

# **ESTUDIO DE LA CAPACIDAD DE REDISTRIBUCIÓN EN EMPARRILLADOS BAJO RÉGIMEN NO LINEAL**

**TRABAJO FINAL DE MÁSTER**

Autor: Jorge Conde  
Tutor: Javier Aparicio

Madrid, octubre de 2004

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	4
1.1. ANÁLISIS ELÁSTICO .....	4
1.2. ANÁLISIS LÍMITE.....	4
1.3. OBJETO DEL TRABAJO .....	4
2. BASES DE CÁLCULO .....	6
2.1. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES .....	6
2.2. DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA Y RIGIDEZ A NIVEL SECCIÓN .....	9
2.2.1. Fase I (fase elástica) .....	10
2.2.2. Fase II (fisurada).....	11
2.2.3. Fase III (fluencia) .....	12
2.2.4. Influencia de la cuantía.....	18
2.2.5. Pieza con armado y forma genérica.....	18
2.3. DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA Y RIGIDEZ A NIVEL PIEZA .....	27
2.4. CAPACIDAD DE GIRO .....	29
2.5. REFERENCIAS.....	30
3. CRITERIOS DE MODELIZACIÓN .....	31
3.1. CONTEXTO DEL ANÁLISIS .....	31
3.2. OBJETO DEL ANÁLISIS.....	31
3.3. SIMPLIFICACIONES ADOPTADAS .....	32
3.4. ELEMENTOS EMPLEADOS Y SUS CARACTERÍSTICAS.....	33
3.4.1. Elementos de Barra.....	33
3.4.2. Elementos de Rótula .....	33
3.4.3. Calibración de los elementos .....	34
3.5. TÉCNICAS EMPLEADAS .....	35
3.5.1. Modelización.....	35
3.5.2. Análisis.....	35
3.5.3. Obtención de resultados.....	36
3.6. CARACTERÍSTICAS DE ANSYS EMPLEADAS .....	36
3.7. REFERENCIAS.....	36
4. MODELOS REALIZADOS.....	37
4.1. MODELO 1: VIGA DE UN TRAMO.....	38
4.1.1. Modelo 1. Descripción del problema .....	38
4.1.2. Modelo 1. Solución teórica .....	38
4.1.3. Modelo 1. Listado ANSYS .....	39
4.1.4. Modelo 1. Resumen de resultados de ANSYS .....	42
4.1.5. Modelo 1. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.....	42
4.2. MODELO 2: VIGA DE UN TRAMO.....	43
4.2.1. Modelo 2. Descripción del problema .....	43
4.2.2. Modelo 2. Solución teórica .....	43
4.2.3. Modelo 2. Listado ANSYS .....	43
4.2.4. Modelo 2. Resumen de resultados de ANSYS .....	46
4.2.5. Modelo 2. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.....	46
4.3. MODELO 3: EMPARRILLADO SIMPLE .....	47
4.3.1. Modelo 3. Descripción del problema .....	47
4.3.2. Modelo 3. Solución teórica .....	47

---

4.3.3. Modelo 3. Listado ANSYS .....	50
4.3.4. Modelo 3. Resumen de resultados de ANSYS .....	53
4.3.5. Modelo 3. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.....	54
4.4. MODELO 4: EMPARRILLADO SIMPLE CON DOS CARGAS .....	55
4.4.1. Modelo 4. Descripción del problema .....	55
4.4.2. Modelo 4. Solución teórica .....	55
4.4.3. Modelo 4. Listado ANSYS .....	65
4.4.4. Modelo 4. Resumen de resultados de ANSYS .....	68
4.4.5. Modelo 4. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.....	70
4.5. MODELO 5: EMPARRILLADO ISÓTROPO .....	71
4.5.1. Modelo 5. Descripción del problema .....	71
4.5.2. Modelo 5. Solución teórica .....	71
4.5.3. Modelo 5. Listado ANSYS .....	79
4.5.4. Modelo 5. Resumen de resultados de ANSYS .....	82
4.5.5. Modelo 5. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.....	84
4.6. REFERENCIAS.....	84
5. CONCLUSIONES.....	85

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. ANÁLISIS ELÁSTICO

En el mundo del proyecto de estructuras se han popularizado los programas de análisis elástico lineal. Estos programas operan partiendo de las rigideces brutas de las piezas. Con estos datos de partida se calculan los esfuerzos de las piezas, generalmente mediante el método matricial. A partir de dichos esfuerzos se procede al armado de cada punto, dando el proceso por concluido.

Este método, universalmente aceptado, esconde sin embargo profundas inconsistencias que generalmente se pasan por alto; si la estructura se encuentra fisurada (lo que es el caso general), las rigideces de las piezas ya no dependen de su sección original, sino básicamente del armado dispuesto; por tanto, la distribución de esfuerzos considerada no rige y sería necesario un nuevo análisis.

El proceso así considerado sólo puede resolverse de manera iterativa, y nada garantiza su convergencia; antes bien, si se arman con cuantías mayores las zonas más solicitadas, en régimen fisurado su inercia será mayor y por tanto tenderán a aumentar sus solicitaciones; el proceso diverge claramente. La conclusión es sencilla: no es posible realizar un armado coherente partiendo de las premisas del análisis elástico.

## 1.2. ANÁLISIS LÍMITE

Una perspectiva diferente surge si se busca la capacidad última de la estructura; si se ignoran las condiciones de compatibilidad y se formulan únicamente las de equilibrio, y se supone que la carga se incrementa paulatinamente, las secciones se agotan, comenzando generalmente por las más rígidas; la estructura rompe cuando el número de secciones agotadas permite la formación de un mecanismo, en el sentido estático del término.

De esta forma, siempre y cuando se satisfagan las condiciones de equilibrio, cualquier estrategia de armado -razonablemente cercana al armado elástico- es posible; la única limitación es la debida a la capacidad de rotación de las secciones.

## 1.3. OBJETO DEL TRABAJO

El problema básico al que se enfrenta el proyectista es la incapacidad de análisis derivada de las limitadas capacidades de las herramientas de cálculo habitualmente empleadas. Estas herramientas operan con rigideces brutas, en una sola etapa de carga y sin posibilidad de no linealidades.

El programa ANSYS, sin embargo, no presenta estas limitaciones. Puede operar con las rigideces que se deseen, definidas por el usuario. Las etapas de carga pueden ser las que se quieran, y el programa maneja de forma potente cualquier tipo de no linealidad. Por tanto, es la herramienta idónea para evaluar el comportamiento en rotura de estructuras dúctiles.

El presente trabajo pretende fijar un procedimiento adecuado para explotar estas capacidades del programa en el análisis de emparrillados planos.

Para ello se sigue la siguiente metodología:

- En el capítulo 2 se establecen las bases de cálculo de las piezas, determinándose los diagramas momento-curvatura a emplear.
- En el capítulo 3 se indican los criterios seguidos en la Modelización de las estructuras. Particularmente, los matices relacionados con las características especiales del programa.
- En el capítulo 4 se presentan 5 modelos resueltos mediante ANSYS, comparando los resultados con la solución teórica conocida.

El procedimiento presentado queda suficientemente definido; los modelos presentados son muy sencillos, pero tienen la ventaja de que sus resultados eran previamente conocidos por el autor, lo que ha permitido calibrar correctamente los parámetros de entrada para una adecuada solución mediante el programa ANSYS.

## 2. BASES DE CÁLCULO

En este epígrafe se detallan los procesos básicos necesarios para llevar a cabo análisis en rotura de secciones de hormigón armado; en particular:

- diagrama momento-curvatura y rigidez
- capacidad de giro de la sección
- capacidad de redistribución de piezas simples
- procesos de cálculo no lineal

### 2.1. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Para proceder a realizar cálculos sobre la sección armada es preciso conocer las propiedades mecánicas básicas de hormigón y acero, en particular la gráfica tensión-deformación; según EC2<sup>R2.1</sup> es preciso distinguir entre la gráfica para el cálculo de las secciones y la gráfica característica para el análisis estructural. En la práctica la distinción es poco significativa y muy variable en las referencias consultadas, por lo que se ha optado por el diagrama de cálculo, mejor conocido y estandarizado.

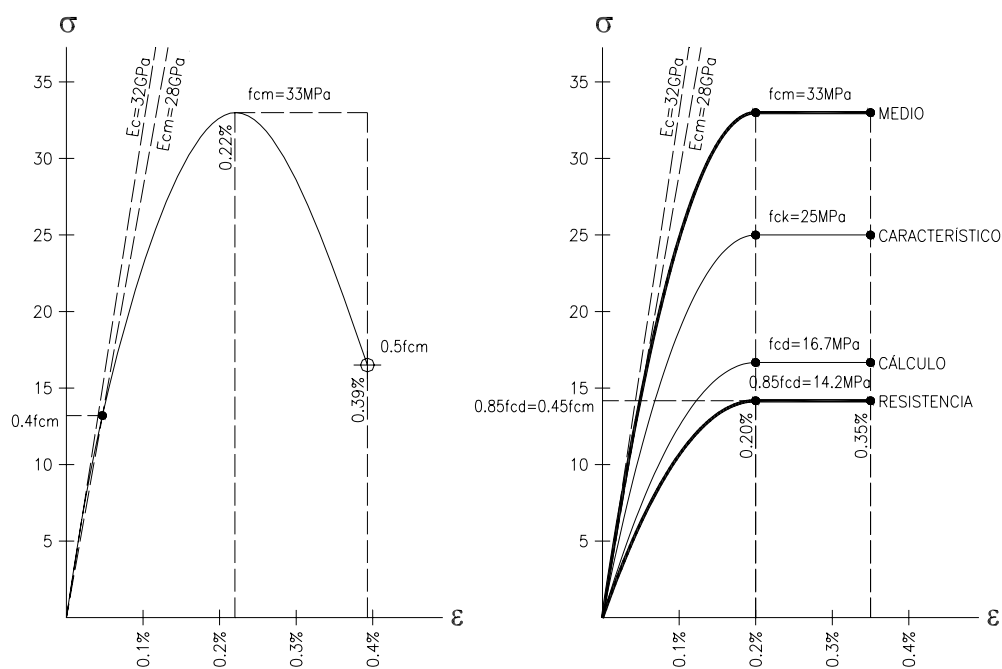


Figura 2.1. Diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  para hormigón: para análisis estructural (izquierda) y simplificados (derecha)

En la figura 2.1 se ha representado el diagrama 'característico' tensión-deformación establecido según el Código Modelo<sup>R2.2</sup> y una serie de diagramas simplificados de uso común tanto en la norma europea como en la española<sup>R2.3</sup> para un hormigón tipo HA-25 (nomenclatura española) ó C25/30 (nomenclatura europea). La curva superior (basada en valores medios  $f_{cm}$ ) será la adecuada para aspectos relacionados con la deformación, mientras que la curva inferior (basada en valores de cálculo minorados por el coeficiente 0.85) se empleará para aspectos resistentes.

Los valores relevantes del diagrama son los siguientes<sup>1</sup>:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa} \quad [2.1]$$

$$E_{cm} \approx 9.5 f_{cm}^{1/3}$$

siendo

$f_{cd}$	Resistencia de cálculo del hormigón a compresión	MPa, kPa
$f_{ck}$	Resistencia característica del hormigón a compresión	MPa, kPa
$f_{cm}$	Resistencia media del hormigón a compresión	MPa, kPa
$\gamma_c$	Coeficiente parcial de seguridad del hormigón, habitualmente 1.5	

La relación  $\sigma$ - $\varepsilon$  puede expresarse analíticamente de la siguiente manera:

$$\sigma_{cd} = 0.85 f_{cd} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \right] \quad \text{para} \dots \dots \dots \varepsilon_c < \varepsilon_{c1}$$

$$\sigma_{cd} = 0.85 f_{cd} \quad \text{para} \dots \dots \dots \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \quad [2.2]$$

$$\sigma_{cd} = 0 \quad \text{para} \dots \dots \dots \varepsilon_{cu} < \varepsilon_c$$

siendo:

$\sigma_{cd}$	Tensión de cálculo del hormigón en una fibra determinada	MPa, kPa
$f_{cd}$	resistencia de cálculo del hormigón	MPa, kPa
$\varepsilon_c$	Deformación unitaria del hormigón en una fibra determinada	-
$\varepsilon_{c1}$	En el diagrama $\sigma$ - $\varepsilon$ , deformación correspondiente al punto de máxima tensión	-
$\varepsilon_{cu}$	En el diagrama $\sigma$ - $\varepsilon$ , deformación correspondiente a la rotura	-

donde  $\varepsilon_{c1} = -0.002$ ,  $\varepsilon_{cu} = -0.0035$  para los hormigones habitualmente empleados en edificación. Se considera positiva la tracción y negativa la compresión, tanto en tensiones como en deformaciones. Estos valores son para análisis seccional, ya que según EC2 para análisis estructural sería precisa otra definición, en la que  $\varepsilon_{c1} = -0.0022$  y  $\varepsilon_{cu}$  depende de la resistencia del hormigón. La definición exacta del diagrama característico no interesa a efectos del presente trabajo.

En el diagrama anterior se ha considerado que la resistencia a tracción del hormigón es nula, simplificación aceptable a efectos de cálculos seccionales en niveles elevados de sollicitación; sin embargo para aquellas secciones no fisuradas o poco sollicitadas la resistencia a tracción es un valor relevante; en tales casos EC2 define los siguientes valores:

$$f_{ctm} = 0.30 f_{ck}^{2/3}$$

$$f_{ctk0,05} = 0.70 f_{ctm} \quad [2.3]$$

$$f_{ctk0,95} = 1.30 f_{ctm}$$

siendo:

---

<sup>1</sup> Una formulación más coherente, empleada por el autor, sería  $E_c \approx 2 \cdot f_{cm} / \varepsilon_{ci}$  y  $E_{cm} \approx 0.85 \cdot E_c$ ; tiene la ventaja de, con un rango de precisión aceptable, respetar el concepto de módulo resistente como tangente al diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$ ; estos valores son los representados en el diagrama de la derecha.

$f_{ctm}$	Resistencia media del hormigón a tracción	MPa, kPa
$f_{ct0,05}$	Resistencia inferior del hormigón a tracción (percentil 0.05)	MPa, kPa
$f_{ct0,95}$	Resistencia superior del hormigón a tracción (percentil 0.95)	MPa, kPa

Para el acero se tomará habitualmente un diagrama bilineal simplificado como el indicado en la figura 2.2. Para indicar cuál es la proporción entre los materiales se ha representado a la misma escala la tensión del hormigón para deformaciones similares.

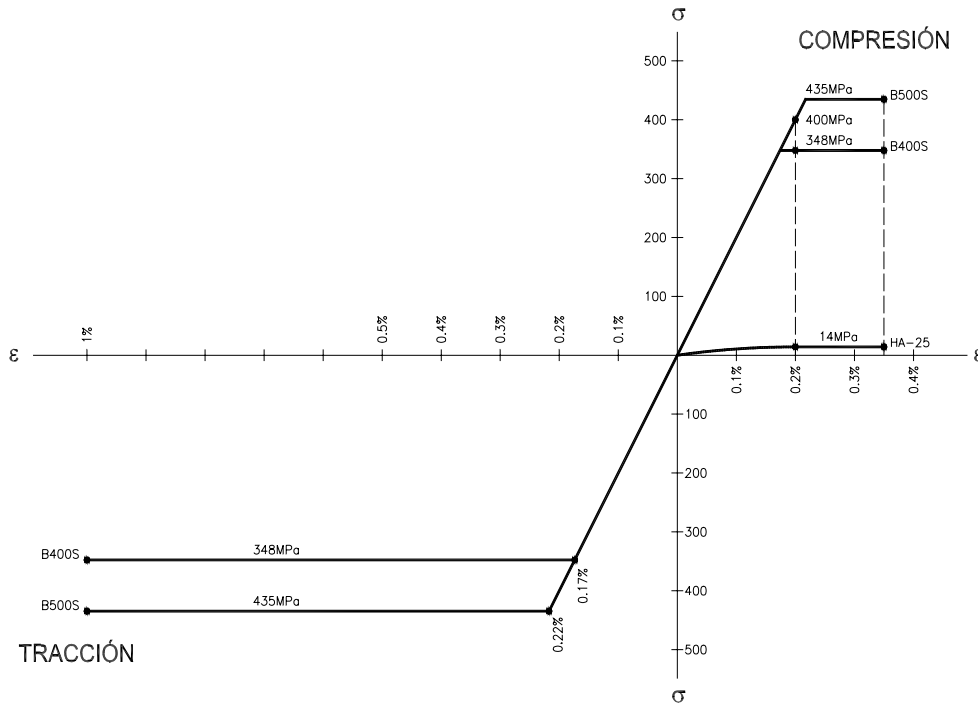


Figura 2.2. Diagrama simplificado de cálculo para acero estructural

En este caso los valores relevantes, así como la relación  $\sigma$ - $\varepsilon$ , pueden expresarse analíticamente de la siguiente manera:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$$E_s \approx 200 \text{ GPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{sd} &= E_s \varepsilon_s && \text{para } |\varepsilon_s| < |\varepsilon_{yd}| \\ \sigma_{sd} &= \frac{|f_{yd}|}{|\varepsilon_s|} \varepsilon_s && \text{para } (\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}) \vee (\varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd}) \\ \sigma_{sd} &= 0 && \text{para } (\varepsilon_s > \varepsilon_{su}) \vee (\varepsilon_{cu} > \varepsilon_s) \end{aligned} \tag{2.5}$$

siendo:

$f_{yd}$	Límite elástico minorado del acero	MPa, kPa
----------	------------------------------------	----------

$f_{yk}$	Límite elástico del acero	MPa, kPa
$E_s$	Módulo de elasticidad del acero	GPa, kPa
$\varepsilon$	Deformación unitaria	-
$\varepsilon_{cu}$	En el diagrama $\sigma$ - $\varepsilon$ , deformación correspondiente a la rotura	-
$\varepsilon_s$	Deformación unitaria del acero	-
$\varepsilon_{su}$	Deformación unitaria del acero correspondiente a la rotura	-
$\varepsilon_{yd}$	Deformación unitaria del acero en el límite elástico de cálculo $f_{yd}$	-
$\sigma_{sd}$	Tensión de cálculo del acero en una fibra determinada	MPa, kPa

habitualmente  $\varepsilon_{su} = 0.01$  (límite de cálculo para rotura a tracción)<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{cu} = -0.0035$ ; como se ve, mientras que a compresión es la deformación límite del propio hormigón envolvente la que rige, a tracción es preciso imponer un límite normalizado.

## 2.2. DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA Y RIGIDEZ A NIVEL SECCIÓN

En un proceso de análisis no lineal es fundamental conocer la variación de la rigidez con la sollicitación; en las piezas de hormigón una forma de hacerlo es a través del diagrama momento-curvatura. En efecto, suponiendo que las deformaciones son pequeñas, la ecuación de campo para una barra recta sometida a flexión pura sería<sup>R2.4</sup>:

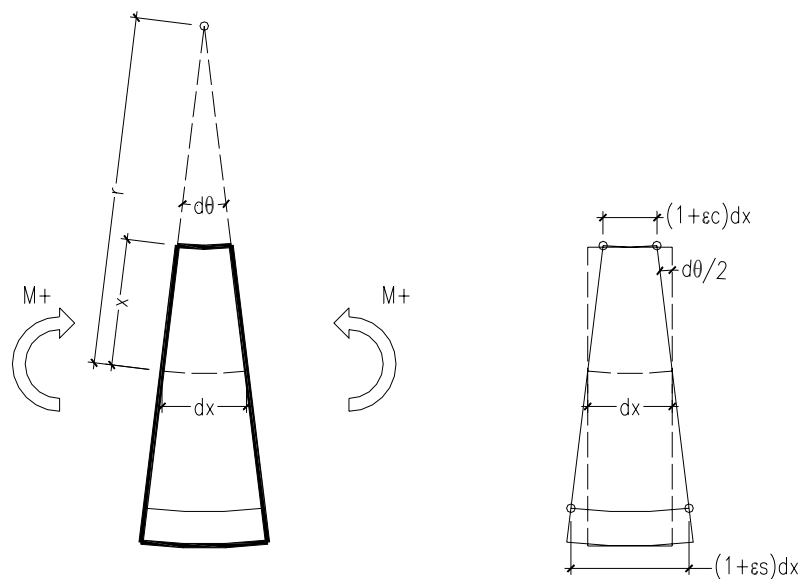


figura 2.3. pieza a 'flexión pura'

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{r} = C \tag{2.6}$$

(v es el desplazamiento vertical de la directriz de la pieza) es decir,  $E \cdot I = -M \cdot r = -M/C$ ; la rigidez de una sección es la pendiente de su diagrama momento curvatura. El término  $E \cdot I$ , *rigidez de la sección*, también se denomina  $K$ . Conocido el diagrama  $M-C$  es trivial determinar en cada punto la rigidez  $E \cdot I$ . El manejo de la rigidez como factor global engloba ventajosamente los términos de

<sup>2</sup> Aunque en realidad el material en rotura presenta elongaciones mucho mayores; según EHE, del 14% para B400S y del 12% para B500S.

módulo resistente e inercia que en hormigón armado -al tratarse de un material compuesto- resultan incómodos o por lo menos confusos.

Debido a que el hormigón es un material claramente asimétrico (con escasa resistencia a tracción y buena resistencia a compresión), en una pieza se distinguen tres fases de rigidez bien diferenciadas:

### 2.2.1. Fase I (fase elástica)

En esta fase la tensión de tracción en el hormigón no ha alcanzado el máximo resistido por el material; por tanto no hay fisuración, y la rigidez es la debida al hormigón, conocida como rigidez bruta o *rigidez no fisurada*,  $EI_{uc}$  ó  $EI_1$ . En el cómputo de dicha rigidez podría considerarse también la aportada por el acero, conociéndose el conjunto como *rigidez equivalente no fisurada*; ahora bien, para cuantías normales el aporte de rigidez es muy reducido y sin embargo el cálculo resulta más complejo, por lo que es práctica común ignorar el acero en esta fase.

El proceso de cálculo es el siguiente: se calcula la inercia bruta de la sección de hormigón<sup>3</sup>  $I_{uc}$  en base a sus características geométricas; la rigidez  $EI_1$  se expresa como  $E_{cm} \cdot I_{uc}$ ; por tanto la tensión en una fibra cualquiera será

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_{uc}} \quad \text{con} \quad \sigma_2 \leq |f_{ctm}| \quad [2.7]$$

siendo

$y$	Distancia del eje neutro a una fibra, positiva hacia abajo	m
$y_2$	Distancia del eje neutro a la fibra inferior, positiva	m
$\sigma_2$	Tensión en la fibra inferior de la sección, positiva si el momento M es positivo	MPa, kPa

A medida que el momento  $M$  se incrementa, aumenta la tracción máxima en la fibra inferior; en el límite, esta tracción será igual a la máxima resistida por el hormigón  $f_{ctm}$ , produciéndose entonces la fisuración de la sección; al momento que produce esta tensión se le denomina momento de fisuración  $M_{cr}$ . Su expresión será

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm} I_{uc}}{y_2} \quad [2.8]$$

En toda esta fase la curvatura  $C_{uc}$  se mantiene constante; puede estimarse a partir de la ecuación [2.6.] como

$$C_{uc} = \frac{f_{ctm}}{y_2 \cdot E_{cm}} \quad [2.8]$$

<sup>3</sup> el subíndice 'cr' proviene del inglés *uncracked*, no fisurada.

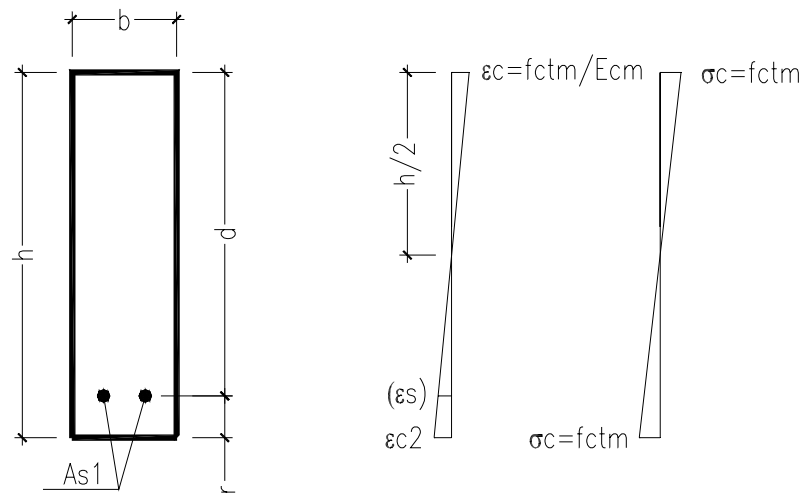


Figura 2.4: Sección en Fase I, deformaciones y tensiones

Al alcanzarse el momento de fisuración  $M_{cr}$  el hormigón desarrolla fisuras en ciertas secciones en las que la resistencia a tracción pasa a depender íntegramente del acero, lo que provoca una brusca pérdida de rigidez. Con cuantías convencionales el momento de fisuración es pequeño en comparación con el momento último y la rigidez bruta tiene poca repercusión en el comportamiento global de la sección, por lo que la fase I generalmente puede obviarse a efectos mecánicos.

### 2.2.2. Fase II (fisurada)

Con el hormigón fisurado la rigidez depende de ambos materiales: en la zona a compresión del hormigón (aunque también puede haber acero a compresión); en la zona a tracción, del acero; la posición de la fibra neutra dependerá siempre de la *cuantía geométrica*  $\rho$ :

- valores bajos de  $\rho$  (en torno a 0.004) indican que se precisa poco hormigón para equilibrar el acero y por tanto los valores de  $x$  (profundidad de la zona comprimida) serán pequeños;
- valores altos de  $\rho$  (en torno a 0.012) indican que se precisa mucho hormigón para equilibrar el acero y por tanto los valores de  $x$  (profundidad de la zona comprimida) serán grandes;

En el momento de la fisuración de la sección la tensión del acero presenta un valor  $\sigma_{scr}$ , generalmente muy inferior al límite elástico del acero  $f_{yd}$ ; a medida que  $x$  se reduce,  $\sigma_c$  y  $\sigma_s$  se incrementan en valor absoluto y la deformación de la sección está controlada; el límite a esta situación se alcanza cuando el acero inferior plastifica, es decir, cuando la deformación  $\varepsilon_s$  alcanza el valor  $\varepsilon_{yd}$ .

La sección está sometida exclusivamente a momento flector; por tanto, el axil  $N$  es nulo, lo que implica que la integración de las tensiones en la sección será nula; las ecuaciones que rigen el comportamiento son:

$$\varepsilon_{sd} = \varepsilon_{cd} \frac{x-d}{x} \quad [2.9.a]$$

$$\int_0^x b \sigma_{cd} dy + A_{s1} \sigma_{sd} = 0 \quad [2.9.b]$$

A las que hay que añadir las constitutivas de los materiales, indicadas en [2.2.] y [2.5.]; en estas ecuaciones hay que prestar atención a los signos de las deformaciones, ya que las del hormigón serán negativas, mientras que las del acero traccionado serán positivas. La ecuación [2.9.a] nos da la deformación del acero conocida la del hormigón y la profundidad comprimida. La ecuación

[2.9.b] expresa la condición de axil nulo y corresponde al sumatorio de todas las fuerzas sobre la sección.

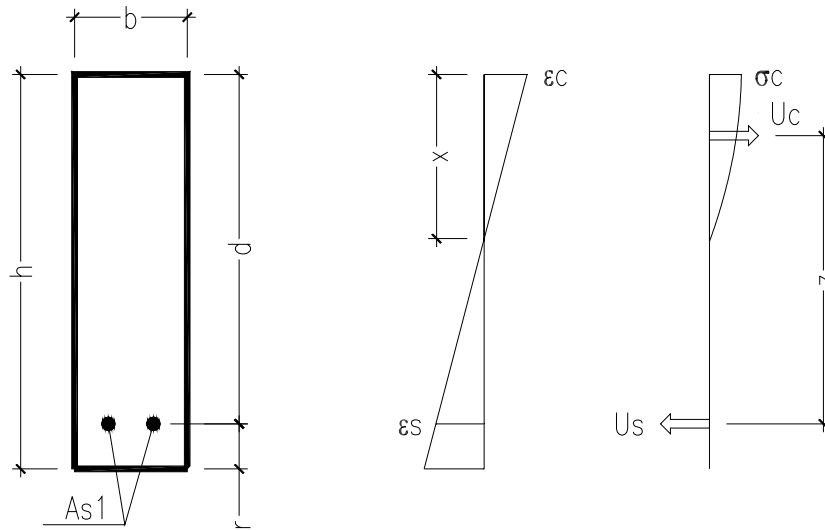


Figura 2.5: Sección en Fase II, deformaciones y tensiones

La secuencia de cálculo para el diagrama  $M-C$  podría ser la siguiente: fijado un valor  $\epsilon_{sd}$  se resuelven las ecuaciones [2.9] obteniéndose un par  $\epsilon_{cd}, x$ ; a continuación se procede a evaluar el momento, lo que puede hacerse mediante la expresión

$$M_d = \int_0^x b\sigma_{cd}ydy + A_{s1}\sigma_{sd}d \tag{2.10}$$

La curvatura puede calcularse a partir de la figura 2.5. empleando consideraciones puramente geométricas, como la pendiente de la gráfica de deformaciones

$$C = \frac{\epsilon_{sd} - \epsilon_{cd}}{d} = \frac{-\epsilon_{cd}}{x} = \frac{\epsilon_{sd}}{d - x} \tag{2.11}$$

A partir de un valor de  $\epsilon_{sd}$  se ha obtenido por tanto un punto del diagrama  $M_d-C$ . La rigidez  $El_2$  puede obtenerse mediante la ecuación [2.6.] como  $M_{yd}/C_y$ , siempre y cuando se acepte la simplificación de que la gráfica en esta zona se aproxima a una recta que pasa por el origen.

Si se desea una mayor precisión puede procederse a calcular numéricamente la derivada a la curva continua; para obtener esta última basta barrer el espectro desde  $\epsilon_{sd}$  hasta  $\epsilon_{yd}$ , valores que corresponden al límite inferior y superior de la fase II. La rigidez máxima para esta fase se sitúa para los puntos más cercanos al origen, donde el término  $|\epsilon_{sd}| + |\epsilon_{sc}|$  es mínimo y en consecuencia  $El_{cr}$  es máxima. Por las mismas razones la rigidez mínima  $El_y$  se encuentra en el límite superior.

### 2.2.3. Fase III (fluencia)

Una vez el acero ha alcanzado la plastificación, la sección gira bajo momento flector prácticamente constante; su rigidez es muy escasa y a efectos de cálculo es habitual considerarla nula. El agotamiento de la sección se alcanza bien porque el acero alcance su tensión última nominal (1%), bien porque el hormigón alcance su deformación última  $\epsilon_{cu}$ ; en todo caso la armadura trabaja a tensión constante  $f_{yd}$ , y por tanto la capacidad mecánica de la armadura  $U_s$  es constante, la misma que en el límite de plastificación del acero anteriormente calculado.

Las ecuaciones que rigen son las mismas que en el caso anterior [2.9] y [2.10]; ahora debe incrementarse paulatinamente la tensión del acero  $\varepsilon_{sd}$  desde  $\varepsilon_{yd}$  hasta que  $\varepsilon_{cd} = \varepsilon_{cu}$  ó  $\varepsilon_{sd} = 0.01$ . El advenimiento de una u otra condición depende de las cuantías dispuestas:

- con cuantías bajas hará falta poco hormigón para equilibrar el acero; la profundidad comprimida  $x$  será pequeña y por tanto se alcanzará primero la condición de rotura del acero  $\varepsilon_{sd} = 0.01$ .
- con cuantías elevadas  $x$  será elevado y se alcanzará antes el agotamiento del hormigón  $\varepsilon_{cd} = \varepsilon_{cu}$ .

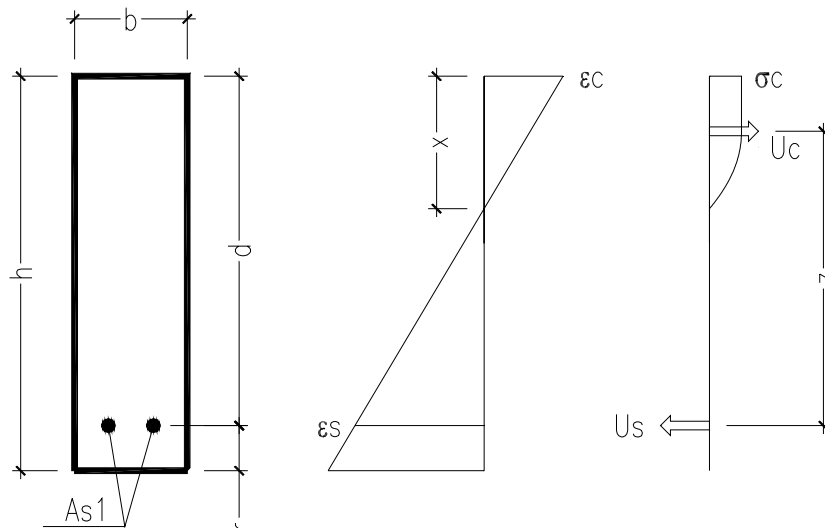


Figura 2.6: Sección en Fase III, deformaciones y tensiones

El diagrama en fase III tiende a una recta horizontal; en el punto final se sitúa el valor de momento último de la sección  $M_{ud}$ , al que corresponde una curvatura  $C_u$ . En el cálculo de la rigidez hay que tener en cuenta que la recta correspondiente a esta fase no pasa por el origen; se conocen sin embargo los puntos inicial ( $M_{yd}-C_y$ ) y final ( $M_{ud}-C_u$ ), por lo que la rigidez puede evaluarse según la expresión

$$EI_3 = \frac{M_{ud} - M_{yd}}{C_u - C_y} \quad [2.12]$$

Con cuantías bajas el recorrido de las deformaciones es más amplio y por tanto la longitud de la fase III es mayor, lo que en definitiva supone que la fase plástica de comportamiento es mayor. A igualdad de condiciones, la sección menos armada será más dúctil.

*Ejemplo 2.1: cálculo del diagrama M-C de una sección rectangular con armado inferior.*

Partimos de la sección previamente definida en el ejemplo del capítulo 1; se trata de una sección rectangular con  $h = 0.35\text{m}$ ,  $b = 0.10\text{m}$ ,  $r = 0.04\text{m}$ ,  $d = 0.31\text{m}$ ,  $As1 = 0.01 \cdot Ac$ ,  $As2 = 0$ ; por tanto  $As1 = 226\text{ mm}^2$ . Los materiales son: hormigón HA-25, acero B 500 S; por tanto  $fck = 25\text{MPa} = 25000\text{ kPa}$ ;  $fcd = 16667\text{ kPa}$ ;  $fctm = 2565\text{ kPa}$ ;  $fyk = 500\text{ MPa}$ ,  $fyd = 435\text{ MPa}$ ;  $Ecm = 30.5\text{ GPa}$ ;  $Es = 200\text{ GPa}$ .

Se trata de obtener el diagrama M-C y las rigideces correspondientes en cada fase.

### EJEMPLO 2.1

$fck := 25000$		<b>kPa, resistencia característica del hormigón</b>
$fyk := 500$		<b>kN/mm<sup>2</sup>, límite elástico del acero</b>
$\gamma_c := 1.5$		
$\gamma_s := 1.15$		
$fcd := \frac{fck}{\gamma_c}$	$fcd = 16666.6667$	<b>kPa, resistencia minorada del hormigón</b>
$fyd := \frac{fyk}{\gamma_s}$	$fyd = 434.7826$	<b>MPa, resistencia de cálculo del acero</b>
$fcm := fck + 8000$	$fcm = 33000$	<b>kPa, resistencia media del hormigón</b>
$fctm := 300 \cdot \left(\frac{fck}{1000}\right)^{\frac{2}{3}}$	$fctm = 2564.9639$	<b>MPa, resistencia media a tracción del hormigón</b>
$Es := 200$		<b>GPa, módulo resistente del acero</b>
$Ecm := 9.5 \cdot \left(\frac{fcm}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}$	$Ecm = 30.4716$	<b>GPa, módulo secante del hormigón</b>
$n := \frac{Es}{Ecm}$	$n = 6.5635$	<b>coeficiente de equivalencia</b>
$\beta_1 := 1.00$		<b>coeficiente de adherencia de barras según EC-2, A2.2</b>
$\beta_2 := 0.50$		<b>coeficiente de cargas según EC2, A2.2</b>
$\epsilon_{yd} := \frac{fyd}{Es}$	$\epsilon_{yd} = 0.0022$	<b>deformación unitaria en plastificación</b>
$\phi := 0$		<b>fluencia</b>

### DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

$b := 0.10$		<b>m, ancho del alma</b>
$h := 0.35$		<b>m, canto de la sección</b>
$r := 0.04$		<b>m, recubrimiento</b>
$d := h - r$	$d = 0.31$	<b>m, canto útil</b>
$As1 := b \cdot d \cdot 0.01 \cdot 10^6$	$As1 = 310$	<b>mm<sup>2</sup>, área de acero traccionada</b>
$As2 := 0$		

**DEFINICIÓN DE LOS PUNTOS DEL DIAGRAMA DE TENSIÓN DEFORMACIÓN**

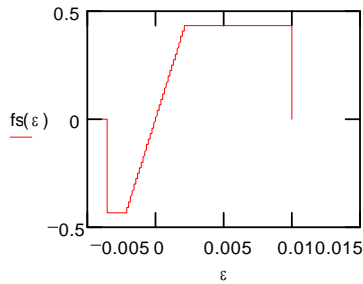
$\epsilon_{c1} := -0.002 \cdot (1 + \phi)$

$\epsilon_{c1} = -0.002$

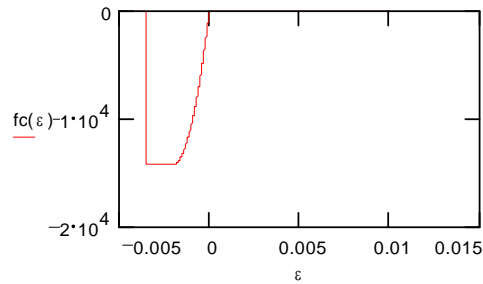
*límites de deformación para el hormigón*

$\epsilon_{cu} := -0.0035 \cdot (1 + \phi)$

$\epsilon_{cu} = -0.0035$



*Diagrama de cálculo para el acero*



*Diagrama de cálculo para el hormigón*

$\epsilon(y, x, \epsilon c) := \frac{x - y}{x} \cdot \epsilon c$

*deformación de una fibra situada a una altura y en una sección con profundidad de cabeza comprimida x y deformación del hormigón  $\epsilon c$*

**FASE I**

$Eluc := \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot Ecm \cdot 10^6$

$Eluc = 10887.24$

*kNm<sup>2</sup>, rigidez en fase I (bruta, sin considerar la colaboración del acero)*

$Mcr := \frac{Eluc}{\frac{h}{2}} \cdot fctm$

$Mcr = 5.2368$

*kPa, momento de fisuración (del inglés cracked)*

$Ruc := \frac{Eluc}{Mcr}$

$Ruc = 2078.9867$

*m, radio de curvatura fase I*

$Cuc := \frac{1}{Ruc}$

$Cuc = 0.00048$

*1/m, curvatura fase I*

**FASE II**

**En primer lugar, es conveniente calcular la situación bajo el momento de fisuración  $M_{cr}$**

**El sistema correspondiente es el siguiente**

$$\int_0^{x_{cr}} b \cdot f_c(\varepsilon(y, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) dy + A_s \cdot f_s(\varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) = M_{cr} \quad \text{fuerza que } M=M_{cr}$$

$$\int_0^{x_{cr}} b \cdot f_c(\varepsilon(y, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) dy + A_s \cdot f_s(\varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) = 0 \quad \text{fuerza que } N=0$$

**Las soluciones son**

$$x_{cr} = 0.1285$$

$$\varepsilon_{ccr} = -0.0002$$

$$\varepsilon_{scr} := \varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr}) \quad \varepsilon_{scr} = 0.0003$$

**La curvatura y rigidez son ahora sencillas de calcular, tomando como base las deformaciones de hormigón y acero**

$$R_{cr} := \frac{d}{\varepsilon_{scr} - \varepsilon_{ccr}} \quad R_{cr} = 573.307 \quad \text{m, radio de curvatura en la plastificación}$$

$$C_{cr} := \frac{1}{R_{cr}} \quad C_{cr} = 0.0017 \quad \text{1/m, curvatura en la plastificación}$$

$$E_{lcr} := M_{cr} \cdot R_{cr} \quad E_{lcr} = 3002.2947 \quad \text{kNm}^2, \text{ rigidez en la plastificación}$$

**Se procede a calcular el momento de plastificación del acero  $M_{yd}$**

**Se trata de buscar el momento que hace es =  $\varepsilon_{yd}$ ; este momento se produce para un determinado valor de  $x$  y  $\varepsilon_c$**

**Las condiciones son**

$$\frac{xy - d}{xy} \cdot \varepsilon_{cy} = \varepsilon_{yd} \quad \text{fuerza que es } = \varepsilon_{yd}$$

$$\int_0^{xy} b \cdot f_c(\varepsilon(y, xy, \varepsilon_{cy})) dy + A_s \cdot f_s(\varepsilon(d, xy, \varepsilon_{cy})) = 0 \quad \text{fuerza que } N=0$$

**Las soluciones a este sistema son**

$$xy = 0.1456$$

$$\varepsilon_{cy} = -0.0019$$

**Puede verificarse que esta solución es correcta calculando la capacidad mecánica del hormigón y el acero por separado; deben ser iguales para que  $N=0$**

$$\int_0^{xy} b \cdot f_c(\varepsilon(y, xy, \varepsilon_{cy})) dy = -134.7826 \quad \text{kn, } U_c, \text{ hormigón}$$

$$A_s \cdot f_s(\varepsilon(d, xy, \varepsilon_{cy})) = 134.7826 \quad \text{kN, } U_s, \text{ acero}$$

**Ahora puede procederse a calcular el momento de plastificación en la sección, integrando las tensiones en el hormigón y añadiendo el momento producido por el acero**

$$M_{yd} := \int_0^{xy} b \cdot f_c(\varepsilon(y, xy, \varepsilon_{cy})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) dy + A_s \cdot f_s(\varepsilon(d, xy, \varepsilon_{cy})) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right)$$

$$M_{yd} = 34.4707 \quad \text{kNm, momento de plastificación del acero}$$

$$R_y := \frac{d}{\varepsilon_{yd} - \varepsilon_{cy}} \quad R_y = 75.6402 \quad \text{m, radio de curvatura en la plastificación}$$

$$C_y := \frac{1}{R_y} \quad C_y = 0.0132 \quad \text{1/m, curvatura en la plastificación}$$

$$E_{ly} := M_{yd} \cdot R_y \quad E_{ly} = 2607.3734 \quad \text{kNm}^2, \text{ rigidez en la plastificación}$$

**FASE III**

*Se trata ahora de buscar el momento último de la sección; para ello puede ocurrir que se agote el hormigón o el acero ó excepcionalmente ambos a la vez. En todo caso se sabe ya cuál es  $U_{s1}$  y  $U_c$ , que no varían respecto a la fase II*

*Las condiciones son*

$$\int_0^{x_u} b \cdot f_c(\varepsilon(y, x_u, \varepsilon_{cu})) dy + A_{s1} \cdot f_{yd} = 0 \quad \text{fuerza que } N = 0$$

*La solución de esta ecuación es*

$$x_u = 0.1175$$

*de donde*

$$\varepsilon_{su} := \varepsilon(d, x_u, \varepsilon_{cu}) \quad \varepsilon_{su} = 0.0057$$

*Esta deformación es inferior al límite nominal de 0.01. Por tanto el hormigón se agota antes de que el acero alcance su alargamiento de rotura. Entonces:*

$$M_{ud} := \int_0^{x_u} b \cdot f_c(\varepsilon(y, x_u, \varepsilon_{cu})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) dy + A_{s1} \cdot f_s(\varepsilon(d, x_u, \varepsilon_{cu})) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right)$$

$$M_{ud} = 35.1935 \quad \text{Momento último de la sección}$$

*La curvatura se calcular tomando como base las deformaciones de hormigón y acero*

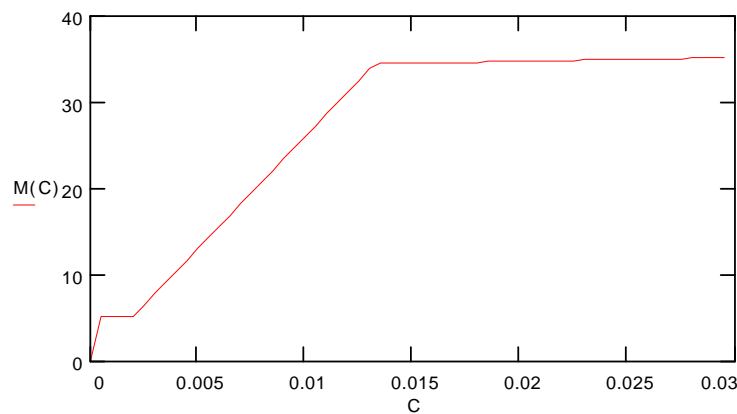
$$R_u := \frac{d}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{cu}} \quad R_u = 33.5791 \quad \text{m, radio de curvatura en rotura}$$

$$C_u := \frac{1}{R_u} \quad C_u = 0.0298 \quad \text{1/m, curvatura en rotura}$$

*Para calcular la rigidez hay que tener en cuenta que la pendiente no pasa por el origen, sino por el punto previamente calculado (fase II); entonces*

$$E_{lu} := \frac{M_{ud} - M_{yd}}{C_u - C_y} \quad E_{lu} = 43.6436 \quad \text{kNm}^2, \text{ rigidez en la plastificación}$$

**DIAGRAMA FINAL SIMPLIFICADO MOMENTO-CURVATURA**



*Fin del ejemplo 2.1.*

### 2.2.4. Influencia de la cuantía

Como se deduce del desarrollo anterior, la forma general del diagrama  $M-C$  depende básicamente de la cuantía geométrica  $\rho$ :

- para cuantías bajas  $C_y$  es pequeña ( $x_y$  es pequeña) y  $C_u$  grande (se alcanza la rotura del acero); por tanto, la fase III es más extensa; la sección es muy dúctil
- para cuantías elevadas  $C_y$  es grande ( $x_y$  es grande) y  $C_u$  pequeña (se alcanza antes el aplastamiento del hormigón); por tanto, la fase III es más corta; la sección es poco dúctil.

Para el comportamiento de la sección es crucial determinar la cuantía frontera entre el agotamiento por rotura del acero y aplastamiento del hormigón. Existe un límite que separa ambos criterios, cuando la rotura sobreviene simultáneamente en ambos materiales; puede calcularse la relación  $x/d$  correspondiente a partir de la ecuación [2.11], haciendo

$$\frac{\varepsilon_{yd} - \varepsilon_{cu}}{d} = \frac{-\varepsilon_{cu}}{x} \Rightarrow \frac{x}{d} = 0.259 \quad [2.13]$$

A partir de este dato y sabiendo que la resultante de la cabeza comprimida es  $0.8 \cdot x \cdot b \cdot 0.85 \cdot f_{cd}$  e igualándola a  $U_s = A_s \cdot f_{yd}$ , se tiene que la cuantía frontera  $\rho_{lim,u}$  es:

$$\rho_{lim,u} = 0.176 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad [2.14]$$

para acero B 500 S y HA-25 esta cuantía es 0.0068. Por debajo de este valor las secciones se agotan al alcanzar el acero su rotura nominal, y por tanto desarrollan la máxima curvatura posible. Por tanto este valor puede ser una interesante frontera superior de la cuantía en elementos de los que se espera una ductilidad elevada.

Otro dato valioso es la cuantía  $\rho_{lim,y}$  que produce una fase III nula, cuando se da simultáneamente la plastificación del acero y la rotura del hormigón; por consideraciones similares a las del anterior apartado se llega a que

$$\rho_{lim,y} = 0.422 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad [2.14]$$

y por tanto, para acero B 500 S y HA-25 esta cuantía es 0.0162. Por debajo de este valor la plastificación de la sección es posible; por encima la fase III desaparece totalmente; el valor de  $M_u$  es inferior al de  $M_y$ , truncándose el diagrama  $M-C$  en la fase II.

### 2.2.5. Pieza con armado y forma genérica

El desarrollo anterior es válido para piezas con distintas formas y distribuciones de armado, simplemente incorporando los términos correspondientes que modifican a las ecuaciones [2.9] y [2.10]; así para una pieza de ancho variable  $b(y)$  con  $n$  capas de armado se tiene

$$\varepsilon_{sd,i} = \varepsilon_{cd} \frac{x - y_i}{x} \quad [2.15.a]$$

$$\int_0^x b(y) \sigma_{cd} dy + \sum_n A_{s,i} \sigma_{sd,i} = 0 \quad [2.15.b]$$

$$M_d = \int_0^x b(y) \sigma_{cd} y dy + \sum_n A_{s,i} \sigma_{sd,i} y_i \quad [2.16]$$

siendo

$A_{s,i}$	Área de acero en la capa i	mm <sup>2</sup>
$b(y)$	Ancho de la sección en la cota y	m
$i$	Numeración de una capa determinada	-
$n$	Número total de capas de armado	
$y_i$	Cota de la capa i	m
$\varepsilon_{sd,i}$	Deformación unitaria en la capa i	-
$\sigma_{sd,i}$	Tensión del acero en la capa i	MPa

*Ejemplo 2.2: cálculo del diagrama M-C en una sección rectangular con acero a compresión*

Se parte de la misma sección del ejemplo 2.1, a la que se incorpora armado a compresión de manera que  $As_2 = As_1/3$ . Se trata de determinar su diagrama M-C. La primera parte del ejercicio es exactamente igual que 2.1., hasta llegar al cálculo de la fase II.

**FASE II**

*En primer lugar, es conveniente calcular la situación bajo el momento de fisuración  $M_{cr}$*

*El sistema correspondiente es el siguiente*

$$\int_0^{x_{cr}} b \cdot f_c(\varepsilon(y, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) dy + As_1 \cdot f_s(\varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) + As_2 \cdot f_s(\varepsilon(r, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) \cdot \left(r - \frac{h}{2}\right) = M_{cr} \quad M = M_{cr}$$

$$\int_0^{x_{cr}} b \cdot f_c(\varepsilon(y, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) dy + As_1 \cdot f_s(\varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) + As_2 \cdot f_s(\varepsilon(r, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) = 0 \quad N = 0$$

*Las soluciones son*

$$x_{cr} = 0.1211$$

$$\varepsilon_{ccr} = -0.0002$$

$$\varepsilon_{scr} := \varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr}) \quad \varepsilon_{scr} = 0.0003$$

*La curvatura y rigidez son ahora sencillas de calcular, tomando como base las deformaciones de hormigón y acero*

$$R_{cr} := \frac{d}{\varepsilon_{scr} - \varepsilon_{ccr}} \quad R_{cr} = 602.5312 \quad m, \text{ radio de curvatura en la plastificación}$$

$$C_{cr} := \frac{1}{R_{cr}} \quad C_{cr} = 0.0017 \quad 1/m, \text{ curvatura en la plastificación}$$

$$E_{lcr} := M_{cr} \cdot R_{cr} \quad E_{lcr} = 3155.336 \quad kNm^2, \text{ rigidez en la plastificación}$$

*Se procede a calcular el momento de plastificación del acero  $M_{yd}$*

*Se trata de buscar el momento que hace es =  $\varepsilon_{yd}$ ; este momento se produce para un determinado valor de  $x$  y  $\varepsilon_c$*

*Las condiciones son*

$$\frac{xy - d}{xy} \cdot \varepsilon_{cy} = \varepsilon_{yd} \quad \text{fuerza que es = } \varepsilon_{yd}$$

$$\int_0^{xy} b \cdot f_c(\varepsilon(y, xy, \varepsilon_{cy})) dy + As_1 \cdot f_s(\varepsilon(d, xy, \varepsilon_{cy})) + As_2 \cdot f_s(\varepsilon(r, xy, \varepsilon_{cy})) = 0 \quad \text{fuerza que } N = 0$$

*Las soluciones a este sistema son*

$$xy = 0.1276$$

$$\varepsilon_{cy} = -0.0017$$

*Puede verificarse que esta solución es correcta calculando la capacidad mecánica del hormigón + la capacidad mecánica del acero comprimido y el acero por separado; deben ser iguales para que  $N=0$*

$$\int_0^{xy} b \cdot f_c(\varepsilon(y, xy, \varepsilon_{cy})) dy + As_2 \cdot f_s(\varepsilon(r, xy, \varepsilon_{cy})) = -134.7826 \quad kn, U_c, \text{ hormigón}$$

$$As_1 \cdot f_s(\varepsilon(d, xy, \varepsilon_{cy})) = 134.7826 \quad kn, U_s, \text{ acero}$$

*Ahora puede procederse a calcular el momento de plastificación en la sección, integrando las tensiones en el hormigón y añadiendo el momento producido por el acero*

$$M_{yd} := \int_0^{xy} b \cdot f_c(\varepsilon(y, xy, \varepsilon_{cy})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) dy + As_1 \cdot f_s(\varepsilon(d, xy, \varepsilon_{cy})) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) + As_2 \cdot f_s(\varepsilon(r, xy, \varepsilon_{cy})) \cdot \left(r - \frac{h}{2}\right)$$

$$M_{yd} = 35.6411 \quad kNm, \text{ momento de plastificación del acero}$$

$$R_y := \frac{d}{\varepsilon_{yd} - \varepsilon_{cy}} \quad R_y = 79.8293 \quad m, \text{ radio de curvatura en la plastificación}$$

$$C_y := \frac{1}{R_y} \quad C_y = 0.0125 \quad 1/m, \text{ curvatura en la plastificación}$$

$$E_{ly} := M_{yd} \cdot R_y \quad E_{ly} = 2845.204 \quad kNm^2, \text{ rigidez en la plastificación}$$

**FASE III**

**Se trata ahora de buscar el momento último de la sección; para ello puede ocurrir que se agote el hormigón o el acero ó excepcionalmente ambos a la vez. En todo caso se sabe ya cuál es  $U_{s1}$  y  $U_c$ , que no varían respecto a la fase II**

**Las condiciones son**

$$\int_0^{x_u} b \cdot f_c(\varepsilon(y, x_u, \varepsilon_{cu})) \, dy + A_{s1} \cdot f_{yd} + A_{s2} \cdot f_s(\varepsilon(r, x_u, \varepsilon_{cu})) = 0 \quad \text{fuerza que } N = 0$$

**La solución de esta ecuación es**

$x_u = 0.0844$

**de donde**

$\varepsilon_{su} := \varepsilon(d, x_u, \varepsilon_{cu}) \quad \varepsilon_{su} = 0.0094$

$$M_{ud} := \int_0^{x_u} b \cdot f_c(\varepsilon(y, x_u, \varepsilon_{cu})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) \, dy + A_{s1} \cdot f_s(\varepsilon(d, x_u, \varepsilon_{cu})) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) + A_{s2} \cdot f_s(\varepsilon(d, x_u, \varepsilon_{cu})) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right)$$

$M_{ud} = 37.7965 \quad \text{Momento último de la sección}$

**La curvatura se calcular tomando como base las deformaciones de hormigón y acero**

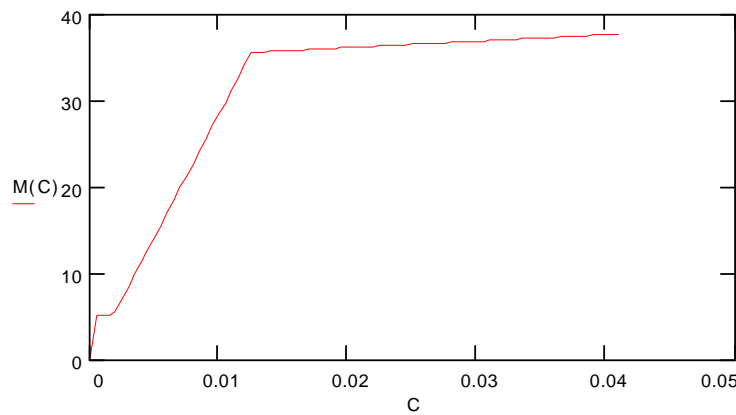
$R_u := \frac{d}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{cu}} \quad R_u = 24.1031 \quad m, \text{ radio de curvatura en rotura}$

$C_u := \frac{1}{R_u} \quad C_u = 0.0415 \quad 1/m, \text{ curvatura en rotura}$

**Para calcular la rigidez hay que tener en cuenta que la pendiente no pasa por el origen, sino por el punto previamente calculado (fase II); entonces**

$EI_u := \frac{M_{ud} - M_{yd}}{C_u - C_y} \quad EI_u = 74.4245 \quad kNm^2, \text{ rigidez en la plastificación}$

**DIAGRAMA FINAL SIMPLIFICADO MOMENTO-CURVATURA**



*Fin del ejemplo 2.2.*

En el ejemplo anterior puede observarse que añadir armadura a compresión aumenta enormemente la ductilidad; si comparamos los resultados de los ejemplos 2.1 y 2.2. observamos que en el primer caso  $C_x/C_y = 2.25$ , mientras que en el segundo  $C_x/C_y = 3.31$ ; el incremento de ductilidad es del 47%.

Igualmente puede hacerse uso de la generalización expuesta en las ecuaciones [2.15] y [2.16] para tratar el caso de piezas con ancho variable; de gran importancia es el caso de las secciones en 'T'. El ejemplo 2.3. presenta un tratamiento para dichas secciones que aparecen, por ejemplo, en las zonas de momento positivo de los forjados reticulares, donde la capa de compresión colabora en prácticamente toda la anchura del casetón.

### Ejemplo 2.3: cálculo del diagrama M-C en una sección en T

Se parte de la misma sección del ejemplo 2.1, pero suponiendo que la forma de la sección es en T, con una anchura de ala  $bf = 0.80m$ , una anchura de alma  $bw = 0.10m$ , y un canto de ala  $hf = 0.05m$ ; se busca el diagrama M-C de esta sección.

#### DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

$bw := 0.10$	<i>m, ancho del alma</i>
$bf := 0.80$	<i>m, ancho del ala</i>
$h := 0.35$	<i>m, canto de la sección</i>
$hf := 0.05$	<i>m, canto del ala</i>
$b(y) := bw + (bf - bw) \cdot (y \leq hf)$	<i>formulación para el ancho de la viga</i>
$r := 0.04$	<i>m, recubrimiento</i>
$d := h - r$	$d = 0.31$ <i>m, canto útil</i>
$As1 := bw \cdot d \cdot 0.01 \cdot 10^6$	$As1 = 310$ <i>mm2, área de acero traccionada</i>
$As2 := 0$	

#### FASE I

Al tratarse de una sección en T pueden generalizarse las fórmulas de inercia:

$A := \int_0^h b(y) dy$	$A = 0.0703$	
$ycdg := \frac{\int_0^h b(y) \cdot y dy}{A}$	$ycdg = 0.1013$	
$Iuc := \int_0^h b(y) \cdot y^2 dy$	$Iuc = 0.0015$	
$Eluc := Iuc \cdot Ecm \cdot 10^6$	$Eluc = 44282.18$	<i>kNm2, rigidez en fase I (bruta, sin considerar la colaboración del acero)</i>
$Mcr := \frac{Eluc}{\frac{Ecm \cdot 10^6}{h} \cdot fctm}$	$Mcr = 21.2999$	<i>kPa, momento de fisuración (del inglés cracked)</i>
$Ruc := \frac{Eluc}{Mcr}$	$Ruc = 2078.9867$	<i>m, radio de curvatura fase I</i>
$Cuc := \frac{1}{Ruc}$	$Cuc = 0.00048$	<i>1/m, curvatura fase I</i>

**FASE II**

*En primer lugar, es conveniente calcular la situación bajo el momento de fisuración  $M_{cr}$*

*El sistema correspondiente es el siguiente*

$$\int_0^{x_{cr}} b(y) \cdot f_c(\varepsilon(y, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) dy + A_s \cdot f_s(\varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) = M_{cr} \quad \text{fuerza que } M=M_{cr}$$

$$\int_0^{x_{cr}} b(y) \cdot f_c(\varepsilon(y, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) dy + A_s \cdot f_s(\varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr})) = 0 \quad \text{fuerza que } N=0$$

*Las soluciones son*

$x_{cr} = 0.0542$

$\varepsilon_{ccr} = -0.0002$

$\varepsilon_{scr} := \varepsilon(d, x_{cr}, \varepsilon_{ccr}) \quad \varepsilon_{scr} = 0.0012$

*La curvatura y rigidez son ahora sencillas de calcular, tomando como base las deformaciones de hormigón y acero*

$R_{cr} := \frac{d}{\varepsilon_{scr} - \varepsilon_{ccr}} \quad R_{cr} = 217.3913 \quad \text{m, radio de curvatura en la plastificación}$

$C_{cr} := \frac{1}{R_{cr}} \quad C_{cr} = 0.0046 \quad \text{1/m, curvatura en la plastificación}$

$EI_{cr} := M_{cr} \cdot R_{cr} \quad EI_{cr} = 4630.4108 \quad \text{kNm}^2, \text{ rigidez en la plastificación}$

*Se procede a calcular el momento de plastificación del acero  $M_{yd}$*

*Se trata de buscar el momento que hace  $\varepsilon = \varepsilon_{yd}$ ; este momento se produce para un determinado valor de  $x$  y  $\varepsilon_c$*

*Las condiciones son*

$\frac{x_y - d}{x_y} \cdot \varepsilon_{cy} = \varepsilon_{yd} \quad \text{fuerza que } \varepsilon = \varepsilon_{yd}$

$\int_0^{x_y} b(y) \cdot f_c(\varepsilon(y, x_y, \varepsilon_{cy})) dy + A_s \cdot f_{yd} = 0 \quad \text{fuerza que } N=0$

*Las soluciones a este sistema son*

$x_y = 0.0549$

$\varepsilon_{cy} = -0.0005$

*Puede verificarse que esta solución es correcta calculando la capacidad mecánica del hormigón y el acero por separado; deben ser iguales para que  $N=0$*

$\int_0^{x_y} b(y) \cdot f_c(\varepsilon(y, x_y, \varepsilon_{cy})) dy = -134.7826 \quad \text{kn, } U_c, \text{ hormigón}$

$A_s \cdot f_s(\varepsilon(d, x_y, \varepsilon_{cy})) = 134.7826 \quad \text{kN, } U_s, \text{ acero}$

*Ahora puede procederse a calcular el momento de plastificación en la sección, integrando las tensiones en el hormigón y añadiendo el momento producido por el acero*

$M_{yd} := \int_0^{x_y} b(y) \cdot f_c(\varepsilon(y, x_y, \varepsilon_{cy})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) dy + A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right)$

$M_{yd} = 39.2936 \quad \text{kNm, momento de plastificación del acero}$

$R_y := \frac{d}{\varepsilon_{yd} - \varepsilon_{cy}} \quad R_y = 117.0988 \quad \text{m, radio de curvatura en la plastificación}$

$C_y := \frac{1}{R_y} \quad C_y = 0.0085 \quad \text{1/m, curvatura en la plastificación}$

$EI_y := M_{yd} \cdot R_y \quad EI_y = 4601.2305 \quad \text{kNm}^2, \text{ rigidez en la plastificación}$

**FASE III**

Se trata ahora de buscar el momento último de la sección; para ello puede ocurrir que se agote el hormigón o el acero ó excepcionalmente ambos a la vez. En todo caso se sabe ya cuál es  $U_{s1}$  y  $U_c$ , que no varían respecto a la fase II

Las condiciones son

$$\int_0^{x_u} b(y) \cdot f_c(\varepsilon(y, x_u, \varepsilon_{cu})) dy + A_{s1} \cdot f_{yd} = 0 \quad \text{fuerza que } N = 0$$

La solución de esta ecuación es

$$x_u = 0.0147$$

de donde

$$\varepsilon_{su} := \varepsilon(d, x_u, \varepsilon_{cu}) \quad \varepsilon_{su} = 0.0704$$

Esta deformación es superior al límite nominal de 0.01. Por tanto el acero rompe antes del agotamiento del hormigón. Entonces:

Las condiciones son

$$\frac{x_u - d}{x_u} \cdot \varepsilon_{cus} = 0.01 \quad \text{fuerza que es } = \varepsilon_{yd}$$

$$\int_0^{x_u} b(y) \cdot f_c(\varepsilon(y, x_u, \varepsilon_{cus})) dy + A_{s1} \cdot f_{yd} = 0 \quad \text{fuerza que } N = 0$$

La solución es

$$x_u = 0.0284$$

$$\varepsilon_{cus} = -0.001007$$

$$M_{ud} := \int_0^{x_u} b(y) \cdot f_c(\varepsilon(y, x_u, \varepsilon_{cus})) \cdot \left(y - \frac{h}{2}\right) dy + A_{s1} \cdot f_{yd} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right)$$

$$M_{ud} = 40.4436 \quad \text{Momento último de la sección}$$

La curvatura se calcular tomando como base las deformaciones de hormigón y acero

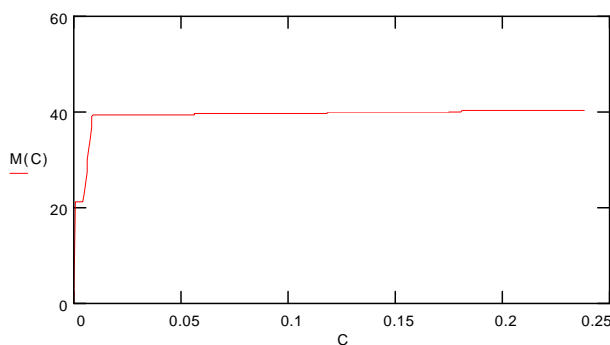
$$R_u := \frac{d}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{cu}} \quad R_u = 4.1974 \quad \text{m, radio de curvatura en rotura}$$

$$C_u := \frac{1}{R_u} \quad C_u = 0.2382 \quad \text{1/m, curvatura en rotura}$$

Para calcular la rigidez hay que tener en cuenta que la pendiente no pasa por el origen, sino por el punto previamente calculado (fase II); entonces

$$E_{lu} := \frac{M_{ud} - M_{yd}}{C_u - C_y} \quad E_{lu} = 5.0064 \quad \text{kNm}^2, \text{ rigidez en la plastificación}$$

**DIAGRAMA FINAL SIMPLIFICADO MOMENTO-CURVATURA**



Fin del ejemplo 2.3.

En el ejemplo 2.3. puede observarse que la ductilidad de una sección en T es enormemente superior a la de una sección rectangular con la misma cuantía; la clave está en el concepto de 'cuantía'; en el agotamiento la sección en T tiende a comportarse como una sección rectangular con el ancho del ala (supuesto que  $x < h_f$ , lo que suele ser el caso habitual), por lo que podría definirse una 'cuantía equivalente' como

$$\rho_{eq} = \frac{A_{s1}}{b_f d} \quad [2.17]$$

siendo

$\rho_{eq}$	En una sección en T, cuantía que equipara la ductilidad a la de una sección rectangular con igual área de acero y canto.	-
$b_f$	Ancho del alma en una sección en T	B m

Si comparamos los resultados de los ejemplos 2.1 y 2.3. observamos que en el primer caso  $C_u/C_y = 2.25$ , mientras que en el segundo  $C_u/C_y = 27.9$ ; el incremento de ductilidad es enorme, del 1240%. Ahora bien, si comparamos la ductilidad con la de una sección rectangular con  $\rho = \rho_{eq} = 0.00125$  observamos que es la misma, si bien con la inestimable ventaja del ahorro de material.

En la figura 2.7. se han recogido los diagramas M-C de una sección rectangular igual a la del ejemplo 2.1 con cuantías variables de 0.002 a 0.016. Puede observarse como la zona de cedencia se hace cada vez menor al aumentar la cuantía, reduciéndose la ductilidad; en la sección con cuantía 0.016 ni siquiera llega a alcanzarse la plastificación del acero.

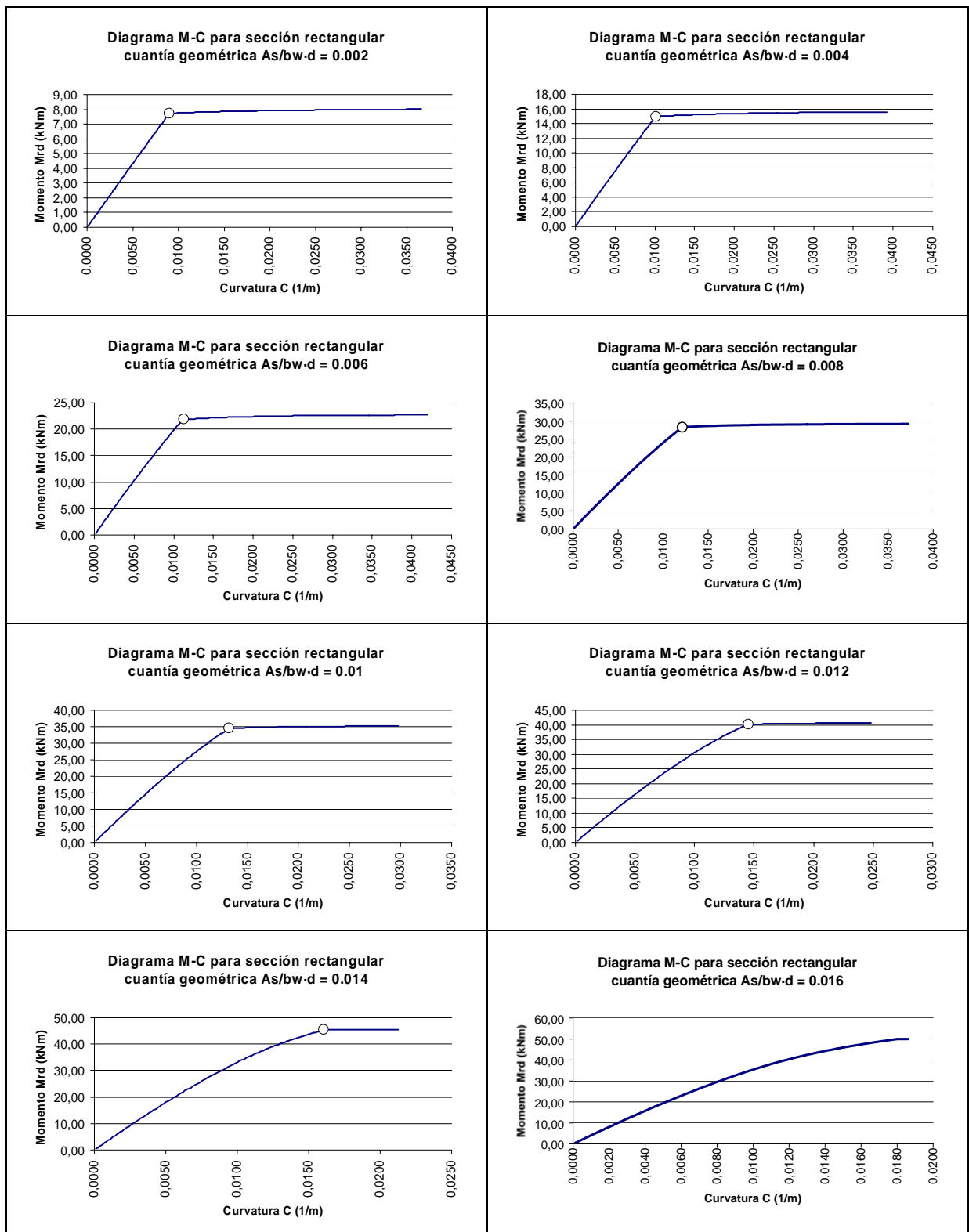


Figura 2.7: evolución del diagrama M-C con el aumento de la cuantía para una sección constante. HA-25, B 500 S.

## 2.3. DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA Y RIGIDEZ A NIVEL PIEZA

En las piezas de hormigón armado la fisuración no es continua sino discreta; es decir, las fisuras se produce en ciertas secciones que guardan entre sí determinada separación; en estas secciones son válidas las ecuaciones anteriormente derivadas; sin embargo, el comportamiento promedio de la pieza varía a causa de la diferente rigidez de las zonas no fisuradas.

De forma simplificada puede decirse que:

- en la fisura (punto A) el acero resiste el total del esfuerzo de tracción;
- en el punto medio entre dos fisuras (punto B) el hormigón es continuo y está traccionado al máximo, es decir, a una tensión cercana a  $f_{ctm}$ ; la tracción en el acero es la total menos la resistida por el hormigón
- entre ambos puntos se produce una transferencia de tensión del acero al hormigón

La colaboración del hormigón a tracción entre fisuras se denomina *efecto tensorrigidez* o *rigidización por tracción*. Para calcular la curvatura teniendo en cuenta este efecto, puede calcularse una tensión promedio del acero según la expresión siguiente:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{smr} + \varepsilon_s \left[ 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \quad [2.18]$$

siendo

$\varepsilon_{sm}$	Deformación promedio del acero considerando el efecto tensorrigidez	-
$\varepsilon_{smr}$	Deformación del acero en la sección sin fisurar bajo la carga de fisuración	-
$\sigma_s$	Tensión del acero en la sección fisurada	MPa, kPa
$\sigma_{sr}$	Tensión del acero en la sección sin fisurar sometida al momento de fisuración	MPa, kPa
$\beta_1$	Coficiente para considerar la adherencia de las barras	-
$\beta_2$	Coficiente para considerar la naturaleza de las cargas	-

(En el acero corrugado empleado en edificación,  $\beta_1 = 1.0$ ; para las cargas estáticas de larga duración habituales  $\beta_2 = 0.5$ .)

En la anterior expresión puede verse que para valores elevados de momento el término dentro del corchete tiende a 1, ya que  $\sigma_s \gg \sigma_{sr}$ . Puesto que  $\varepsilon_{smr}$  es un valor muy bajo, la deformación  $\varepsilon_{sm}$  tiende a  $\varepsilon_s$ . Por tanto, para los valores de momento cercanos a la plastificación (es decir, a efectos del análisis último) es lícito considerar el diagrama fisurado como promedio. Ahora bien, si lo que se pretende es realizar un análisis no lineal paso a paso, es preciso tener en cuenta el diagrama promedio, ya que en valores bajos de  $M$  tiende a la rigidez bruta en lugar de a la fisurada.

A partir de los valores de  $\varepsilon_{sm}$  pueden calcularse las curvaturas promedio  $C_m$  a partir de las expresiones [2.13], considerando que la tensión en el hormigón no varía.

---

*Ejemplo 2.4: cálculo del diagrama M-Cm promedio considerando la fisuración discreta en una sección rectangular*

Se parte de la misma sección del ejemplo 2.1, para calcular su diagrama promedio M-Cm. Se obvian todos los cálculos iniciales que son los mismos del ejemplo 2.1.

**AJUSTE DEL DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA CONSIDERANDO LA FISURACIÓN DISCRETA**

**Resumen de los resultados anteriores**

**Fase I**

$M_{cr} = 5.2368$  *kNm, momento de fisuración*

**Fase II**

$\epsilon_{cy} = -0.0019$  *Deformación del hormigón al plastificar el acero*

$\sigma_{yd} := f_{yd}$   $\sigma_{yd} = 0.4348$  *kN/mm2, tensión del acero en el límite elástico*

$\epsilon_{yd} = 0.0022$  *Deformación del acero correspondiente a límite elástico*

**Fase III**

$\epsilon_{cu} = -0.0035$

$\epsilon_{su} = 0.0057$

**Cálculos**

$\epsilon_{smr} := \frac{M_{cr}}{E_{luc}} \cdot \left( \frac{h}{2} - r \right)$   $\epsilon_{smr} = 0.000065$  *Deformación del acero en el momento previo a la fisuración*

$\sigma_{sr} := E_s \epsilon_{smr}$   $\sigma_{sr} = 0.013$  *kN/mm2, tensión del acero en el momento previo a la fisuración*

**FASE II**

$\epsilon_{smy} := \epsilon_{smr} + \epsilon_{yd} \cdot \left[ 1 - \beta_1 \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{f_{yd}} \right)^2 \right]$   $\epsilon_{smy} = 0.0022$  *Deformación media considerando la rigidización por tracción*

$C_{ym} := \frac{\epsilon_{smy} - \epsilon_{cy}}{d}$   $C_{ym} = 0.0134$  *Curvatura media considerando la rigidización por tracción*

$(C_y) = 0.0132$

$E_{lym} := \frac{M_{yd}}{C_{ym}}$   $E_{lym} = 2567.3037$  *Rigidez media considerando la rigidización por tracción*

$(E_{ly}) = 2607.3734$

**FASE III**

$\epsilon_{smu} := \epsilon_{smr} + \epsilon_{su} \cdot \left[ 1 - \beta_1 \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{f_{yd}} \right)^2 \right]$   $\epsilon_{smu} = 0.0058$  *Deformación media considerando la rigidización por tracción*

$C_{um} := \frac{\epsilon_{smu} - \epsilon_{cu}}{d}$   $C_{um} = 0.03$  *Curvatura media considerando la rigidización por tracción*

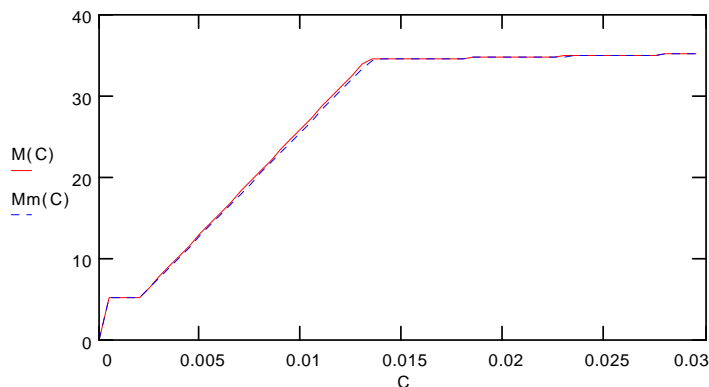
$(C_u) = 0.0298$

$E_{lum} := \frac{M_{ud} - M_{yd}}{C_{um} - C_{ym}}$   $E_{lum} = 43.6552$  *Rigidez media considerando la rigidización por tracción*

$(E_{lu}) = 43.6417$

**DIAGRAMA FINAL MOMENTO-CURVATURA**

*M es el diagrama fisurado (continuo) y Mm el promedio (discontinuo)*



---

*Fin del ejemplo 2.4.*

---

## 2.4. CAPACIDAD DE GIRO

La capacidad de giro es a la pieza lo que la curvatura a la sección; tal y como se determinó en el ejemplo 1.1, la capacidad última de una pieza está limitada por la capacidad de giro de sus secciones críticas; una pieza con gran capacidad de giro en sus secciones críticas se denomina *dúctil*, frente a las piezas *frágiles*, en las que la redistribución es prácticamente imposible.

Para realizar análisis límite ó análisis de agotamiento es preciso conocer con exactitud las rotaciones admisibles en las secciones críticas de las piezas; las que interesan son las llamadas *rotaciones plásticas*, correspondientes a la fase III, desde el momento de la plastificación del acero hasta la rotura de la sección.

La capacidad de rotación puede obtenerse integrando la curvatura en las zonas plastificadas de la pieza; la expresión general<sup>R2.2</sup> es la siguiente:

$$\theta_{pl} = \int_0^{l_p} \frac{\varepsilon_{sm}(a) - \varepsilon_{sm,y}}{d(a) - x} da \quad [2.18]$$

siendo

$\varepsilon_{sm}(a)$	Deformación promedio del acero considerando el efecto tensorrigidez en cada sección considerada	-
$\varepsilon_{sm,y}$	Deformación media del acero en la plastificación	-
$l_{pl}$	longitud de la zona plastificada	m
$x$	profundidad de la zona comprimida	m

Hay que tener en cuenta que en la longitud de la zona plastificada puede considerarse el decalaje producido por la fisuración oblicua del hormigón. En general, considerando fisuración a cortante entre 45° y 63° (correspondiente a celosías en proporción 1:1 a 1:2) el giro admisible es del orden de

$$\theta_{pl} \approx 2(C_u - C_y)z_u \quad [2.19]$$

---

*Ejemplo 2.5: rotación plástica admisible en una sección*

Tomando la sección del ejemplo 2.1, puede calcularse la expresión 2.19; como  $C_u = 0.0298 \text{ m}^{-1}$ ,  $C_y = 0.0132 \text{ m}^{-1}$ ,  $z_u = 0.2611 \text{ m}$ , se obtiene  $\theta_{pl} = (0.0298 - 0.0132) \cdot 0.2611 \cdot 2 = 0.0086 \text{ rad}$ .

La evaluación mediante la figura del EC2 arroja un valor de 0.0091 rad. El valor anterior puede considerarse una buena aproximación.

---

*Fin del ejemplo 2.5.*

---

El Eurocódigo aporta una figura (2.8) para permitir una evaluación simplificada de las rotaciones admisibles en las secciones. Se puede establecer la equivalencia entre cuantía y profundidad de fibra neutra (para secciones rectangulares con armado sólo a tracción) que se muestra en la misma figura a la derecha.

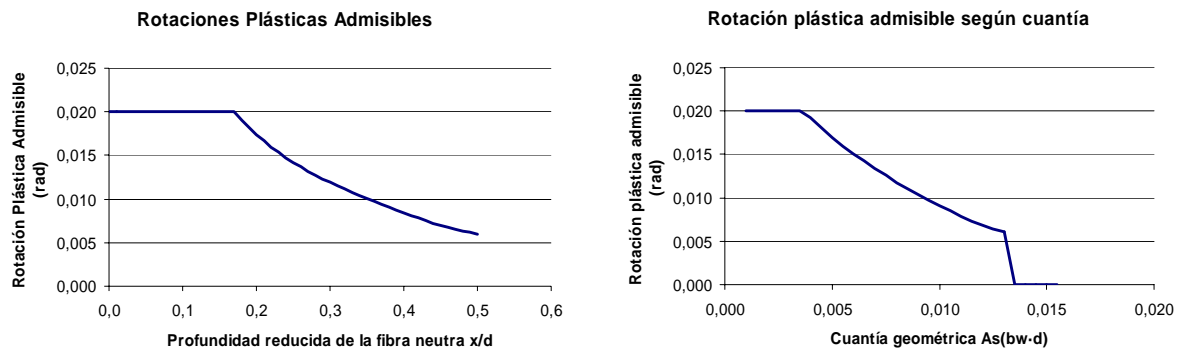


Figura 2.8: rotaciones plásticas admisibles según EC2 en función de la profundidad relativa de la fibra neutra  $x/d$  (izquierda); equivalencia para cuantías en sección rectangular con armado sólo a tracción (derecha).

## 2.5. REFERENCIAS

- 2.1. Eurocódigo 2: *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, AENOR, España, 1998.
- 2.2. *Código Modelo CEB-FIP 1990 para Hormigón Estructural*, Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, España, 1995.
- 2.3. *Instrucción de hormigón Estructural*, Centro de Publicaciones del Ministerio de Fomento, España, 1999
- 2.4. S.P. Timoshenko, *Mecánica de Materiales*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1984.
- 2.5. A.R. Marí *et al*, *Hormigón armado y pretensado*, Edicions UPC, Barcelona, 1999.
- 2.6. W.H. Mosley *et al*, *Reinforced Concrete Design to Eurocode 2*, Macmillan Press Ltd., Londres, 1996.

### 3. CRITERIOS DE MODELIZACIÓN

Una vez analizados el comportamiento del material y de las secciones a modelizar, procederemos en el presente capítulo al planteamiento del modelo de análisis de elementos finitos. Para ello es prioritario fijar una serie de criterios, que de forma muy sintética resumimos a continuación:

- Contexto del análisis: tipo de estructuras analizadas y características de las mismas.
- Objeto del análisis: qué aspectos de la realidad se pretenden simular.
- Simplificaciones adoptadas y justificación de las mismas.
- Elementos empleados y sus características.
- Técnicas empleadas para soslayar las dificultades encontradas en el análisis.

#### 3.1. CONTEXTO DEL ANÁLISIS

Se analizarán emparrillados planos horizontales formados por barras dispuestas ortogonalmente, con diversas condiciones de geometría y apoyo, y comportamiento no lineal.

El análisis será elastoplástico de primer orden.

La no linealidad se reduce a la del material. No se tiene en cuenta la no linealidad geométrica (efecto de membrana).

Las cargas se aplicarán exclusivamente en los nudos; se supondrá que las cargas se aplican todas simultáneamente, en incrementos proporcionales a la magnitud de cada carga; esta hipótesis es habitual en el análisis límite.

- EMPARRILLADOS PLANOS
- MATERIAL NO LINEAL
- ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO DE PRIMER ORDEN, SIN NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA
- CARGAS APLICADAS EXCLUSIVAMENTE EN LOS NUDOS Y MONÓTONAMENTE CRECIENTES
- APOYOS SIMPLES

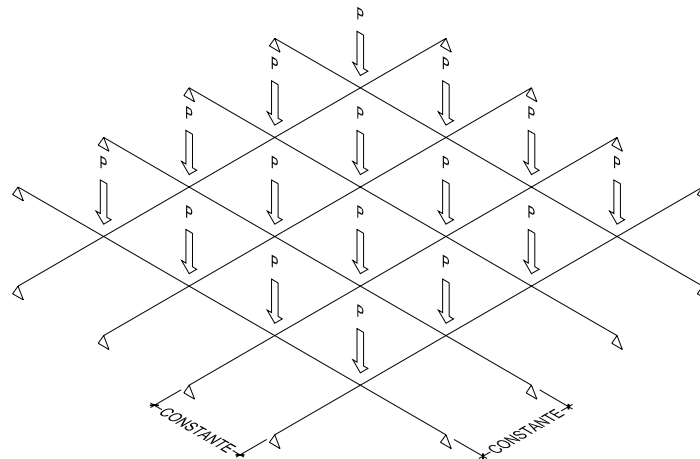


Figura 3.1. Ejemplo de Emparrillados objeto del análisis

#### 3.2. OBJETO DEL ANÁLISIS

Con los modelos realizados se pretende emular el comportamiento no lineal de estas estructuras; en particular:

- Carga última del conjunto.
- Diagrama carga aplicada / desplazamiento para los nudos significativos de la estructura.
- Influencia de la ortotropía en la capacidad resistente.

- Evaluación de la capacidad de redistribución general.

### 3.3. SIMPLIFICACIONES ADOPTADAS

En cuanto al material, el diagrama tensión deformación que se adopta es bilineal; esto es, se obvia la fase elástica no lineal.

En cuanto a la sección, el diagrama momento-curvatura adoptado también es bilineal, tomándose como valor de plastificación el momento elástico ( $M_{el}$ ); se admite en principio una curvatura infinita de la sección.

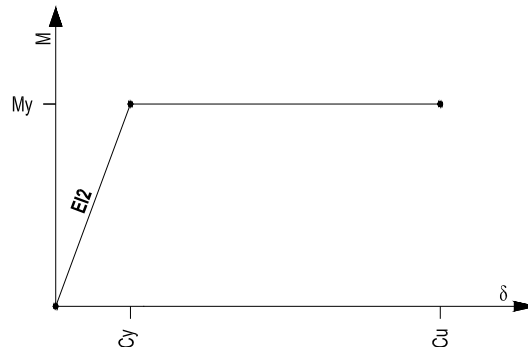


Figura 3.2. Diagrama M-C adoptado

Se permite únicamente desplazamiento vertical ( $u_y$ ) de los nudos, y los subsiguientes giros de los mismos ( $\theta_x$  y  $\theta_z$ ). Los nudos se coaccionan en los restantes desplazamientos, hipótesis habitual en emparrillados; no se permite pues desplazamiento lateral del conjunto, ni rotación vertical del mismo.

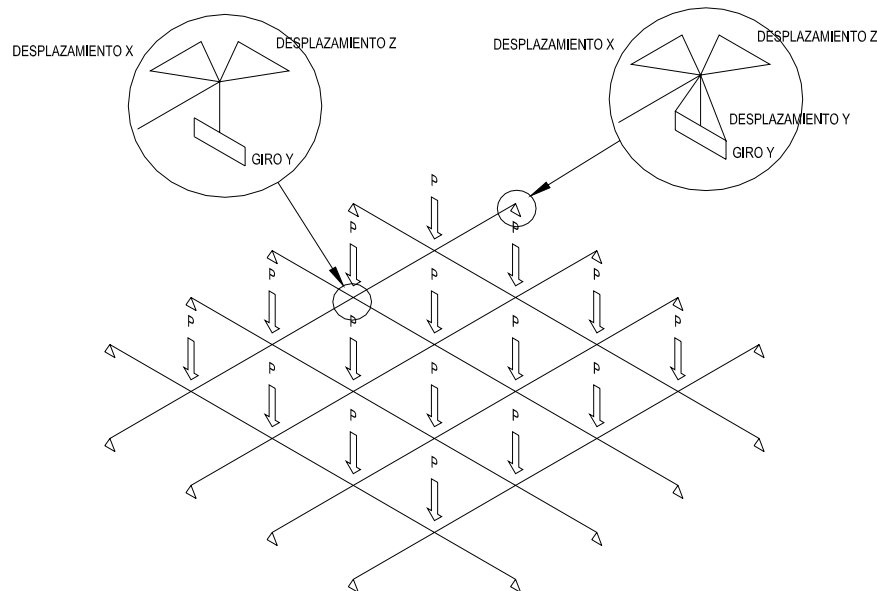


Figura 3.3. Coacciones en el emparrillado.

Las deformaciones por cortante son irrelevantes en este estudio.

Por supuesto, se asume que las rótulas se forman en los nudos de la estructura, lo que es inevitable dado que las cargas se aplican sobre los mismos (los puntos de máximo momento siempre coincidirán en los nudos).

En el modelo se supone que las secciones de las rótulas son de longitud nula respecto a las dimensiones del modelo. Esta hipótesis está alejada de la realidad, sin embargo es común en el análisis límite y es perfectamente admisible, ya que se reemplaza el conjunto de los giros en una

longitud discreta por su rotación acumulada en una sección, manteniéndose el comportamiento general del conjunto.

Como puede fácilmente deducirse a partir de los datos aportados, las secciones presentan siempre momentos positivos según el convenio típico empleado en estructuras.

### 3.4. ELEMENTOS EMPLEADOS Y SUS CARACTERÍSTICAS

Los elementos empleados son los siguientes:

#### 3.4.1. Elementos de Barra

Para modelizar las barras rectas se ha empleado BEAM4. Se trata de un elemento muy común y habitualmente empleado en análisis de estructuras de barras rectas.

Es un elemento de barra espacial, con seis grados de libertad por nodo. Obviamente en el análisis efectuado, al menos tres de estos grados de libertad (UX, UZ,  $\theta$ Y) son innecesarios y por tanto se coaccionan de forma generalizada en el modelo.

Sólo se emplea la KEYOPT 6, para permitir visualizar esfuerzos en las coordenadas del elemento. El resto de KEYOPT no tienen sentido en el análisis realizado, ya que se refieren a criterios de análisis con grandes deformaciones (KEYOPT 2), análisis dinámico (KEYOPT 7), salida de datos en puntos intermedios (KEYOPT 9) u opciones de carga en la barra (KEYOPT 10). El 2 y 7 son innecesarios por tratarse de otros tipos de análisis. En cuanto al 10, no existen cargas directamente aplicadas en las barras. El 9, por último, carece de sentido ya que los momentos varían linealmente dentro de la barra (por no haber cargas internas), y por tanto los momentos en los nudos son suficientes para definir completamente las leyes.

Las constantes a definir son:

- 1 AREA Cross-sectional area
- 2 IZZ Area moment of inertia
- 3 IYY Area moment of inertia
- 8 IXX Torsional moment of inertia

El resto de constantes son irrelevantes para el análisis; TKZ y TKY porque no se desea obtener tensiones; THETA = 0 porque el elemento está siempre orientado de acuerdo con los ejes principales. ISTRN = 0, porque no se emplea deformación inicial. SHEARZ = SHEARY = 0, porque no se desea tener en cuenta la deformación por cortante. SPIN carece de sentido en un análisis estático. Por último, ADDMAS no se debe considerar dado que las cargas se han concentrado en los nudos.

Es importante asignar una pequeña rigidez a torsión a los elementos, necesaria para el equilibrio; de lo contrario, la barra situada entre dos puntos plastificados no sería estable, produciéndose inestabilidad de la estructura por rotación excesiva de la misma.

#### 3.4.2. Elementos de Rótula

Para modelizar las rótulas plásticas se ha empleado el elemento COMBIN39. Es un elemento no tan empleado como el anterior, por ello indicaremos algunas de sus características principales.

Se trata de un elemento unidireccional, que funciona como un muelle generalizado no-lineal. Para ello se puede definir un diagrama generalizado multilineal Fuerza generalizada – Desplazamiento generalizado (en adelante F-D), con tres grados de libertad.

El elemento tiene dos opciones: rigidez traslacional o rigidez rotacional, con tres grados de libertad por nodo en todos los casos. Con rigidez traslacional se tienen como grados de libertad ux, uy, uz y no pueden definirse grados de libertad rotacionales. Con rigidez rotacional se tienen  $\theta$ x,  $\theta$ y,  $\theta$ z, y de la misma forma se carece de grados de libertad traslacionales.

Se trata de un elemento que exige, lógicamente, análisis no lineal. El elemento tiene grandes deformaciones pero no será necesario emplearlas en nuestro caso. Antes bien, será contraproducente ya que se desea ignorar el mecanismo de membrana.

Las opciones empleadas para el elemento son:

- KEYOPT(1): define la trayectoria F-D de descarga; no se emplea, ya que en el análisis realizado únicamente se carga la estructura monotónicamente hasta su colapso.
- KEYOPT(2): define la trayectoria F-D en el caso de tensiones de compresión. En los análisis realizados se toma 0, aunque es irrelevante dado que no surgen momentos negativos con las condiciones de contorno adoptadas.
- KEYOPT(3): es crucial en el comportamiento, ya que define el grado de libertad que se desea en el nudo y para el que el muelle presenta comportamiento no-lineal. Puede adoptar el valor 4 (correspondiente a giros  $\theta_x$ ) ó 6 (correspondiente a giros  $\theta_z$ ). Es decir, se adopta para el elemento un diagrama F-D unidimensional, correspondiendo F a Momento y D al giro elegido.
- KEYOPT(4): define el número y tipo de los grados de libertad del elemento. Debe ser 0 para que se respete la opción anteriormente definida en KEYOPT(3), de manera que el elemento pasa a tener un solo grado de libertad por nudo (correspondiente a la rotación elegida).
- KEYOPT(6): si se adopta el valor 1, permite que la salida del elemento sea completa, incluyendo la tabla F-D para todos los elementos (en la primera iteración).

Las constantes reales del elemento son los datos que definen la rigidez del muelle, función del desplazamiento. Se introducen en la forma de pares de datos D1, F1, D2, F2, etc.

Algunas notas importantes son:

- Los nodos i y j no pueden ser el mismo, pero pueden (y de hecho es recomendable) coincidir en el espacio (de esta forma, existirá concordancia geométrica) en el caso de un solo grado de libertad.
- El grado de libertad definido es el mismo para ambos nodos.

### 3.4.3. Calibración de los elementos

Para los modelos se ha elegido el siguiente criterio:

- Durante la fase elástica, la rigidez del modelo es la debida a la rigidez de las vigas. Por tanto, la rigidez de los muelles debe ser lo suficientemente elevada como para no influir significativamente en los resultados.
- Al alcanzar la plastificación, la rigidez de las vigas se mantiene, pero los muelles simulan la plastificación. Por tanto, su rigidez será nula.

Por tanto, el muelle debe definirse con un diagrama F-D definido por tres puntos: el origen de coordenadas, un par  $M_{el} - \theta_1$ , y un segundo par  $M_{el} - \theta_2$ . La dificultad que se plantea es elegir un valor de  $\theta_1$  lo suficientemente bajo como para que sea despreciable en fase elástica. Este proceso se ha denominado calibración del muelle.

El método elegido es el de encontrar el giro del muelle si todo el desplazamiento estuviera concentrado en el mismo.

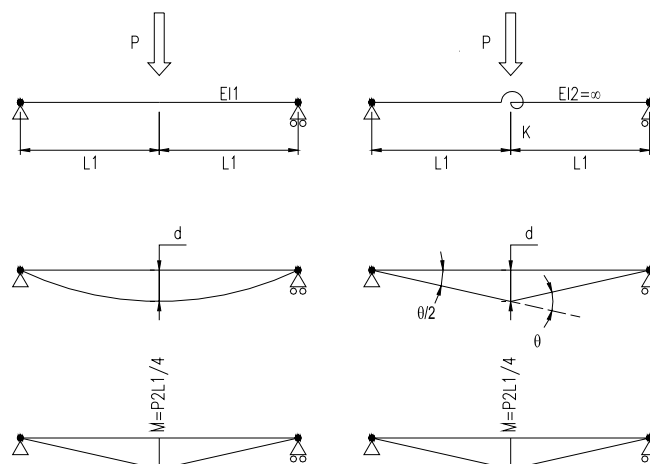


Figura 3.4: Cálculo del giro de referencia

De la figura 3.4., sabiendo que  $d = M \cdot L_1^3 / 3EI_1$ , igualando a  $\theta = 2 \cdot d / L_1$ , puede deducirse que  $\theta = M \cdot 2 \cdot L_1 / 3EI_1$ , que es en definitiva el giro de referencia buscado. A partir de éste se hará  $\theta_1 = \theta / 1000$ . Con ello se consigue, aproximadamente, que la contribución de la rótula a la deformación general sea la milésima parte de la elástica (para este modelo), lo que resulta despreciable.

## 3.5. TÉCNICAS EMPLEADAS

### 3.5.1. Modelización

Al tratarse de empaillados regulares, el modelo se genera con sencillez empleando técnicas de APDL, con un bucle para cada dirección.

La generación de nodos y elementos es directa, ya que no se precisa un mallado complejo. Entre dos nodos directamente generados hay un solo elemento. Se ha comprobado que la precisión así alcanzada es suficiente. Esto obedece a que la variación de solicitaciones en el interior del elemento es lineal, coincidente con el orden de las funciones de forma; por tanto la solución obtenida es 'exacta', según se sigue de la teoría del MEF.

Además, el tamaño de la retícula es generalmente pequeño en comparación con el tamaño de la estructura, lo que garantizaría un buen comportamiento, aún en el caso de variaciones no lineales de las solicitaciones entre nodos.

Una complicación añadida es la necesidad de duplicar los nodos en cada intersección. Se requiere así para poder definir entre ambos nodos el elemento muelle no lineal que modeliza la plastificación de dicho nodo.

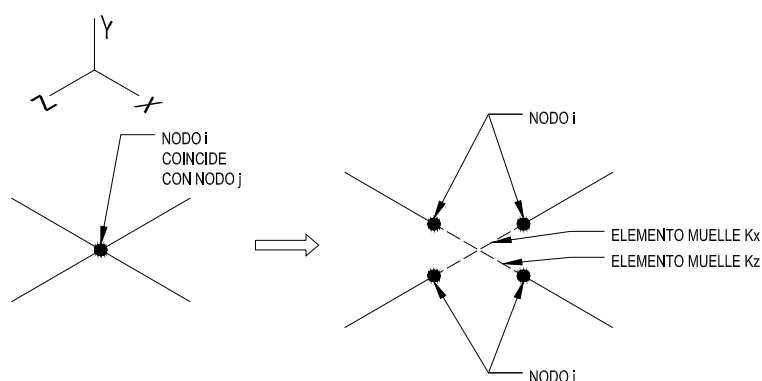


Figura 3.4. Modelización de las rótulas plásticas mediante elementos muelle no lineales uniaxiales.

Un matiz importante es el siguiente: al duplicar los nodos en el muelle, el modelo se vuelve inestable, ya que el muelle carece de rigidez asociada al desplazamiento; por tanto es imprescindible el vincular los grados de libertad de ambos nodos. Por tratarse de un empaillado con grados de libertad transnacionales coaccionados en su plano y en el giro perpendicular al mismo, basta con vincular el grado de libertad correspondiente a  $u_y$ .

Por coherencia del modelo, la duplicidad de nodos se realiza también en el apoyo perimetral.

Al finalizar la construcción del modelo, se coaccionan todos los grados de libertad no deseados ( $u_x$ ,  $u_z$ ,  $\theta_y$ ) para todos los nodos del empaillado.

### 3.5.2. Análisis

El análisis empleado es no lineal y estático, con pequeñas deformaciones. Por tanto NLGEOM = OFF. Asimismo carece de sentido considerar rigidización por tensión, por tanto SSTIF = OFF.

Al emplear un elemento no lineal con diagrama bilineal, se hace totalmente necesario para obtener resultados precisos el actualizar la matriz de rigidez en cada iteración. Por tanto, NROPT = FULL.

Se ha comprobado que el análisis es más rápido permitiendo el auto ajuste del paso (AUTOTS = ON), y activando la opción de control de la solución (SOLCONTROL = ON). No obstante, si se

desean curvas más suaves es preferible hacer un Time Step más pequeño y forzar AUTOTS y SOLCONTROL a OFF. De esta forma puede controlarse la precisión de la solución.

Por ejemplo, si se aplica una carga  $F = 150$  kN y se desea una precisión en la solución de 0.50 kN, basta con hacer  $NSUBST = 150/0.5 = 300$ , forzando AUTOTS, OFF y SOLCONTROL, OFF. En todo caso debe mantenerse NROPT, FULL o de lo contrario no se alcanzará la convergencia.

Para poder obtener curvas carga-desplazamiento, se ha estimado conveniente hacer coincidir el parámetro TIME con la carga puntual aplicada en los nudos. Para cargas desiguales en los nodos, puede elegirse una de las cargas como parámetro de control, introduciendo las demás como fracciones de la misma. Normalmente será conveniente elegir la carga más desfavorable del conjunto.

La carga se hace crecer monótonicamente desde 0 hasta un valor lo suficientemente grande como para producir el colapso de la estructura (si realizado el análisis no se alcanza el colapso, puede aumentarse y recomenzar el cálculo).

La convergencia se realiza sobre los desplazamientos, limitando el valor del máximo desplazamiento a un valor estimado previo (con este valor en torno al paso de malla es suficiente para una buena precisión). No se interrumpe el programa. Por tanto se hace NCVN, 2, 1.

### 3.5.3. Obtención de resultados

El resultado principal es la curva de carga-desplazamiento para los nodos significativos de la estructura. Para ello se emplea el postprocesador Time History, Post26.

Al definir el rango de valores, se elimina el valor máximo; si no se realiza este paso las gráficas obtenidas presentan un valor final que no tiene significación física.

Obteniendo los desplazamientos UY de un nodo y la carga P aplicada en el mismo (que en general coincidirá con el parámetro TIME), puede dibujarse la curva carga-desplazamiento; para ello es conveniente disponer UY como abscisa y P como ordenada.

Derivando P respecto a UY se obtendrá una curva de variación de la rigidez de la estructura. Al contrario que la anterior, es muy conveniente representar esta curva con P como abscisa, arrojando una valiosa noción de la evolución de la rigidez ante la carga.

## 3.6. CARACTERÍSTICAS DE ANSYS EMPLEADAS

Se resumen a continuación las características especiales del programa Ansys que se han empleado en los modelos elaborados:

- Construcción de los modelos mediante APDL.
- Elementos muelle no lineales COMBIN39.
- Análisis estático no lineal, con incremento creciente de la carga.
- Control de la solución en deformaciones.
- Postproceso con post26 y obtención de gráficas fuerza-desplazamiento.
- Obtención de rigidez de la estructura para un nodo determinado.
- Obtención de leyes de momentos previa a la plastificación mediante uso de ETABLE.

## 3.7. REFERENCIAS

3.1. ANSYS 8.1 *User's Manual*, SAS IP INC, 2004.

## 4. MODELOS REALIZADOS

Se presentan a continuación los modelos realizados con los criterios expuestos en el capítulo anterior.

Para cada modelo se presenta:

- Descripción del problema.
- Solución teórica.
- Listado comentado de ANSYS.
- Resumen de resultados de ANSYS.
- Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.

## 4.1. MODELO 1: VIGA DE UN TRAMO

### 4.1.1. Modelo 1. Descripción del problema

Se trata de una viga patrón de 2m de longitud, sometida a una carga puntual en el centro.

El material es hormigón armado. La sección es rectangular de 0.10m x 0.35m, y se encuentra armada con una cuantía geométrica inferior constante del 1%.

La rigidez en fase fisurada, calculada en el capítulo 2, es de 2608 kNm<sup>2</sup>. El momento último es de 35.19 kNm.

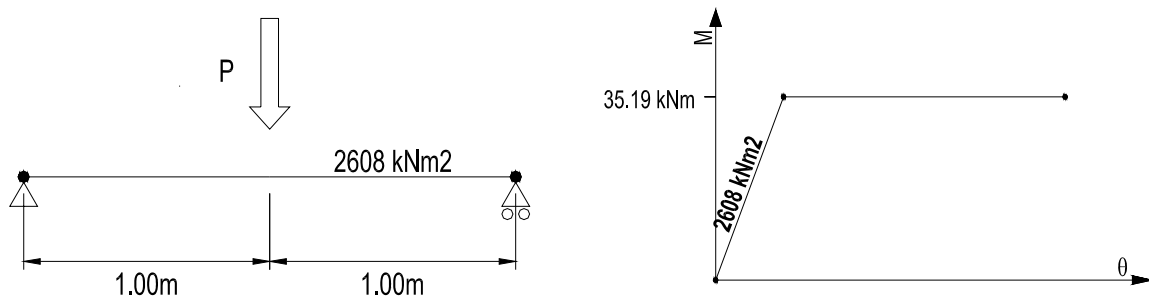


Figura 4.1.1: Viga de un tramo

### 4.1.2. Modelo 1. Solución teórica

El colapso se produce al formarse la primera rótula, en la sección central. Hasta el momento de colapso la deformación se rige por la ecuación:

$$\delta = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{P}{15648} \quad [4.1.1]$$

siendo

$\delta$	Deformación al centro	M
$P$	Carga aplicada	kN
$EI$	Rigidez	kN·m <sup>2</sup>
$L$	Luz total = 2 · L1	M

El momento al centro de vano se obtiene por la conocida expresión:

$$M = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{P}{2} \quad [4.1.2]$$

Y la plastificación se obtiene al igualar el momento al momento plástico, es decir,  $M = 35,19$  kNm, de donde  $P_u = 2 \cdot M_u = 70,38$  kN.

La deformación previa al agotamiento en régimen elástico se obtiene reemplazando este valor de  $P$  en la expresión 4.1.1.; su valor es de  $4,50E-3$ m.

### 4.1.3. Modelo 1. Listado ANSYS

```

! MODELO 1
! ANÁLISIS DE VIGA BIAPOYADA DE DOS TRAMOS
! PARA DETERMINAR LA VALIDEZ DEL MODELO ADOPTADO
/TITLE, Analisis no lineal viga biapoyada
/FILNAM, M-1
!
!
! -----
! PARAMETROS DEL PROBLEMA
! UNIDADES: m, kN
!
L1=1.00 ..... ! LUZ DE CADA TRAMO
EIZ=2608 ..... ! RIGIDEZ TOTAL
MEL=35.19 ..... ! MOMENTO ÚLTIMO
EYOUNG=2E8
IZ=EIZ/EYOUNG
AREAX=0.1*0.35
! CÁLCULO DEL GIRO
TETAREF=MEL*2*L1/(3*EIZ) ..... ! GIRO DE REFERENCIA
NUMTRAM=2 ..... ! NUMERO DE TRAMOS DE LA VIGA
!
!
! -----
! GENERACIÓN DEL MODELO
!
/PREP7
ET,1,BEAM4,,,,,1,
ET,2,COMBIN39,0,0,6,,,1
R,1,AREAX,IZ,IZ/2,,
R,2,0,0,TETAREF/1000,MEL,100*TETAREF,MEL
MP,EX,1,EYOUNG
MP,NUXY,1,0.3
!
!
N,1
*DO,I,1,NUMTRAM-1
N,2*I,L1*I
N,2*I+1,L1*I
MAT,1
TYPE,1
REAL,1
E,2*I-1,2*I
TYPE,2
REAL,2
E,2*I,2*I+1
CP,NEXT,UX,2*I,2*I+1
CP,NEXT,UY,2*I,2*I+1
CP,NEXT,UZ,2*I,2*I+1
*ENDDO
N,2*NUMTRAM,L1*NUMTRAM
IN,NUMTRAM+1,L1*NUMTRAM

```

```
MAT,1
TYPE,1
REAL,1
E,2*NUMTRAM-1,2*NUMTRAM
IE,NUMTRAM,NUMTRAM+1
D,1,UY
!D,1,UX
!D,1,UZ
D,2*NUMTRAM,UY
!D,2*NUMTRAM,UZ
D,ALL,UX
D,ALL,UZ
D,ALL,ROTX
D,ALL,ROTY
SAVE
EPLIT
FINISH
!
!
!
!-----
!
! SOLUCIÓN
!
/SOLU
ANTYPE,STATIC,NEW
FUERZA=100
TIME,FUERZA
!NLGEOM,ON
NLGEOM,OFF
SSTIF,OFF
SOLCONTROL,ON
NROPT,FULL
AUTOTS,ON
NSUBST,100
NCNV,2,0.1
EQSLV,SPARSE
OUTRES,ALL,ALL
F,2,FY,-FUERZA
SOLVE
FINISH
!
!
!
!-----
!
! POSTPROCESO
!
JPEG,QUAL,200
JPEG,ORIENT,Horizontal
JPEG,COLOR,2
JPEG,TMOD,1
/SHOW,JPEG
!
/POST26
TIMERANGE,0,FUERZA-1
```

---

```
NSOL,2,2,U,Y,UY
PROD,2,2,,UY,,-1,1,1,
DERIV,3,1,2,,EI
PROD,4,1,,,P,,,1,1,1
XVAR,2
/AXLAB,X,DESPLAZAMIENTO UY (m)
/AXLAB,Y,CARGA APLICADA P (kN)
PLVAR,1
FINISH
!
/POST1
SET,LAST
SET,PREVIOUS
ETABLE,MZI,SMISC,6
ETABLE,MZJ,SMISC,12
ETABLE,MMUELLE,SMISC,1
ETABLE,TETAMUELLE,NMISC,1
PLLS,MZI,MZJ
FINISH
!
/SHOW,CLOSE
/SHOW,TERM
```

### 4.1.4. Modelo 1. Resumen de resultados de ANSYS

En la figura siguiente se resumen los resultados de ANSYS para este modelo tan simple:

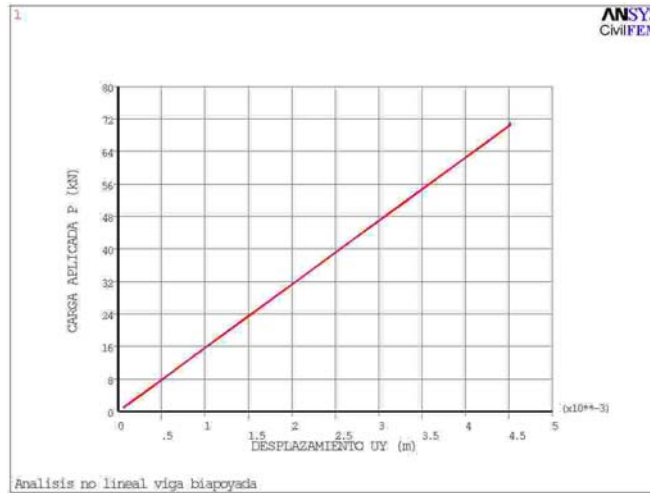


Figura 4.1.2.a. Curva carga-desplazamiento

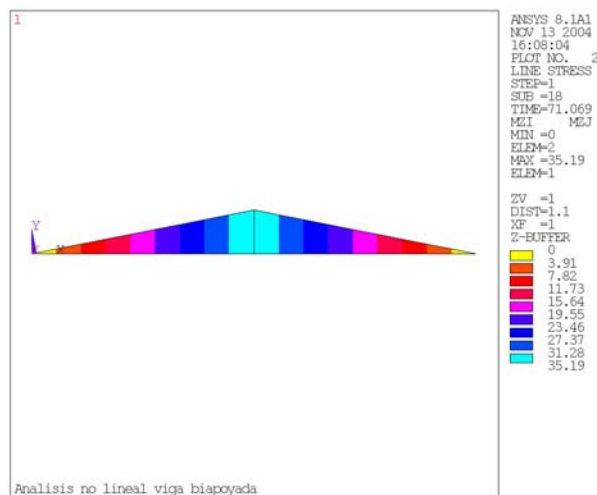


Figura 4.1.2.b. Momentos flectores en el agotamiento

La carga última obtenida es de 71.07 kN. La deformación previa al agotamiento es de 4.50E-3.

### 4.1.5. Modelo 1. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.

Se ofrece a continuación una tabla resumen:

Parámetro	Teoría	ANSYS	% Diferencia
Pu	70.38	71.07	0.98%
d	4.50E-3	4.50E-3	0.00%

## 4.2. MODELO 2: VIGA DE UN TRAMO

### 4.2.1. Modelo 2. Descripción del problema

Se trata de la misma viga patrón que en el caso anterior, de 2m de longitud, sometida a una carga puntual en el centro, sólo que modelizada mediante 4 elementos de barra en lugar de 2 y tres muelles en lugar de 1.

El material es hormigón armado. La sección es rectangular de 0.10m x 0.35m, y se encuentra armada con una cuantía geométrica inferior constante del 1%.

La rigidez en fase fisurada, calculada en el capítulo 2, es de 2608 kNm<sup>2</sup>. El momento último es de 35.19 kNm.

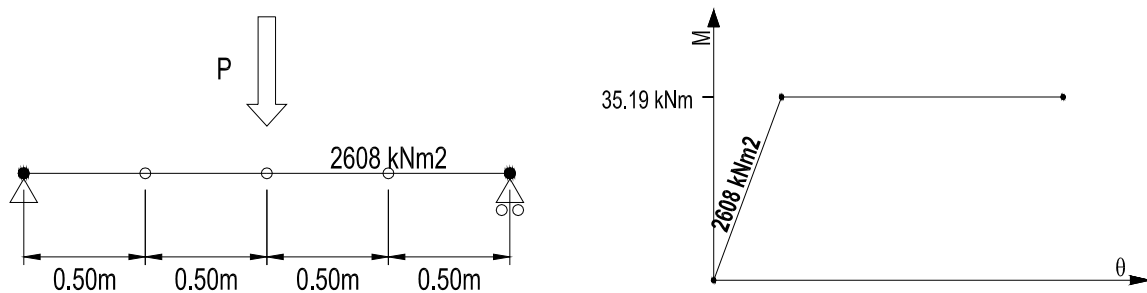


Figura 4.2.1: Viga de un tramo modelizada en cuatro barras

### 4.2.2. Modelo 2. Solución teórica

La solución es la misma que en el caso anterior.

### 4.2.3. Modelo 2. Listado ANSYS

```

! ANÁLISIS DE VIGA BIAPOYADA DE DOS TRAMOS
! PARA DETERMINAR LA VALIDEZ DE DEFORMACIONES DEL MODELO ADOPTADO
/TITLE, Analisis no lineal emparrillado simple bajo carga puntual
/FILNAM,M-1
!
!
! -----
! PARAMETROS DEL PROBLEMA
! UNIDADES: m, kN
!
L1=0.50 ..... ! LUZ DE CADA TRAMO
EIZ=2608 ..... ! RIGIDEZ TOTAL
MEL=35.19 ..... ! MOMENTO ÚLTIMO
EYOUNG=2E8
IZ=EIZ/EYOUNG
AREAX=0.1*0.35
! CÁLCULO DEL GIRO
TETAREF=MEL*2*L1/(3*EIZ) ..... ! GIRO DE REFERENCIA
NUMTRAM=4 ..... ! NUMERO DE TRAMOS DE LA VIGA
!
!
! -----
    
```

```
! GENERACIÓN DEL MODELO
!
/PREP7
ET,1,BEAM4,,,,,1,
ET,2,COMBIN39,0,0,6,,,1
R,1,AREAX,IZ,IZ/2,,,
R,2,0,0,TETAREF/1000,MEL,100*TETAREF,MEL
MP,EX,1,EYOUNG
MP,NUXY,1,0.3
!
N,1
*DO,I,1,NUMTRAM-1
N,2*I,L1*I
N,2*I+1,L1*I
MAT,1
TYPE,1
REAL,1
E,2*I-1,2*I
TYPE,2
REAL,2
E,2*I,2*I+1
CP,NEXT,UX,2*I,2*I+1
CP,NEXT,UY,2*I,2*I+1
CP,NEXT,UZ,2*I,2*I+1
*ENDDO
N,2*NUMTRAM,L1*NUMTRAM
MAT,1
TYPE,1
REAL,1
E,2*NUMTRAM-1,2*NUMTRAM
D,1,UY
D,2*NUMTRAM,UY
D,ALL,UX
D,ALL,UZ
D,ALL,ROTX
D,ALL,ROTY
SAVE
EPLT
FINISH
!
!
! -----
!
/SOLU
ANTYPE,STATIC,NEW
FUERZA=100
TIME,FUERZA
NLGEOM,OFF
SSTIF,OFF
SOLCONTROL,ON
NROPT,FULL
AUTOTS,ON
NSUBST,100
NCNV,2,1
EQSLV,SPARSE
OUTRES,ALL,ALL
```

```
F,NUMTRAM,FY,-FUERZA
```

```
SOLVE
```

```
FINISH
```

```
!
```

```
!
```

```
!-----
```

```
! POSTPROCESO
```

```
!
```

```
JPEG,QUAL,200
```

```
JPEG,ORIENT,Horizontal
```

```
JPEG,COLOR,2
```

```
JPEG,TMOD,1
```

```
/SHOW,JPEG
```

```
!
```

```
/POST26
```

```
TIMERANGE,0,FUERZA-1
```

```
NSOL,2,NUMTRAM,U,Y,UY
```

```
PROD,2,2,,UY,,-1,1,1,
```

```
DERIV,3,1,2,,EI
```

```
XVAR,2
```

```
/AXLAB,X,DESPLAZAMIENTO UY (m)
```

```
/AXLAB,Y,CARGA APLICADA P (kN)
```

```
PLVAR,1
```

```
FINISH
```

```
!
```

```
/POST1
```

```
SET,LAST
```

```
SET,PREVIOUS
```

```
ETABLE,MZI,SMISC,6
```

```
ETABLE,MZJ,SMISC,12
```

```
ETABLE,MMUELLE,SMISC,1
```

```
ETABLE,TETAMUELLE,NMISC,1
```

```
PLLS,MZI,MZJ
```

```
!
```

```
/SHOW,CLOSE
```

```
/SHOW,TERM
```

```
FINISH
```

### 4.2.4. Modelo 2. Resumen de resultados de ANSYS

En la figura siguiente se resumen los resultados de ANSYS para este modelo:

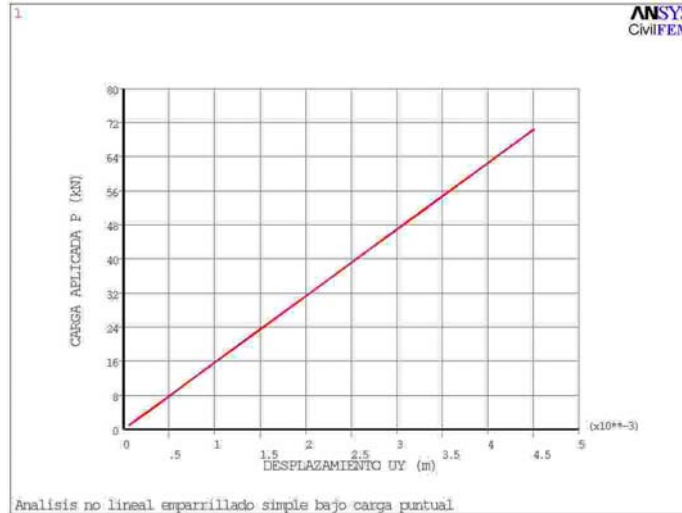


Figura 4.2.2.a: Curva carga-desplazamiento para el modelo 2

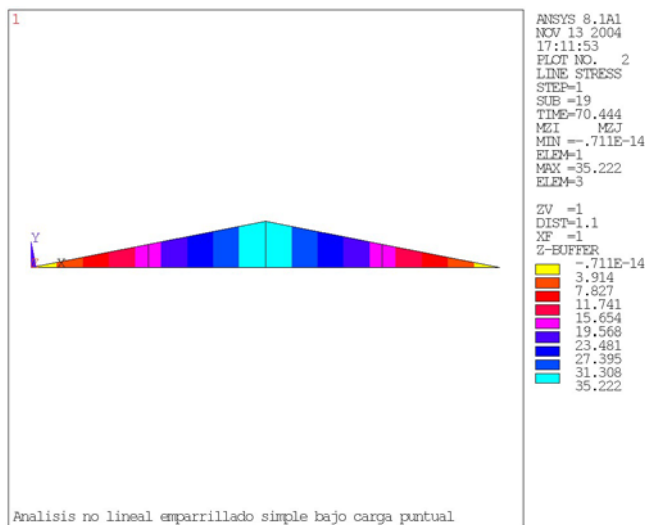


Figura 4.2.2.b: Gráfica de momentos flectores en el agotamiento.

La carga última obtenida es de 70.44 kN. La deformación previa al agotamiento es de 4.50E-3.

### 4.2.5. Modelo 2. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.

Se ofrece a continuación una tabla resumen:

Parámetro	Teoría	ANSYS	% Diferencia
Pu	70.38	70.44	0.09%
d	4.50E-3	4.50E-3	0.00%

## 4.3. MODELO 3: EMPARRILLADO SIMPLE

### 4.3.1. Modelo 3. Descripción del problema

Se trata de un emparrillado sencillo, formado por dos barras de 6m y 4m biapoyadas y cruzadas ortogonalmente.

El material es hormigón armado. La sección es rectangular de 0.10m x 0.35m, y se encuentra armada con una cuantía geométrica inferior constante del 1%.

La rigidez en fase fisurada, calculada en el capítulo 2, es de 2608 kNm<sup>2</sup>. El momento último es de 35.19 kNm.

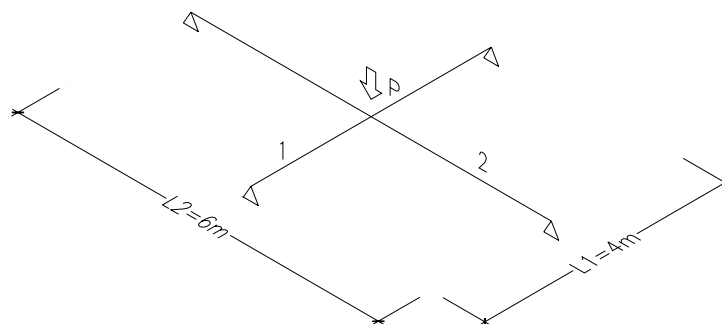


Figura 4.3.1: Geometría de la Estructura

### 4.3.2. Modelo 3. Solución teórica

#### 4.3.2.1. Análisis elástico lineal:

El procedimiento de análisis convencional parte de los siguientes supuestos

- las rigideces de las piezas son las brutas (rigidez debida al hormigón sin tener en cuenta el armado) que se suponen constantes hasta el agotamiento;
- se considera que la estructura alcanza su límite resistente cuando un elemento cualquiera alcanza su límite resistente.

En el caso presente puede partirse de considerar la carga  $P$  dividida entre las dos barras de manera que la barra  $i$  soporta una carga  $P_i$ . La deflexión al centro a partir de la inercia bruta en una barra de longitud  $L$  con una carga puntual  $P$  en su punto medio se formula  $PL^3/48EI$ ; forzando la condición de compatibilidad puede escribirse:

$$P_1 + P_2 = P$$

$$\frac{P_1 L_1^3}{48EI_1} = \frac{P_2 L_2^3}{48EI_2}$$

La resolución de esta ecuación teniendo en cuenta  $EI_1 = EI_2$  supone que  $P_1 = 0.77P$ ,  $P_2 = 0.23P$ . Los momentos obtenidos a partir de estas cargas son  $M_1 = 0.77P$ ,  $M_2 = 0.34P$ . Puesto que el momento último soportable por la viga 1 es  $M_{u1} = 35.19$  kNm, la carga máxima soportable por la estructura globalmente es  $P = 45.62$  kN, bajo la cual los momentos en la pieza 1 y 2 son, respectivamente,  $M_{e1} = 35.19$  kNm y  $M_{e2} = 15.64$  kNm. Asimismo, el reparto de carga en las piezas es de 35.19 y 10.43 kN.

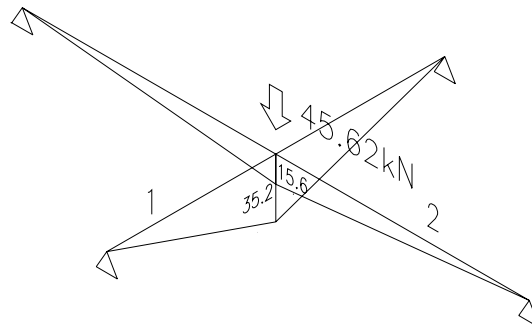
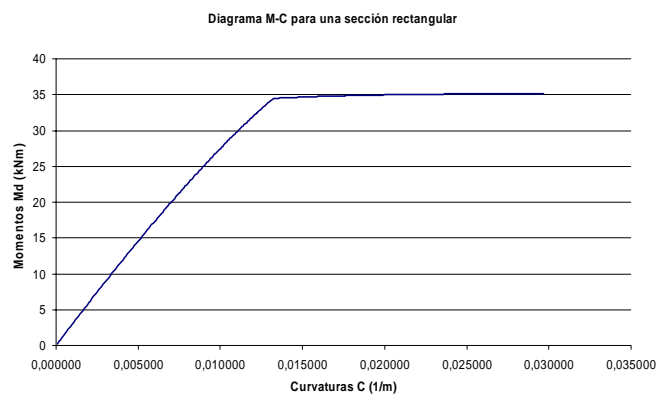


Figura 4.3.2. Momentos en fase elástica, kNm

#### 4.3.2.2. Agotamiento:

En el análisis anterior puede observarse que, mientras la pieza 1 ha agotado su capacidad resistente, la barra 2 trabaja al 44% de su capacidad; cabe preguntarse si no es posible aprovechar la capacidad resistente restante.



El diagrama anterior expresa la relación momento-curvatura simplificada para la pieza dada; pueden observarse dos fases muy diferenciadas: la correspondiente a la rigidez antes de alcanzarse la plastificación del acero ( $EI_2$ ) y la correspondiente a la zona de cedencia, hasta el momento último de la sección ( $EI_3$ ).

En el caso que nos ocupa los valores de  $EI_2$  y  $EI_3$  son, respectivamente, 2596 kNm<sup>2</sup> frente a 44 kNm<sup>2</sup>. A efectos prácticos puede suponerse que la fase II tiene una rigidez infinita frente a la fase III; las secciones cercanas a la central en la pieza 1 tienden a comportarse como articulaciones plásticas (zonas de rigidez casi nula, donde el momento resistido es prácticamente constante).

En estas condiciones, un incremento en la carga  $P$  será resistido exclusivamente por la pieza 2 (la pieza 1 está agotada). La capacidad restante en la pieza 2 es  $\Delta M_2 = 19.55$  kNm, por lo que el incremento de carga es  $\Delta P = 4 \cdot \Delta M_2 / L_2 = 13.03$  kN.

Así, en situación de agotamiento, la estructura resiste una carga  $P_u = 45.62 + 13.03 = 58.65$  kN. Los momentos en las barras 1 y 2 son los máximos  $M_{u1}$  y  $M_{u2}$ ; no hay capacidad resistente sobrante. El incremento de carga del primer análisis al segundo es un 29%. Puede afirmarse que bajo la carga  $P_u$  la estructura colapsaría, al menos teóricamente. Este tipo de análisis se denomina 'en agotamiento' o 'análisis límite'

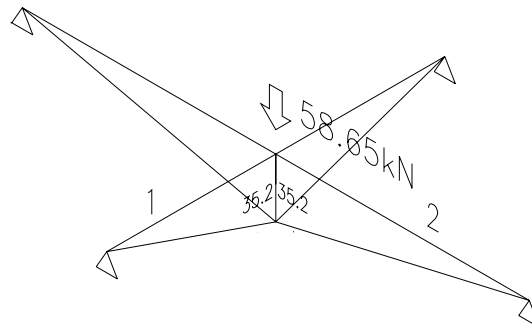


Figura 4.3.3. Momentos bajo carga última, kNm

#### 4.3.2.3. Deformación y giro.

En la estructura considerada la sección central de la pieza 1 debe ser capaz de girar, ya que desde el agotamiento elástico ( $P_e = 45.62$  kN) hasta la carga última ( $P_u = 58.65$  kN) se produce en dicha pieza una deformación adicional en el centro bajo momento constante. Tomando como base de los cálculos la rigidez fisurada, se tiene que:

- en la fase 'elástica' la deformación viene regida por cualquiera de las dos piezas, por ejemplo, la 1; puede calcularse como  $\delta_1 = P_1 \cdot L_1^3 / 48EI_1 = 35.19 \cdot 4^3 / (48 \cdot 2608) = 0.018$ m;
- en la fase 'no lineal', antes del agotamiento, la deformación viene regida por la pieza que conserva rigidez, esto es, la pieza 2; el incremento de carga en dicha pieza es  $\Delta P = 13.03$  kN; la deformación correspondiente es  $\Delta \delta = \Delta P_2 \cdot L_2^3 / 48EI_2 = 13.03 \cdot 6^3 / (48 \cdot 2608) = 0.0248$ m;
- la deformación total previa al agotamiento es de  $\delta_u = 0.0405$ m.

A partir de estos valores puede calcularse el giro plástico necesario según el esquema adjunto; entonces  $\theta_{pl,nec} = \Delta \delta / (L_1/2) = 0.0112$  rad.

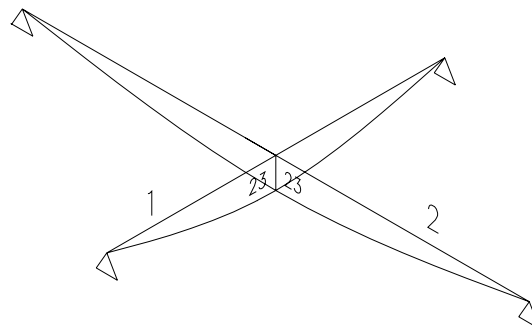


Figura 4.3.4. Deformación en fase 'elástica', mm

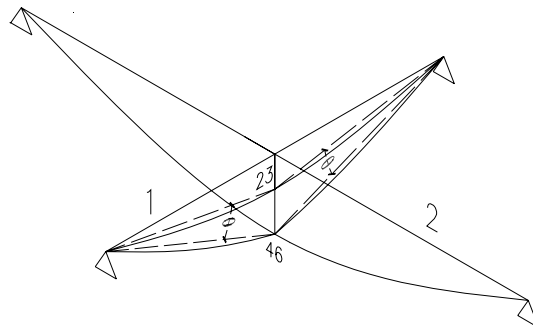


Figura 4.3.5. Deformación previa a la rotura teórica, mm

### 4.3.3. Modelo 3. Listado ANSYS

```

! ANÁLISIS DE EMPARRILLADO SENCILLO
! (MODELO DE CONTROL 3)
/TITLE, Analisis no lineal emparrillado simple bajo carga puntual
/FILNAM, M-3
!
!
!
! PARAMETROS DEL PROBLEMA
! UNIDADES: m, kN
!
L1=3.00 .....! LUZ DE CADA TRAMO EN X
L2=2.00 .....! LUZ DE CADA TRAMO EN Y
!
!
!
! CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS MECÁNICOS DE LA SECCIÓN
!
EIZ=2608 .....! RIGIDEZ TOTAL
MEL=35.19 .....! MOMENTO ÚLTIMO ELÁSTICO
EYOUNG=2E8
IZ=EIZ/EYOUNG
AREAX=0.1*0.35
! CÁLCULO DEL GIRO
TETAREF=MEL*2*L1/(3*EIZ) ..... ! GIRO DE REFERENCIA
NUMTRAMX=2 ..... ! NUMERO DE TRAMOS DE LA VIGA EN X
NUMTRAMZ=2 ..... ! NUMERO DE TRAMOS DE LA VIGA EN Z
!
!
!
! GENERACIÓN DEL MODELO
!
/PREP7
ET,1,BEAM4,,,,,1,
ET,2,COMBIN39,0,0,6,,,1
ET,3,COMBIN39,0,0,4,,,1
R,1,AREAX,IZ,IZ/2,,,,
RMORE,,1E-12
R,2,0,0,TETAREF/1000,MEL,100*TETAREF,MEL
    
```

```

!RMORE,100000*TETAEL,MPL
MP,EX,1,EYOUNG
MP,NUXY,1,0.3
!
! GENERACIÓN NODOS
*DO,I,0,NUMTRAMX
*DO,J,0,NUMTRAMZ
N,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,L1*1,0,L2*J
N,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2,L1*1,0,L2*J
*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE BARRAS PARALELAS A X
MAT,1
TYPE,1
REAL,1
*DO,J,0,NUMTRAMZ
*DO,I,1,NUMTRAMX
E,(I-1)*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2,(I)*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1
*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE BARRAS PARALELAS A z
MAT,1
TYPE,1
REAL,1
*DO,I,0,NUMTRAMX
*DO,J,1,NUMTRAMZ
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*(J-1)*2+2,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1
*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE MUELLES PARALELOS A X
TYPE,2
REAL,2
*DO,J,0,NUMTRAMZ
*DO,I,0,NUMTRAMX
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
CP,NEXT,UX,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
CP,NEXT,UY,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
CP,NEXT,UZ,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE MUELLES PARALELOS A z
TYPE,3
REAL,2
*DO,J,0,NUMTRAMZ
*DO,I,0,NUMTRAMX
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
*ENDDO
*ENDDO
!
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,A,LOC,Z,0
NSEL,A,LOC,X,NUMTRAMX*L1

```

```
NSEL,A,LOC,Z,NUMTRAMZ*L2
!
IESLN,S,1
IESEL,R,TYPE,,1
IEDELE,ALL
IESEL,ALL
!
D,ALL,UY
NSEL,ALL
D,1,UX
D,1,UZ
ID,ALL,UX
ID,ALL,UZ
ID,ALL,ROTX
ID,ALL,ROTY
SAVE
EPlot
FINISH
!
!
/SOLU
ANTYPE,STATIC,NEW
FUERZA=150
TIME,FUERZA
NLGEOM,OFF
SSTIF,OFF
SOLCONTROL,OFF
NROPT,FULL
AUTOTS,OFF
NSUBST,300
NCNV,2,1
EQSLV,SPARSE
OUTRES,ALL,ALL
F,9,FY,-FUERZA
SOLVE
FINISH
!
!
! POSTPROCESO
!
JPEG,QUAL,200
JPEG,ORIENT,Horizontal
JPEG,COLOR,2
JPEG,TMOD,1
/SHOW,JPEG
!
/POST26
TIMERANGE,0,FUERZA-1
NSOL,2,9,U,Y,UY
PROD,2,2,,UY,,,-1,1,1,
DERIV,3,1,2,,EI
XVAR,2
/AXLAB,X,DESPLAZAMIENTO UY (m)
/AXLAB,Y,CARGA APLICADA P (kN)
PLVAR,1
FINISH
```

```

/POST1
SET, LAST
SET, PREVIOUS
/VIEW, 1, 1, 1, 1
ETABLE, MXI, SMISC, 4
ETABLE, MXJ, SMISC, 10
ETABLE, MYI, SMISC, 5
ETABLE, MYJ, SMISC, 11
ETABLE, MZI, SMISC, 6
ETABLE, MZJ, SMISC, 12
ETABLE, MMUELLE, SMISC, 1
ETABLE, TETAMUELLE, NMISC, 1
ETABLE, FXI, SMISC, 1
ETABLE, FXJ, SMISC, 7
PLLS, MZI, MZJ
FINISH
!
/SHOW, CLOSE
/SHOW, TERM

```

#### 4.3.4. Modelo 3. Resumen de resultados de ANSYS

En la figura siguiente se resumen los resultados de ANSYS para este modelo:

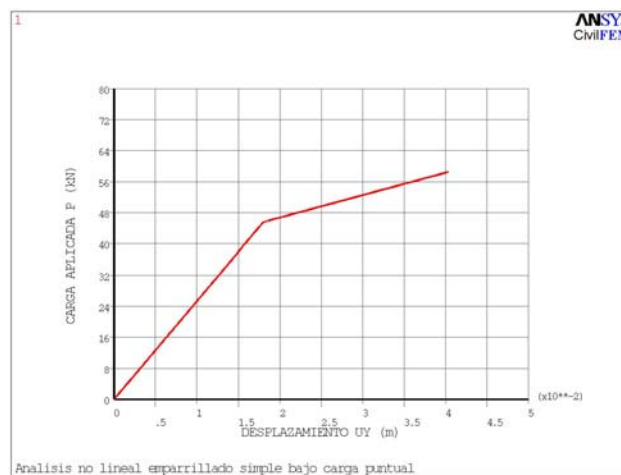


Figura 4.3.6.a: Modelo 3, curva carga-desplazamiento.

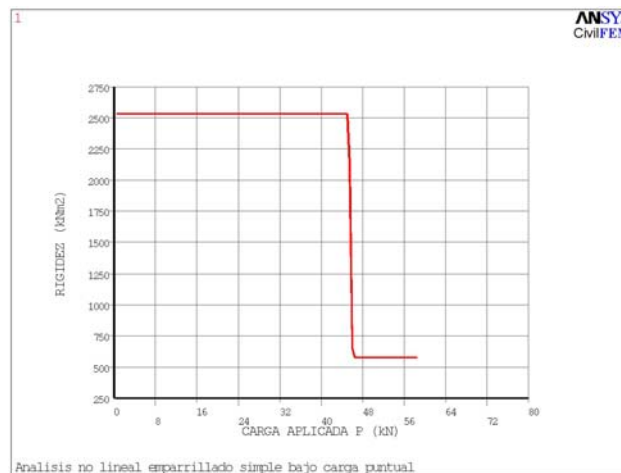


Figura 4.3.6.b: Modelo 3, curva rigidez-carga.

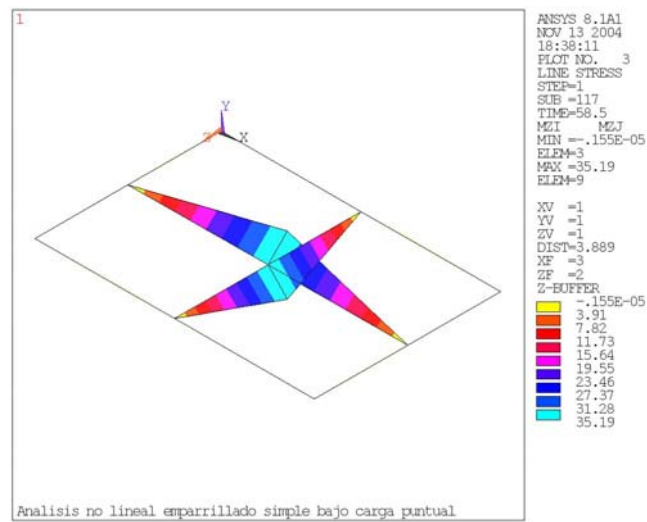


Figura 4.3.6.c: Modelo 3, gráfica de momentos en el agotamiento.

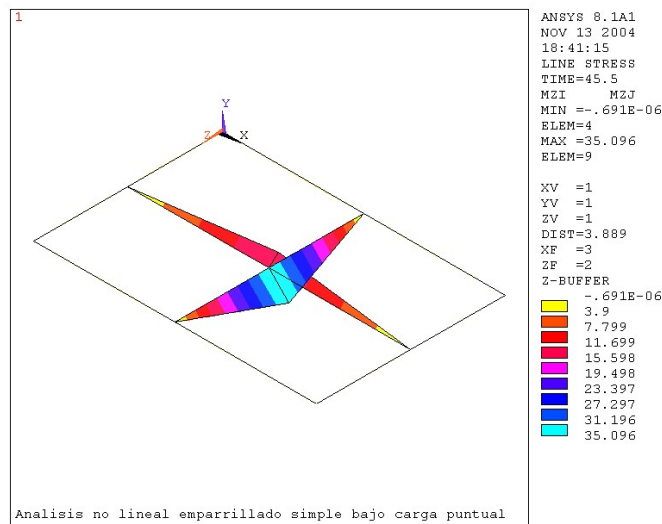


Figura 4.3.5.d: Modelo 3: Gráfica de momentos previa a la primera plastificación.

La carga última obtenida es de 58.67 kN. La deformación previa al agotamiento es de 0.04055m.

### 4.3.5. Modelo 3. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.

Se ofrece a continuación una tabla resumen:

Parámetro	Teoría	ANSYS	% Diferencia
Pu	58.65	58.67	0.03%
D	0.0405	0.0405	0.00%

## 4.4. MODELO 4: EMPARRILLADO SIMPLE CON DOS CARGAS

### 4.4.1. Modelo 4. Descripción del problema

Se trata de un emparrillado formado por el cruce ortogonal de tres barras, con cargas aplicadas en sus nudos centrales, de acuerdo al esquema aportado a continuación.

El material es hormigón armado. La sección es rectangular de 0.10m x 0.35m, y se encuentra armada con una cuantía geométrica inferior constante del 1%.

La rigidez en fase fisurada, calculada en el capítulo 2, es de 2608 kNm<sup>2</sup>. El momento último es de 35.19 kNm.

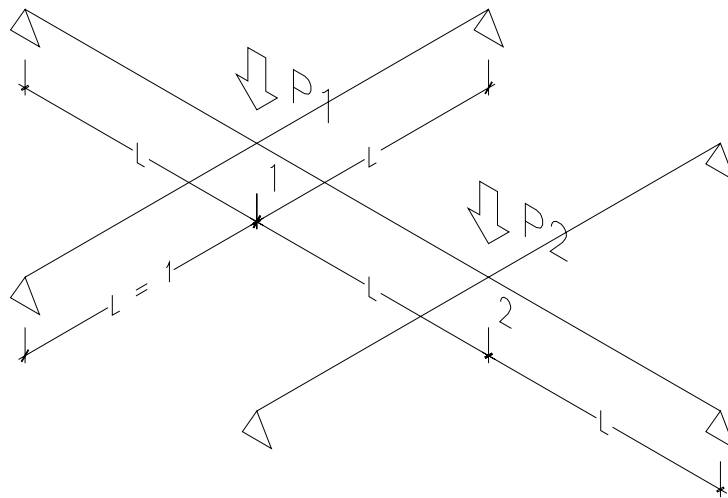


Figura 4.4.1: Geometría del emparrillado.

### 4.4.2. Modelo 4. Solución teórica

Se empleará en este caso el método matricial, reformulando paso a paso la matriz de rigidez en función de las nuevas articulaciones debidas a la plastificación; en la figura siguiente se presenta la numeración de nudos y barras adoptada; la carga aplicada en el nudo 1 es  $P_1$ , y la carga en el nudo 2 es  $P_2 = P_1/2$ . Se pretende encontrar la carga última  $P_u$ .

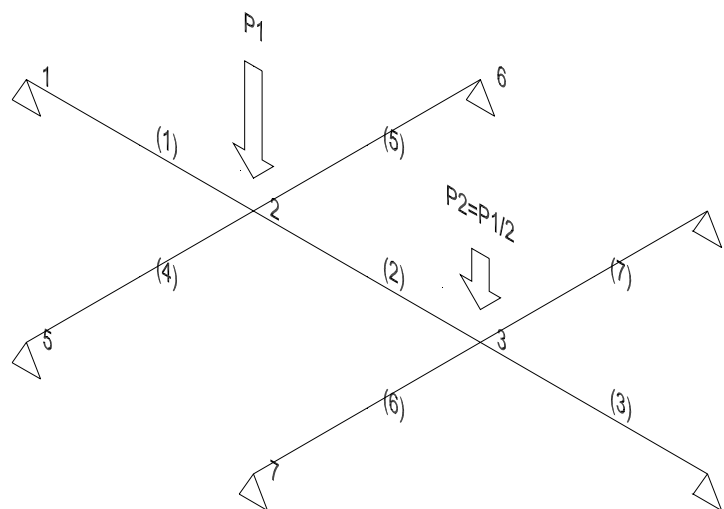


Figura 4.4.2. Definición del problema y numeración de barras y nudos.

$L := 1$  ***m, Longitud de la malla***  
 $\alpha := 0.5$  ***Proporción P2/P1***  
 $Mu := 35.19$  ***kNm, momento último de un nervio***  
 $\theta_{adm} := 0.0097$  ***rad, rotación plástica admisible***  
 $EI := 2608$  ***kNm2, rigidez fisurada de un nervio***

**Matrices de rigidez locales**

$$K_{ee} := \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 \\ \frac{6}{L} & 4 & 0 & \frac{-6}{L} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} & 0 \\ \frac{6}{L} & 2 & 0 & \frac{-6}{L} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{ae} := \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-3}{L^2} & \frac{3}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & \frac{-3}{L} & 0 \\ \frac{3}{L} & 0 & 0 & \frac{-3}{L} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{ea} := \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} & 0 & \frac{-3}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{L} & 3 & 0 & \frac{-3}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-3}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matrices de cambio de base**

$$L_{00} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{90} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$L1 := L00$        $L2 := L00$        $L3 := L00$        $L4 := L90$        $L5 := L90$   
 $L6 := L90$        $L7 := L90$

**PASO 1**

$K1 := Kee$        $K2 := Kee$        $K3 := Kee$        $K4 := Kee$   
 $K5 := Kee$        $K6 := Kee$        $K7 := Kee$   
 $K1 := L1^T \cdot K1 \cdot L1$        $K2 := L2^T \cdot K2 \cdot L2$        $K3 := L3^T \cdot K3 \cdot L3$        $K4 := L4^T \cdot K4 \cdot L4$   
 $K5 := L5^T \cdot K5 \cdot L5$        $K6 := L6^T \cdot K6 \cdot L6$        $K7 := L7^T \cdot K7 \cdot L7$

**MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL Y REDUCIDA**

$$K_{paso1} := I1^T \cdot K1 \cdot I1 + I2^T \cdot K2 \cdot I2 + I3^T \cdot K3 \cdot I3 + I4^T \cdot K4 \cdot I4 + I5^T \cdot K5 \cdot I5 + I6^T \cdot K6 \cdot I6 + I7^T \cdot K7 \cdot I7$$

$$K_{R_paso1} := IL \cdot K_{paso1} \cdot IL^T$$

$$KR_{paso1} = \begin{bmatrix} 10432 & 0 & -15648 & 5216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2608 & 0 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15648 & 0 & 125184 & 0 & 0 & -31296 & 15648 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15648 & 0 & -15648 & 0 & 0 & 0 \\ 5216 & 0 & 0 & 26080 & 0 & -15648 & 5216 & 0 & 0 & 0 & -2608 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2608 & 0 & 0 & 26080 & 0 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 0 & 5216 & 0 & 5216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31296 & -15648 & 0 & 125184 & 0 & 0 & 15648 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15648 & 0 & -15648 \\ 0 & 0 & 15648 & 5216 & 0 & 0 & 26080 & 0 & 5216 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2608 & 0 & -2608 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 26080 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5216 & 0 & 5216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15648 & 5216 & 0 & 10432 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2608 & 0 & 2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15648 & 0 & 5216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10432 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2608 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15648 & 0 & 5216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10432 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2608 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15648 & 0 & 5216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10432 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2608 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15648 & 0 & 5216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10432 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN UNITARIA**

$$Fr1 := (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$rr1 := KR_{paso1}^{-1} \cdot Fr1 \quad r1 := IL^T \cdot rr1 \quad f1 := K_{paso1} \cdot r1$$

$$r := r1$$

**SOLICITACIONES UNITARIAS**

$$\begin{aligned} f_{pb1} &:= L1 \cdot K1 \cdot I1 \cdot r & f_{pb2} &:= L2 \cdot K2 \cdot I2 \cdot r & f_{pb3} &:= L3 \cdot K3 \cdot I3 \cdot r & f_{pb4} &:= L4 \cdot K4 \cdot I4 \cdot r \\ f_{pb5} &:= L5 \cdot K5 \cdot I5 \cdot r & f_{pb6} &:= L6 \cdot K6 \cdot I6 \cdot r & f_{pb7} &:= L7 \cdot K7 \cdot I7 \cdot r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{barra1nudo2} &:= -f_{pb2}_2 & M_{barra1nudo2} &= 0.1875 \\ M_{barra4nudo2} &:= f_{pb4}_5 & M_{barra4nudo2} &= 0.34375 \\ M_{barra6nudo3} &:= f_{pb6}_5 & M_{barra6nudo3} &= 0.28125 \\ M_{barra3nudo3} &:= -f_{pb3}_2 & M_{barra3nudo3} &= 0.0625 \end{aligned}$$

$$Mmx := \max((M_{barra1nudo2} \ M_{barra4nudo2} \ M_{barra6nudo3} \ M_{barra3nudo3}))$$

$$Mmx = 0.34375$$

$$P1 := \frac{Mu}{Mmx} \quad P1 = 102.37091$$

**SOLUCIÓN PASO 1**

$$Fr1 := P1 \cdot (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$rr1 := KR_{paso1}^{-1} \cdot Fr1 \quad r1 := IL^T \cdot rr1 \quad f1 := K_{paso1} \cdot r1$$

$$r := r1$$

$r1 =$	0 -0.00572 0 -0.0045 -0.00204 0 -0.00368 0.00286 0 0 0.00409 0 0 -0.00204 0.00675 0 -0.00204 -0.00675 0 0.00286 0.00552 0 0.00286 -0.00552	$f1 =$	19.19455 0 0 -102.37091 0 0 -51.18545 0 0 6.39818 0 0 35.19 0 0 35.19 0 0 28.79182 0 0 28.79182 0 0 0
--------	---	--------	---

**SOLICITACIONES PASO 1**

$fpb11 := L1 \cdot K1 \cdot l1 \cdot r$      $fpb21 := L2 \cdot K2 \cdot l2 \cdot r$      $fpb31 := L3 \cdot K3 \cdot l3 \cdot r$      $fpb41 := L4 \cdot K4 \cdot l4 \cdot r$   
 $fpb51 := L5 \cdot K5 \cdot l5 \cdot r$      $fpb61 := L6 \cdot K6 \cdot l6 \cdot r$      $fpb71 := L7 \cdot K7 \cdot l7 \cdot r$

$Mpaso1barra1nudo2 := -fpb21_2$      $Mpaso1barra1nudo2 = 19.19455$   
 $Mpaso1barra4nudo2 := fpb41_5$      $Mpaso1barra4nudo2 = 35.19$   
 $Mpaso1barra6nudo3 := fpb61_5$      $Mpaso1barra6nudo3 = 28.79182$   
 $Mpaso1barra3nudo3 := -fpb31_2$      $Mpaso1barra3nudo3 = 6.39818$

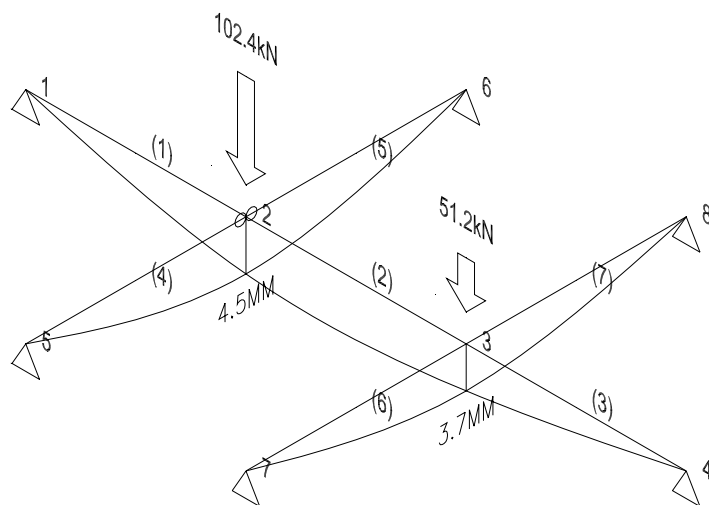


Figura 4.4.3: Situación de la estructura después del paso 1. Las circunferencias indican las secciones plastificadas

**PASO 2**

$K1 := Kee \quad K2 := Kee \quad K3 := Kee \quad K4 := Kea$

$K5 := Kae \quad K6 := Kee \quad K7 := Kee$

$K1 := L1^T \cdot K1 \cdot L1 \quad K2 := L2^T \cdot K2 \cdot L2 \quad K3 := L3^T \cdot K3 \cdot L3 \quad K4 := L4^T \cdot K4 \cdot L4$

$K5 := L5^T \cdot K5 \cdot L5 \quad K6 := L6^T \cdot K6 \cdot L6 \quad K7 := L7^T \cdot K7 \cdot L7$

**MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL Y REDUCIDA**

$Kpaso2 := I1^T \cdot K1 \cdot I1 + I2^T \cdot K2 \cdot I2 + I3^T \cdot K3 \cdot I3 + I4^T \cdot K4 \cdot I4 + I5^T \cdot K5 \cdot I5 + I6^T \cdot K6 \cdot I6 + I7^T \cdot K7 \cdot I7$

$KRpaso2 := IL \cdot Kpaso2 \cdot IL^T$

10432	0	-15648	5216	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2608	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-15648	0	78240	0	0	-31296	15648	0	0	0	0	7824	0	-7824	0	0	0
5216	0	0	26080	0	-15648	5216	0	0	0	-2608	0	-2608	0	0	0	0
0	-2608	0	0	5216	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-31296	-15648	0	125184	0	0	15648	0	0	0	0	0	15648	0	-15648
0	0	15648	5216	0	0	26080	0	5216	0	0	0	0	-2608	0	-2608	0
0	0	0	0	-2608	0	0	26080	0	-2608	0	0	0	0	5216	0	5216
0	0	0	0	0	15648	5216	0	10432	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-2608	0	2608	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	2608	0	0	0	0	0	0
0	0	7824	0	0	0	0	0	0	0	0	7824	0	0	0	0	0
0	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	0	0	2608	0	0	0	0
0	0	-7824	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7824	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	0	2608	0	0
0	0	0	0	0	15648	0	5216	0	0	0	0	0	0	0	10432	0
0	0	0	0	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2608
0	0	0	0	0	-15648	0	5216	0	0	0	0	0	0	0	0	10432

**SOLUCIÓN UNITARIA**

$Fr2 := (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$rr2 := KRpaso2^{-1} \cdot Fr2 \quad r2 := IL^T \cdot rr2 \quad f2 := Kpaso2 \cdot r2$

$r := r2$

**SOLICITACIONES UNITARIAS**

$f_{pb1} := L1 \cdot K1 \cdot I1 \cdot r \quad f_{pb2} := L2 \cdot K2 \cdot I2 \cdot r \quad f_{pb3} := L3 \cdot K3 \cdot I3 \cdot r \quad f_{pb4} := L4 \cdot K4 \cdot I4 \cdot r$   
 $f_{pb5} := L5 \cdot K5 \cdot I5 \cdot r \quad f_{pb6} := L6 \cdot K6 \cdot I6 \cdot r \quad f_{pb7} := L7 \cdot K7 \cdot I7 \cdot r$

$M_{barra1nudo2} := -f_{pb2}_2 \quad M_{barra1nudo2} = 0.5$   
 $M_{barra4nudo2} := f_{pb4}_5 \quad M_{barra4nudo2} = 0$   
 $M_{barra6nudo3} := f_{pb6}_5 \quad M_{barra6nudo3} = 0.5$   
 $M_{barra3nudo3} := -f_{pb3}_2 \quad M_{barra3nudo3} = 0$

$\lambda_{12} := \left| \frac{Mu - M_{paso1barra1nudo2}}{M_{barra1nudo2}} \right| \quad \lambda_{12} = 31.99091$

$\lambda_{63} := \left| \frac{Mu - M_{paso1barra6nudo3}}{M_{barra6nudo3}} \right| \quad \lambda_{63} = 12.79636$

$\lambda_{33} := \left| \frac{Mu - M_{paso1barra3nudo3}}{M_{barra3nudo3}} \right| \quad \lambda_{33} = 2.59334 \cdot 10^{17}$

$\lambda := \min((\lambda_{12} \ \lambda_{63} \ \lambda_{33})) \quad \lambda = 12.79636$

$P2 := \lambda \cdot 1 \quad P2 = 12.79636$

**SOLUCIÓN PASO 2**

$$Fr2 := P2 \cdot (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$rr2 := KR_{paso2}^{-1} \cdot Fr2 \quad r2 := IL^T \cdot rr2 \quad f2 := K_{paso2} \cdot r2$$

$$r := r2$$

$r2 =$	0	$f2 =$	6.39818
	-0.00164		0
	0		0
	-0.00123		-12.79636
	-0.00041		0
	0		0
	-0.00082		-6.39818
	0.00082		0
	0		0
	0		0
	0.00082		0
	0		0
	0		0
	-0.00041		0
	0.00123		0
	0		0
	-0.00041		0
	-0.00123		0
	0		6.39818
	0.00082		0
	0.00123		0
	0		6.39818
	0.00082		0
	-0.00123		0

**SOLICITACIONES PASO 2**

$$f_{pb12} := L1 \cdot K1 \cdot I1 \cdot r \quad f_{pb22} := L2 \cdot K2 \cdot I2 \cdot r \quad f_{pb32} := L3 \cdot K3 \cdot I3 \cdot r \quad f_{pb42} := L4 \cdot K4 \cdot I4 \cdot r$$

$$f_{pb52} := L5 \cdot K5 \cdot I5 \cdot r \quad f_{pb62} := L6 \cdot K6 \cdot I6 \cdot r \quad f_{pb72} := L7 \cdot K7 \cdot I7 \cdot r$$

$$M_{paso2barra1nudo2} := -f_{pb22}_2 \quad M_{paso2barra1nudo2} = 6.39818$$

$$M_{paso2barra4nudo2} := f_{pb42}_5 \quad M_{paso2barra4nudo2} = 0$$

$$M_{paso2barra6nudo3} := f_{pb62}_5 \quad M_{paso2barra6nudo3} = 6.39818$$

$$M_{paso2barra3nudo3} := -f_{pb32}_2 \quad M_{paso2barra3nudo3} = 0$$

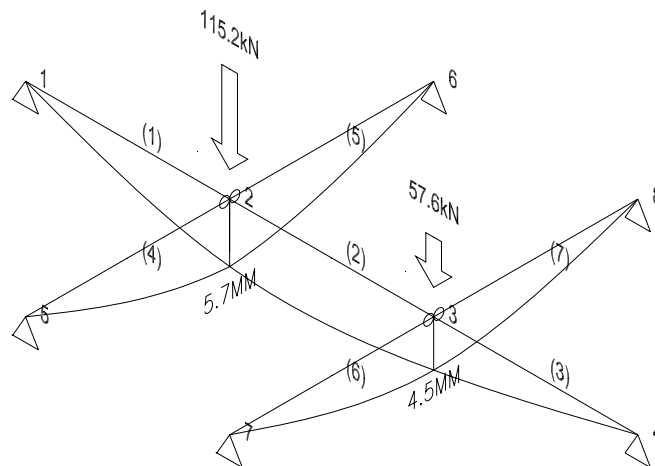


Figura 4.4.4.: situación después del paso 2

**PASO 3**

$K1 := Kee \quad K2 := Kee \quad K3 := Kee \quad K4 := Kea$

$K5 := Kae \quad K6 := Kea \quad K7 := Kae$

$K1 := L1^T \cdot K1 \cdot L1 \quad K2 := L2^T \cdot K2 \cdot L2 \quad K3 := L3^T \cdot K3 \cdot L3 \quad K4 := L4^T \cdot K4 \cdot L4$

$K5 := L5^T \cdot K5 \cdot L5 \quad K6 := L6^T \cdot K6 \cdot L6 \quad K7 := L7^T \cdot K7 \cdot L7$

**MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL Y REDUCIDA**

$Kpaso3 := I1^T \cdot K1 \cdot I1 + I2^T \cdot K2 \cdot I2 + I3^T \cdot K3 \cdot I3 + I4^T \cdot K4 \cdot I4 + I5^T \cdot K5 \cdot I5 + I6^T \cdot K6 \cdot I6 + I7^T \cdot K7 \cdot I7$

$KRpaso3 := IL3 \cdot Kpaso3 \cdot IL3^T$

10432	-15648	5216	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-15648	78240	0	0	-31296	15648	0	0	0	7824	0	-7824	0	0	0	0
5216	0	26080	0	-15648	5216	0	0	-2608	0	-2608	0	0	0	0	0
0	0	0	5216	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-31296	-15648	0	78240	0	0	15648	0	0	0	0	0	7824	0	-7824
0	15648	5216	0	0	26080	0	5216	0	0	0	0	-2608	0	-2608	0
0	0	0	-2608	0	0	5216	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	15648	5216	0	10432	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-2608	0	0	0	0	0	2608	0	0	0	0	0	0	0
0	7824	0	0	0	0	0	0	0	7824	0	0	0	0	0	0
0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	0	2608	0	0	0	0	0
0	-7824	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7824	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	2608	0	0	0
0	0	0	0	7824	0	0	0	0	0	0	0	0	7824	0	0
0	0	0	0	0	-2608	0	0	0	0	0	0	0	0	2608	0
0	0	0	0	-7824	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7824

**SOLUCIÓN UNITARIA**

$Fr3 := (0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$rr3 := KRpaso3^{-1} \cdot Fr3 \quad r3 := IL3^T \cdot rr3 \quad f3 := Kpaso3 \cdot r3$

$r := r3$

**SOLICITACIONES UNITARIAS**

$fpb1 := L1 \cdot K1 \cdot I1 \cdot r \quad fpb2 := L2 \cdot K2 \cdot I2 \cdot r \quad fpb3 := L3 \cdot K3 \cdot I3 \cdot r \quad fpb4 := L4 \cdot K4 \cdot I4 \cdot r$

$fpb5 := L5 \cdot K5 \cdot I5 \cdot r \quad fpb6 := L6 \cdot K6 \cdot I6 \cdot r \quad fpb7 := L7 \cdot K7 \cdot I7 \cdot r$

$Mbarra1nudo2 := -fpb2_2 \quad Mbarra1nudo2 = 0.83333$

$Mbarra4nudo2 := fpb4_5 \quad Mbarra4nudo2 = 0$

$Mbarra6nudo3 := fpb6_5 \quad Mbarra6nudo3 = 0$

$Mbarra3nudo3 := -fpb3_2 \quad Mbarra3nudo3 = 0.66667$

$\lambda_{12} := \frac{Mu - Mpaso1barra1nudo2 - Mpaso2barra1nudo2}{Mbarra1nudo2} \quad \lambda_{12} = 11.51673$

$\lambda_{33} := \frac{Mu - Mpaso1barra3nudo3 - Mpaso2barra3nudo3}{Mbarra3nudo3} \quad \lambda_{33} = 43.18773$

$\lambda := \min((\lambda_{12} \ \lambda_{33})) \quad \lambda = 11.51673$

$P3 := \lambda \cdot 1 \quad P3 = 11.51673$

**SOLUCIÓN PASO 3**

$$Fr3 := P3 \cdot (0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -\alpha \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$rr3 := KR_{paso3}^{-1} \cdot Fr3$$

$$r3 := IL3^T \cdot rr3$$

$$f3 := K_{paso3} \cdot r3$$

$$r := r3$$

$r3 =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.00343 \\ 0 \\ -0.00282 \\ -0.00159 \\ 0 \\ -0.0027 \\ 0.00172 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00319 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00159 \\ 0.00282 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00159 \\ -0.00282 \\ 0 \\ 0.00172 \\ 0.0027 \\ 0 \\ 0.00172 \\ -0.0027 \end{bmatrix}$	$f3 =$	$\begin{bmatrix} 9.59727 \\ 0 \\ 0 \\ -11.51673 \\ 0 \\ -5.75836 \\ 0 \\ 0 \\ 7.67782 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
--------	--	--------	--

**SOLICITACIONES PASO 3**

$$f_{pb13} := L1 \cdot K1 \cdot l1 \cdot r \quad f_{pb23} := L2 \cdot K2 \cdot l2 \cdot r \quad f_{pb33} := L3 \cdot K3 \cdot l3 \cdot r \quad f_{pb43} := L4 \cdot K4 \cdot l4 \cdot r$$

$$f_{pb53} := L5 \cdot K5 \cdot l5 \cdot r \quad f_{pb63} := L6 \cdot K6 \cdot l6 \cdot r \quad f_{pb73} := L7 \cdot K7 \cdot l7 \cdot r$$

$$M_{paso3barra1nudo2} := -f_{pb23}_2 \quad M_{paso3barra1nudo2} = 9.59727$$

$$M_{paso3barra4nudo2} := f_{pb43}_5 \quad M_{paso3barra4nudo2} = 0$$

$$M_{paso3barra6nudo3} := f_{pb63}_5 \quad M_{paso3barra6nudo3} = 0$$

$$M_{paso3barra3nudo3} := -f_{pb33}_2 \quad M_{paso3barra3nudo3} = 7.67782$$

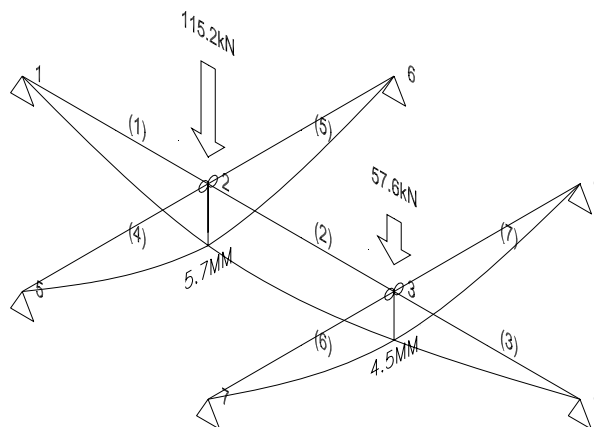


Figura 4.4.5. Situación después del paso 3

**RESUMEN FINAL**

$$M_{\text{barra1nudo2}} := M_{\text{paso1barra1nudo2}} + M_{\text{paso2barra1nudo2}} + M_{\text{paso3barra1nudo2}}$$

$$M_{\text{barra1nudo2}} = 35.19$$

$$M_{\text{barra4nudo2}} := M_{\text{paso1barra4nudo2}} + M_{\text{paso2barra4nudo2}} + M_{\text{paso3barra4nudo2}}$$

$$M_{\text{barra4nudo2}} = 35.19$$

$$M_{\text{barra6nudo3}} := M_{\text{paso1barra6nudo3}} + M_{\text{paso2barra6nudo3}} + M_{\text{paso3barra6nudo3}}$$

$$M_{\text{barra6nudo3}} = 35.19$$

$$M_{\text{barra3nudo3}} := M_{\text{paso1barra3nudo3}} + M_{\text{paso2barra3nudo3}} + M_{\text{paso3barra3nudo3}}$$

$$M_{\text{barra3nudo3}} = 14.076$$

$$P := P_1 + P_2 + P_3 \quad P = 126.684$$

$$r := r_1 + r_2 + r_3 \quad f := f_1 + f_2 + f_3$$

$$\delta_{21} := r_{1_4} \quad \delta_{21} = -0.0045$$

$$\delta_{31} := r_{1_7} \quad \delta_{31} = -0.00368$$

$$\delta_{22} := r_{2_4} \quad \delta_{22} = -0.00123$$

$$\delta_{32} := r_{2_7} \quad \delta_{32} = -0.00082$$

$$\delta_{23} := r_{3_4} \quad \delta_{23} = -0.00282$$

$$\delta_{33} := r_{3_7} \quad \delta_{33} = -0.0027$$

$$\theta_{52} := \left| \frac{\delta_{22} + \delta_{23}}{L} \cdot 2 \right| \quad \theta_{52} = 0.0081$$

**EN ESTE CASO LA ROTACIÓN PLÁSTICA ES ADMISIBLE**

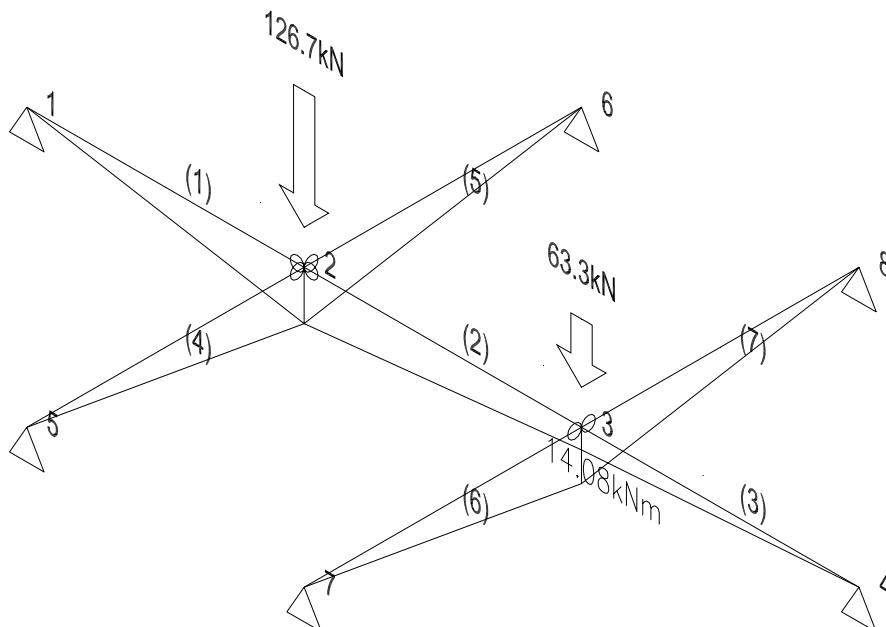


Figura 4.4.6. Solicitaciones finales; los momentos no rotulados corresponden a  $M_y$

**Desplazamientos generales**

$r =$	$r1 =$	$r2 =$	$r3 =$
$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.01079 \\ 0 \\ -0.00855 \\ -0.00405 \\ 0 \\ -0.0072 \\ 0.0054 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0081 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00405 \\ 0.01079 \\ 0 \\ -0.00405 \\ -0.01079 \\ 0 \\ 0.0054 \\ 0.00945 \\ 0 \\ 0.0054 \\ -0.00945 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.00572 \\ 0 \\ -0.0045 \\ -0.00204 \\ 0 \\ -0.00368 \\ 0.00286 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00409 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00204 \\ 0.00675 \\ 0 \\ -0.00204 \\ -0.00675 \\ 0 \\ 0.00286 \\ 0.00552 \\ 0 \\ 0.00286 \\ -0.00552 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.00164 \\ 0 \\ -0.00123 \\ -0.00041 \\ 0 \\ -0.00082 \\ 0.00082 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00082 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00041 \\ 0.00123 \\ 0 \\ -0.00041 \\ -0.00123 \\ 0 \\ 0.00082 \\ 0.00123 \\ 0 \\ 0.00082 \\ -0.00123 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.00343 \\ 0 \\ -0.00282 \\ -0.00159 \\ 0 \\ -0.0027 \\ 0.00172 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00319 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00159 \\ 0.00282 \\ 0 \\ -0.00159 \\ -0.00282 \\ 0 \\ 0.00172 \\ 0.0027 \\ 0 \\ 0.00172 \\ -0.0027 \end{bmatrix}$

**Reacciones generales**

$f =$	$f1 =$	$f2 =$	$f3 =$
$\begin{bmatrix} 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ -126.684 \\ 0 \\ 0 \\ -63.342 \\ 0 \\ 0 \\ 14.076 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19.19455 \\ 0 \\ 0 \\ -102.37091 \\ 0 \\ 0 \\ -51.18545 \\ 0 \\ 0 \\ 6.39818 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ 28.79182 \\ 0 \\ 0 \\ 28.79182 \\ 0 \\ 0 \\ 28.79182 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.39818 \\ 0 \\ 0 \\ -12.79636 \\ 0 \\ 0 \\ -6.39818 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.39818 \\ 0 \\ 0 \\ 6.39818 \\ 0 \\ 0 \\ 6.39818 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.59727 \\ 0 \\ 0 \\ -11.51673 \\ 0 \\ 0 \\ -5.75836 \\ 0 \\ 0 \\ 7.67782 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Por tanto: la carga última es de 126.68 kN; la deformación previa al agotamiento es de 0.00855m.

### 4.4.3. Modelo 4. Listado ANSYS

```

! ANÁLISIS DE EMPARRILLADO SENCILLO
! (MODELO DE CONTROL 4)
/TITLE, Analisis no lineal emparrillado simple bajo carga puntual
/FILNAM, M-4
!
!
!
! PARAMETROS DEL PROBLEMA
! UNIDADES: m, kN
!
L1=1.00 .....! LUZ DE CADA TRAMO
EIZ=2608 .....! RIGIDEZ TOTAL
MEL=35.19 .....! MOMENTO ÚLTIMO ELÁSTICO
EYOUNG=2E8
IZ=EIZ/EYOUNG
AREAX=0.1*0.35
! CÁLCULO DEL GIRO
TETAREF=MEL*2*L1/(3*EIZ) .....! GIRO DE REFERENCIA
NUMTRAMX=3 .....! NUMERO DE TRAMOS DE LA VIGA EN X
NUMTRAMZ=2 .....! NUMERO DE TRAMOS DE LA VIGA EN Z
!
!
!
! GENERACIÓN DEL MODELO
!
/PREP7
ET,1,BEAM4,,,,,1,
ET,2,COMBIN39,0,0,6,,1
ET,3,COMBIN39,0,0,4,,1
R,1,AREAX,IZ,IZ/2,,,
RMORE,,1E-10
R,2,0,0,TETAREF/100,MEL,100*TETAREF,MEL
MP,EX,1,EYOUNG
MP,NUXY,1,0.3
!
! GENERACIÓN NODOS
*DO,I,0,NUMTRAMX
*DO,J,0,NUMTRAMZ
N,I,*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,L1*I,0,L1*J
N,I,*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2,L1*I,0,L1*J
*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE BARRAS PARALELAS A X
MAT,1
TYPE,1
REAL,1
*DO,J,0,NUMTRAMZ
*DO,I,1,NUMTRAMX
E,(I-1)*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2,(I)*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1
*ENDDO
*ENDDO

```

```
!  
! GENERACIÓN DE BARRAS PARALELAS A z  
MAT,1  
TYPE,1  
REAL,1  
*DO,I,0,NUMTRAMX  
*DO,J,1,NUMTRAMZ  
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*(J-1)*2+2,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1  
*ENDDO  
*ENDDO  
!  
! GENERACIÓN DE MUELLES PARALELOS A X  
TYPE,2  
REAL,2  
*DO,J,0,NUMTRAMZ  
*DO,I,0,NUMTRAMX  
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2  
CP,NEXT,UX,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2  
CP,NEXT,UY,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2  
CP,NEXT,UZ,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2  
*ENDDO  
*ENDDO  
!  
! GENERACIÓN DE MUELLES PARALELOS A z  
TYPE,3  
REAL,2  
*DO,J,0,NUMTRAMZ  
*DO,I,0,NUMTRAMX  
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2  
*ENDDO  
*ENDDO  
!  
NSEL,S,LOC,X,0  
NSEL,A,LOC,Z,0  
NSEL,A,LOC,X,NUMTRAMX*L1  
NSEL,A,LOC,Z,NUMTRAMZ*L1  
!  
IESLN,S,1  
IESEL,R,TYPE,,1  
IEDELE,ALL  
IESEL,ALL  
!  
D,ALL,UY  
NSEL,ALL  
D,1,UX  
D,1,UZ  
ID,ALL,UX  
ID,ALL,UZ  
ID,ALL,ROTX  
ID,ALL,ROTY  
SAVE  
EPLOT  
FINISH  
!  
!  
/SOLU
```

```
ANTYPE,STATIC,NEW
FUERZA=150
TIME,FUERZA
NLGEOM,OFF
SSTIF,OFF
SOLCONTROL,ON
NROPT,FULL
AUTOTS,ON
NSUBST,300
NCNV,2,0.1
EQSLV,SPARSE
OUTRES,ALL,ALL
F,11,FY,-FUERZA
F,13,FY,-FUERZA/2
SOLVE
FINISH
!
!
!
! POSTPROCESO
!
JPEG,QUAL,200
JPEG,ORIENT,Horizontal
JPEG,COLOR,2
JPEG,TMOD,1
/SHOW,JPEG
!
/POST26
TIMERANGE,0,FUERZA-1
NSOL,2,11,U,Y,UY
PROD,2,2,,UY,,,-1,1,1,
DERIV,3,1,2,,EI
XVAR,2
/AXLAB,X,DESPLAZAMIENTO UY (m)
/AXLAB,Y,CARGA APLICADA P (kN)
PLVAR,1
FINISH
/POST1
SET,LAST
SET,PREVIOUS
ETABLE,MXI,SMISC,4
ETABLE,MXJ,SMISC,10
ETABLE,MYI,SMISC,5
ETABLE,MYJ,SMISC,11
ETABLE,MZI,SMISC,6
ETABLE,MZJ,SMISC,12
ETABLE,MMUELLE,SMISC,1
ETABLE,TETAMUELLE,NMISC,1
ETABLE,FXI,SMISC,1
ETABLE,FXJ,SMISC,7
PLLS,MZI,MZJ
!
/SHOW,CLOSE
/SHOW,TERM
FINISH
```

### 4.4.4. Modelo 4. Resumen de resultados de ANSYS

En la figura siguiente se resumen los resultados de ANSYS para este modelo:

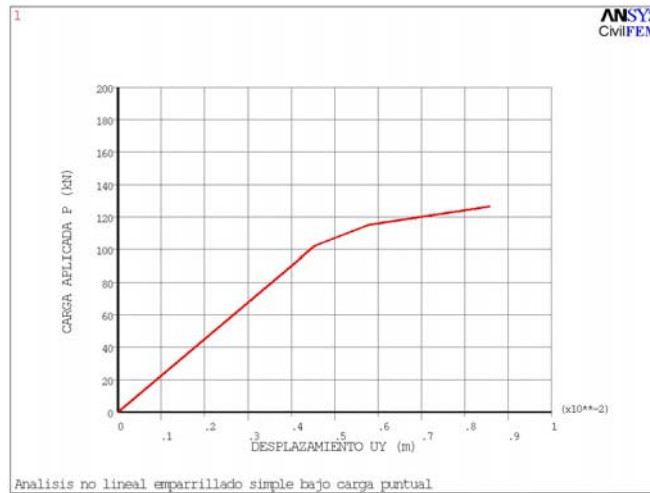


Figura 4.4.7.a: Modelo 4, gráfica carga-desplazamiento

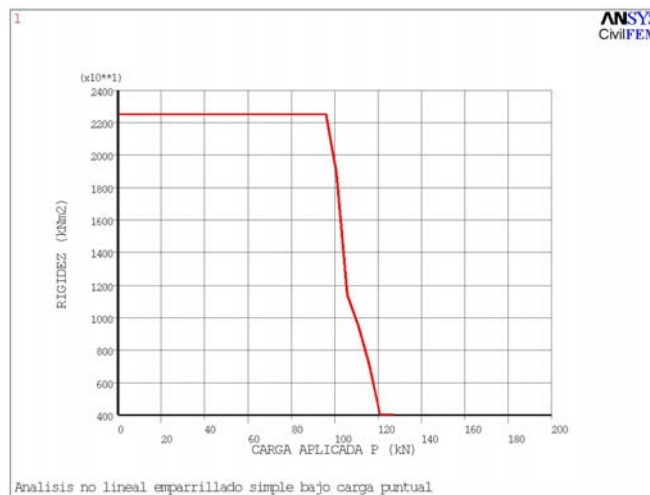


Figura 4.4.7.b: Modelo 4, gráfica rigidez-carga

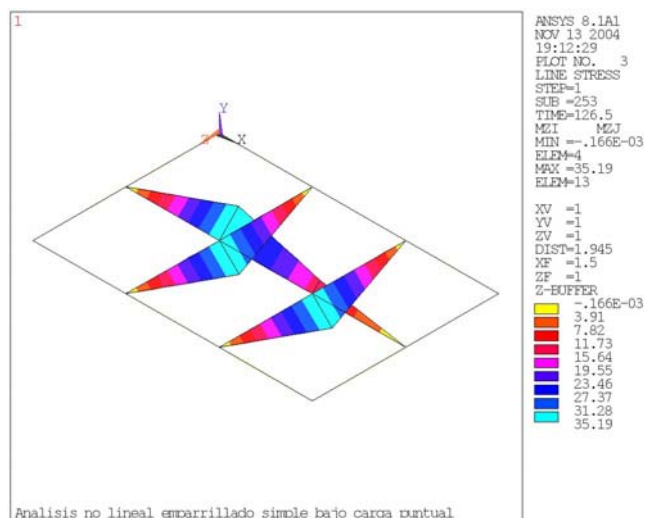


Figura 4.4.7.c: Modelo 4, Momentos en el agotamiento

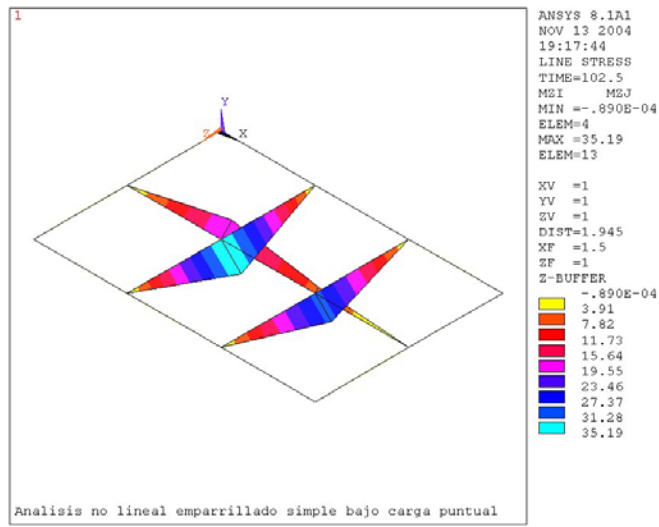


Figura 4.4.7.d: Modelo 4, Momentos en la formación de la primera rótula

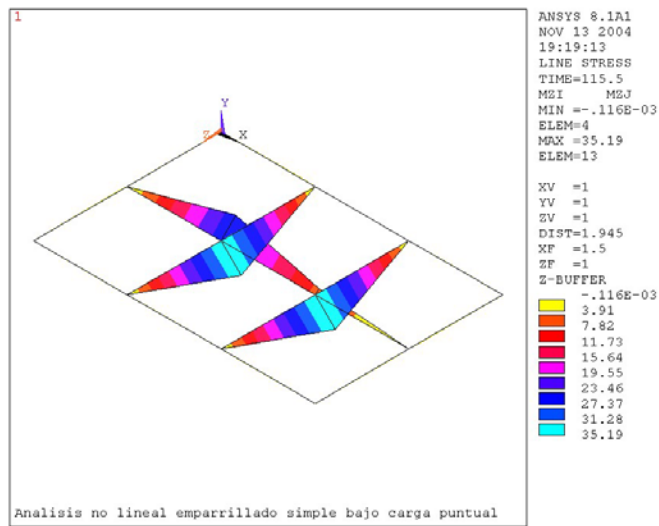


Figura 4.4.7.e: Modelo 4, Momentos en la formación de la segunda rótula

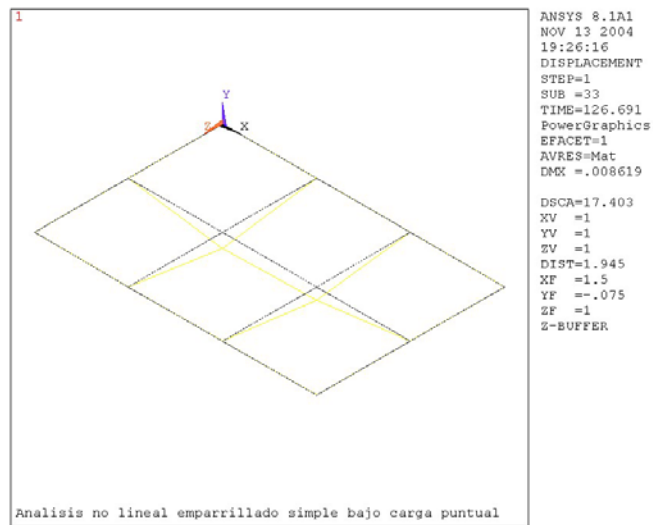


Figura 4.4.7.f: Modelo 4, Desplazamientos en agotamiento

La carga última obtenida es de 126.69 kN. La deformación previa al agotamiento es de 0.008619m.

#### 4.4.5. Modelo 4. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.

Se ofrece a continuación una tabla resumen:

Parámetro	Teoría	ANSYS	% Diferencia
<b>Pu</b>	126.684	126.691	0.01%
<b>d</b>	0.00855	0.008619	0.81%

## 4.5. MODELO 5: EMPARRILLADO ISÓTROPO

### 4.5.1. Modelo 5. Descripción del problema

Se trata de un emparrillado formado por el cruce ortogonal de varias barras, con cargas aplicadas en los nudos, de acuerdo al esquema aportado a continuación.

El material es hormigón armado. La sección es rectangular de 0.10m x 0.35m, y se encuentra armada con una cuantía geométrica inferior constante del 1%.

La rigidez en fase fisurada, calculada en el capítulo 2, es de 2608 kNm<sup>2</sup>. El momento último es de 35.19 kNm.

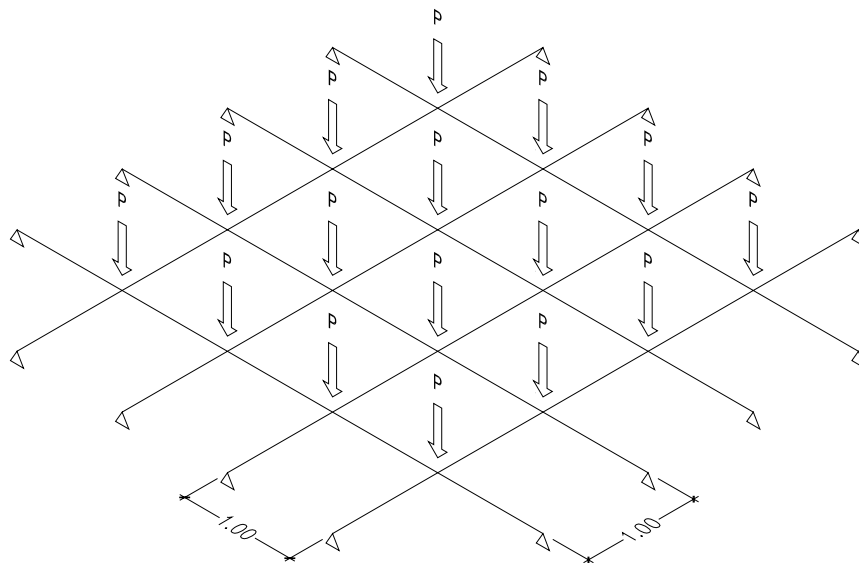


Figura 4.5.1: geometría del problema

### 4.5.2. Modelo 5. Solución teórica

Se empleará en este caso el método matricial, reformulando paso a paso la matriz de rigidez en función de las nuevas articulaciones debidas a la plastificación; se efectúa una reducción por simetría.

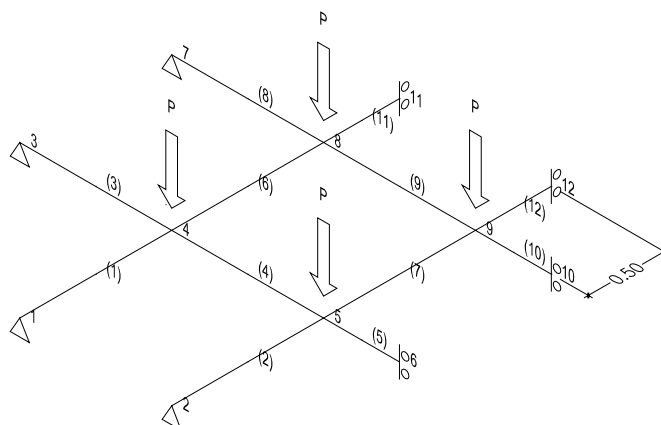


Figura 4.5.2: Geometría simplificada por simetría

**ESTUDIO PASO A PASO, EJEMPLO 5.1**

- s := 1 **m, Longitud de la malla**
- Mu1 := 35.19 **kNm, momento último en dirección 1-4**
- Mu2 := 35.19 **kNm, momento último en dirección 3-4**
- θadm1 := 0.00906 **rad, rotación plástica admisible**
- θadm2 := 0.00906
- EI1 := 2607 **kNm2, rigidez fisurada de un nervio dirección 1-4**
- EI2 := 2607 **ídem 3-4**

**Matrices de rigidez locales**

$$K_{ee}(L, EI) := \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 \\ \frac{6}{L} & 4 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EI \cdot 10000} & 0 & 0 & -\frac{L}{EI \cdot 10000} \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 \\ \frac{6}{L} & 2 & 0 & -\frac{6}{L} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{EI \cdot 10000} & 0 & 0 & \frac{L}{EI \cdot 10000} \end{bmatrix}$$

$$K_{ae}(L, EI) := \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EI \cdot 10000} & 0 & 0 & -\frac{L}{EI \cdot 10000} \\ -\frac{3}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{3}{L} & 0 \\ \frac{3}{L} & 0 & 0 & -\frac{3}{L} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{EI \cdot 10000} & 0 & 0 & \frac{L}{EI \cdot 10000} \end{bmatrix}$$

$$K_{ea}(L, EI) := \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} & 0 & -\frac{3}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{L} & 3 & 0 & -\frac{3}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EI \cdot 10000} & 0 & 0 & -\frac{L}{EI \cdot 10000} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{3}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{EI \cdot 10000} & 0 & 0 & \frac{L}{EI \cdot 10000} \end{bmatrix}$$

**Matrices de cambio de base**

$$L_{00} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{90} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- L1 := L90      L2 := L90      L3 := L00      L4 := L00      L5 := L00
- L6 := L90      L7 := L90      L8 := L00      L9 := L00      L10 := L00
- L11 := L90      L12 := L90

**PASO 1**

$$\begin{aligned}
 K1 &:= \text{Kee}(s, E1) & K2 &:= \text{Kee}(s, E1) & K3 &:= \text{Kee}(s, E2) & K4 &:= \text{Kee}(s, E2) \\
 K5 &:= \text{Kee}\left(\frac{s}{2}, E2\right) & K6 &:= \text{Kee}(s, E1) & K7 &:= \text{Kee}(s, E1) & K8 &:= \text{Kee}(s, E2) \\
 K9 &:= \text{Kee}(s, E2) & K10 &:= \text{Kee}\left(\frac{s}{2}, E2\right) & K11 &:= \text{Kee}\left(\frac{s}{2}, E1\right) & K12 &:= \text{Kee}\left(\frac{s}{2}, E1\right) \\
 K1 &:= L1^T \cdot K1 \cdot L1 & K2 &:= L2^T \cdot K2 \cdot L2 & K3 &:= L3^T \cdot K3 \cdot L3 & K4 &:= L4^T \cdot K4 \cdot L4 \\
 K5 &:= L5^T \cdot K5 \cdot L5 & K6 &:= L6^T \cdot K6 \cdot L6 & K7 &:= L7^T \cdot K7 \cdot L7 & K8 &:= L8^T \cdot K8 \cdot L8 \\
 K9 &:= L9^T \cdot K9 \cdot L9 & K10 &:= L10^T \cdot K10 \cdot L10 & K11 &:= L11^T \cdot K11 \cdot L11 & K12 &:= L12^T \cdot K12 \cdot L12
 \end{aligned}$$

**MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL Y REDUCIDA**

$$\begin{aligned}
 K_{\text{paso1}} &:= I1^T \cdot K1 \cdot I1 + I2^T \cdot K2 \cdot I2 + I3^T \cdot K3 \cdot I3 + I4^T \cdot K4 \cdot I4 + I5^T \cdot K5 \cdot I5 + I6^T \cdot K6 \cdot I6 + I7^T \cdot K7 \cdot I7 + I8^T \cdot K8 \cdot I8 \\
 K_{\text{paso1}} &:= K_{\text{paso1}} + I9^T \cdot K9 \cdot I9 + I10^T \cdot K10 \cdot I10 + I11^T \cdot K11 \cdot I11 + I12^T \cdot K12 \cdot I12 \\
 KR_{\text{paso1}} &:= IL \cdot K_{\text{paso1}} \cdot IL^T & |KR_{\text{paso1}}| &= 1.09601 \cdot 10^{56}
 \end{aligned}$$

**SOLUCIÓN UNITARIA**

$$\begin{aligned}
 j &:= 1 \dots \text{gdInc} \\
 Fr1_j &:= 0 \\
 Fr1_7 &:= -1 & Fr1_{10} &:= -1 & Fr1_{17} &:= -1 & Fr1_{20} &:= -1 \\
 r1 &:= KR_{\text{paso1}}^{-1} \cdot Fr1 & r1 &:= IL^T \cdot r1 & f1 &:= K_{\text{paso1}} \cdot r1 \\
 r &:= r1
 \end{aligned}$$

**SOLICITACIONES UNITARIAS**

$$\begin{aligned}
 f_{pb1} &:= L1 \cdot K1 \cdot I1 \cdot r & f_{pb2} &:= L2 \cdot K2 \cdot I2 \cdot r & f_{pb3} &:= L3 \cdot K3 \cdot I3 \cdot r & f_{pb4} &:= L4 \cdot K4 \cdot I4 \cdot r \\
 f_{pb5} &:= L5 \cdot K5 \cdot I5 \cdot r & f_{pb6} &:= L6 \cdot K6 \cdot I6 \cdot r & f_{pb7} &:= L7 \cdot K7 \cdot I7 \cdot r & f_{pb8} &:= L8 \cdot K8 \cdot I8 \cdot r \\
 f_{pb9} &:= L9 \cdot K9 \cdot I9 \cdot r & f_{pb10} &:= L10 \cdot K10 \cdot I10 \cdot r & f_{pb11} &:= L11 \cdot K11 \cdot I11 \cdot r & f_{pb12} &:= L12 \cdot K12 \cdot I12 \cdot r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\text{barra1nudo4}} &:= f_{pb1}_5 & M_{\text{barra1nudo4}} &= 0.78205 \\
 M_{\text{barra2nudo5}} &:= f_{pb2}_5 & M_{\text{barra2nudo5}} &= 1.21795 \\
 M_{\text{barra6nudo8}} &:= f_{pb6}_5 & M_{\text{barra6nudo8}} &= 1.0641 \\
 M_{\text{barra7nudo9}} &:= f_{pb7}_5 & M_{\text{barra7nudo9}} &= 1.71795 \\
 M_{\text{barra3nudo4}} &:= f_{pb3}_5 & M_{\text{barra3nudo4}} &= 0.78205 \\
 M_{\text{barra4nudo5}} &:= f_{pb4}_5 & M_{\text{barra4nudo5}} &= 1.0641 \\
 M_{\text{barra8nudo8}} &:= f_{pb8}_5 & M_{\text{barra8nudo8}} &= 1.21795 \\
 M_{\text{barra9nudo9}} &:= f_{pb9}_5 & M_{\text{barra9nudo9}} &= 1.71795
 \end{aligned}$$

$$M_{\text{mx1}} := \max((M_{\text{barra1nudo4}} \ M_{\text{barra2nudo5}} \ M_{\text{barra6nudo8}} \ M_{\text{barra7nudo9}})) \quad M_{\text{mx1}} = 1.71795$$

$$M_{\text{mx2}} := \max((M_{\text{barra3nudo4}} \ M_{\text{barra4nudo5}} \ M_{\text{barra8nudo8}} \ M_{\text{barra9nudo9}})) \quad M_{\text{mx2}} = 1.71795$$

$$\lambda_1 := \frac{Mu1}{M_{\text{mx1}}} \quad \lambda_1 = 20.48373$$

$$\lambda_2 := \frac{Mu2}{M_{\text{mx2}}} \quad \lambda_2 = 20.48373$$

$$\lambda := \min((\lambda_1 \ \lambda_2)) \quad P1 := \lambda \cdot 1 \quad P1 = 20.48373$$

**SOLUCIÓN PASO 1**

$Fr1 := \lambda \cdot Fr1$

$rr1 := KR_{paso1}^{-1} \cdot Fr1$

$r1 := IL^T \cdot rr1$

$f1 := K_{paso1} \cdot r1$

$r := r1$

**SOLICITACIONES PASO 1**

$fpb1 := L1 \cdot K1 \cdot I1 \cdot r$

$fpb2 := L2 \cdot K2 \cdot I2 \cdot r$

$fpb3 := L3 \cdot K3 \cdot I3 \cdot r$

$fpb4 := L4 \cdot K4 \cdot I4 \cdot r$

$fpb5 := L5 \cdot K5 \cdot I5 \cdot r$

$fpb6 := L6 \cdot K6 \cdot I6 \cdot r$

$fpb7 := L7 \cdot K7 \cdot I7 \cdot r$

$fpb8 := L8 \cdot K8 \cdot I8 \cdot r$

$fpb9 := L9 \cdot K9 \cdot I9 \cdot r$

$fpb10 := L10 \cdot K10 \cdot I10 \cdot r$

$fpb11 := L11 \cdot K11 \cdot I11 \cdot r$

$fpb12 := L12 \cdot K12 \cdot I12 \cdot r$

$Mbarra1nudo4p1 := fpb1_5$

$Mbarra1nudo4p1 = 16.01933$

$Mbarra2nudo5p1 := fpb2_5$

$Mbarra2nudo5p1 = 24.94813$

$Mbarra6nudo8p1 := fpb6_5$

$Mbarra6nudo8p1 = 21.79679$

$Mbarra7nudo9p1 := fpb7_5$

$Mbarra7nudo9p1 = 35.19$

$Mbarra3nudo4p1 := fpb3_5$

$Mbarra3nudo4p1 = 16.01933$

$Mbarra4nudo5p1 := fpb4_5$

$Mbarra4nudo5p1 = 21.79679$

$Mbarra8nudo8p1 := fpb8_5$

$Mbarra8nudo8p1 = 24.94813$

$Mbarra9nudo9p1 := fpb9_5$

$Mbarra9nudo9p1 = 35.19$

$Mbarra1nudo4pa := fpb1_5$

$Mbarra1nudo4pa = 16.01933$

$Mbarra2nudo5pa := fpb2_5$

$Mbarra2nudo5pa = 24.94813$

$Mbarra6nudo8pa := fpb6_5$

$Mbarra6nudo8pa = 21.79679$

$Mbarra7nudo9pa := fpb7_5$

$Mbarra7nudo9pa = 35.19$

$Mbarra3nudo4pa := fpb3_5$

$Mbarra3nudo4pa = 16.01933$

$Mbarra4nudo5pa := fpb4_5$

$Mbarra4nudo5pa = 21.79679$

$Mbarra8nudo8pa := fpb8_5$

$Mbarra8nudo8pa = 24.94813$

$Mbarra9nudo9pa := fpb9_5$

$Mbarra9nudo9pa = 35.19$

$\theta99a := 0$

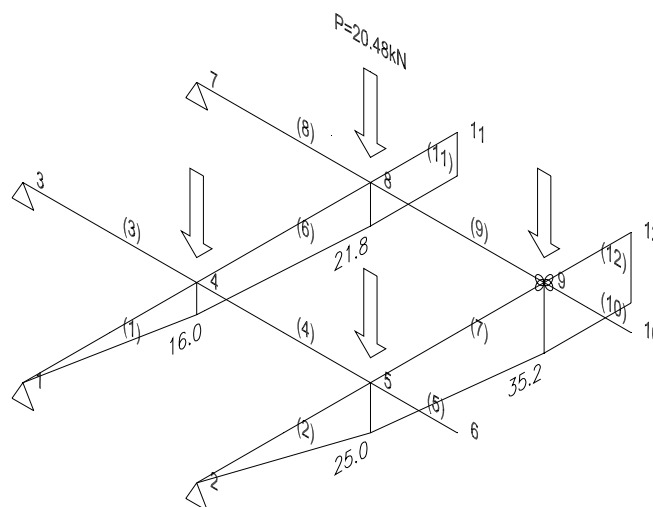


Figura 4.5.3. Momentos flectores después del paso 1. Las secciones plastificadas se marcan con un círculo.

**PASO 2**

$$\begin{aligned}
 K1 &:= \text{Kee}(s, EI1) & K2 &:= \text{Kee}(s, EI1) & K3 &:= \text{Kee}(s, EI2) & K4 &:= \text{Kee}(s, EI2) \\
 K5 &:= \text{Kee}\left(\frac{s}{2}, EI2\right) & K6 &:= \text{Kee}(s, EI1) & K7 &:= \text{Kee}(s, EI1) & K8 &:= \text{Kee}(s, EI2) \\
 K9 &:= \text{Kee}(s, EI2) & K10 &:= \text{Kee}\left(\frac{s}{2}, EI2\right) & K11 &:= \text{Kee}\left(\frac{s}{2}, EI1\right) & K12 &:= \text{Kee}\left(\frac{s}{2}, EI1\right) \\
 K1 &:= L1^T \cdot K1 \cdot L1 & K2 &:= L2^T \cdot K2 \cdot L2 & K3 &:= L3^T \cdot K3 \cdot L3 & K4 &:= L4^T \cdot K4 \cdot L4 \\
 K5 &:= L5^T \cdot K5 \cdot L5 & K6 &:= L6^T \cdot K6 \cdot L6 & K7 &:= L7^T \cdot K7 \cdot L7 & K8 &:= L8^T \cdot K8 \cdot L8 \\
 K9 &:= L9^T \cdot K9 \cdot L9 & K10 &:= L10^T \cdot K10 \cdot L10 & K11 &:= L11^T \cdot K11 \cdot L11 & K12 &:= L12^T \cdot K12 \cdot L12
 \end{aligned}$$

**MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL Y REDUCIDA**

$$\begin{aligned}
 K_{\text{paso2}} &:= I1^T \cdot K1 \cdot I1 + I2^T \cdot K2 \cdot I2 + I3^T \cdot K3 \cdot I3 + I4^T \cdot K4 \cdot I4 + I5^T \cdot K5 \cdot I5 + I6^T \cdot K6 \cdot I6 + I7^T \cdot K7 \cdot I7 + I8^T \cdot K8 \cdot I8 \\
 K_{\text{paso2}} &:= K_{\text{paso2}} + I9^T \cdot K9 \cdot I9 + I10^T \cdot K10 \cdot I10 + I11^T \cdot K11 \cdot I11 + I12^T \cdot K12 \cdot I12 \\
 KR_{\text{paso2}} &:= IL \cdot K_{\text{paso2}} \cdot IL^T & |KR_{\text{paso2}}| &= 2.35414 \cdot 10^{37}
 \end{aligned}$$

**MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL Y REDUCIDA**

$$\begin{aligned}
 K_{\text{paso2}} &:= I1^T \cdot K1 \cdot I1 + I2^T \cdot K2 \cdot I2 + I3^T \cdot K3 \cdot I3 + I4^T \cdot K4 \cdot I4 + I5^T \cdot K5 \cdot I5 + I6^T \cdot K6 \cdot I6 + I7^T \cdot K7 \cdot I7 + I8^T \cdot K8 \cdot I8 \\
 K_{\text{paso2}} &:= K_{\text{paso2}} + I9^T \cdot K9 \cdot I9 + I10^T \cdot K10 \cdot I10 + I11^T \cdot K11 \cdot I11 + I12^T \cdot K12 \cdot I12 \\
 KR_{\text{paso2}} &:= IL \cdot K_{\text{paso2}} \cdot IL^T & |KR_{\text{paso2}}| &= 2.35414 \cdot 10^{37}
 \end{aligned}$$

**SOLUCIÓN UNITARIA**

$$\begin{aligned}
 j &:= 1 \dots \text{gdlnc} \\
 Fr2_j &:= 0 \\
 Fr2_7 &:= -1 & Fr2_{10} &:= -1 & Fr2_{17} &:= -1 & Fr2_{20} &:= -1 \\
 r2 &:= KR_{\text{paso2}}^{-1} \cdot Fr2 & r2 &:= IL^T \cdot r2 & f2 &:= K_{\text{paso2}} \cdot r2 \\
 r &:= r2
 \end{aligned}$$

**SOLICITACIONES UNITARIAS**

$$\begin{aligned}
 f_{pb1} &:= L1 \cdot K1 \cdot I1 \cdot r & f_{pb2} &:= L2 \cdot K2 \cdot I2 \cdot r & f_{pb3} &:= L3 \cdot K3 \cdot I3 \cdot r & f_{pb4} &:= L4 \cdot K4 \cdot I4 \cdot r \\
 f_{pb5} &:= L5 \cdot K5 \cdot I5 \cdot r & f_{pb6} &:= L6 \cdot K6 \cdot I6 \cdot r & f_{pb7} &:= L7 \cdot K7 \cdot I7 \cdot r & f_{pb8} &:= L8 \cdot K8 \cdot I8 \cdot r \\
 f_{pb9} &:= L9 \cdot K9 \cdot I9 \cdot r & f_{pb10} &:= L10 \cdot K10 \cdot I10 \cdot r & f_{pb11} &:= L11 \cdot K11 \cdot I11 \cdot r & f_{pb12} &:= L12 \cdot K12 \cdot I12 \cdot r \\
 M_{\text{barra1nudo4}} &:= f_{pb1}_5 & M_{\text{barra1nudo4}} &= 2.5 \\
 M_{\text{barra2nudo5}} &:= f_{pb2}_5 & M_{\text{barra2nudo5}} &= -0.5 \\
 M_{\text{barra6nudo8}} &:= f_{pb6}_5 & M_{\text{barra6nudo8}} &= 4.5 \\
 M_{\text{barra7nudo9}} &:= f_{pb7}_5 & M_{\text{barra7nudo9}} &= 0 \\
 M_{\text{barra3nudo4}} &:= f_{pb3}_5 & M_{\text{barra3nudo4}} &= 2.5 \\
 M_{\text{barra4nudo5}} &:= f_{pb4}_5 & M_{\text{barra4nudo5}} &= 4.5 \\
 M_{\text{barra8nudo8}} &:= f_{pb8}_5 & M_{\text{barra8nudo8}} &= -0.5 \\
 M_{\text{barra9nudo9}} &:= f_{pb9}_5 & M_{\text{barra9nudo9}} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\lambda_{14} := \frac{\text{Mu1} - \text{Mbarra1nudo4pa}}{\text{Mbarra1nudo4}} \quad \lambda_{14} := \lambda_{14} + (\lambda_{14} < 0) \cdot 10^1 \quad \lambda_{14} = 7.66827$$

$$\lambda_{25} := \frac{\text{Mu1} - \text{Mbarra2nudo5pa}}{\text{Mbarra2nudo5}} \quad \lambda_{25} := \lambda_{25} + (\lambda_{25} < 0) \cdot 10^1 \quad \lambda_{25} = 9999999979.51626$$

$$\lambda_{68} := \frac{\text{Mu1} - \text{Mbarra6nudo8pa}}{\text{Mbarra6nudo8}} \quad \lambda_{68} := \lambda_{68} + (\lambda_{68} < 0) \cdot 10^1 \quad \lambda_{68} = 2.97627$$
  

$$\lambda_{34} := \frac{\text{Mu2} - \text{Mbarra3nudo4pa}}{\text{Mbarra3nudo4}} \quad \lambda_{34} := \lambda_{34} + (\lambda_{34} < 0) \cdot 10^1 \quad \lambda_{34} = 7.66827$$

$$\lambda_{45} := \frac{\text{Mu2} - \text{Mbarra4nudo5pa}}{\text{Mbarra4nudo5}} \quad \lambda_{45} := \lambda_{45} + (\lambda_{45} < 0) \cdot 10^1 \quad \lambda_{45} = 2.97627$$

$$\lambda_{88} := \frac{\text{Mu2} - \text{Mbarra8nudo8pa}}{\text{Mbarra8nudo8}} \quad \lambda_{88} := \lambda_{88} + (\lambda_{88} < 0) \cdot 10^1 \quad \lambda_{88} = 9999999979.51626$$
  

$$\lambda_1 := \min((\lambda_{14} \ \lambda_{25} \ \lambda_{68}))$$

$$\lambda_2 := \min((\lambda_{34} \ \lambda_{45} \ \lambda_{88}))$$
  

$$\lambda_1 = 2.97627$$

$$\lambda_2 = 2.97627$$
  

$$\lambda := \min((\lambda_1 \ \lambda_2)) \quad P2 := \lambda \cdot 1 \quad P2 = 2.97627$$

$$\text{Fr2} := \text{Fr2} \cdot P2$$

$$\text{rr2} := \text{KR} \cdot \text{paso2}^{-1} \cdot \text{Fr2} \quad \text{r2} := \text{IL}^T \cdot \text{rr2} \quad \text{f2} := \text{K} \cdot \text{paso2} \cdot \text{r2}$$

$$\text{r} := \text{r2}$$

**SOLICITACIONES**

$$\begin{aligned} \text{fpb1} &:= \text{L1} \cdot \text{K1} \cdot \text{I1} \cdot \text{r} & \text{fpb2} &:= \text{L2} \cdot \text{K2} \cdot \text{I2} \cdot \text{r} & \text{fpb3} &:= \text{L3} \cdot \text{K3} \cdot \text{I3} \cdot \text{r} & \text{fpb4} &:= \text{L4} \cdot \text{K4} \cdot \text{I4} \cdot \text{r} \\ \text{fpb5} &:= \text{L5} \cdot \text{K5} \cdot \text{I5} \cdot \text{r} & \text{fpb6} &:= \text{L6} \cdot \text{K6} \cdot \text{I6} \cdot \text{r} & \text{fpb7} &:= \text{L7} \cdot \text{K7} \cdot \text{I7} \cdot \text{r} & \text{fpb8} &:= \text{L8} \cdot \text{K8} \cdot \text{I8} \cdot \text{r} \\ \text{fpb9} &:= \text{L9} \cdot \text{K9} \cdot \text{I9} \cdot \text{r} & \text{fpb10} &:= \text{L10} \cdot \text{K10} \cdot \text{I10} \cdot \text{r} & \text{fpb11} &:= \text{L11} \cdot \text{K11} \cdot \text{I11} \cdot \text{r} & \text{fpb12} &:= \text{L12} \cdot \text{K12} \cdot \text{I12} \cdot \text{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mbarra1nudo4} &:= \text{fpb1}_5 & \text{Mbarra1nudo4} &= 7.44067 \\ \text{Mbarra2nudo5} &:= \text{fpb2}_5 & \text{Mbarra2nudo5} &= -1.48813 \\ \text{Mbarra6nudo8} &:= \text{fpb6}_5 & \text{Mbarra6nudo8} &= 13.39321 \\ \text{Mbarra7nudo9} &:= \text{fpb7}_5 & \text{Mbarra7nudo9} &= 0 \\ \\ \text{Mbarra3nudo4} &:= \text{fpb3}_5 & \text{Mbarra3nudo4} &= 7.44067 \\ \text{Mbarra4nudo5} &:= \text{fpb4}_5 & \text{Mbarra4nudo5} &= 13.39321 \\ \text{Mbarra8nudo8} &:= \text{fpb8}_5 & \text{Mbarra8nudo8} &= -1.48813 \\ \text{Mbarra9nudo9} &:= \text{fpb9}_5 & \text{Mbarra9nudo9} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mbarra1nudo4pa} &:= \text{Mbarra1nudo4pa} + \text{Mbarra1nudo4} & \text{Mbarra1nudo4pa} &= 23.46 \\ \text{Mbarra2nudo5pa} &:= \text{Mbarra2nudo5pa} + \text{Mbarra2nudo5} & \text{Mbarra2nudo5pa} &= 23.46 \\ \text{Mbarra6nudo8pa} &:= \text{Mbarra6nudo8pa} + \text{Mbarra6nudo8} & \text{Mbarra6nudo8pa} &= 35.19 \\ \text{Mbarra7nudo9pa} &:= \text{Mbarra7nudo9pa} + \text{Mbarra7nudo9} & \text{Mbarra7nudo9pa} &= 35.19 \\ \\ \text{Mbarra3nudo4pa} &:= \text{Mbarra3nudo4pa} + \text{Mbarra3nudo4} & \text{Mbarra3nudo4pa} &= 23.46 \\ \text{Mbarra4nudo5pa} &:= \text{Mbarra4nudo5pa} + \text{Mbarra4nudo5} & \text{Mbarra4nudo5pa} &= 35.19 \\ \text{Mbarra8nudo8pa} &:= \text{Mbarra8nudo8pa} + \text{Mbarra8nudo8} & \text{Mbarra8nudo8pa} &= 23.46 \\ \text{Mbarra9nudo9pa} &:= \text{Mbarra9nudo9pa} + \text{Mbarra9nudo9} & \text{Mbarra9nudo9pa} &= 35.19 \end{aligned}$$

$$\theta_{99} := 0.99a + \left| \frac{(I_9 \cdot r)_4 - (I_9 \cdot r)_1}{s} - \frac{(I_{10} \cdot r)_4 - (I_{10} \cdot r)_1}{s} \right| \quad \theta_{99} = 0.01265$$

fallaporductilidad := (0.99 > 0. adm2) · 1

fallaporductilidad = 1

$$P2b := P2 \cdot \frac{0. adm2 - 0.99a}{0.99 - 0.99a} \quad P2b = 2.13108$$

P2b := P2b · (P2b ≥ 0)      P2b = 2.13108

Pductil := P1 + P2b

Pductil = 22.61481

0.99a := 0.99

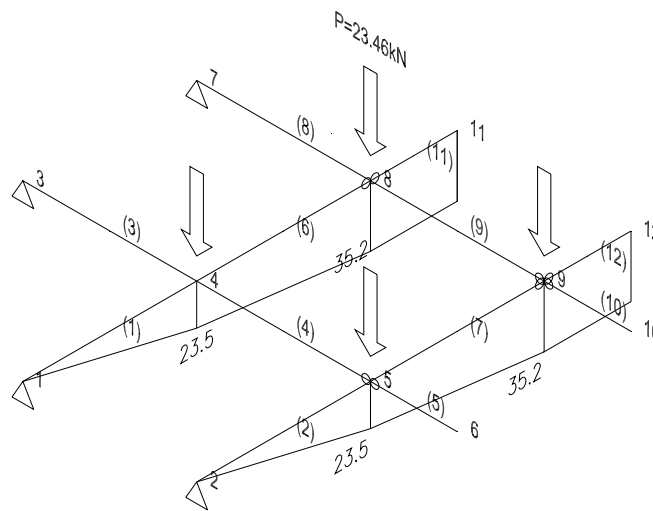


Figura 4.5.4: Momentos flectores después del paso 2. Las secciones plastificadas se marcan con un círculo.

**PASO 3**

K1 := Kee(s, E1)      K2 := Kee(s, E1)      K3 := Kee(s, E12)      K4 := Kea(s, E12)

K5 := Kae( $\frac{s}{2}$ , E12)      K6 := Kea(s, E1)      K7 := Kea(s, E1)      K8 := Kee(s, E12)

K9 := Kea(s, E12)      K10 := Kae( $\frac{s}{2}$ , E12)      K11 := Kae( $\frac{s}{2}$ , E1)      K12 := Kae( $\frac{s}{2}$ , E1)

K1 := L1<sup>T</sup> · K1 · L1      K2 := L2<sup>T</sup> · K2 · L2      K3 := L3<sup>T</sup> · K3 · L3      K4 := L4<sup>T</sup> · K4 · L4

K5 := L5<sup>T</sup> · K5 · L5      K6 := L6<sup>T</sup> · K6 · L6      K7 := L7<sup>T</sup> · K7 · L7      K8 := L8<sup>T</sup> · K8 · L8

K9 := L9<sup>T</sup> · K9 · L9      K10 := L10<sup>T</sup> · K10 · L10      K11 := L11<sup>T</sup> · K11 · L11      K12 := L12<sup>T</sup> · K12 · L12

**MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL Y REDUCIDA**

Kpaso3 := I1<sup>T</sup> · K1 · I1 + I2<sup>T</sup> · K2 · I2 + I3<sup>T</sup> · K3 · I3 + I4<sup>T</sup> · K4 · I4 + I5<sup>T</sup> · K5 · I5 + I6<sup>T</sup> · K6 · I6 + I7<sup>T</sup> · K7 · I7 + I8<sup>T</sup> · K8 · I8

Kpaso3 := Kpaso3 + I9<sup>T</sup> · K9 · I9 + I10<sup>T</sup> · K10 · I10 + I11<sup>T</sup> · K11 · I11 + I12<sup>T</sup> · K12 · I12

KRpaso3 := IL · Kpaso3 · IL<sup>T</sup>      |KRpaso3| = 0

**RESUMEN FINAL****Cargas**

$$P := P1 + P2$$

$$P1 = 20.48373$$

$$P2 = 2.97627$$

$$P = 23.46$$

$$P_{ductil} = 22.61481$$

$$\frac{P_{ductil}}{P} = 0.96397$$

$$r = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.018 \\ 0.0225 \\ 0 \\ -0.00675 \\ 0.03525 \\ 0 \\ -0.0225 \\ 0.018 \\ -0.021 \\ -0.018 \\ 0.018 \\ -0.03375 \\ -0.00675 \\ 0.03075 \\ -0.03543 \\ 0 \\ 0.03075 \\ 0 \\ -0.03525 \\ 0.00675 \\ -0.03375 \\ -0.03075 \\ 0.00675 \\ -0.05924 \\ -0.00932 \\ 0.00932 \\ -0.06093 \\ 0 \\ 0.00932 \\ -0.03543 \\ -0.03075 \\ 0 \\ -0.06093 \\ -0.00932 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 23.46 \\ 0 \\ 0 \\ 23.46 \\ 0 \\ 0 \\ 23.46 \\ 0 \\ 0 \\ -23.46 \\ 0 \\ 0 \\ -23.46 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 23.46 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -23.46 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35.19 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -35.19 \\ 0 \\ 0 \\ -35.19 \end{bmatrix}$$

La carga calculada es de 23.46 kN. El desplazamiento máximo de 0.05924m.

### 4.5.3. Modelo 5. Listado ANSYS

! ANÁLISIS DE EMPARRILLADO

! (MODELO DE CONTROL 5)

/TITLE, Analisis no lineal emparrillado simple bajo carga puntual

/FILNAM, M-5

!

!

! PARAMETROS DEL PROBLEMA

! UNIDADES: m, kN

!

L1=1.00 .....! LUZ DE CADA TRAMO

EYOUNG=2E8

! SECCIONES PARALELAS A X-X

EIZX=2608 .....! RIGIDEZ TOTAL

MELX=35.19 .....! MOMENTO ÚLTIMO ELÁSTICO

IZX=EIZX/EYOUNG

AREAX=0.1\*0.35

! CÁLCULO DEL GIRO

TETAREFX=2\*L1/(3\*EIZX) .....! GIRO DE REFERENCIA

! SECCIONES PARALELAS A Z-Z

EIZZ=2608 .....! RIGIDEZ TOTAL

MELZ=35.19 .....! MOMENTO ÚLTIMO ELÁSTICO

IZZ=EIZZ/EYOUNG

AREAZ=0.1\*0.35

! CÁLCULO DEL GIRO

TETAREFZ=2\*L1/(3\*EIZZ) .....! GIRO DE REFERENCIA

NUMTRAMX=5 .....! NUMERO DE TRAMOS DE LA VIGA EN X

NUMTRAMZ=5 .....! NUMERO DE TRAMOS DE LA VIGA EN Z

!

!

!

! GENERACIÓN DEL MODELO

!

/PREP7

ET,1,BEAM4,,,,,1,

ET,2,COMBIN39,0,0,6,,1

ET,3,COMBIN39,0,0,4,,1

R,1,AREAX,IZX,IZX/2,,,,

RMORE,,1E-10

R,2,AREAZ,IZZ,IZZ/2,,,,

RMORE,,1E-10

R,3,0,0,TETAREFX/1000,MELX,100\*TETAREFX,MELX

R,4,0,0,TETAREFZ/1000,MELZ,100\*TETAREFZ,MELZ

!RMORE,100000\*TETAEL,MPL

MP,EX,1,EYOUNG

MP,NUXY,1,0.3

!

! GENERACIÓN NODOS

\*DO,I,0,NUMTRAMX

\*DO,J,0,NUMTRAMZ

N,I,\*2+(NUMTRAMX+1)\*J\*2+1,L1\*I,0,L1\*J

N,I,\*2+(NUMTRAMX+1)\*J\*2+2,L1\*I,0,L1\*J

```

*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE BARRAS PARALELAS A X
MAT,1
TYPE,1
REAL,1
*DO,J,0,NUMTRAMZ
*DO,I,1,NUMTRAMX
E,(I-1)*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2,(I)*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1
*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE BARRAS PARALELAS A z
MAT,1
TYPE,1
REAL,2
*DO,I,0,NUMTRAMX
*DO,J,1,NUMTRAMZ
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*(J-1)*2+2,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1
*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE MUELLES PARALELOS A X
TYPE,2
REAL,3
*DO,J,0,NUMTRAMZ
*DO,I,0,NUMTRAMX
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
CP,NEXT,UX,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
CP,NEXT,UY,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
CP,NEXT,UZ,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
*ENDDO
*ENDDO
!
! GENERACIÓN DE MUELLES PARALELOS A z
TYPE,3
REAL,4
*DO,J,0,NUMTRAMZ
*DO,I,0,NUMTRAMX
E,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+1,I*2+(NUMTRAMX+1)*J*2+2
*ENDDO
*ENDDO
!
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,A,LOC,Z,0
NSEL,A,LOC,X,NUMTRAMX*L1
NSEL,A,LOC,Z,NUMTRAMZ*L1
!
IESLN,S,1
IESEL,R,TYPE,,1
IEDELE,ALL
IESEL,ALL
!
D,ALL,UY
NSEL,ALL

```

```
D,1,UX
D,1,UZ
!D,ALL,UX
!D,ALL,UZ
!D,ALL,ROTX
!D,ALL,ROTY
SAVE
EPlot
FINISH
!
!
/SOLU
ANTYPE,STATIC,NEW
FUERZA=30
TIME,FUERZA
NLGEOM,OFF
SSTIF,OFF
SOLCONTROL,ON
NROPT,FULL
AUTOTS,ON
NSUBST,300
NCNV,2,0.10
EQSLV,SPARSE
OUTRES,ALL,ALL
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,A,LOC,Z,0
NSEL,A,LOC,X,NUMTRAMX*L1
NSEL,A,LOC,Z,NUMTRAMZ*L1
NSEL,INVE
F,ALL,FY,-FUERZA/2 .....! SELECCIONANDO DOS NUDOS POR CADA PUNTO DE LA MALLA!!!
ALLSEL
SOLVE
FINISH
!
!
! POSTPROCESO
!
JPEG,QUAL,200
JPEG,ORIENT,Horizontal
JPEG,COLOR,2
JPEG,TMOD,1
/SHOW,JPEG
!
/POST26
TIMERANGE,0,FUERZA-1
NSOL,2,29,U,Y,UY
PROD,2,2,,UY,,,-1,1,1,
DERIV,3,1,2,,EI
XVAR,2
/AXLAB,X,DESPLAZAMIENTO UY (m)
/AXLAB,Y,CARGA APLICADA P (kN)
PLVAR,1
XVAR,1
/AXLAB,X,CARGA APLICADA P (kN)
/AXLAB,Y,RIGIDEZ (kNm2)
PLVAR,3
```

```
FINISH
!  
/POST1  
/VIEW,1,1,1,1  
SET,LAST  
SET,PREVIOUS  
ETABLE,MXI,SMISC,4  
ETABLE,MXJ,SMISC,10  
ETABLE,MYI,SMISC,5  
ETABLE,MYJ,SMISC,11  
ETABLE,MZI,SMISC,6  
ETABLE,MZJ,SMISC,12  
ETABLE,MMUELLE,SMISC,1  
ETABLE,TETAMUELLE,NMISC,1  
ETABLE,FXI,SMISC,1  
ETABLE,FXJ,SMISC,7  
PLLS,MZI,MZJ  
!  
/SHOW,CLOSE  
/SHOW,TERM  
FINISH
```

#### 4.5.4. Modelo 5. Resumen de resultados de ANSYS

En la figura siguiente se resumen los resultados de ANSYS para este modelo:

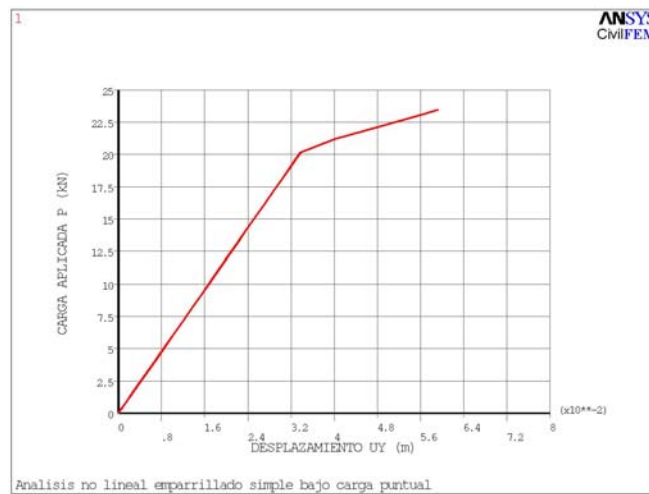


Figura 4.5.5.a: Modelo 5, gráfica carga-desplazamiento.

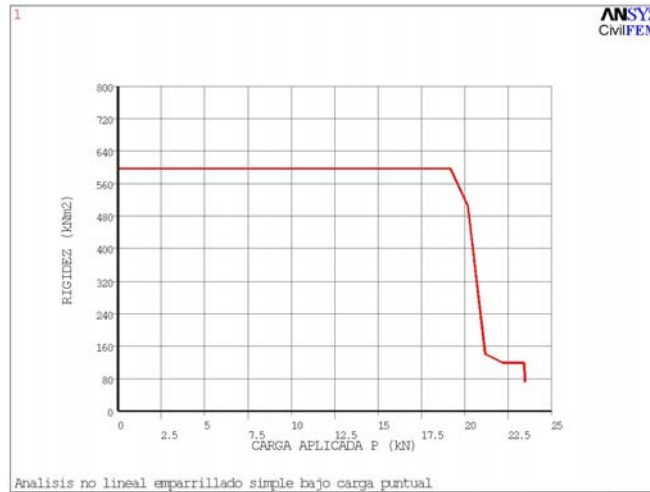


Figura 4.5.5.b: Modelo 5, gráfica rigidez-carga.

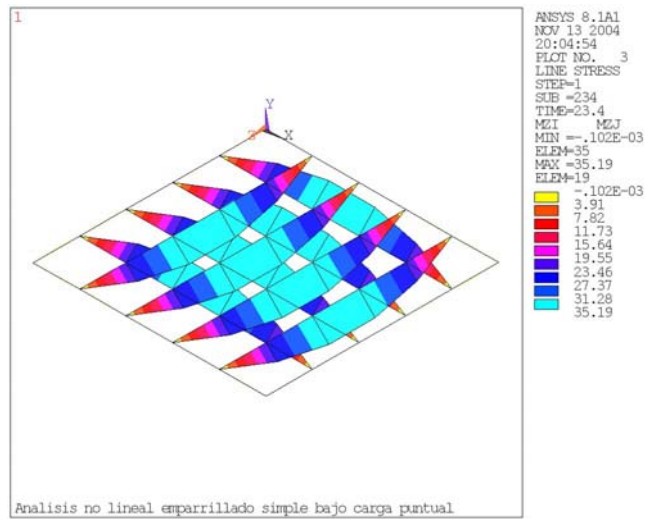


Figura 4.5.5.c: Modelo 5, Momentos en el agotamiento.

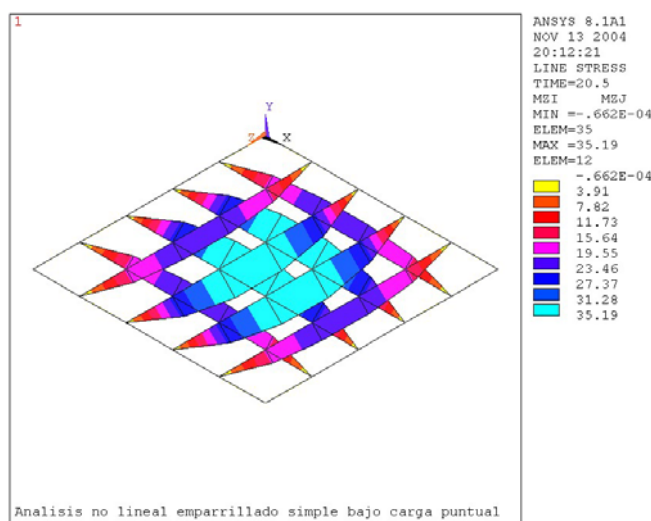


Figura 4.5.5.d: Modelo 5, Momentos en la formación de la primera rótula.

La carga última obtenida es de 23.4633kN. La deformación previa al agotamiento es de 0.0592684m.

#### 4.5.5. Modelo 5. Comparación entre solución teórica y solución ANSYS.

Se ofrece a continuación una tabla resumen:

Parámetro	Teoría	ANSYS	% Diferencia
Pu	23.46	23.4633	0.01%
D	0.05924	0.05927	0.05%

## 4.6. REFERENCIAS

4.1. ANSYS 8.1 *User's Manual*, SAS IP INC, 2004.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un procedimiento para abordar el análisis no lineal en agotamiento de emparrillados de hormigón armado con cuantía conocida mediante el programa ANSYS.

El procedimiento es el siguiente:

- Obtención de los diagramas momento-curvatura de las piezas (mediante una aplicación externa o posiblemente una macro APDL). Habitualmente será suficiente con caracterizar las piezas mediante su rigidez fisurada y su momento último, empleándose un diagrama bilineal.
- Definición de las barras del emparrillado mediante vigas con rigidez igual a la fisurada de la pieza.
- Modelización de las rótulas plásticas mediante muelles no lineales con rigidez muy elevada ante momentos inferiores a los de plastificación, y rigidez nula ante momentos iguales a los de plastificación (diagrama bilineal).
- Aplicación de las cargas en los nudos del emparrillado, tomando una de las cargas como carga patrón, y expresando el resto como fracciones de la misma.
- Análisis no lineal con control de las deformaciones; el tiempo será igual a la carga patrón.
- Revisión de los resultados mediante POST26, dibujando las gráficas carga-desplazamiento de los nodos significativos, y las curvas de evolución de la rigidez ante la carga.
- Revisión de los resultados mediante POST1, grafiando las solicitaciones en distintas etapas de formación de rótulas plásticas hasta alcanzar el colapso.

El procedimiento se ha verificado con cinco modelos sencillos cuya solución teórica es conocida. En todos los casos la concordancia entre la solución de ANSYS y la teórica es excelente.

El procedimiento permite, partiendo de un armado estimado, conocer la carga de colapso de un emparrillado; por tanto permite definir un coeficiente de seguridad real para el mismo, calculado como el cociente entre la carga de colapso y la carga de servicio.

Además, el procedimiento permite un seguimiento de las deformaciones en el emparrillado a medida que éste alcanza el colapso. Puesto que se trabaja con rigideces fisuradas, se sobreestima levemente la rigidez del emparrillado; el valor obtenido de deformación será siempre una cota superior de la real y por tanto segura.