon\mathcal{V}(\mathrm{Q}{+}\mathrm{P})$ se tiene que:

$$\kappa = \frac{\mathrm{Q}+\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = 1{+}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = 1{+}\frac{\rho\mathcal{V}(\mathrm{Q}{+}\mathrm{P})}{\sigma\mathrm{Q}} = 1{+}\frac{\rho}{E}\frac{\mathcal{V}(\mathrm{Q}{+}\mathrm{P})}{\varepsilon\mathrm{Q}} = 1{+}\frac{\rho}{E}\frac{f}{f}\frac{\mathcal{V}(\mathrm{Q}{+}\mathrm{P})}{\varepsilon\mathrm{Q}} = 1{+}\frac{1}{\mathcal{A}}\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon}\frac{\mathcal{V}(\mathrm{Q}{+}\mathrm{P})}{\mathrm{Q}} = 1{+}\frac{\varepsilon_f}{\mathcal{A}}\frac{\mathcal{V}(\mathrm{Q}{+}\mathrm{P})^2}{C\mathrm{Q}} \tag{3}$$

Con la hipótesis de Aroca:

$$\kappa = \frac{\mathrm{Q}+\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} \approx 1 + \frac{\varepsilon_f}{\mathcal{A}}\frac{\mathcal{V}(\mathrm{Q})^2}{C\mathrm{Q}}\kappa^2 \approx 1 + \frac{\varepsilon_f}{\mathcal{A}}\frac{(\mu L)^2\mathrm{Q}}{C}\kappa^2 \approx 1 + \mu l\frac{\varepsilon_f\mu\mathrm{Q}L}{C}\kappa^2 \tag{4}$$

denominando $\phi = \frac{1}{\mu l}\frac{C}{\varepsilon_f\mu\mathrm{Q}L}$, resulta que:

$$\kappa = \frac{\phi - \sqrt{\phi^2 - 4\phi}}{2} \tag{5}$$

con un diseño viable sólo si $\phi \geq 4$, es decir:

$$\mu \leq \sqrt{\frac{1}{4l}\frac{C}{\varepsilon_f\mathrm{Q}L}} \quad \text{ó} \quad l \leq \frac{1}{4\mu}\frac{C}{\varepsilon_f\mu\mathrm{Q}L} \quad \text{ó} \quad \mu \leq \frac{1}{4l}\frac{C}{\varepsilon_f\mu\mathrm{Q}L} \tag{6}$$

Para un requisito de rigidez invariable con el tamaño, $\frac{C}{\varepsilon_f\mu\mathrm{Q}L}$ será constante, mayor o menor que la unidad, puesto que se trata de una energía de deformación relativa a la energía de deformación para una longitud nula. En tal caso, denominando a esa energía relativa $w_{\mathrm{t}ol}$, el límite de interés es la segunda expresión:

$$l \leq \frac{w_{\mathrm{t}ol}}{4\mu} \tag{7}$$

es decir, que por encima de ese límite para el tamaño relativo la forma en cuestión no podría, cualquiera que sea su dimensionado, ser aceptablemente rígida. Este límite puede ser inferior al alcance por resistencia y sería, en tal caso, un tamaño insuperable por rigidez.

Con lo anterior puede estimarse cuanta peora puede admitirse en el número de Michell al adoptar esquemas menos eficientes. Supongamos que el mejor esquema conocido, con μ_b, cumple con el criterior de rigidez hasta un tamaño l_b. Para una forma menos eficiente tiene que ser $l_b\mu_b \geq l\mu$, y por tanto $l \leq l_b\frac{\mu_b}{\mu}$, es decir, el límite al tamaño insuperable por rigidez disminuye por un factor igual al del aumento del número de Michell: un aumento al doble, disminuye el tamaño a la mitad. La razón entre tamaños insuperables por rigidez es inversa al de los números de Michell.