

Respuesta sísmica de suelos estratificados en régimen no lineal (*)

Por CARLOS MIRAGALL
y AVELINO SAMARTIN

Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

La importancia que presenta la respuesta del suelo sobre el que se ubica una estructura ante un posible movimiento sísmico, así como la interacción suelo-estructura en terrenos blandos, son cuestiones que adquieren especial relevancia en el diseño de obras especiales como son las centrales nucleares. Ello exige un conocimiento previo de las características de amplificación del suelo, al cual se dedica este artículo.

1. EL PROBLEMA DE LA AMPLIFICACION DEL SUELO

1.1. Introducción

Es bien conocida la importancia del suelo inmediatamente cercano a una estructura en la modificación de las características de un posible movimiento sísmico actuante (amplificación dinámica). En el caso de estructuras singulares o terrenos excesivamente blandos, aparece otro problema conectado estrechamente con el anterior y que se denomina interacción suelo-estructura. Evidentemente la resolución de este último problema incluye el primero y frecuentemente exige el conocimiento previo de las características de la amplificación del suelo.

En este artículo se va a tratar exclusivamente del análisis de la amplificación dinámica o estudio de la respuesta del emplazamiento (site response problem), sin embargo, se comprobará que algunos de los resultados aquí alcanzados pueden extenderse sin dificultad a un análisis de interacción suelo-estructura.

1.2. Planteamiento del problema

El estudio de la amplificación del suelo supone el conocimiento de la distribución temporal y espacial de los movimientos sísmicos dentro del volumen del suelo en el entorno del emplazamiento.

Teóricamente estos movimientos podrían ser deducidos del análisis de un modelo suficientemente grande que incluyera tanto el empla-

zamiento como el origen del terremoto. Sin embargo, en el estado actual de la sismología y de la geología no es posible definir con el suficiente nivel de exactitud datos correspondientes al origen del terremoto y sus características, precisos en un modelo de este tipo. Por consiguiente, los métodos presentes se limitan a la resolución del problema de intentar predecir la variación temporal del movimiento en un punto genérico a partir del conocimiento del movimiento en algún punto de control dentro del emplazamiento (movimiento de control especificado).

Un planteamiento coherente del problema exige la introducción de una serie de hipótesis adicionales referentes a la geometría del emplazamiento y a la naturaleza del campo de ondas sísmicas generadas del movimiento. La elección del punto y movimiento de control debe realizarse, según Lysmer(1) en la superficie del suelo o bien al nivel de la roca firme, debajo del emplazamiento, en otros casos pueden introducirse movimientos completamente irreales:

Las ondas sísmicas a introducir en el cálculo corresponden a una combinación de diferentes componentes ondulatorias entre las que se incluyen las ondas de Rayleigh, ondas de Love, ondas planas de volumen inclinadas a diferentes ángulos, etc. Generalmente se suelen considerar casos extremos, es decir, movimientos sísmicos representados por ondas de un solo tipo.

Sucesivos estudios llevados a cabo por distintos autores (ondas superficiales, Thomson(2) y Haskell(3), ondas de programación vertical, Desai y Christian(4) Martin y Seed(5) y ondas de propagación inclinadas Chen(6)) muestran

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de julio de 1983.

que para emplazamientos sobre suelos el estudio de las ondas de propagación vertical permiten modelar de un modo adecuado las principales características del problema de la amplificación del suelo. Sin embargo, pueden existir tipos estructurales, como tuberías enterradas, túneles y presas de tierras para las que las componentes de mayores períodos de las ondas de propagación horizontal pueden ser de gran importancia. En emplazamientos rocosos deben, por otra parte, también ser considerados los efectos combinados de las ondas Rayleigh y Love, que no se amortiguan tan rápidamente como en el caso de suelos y que se traducen en la aparición de movimientos de balanceo y giro torsional en la superficie de contacto del suelo con la eventual estructura.

1.3. Métodos de solución

La gran mayoría de los métodos de estudio de la respuesta del emplazamiento utilizan las hipótesis de Kanai referente a la propagación vertical de las ondas. En el caso de suelos estratificados horizontalmente conduce a un modelo muy simple mono-dimensional, que permite predecir con gran acierto el comportamiento del emplazamiento, a causa de la semejanza existente en este caso en la propagación de las diferentes clases de ondas.

Schnabel y otros (7) desarrollaron el programa SHAKE y posteriormente Lysmer (8) el programa LUSH, que utilizan un cálculo en frecuencias fundamentalmente lineal. La simulación del comportamiento esencialmente no lineal del suelo se lleva a cabo mediante la introducción de un modo iterativo de características lineales equivalentes función de un número de ciclos eficaz. La eficacia computacional de este procedimiento es elevada, particularmente en el análisis directo, si bien un cálculo inverso (convolución) pueden presentar problemas de convergencia. Estudios comparativos (9) entre cálculos genuinamente no lineales y el método lineal equivalente muestran diferencias en los resultados relativamente pequeñas, excepto en los casos extremos de terremotos muy intensos o terrenos muy blandos.

El método que se presenta a continuación considera de un modo explícito y directo las ecuaciones constitutivas no lineales del suelo mediante un modelo de Ramberg y Osgood, que permite representar una amplia variedad de tipos diferentes de terrenos. La eficiencia del

cálculo se consigue utilizando un algoritmo de integración directa de las ecuaciones dinámicas en el tiempo, desarrollado por Argyris y otros (10). Las ventajas de un análisis no lineal se hacen patentes particularmente, en la determinación de las constantes del suelo, que no precisan la introducción de conceptos aparentemente artificiales como los valores lineales equivalentes, así como en la mejora de la aproximación obtenida en los casos extremos antes citados.

1.4. Objetivos

Con el análisis no lineal de la amplificación del suelo se intenta resolver el siguiente problema:

Conocido el movimiento de control en un punto situado en el contacto del suelo con la roca firme, en forma de su espectro de respuesta, se desea obtener el movimiento en un punto genérico del emplazamiento, expresado este movimiento asimismo, en forma de espectro de respuesta. Por su importancia, se estudia el caso de que el punto de resultados se encuentra situado en la superficie libre. La relación de ordenadas espectrales entre los movimientos de control y resultados dependerán de diversos parámetros: tipo de suelo (definido por las constantes de su ecuación constitutiva de cada estrato), profundidad a la roca firme y distribución de los diferentes estratos, así como de la intensidad del terremoto y su función espectro de respuesta.

A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación a situaciones extremas indicativas del grado de dependencia de la relación de ordenadas espectrales de los anteriores parámetros. De este modo se sugiere un procedimiento simplificado de estudio de la amplificación basado en posible análisis intensivo y más completo de un mayor número de casos. Sin embargo, a pesar del relativamente escaso número de ejemplos estudiados, algunas conclusiones provisionales pueden ser apuntadas.

Conviene indicar que Kanai (26) ha planteado análogo problema, y mediante combinación de resultados de medidas realizadas y otros obtenidos de la teoría monodimensional de propagación de ondas, deduce la expresión para determinar la función de amplificación de un perfil de suelos de período natural T_0 y admi-

tancia q , que sigue:

$$G(T) = 1 + \frac{1}{\left[\left\{ \frac{1+q}{1-q} \left[- \left(\frac{T}{T_g} \right)^2 \right] \right\}^2 + \left(\frac{0,3}{\sqrt{T_g}} \frac{T}{T_g} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

siendo $G(T)$ la relación de amplificación para una onda de período T .

La expresión anterior supone un estrato de suelo único fuertemente amortiguador, de modo que las sucesivas frecuencias naturales a partir de la primera pueden tener importancia.

Esta técnica semiempírica de Kanai permite de un modo aproximado establecer un valor medio del pseudoespectro de la velocidad en la superficie de un depósito.

Con las fórmulas simplificadas de Kanai se consigue evaluar de un modo cualitativo la amplificación de un suelo. Sin embargo, es preciso, en estructuras singulares, el desarrollo de una metodología que permita estudiar de un modo adecuado el problema de la respuesta de emplazamiento.

2. MODELO PROPUESTO

2.1. Generalidades

Se expone a continuación el procedimiento desarrollado para el estudio de la amplificación de las ordenadas espectrales de respuesta, por medio de un verdadero análisis no lineal en el dominio del tiempo, de acuerdo con la referencia (11).

La complejidad del problema de la amplificación espectral cuando el medio no es homogéneo y posee unas características de tensión-deformación dependientes de la historia tensional, ha aconsejado utilizar un proceso de simulación, caracterizado por las siguientes fases (Fig. 1).

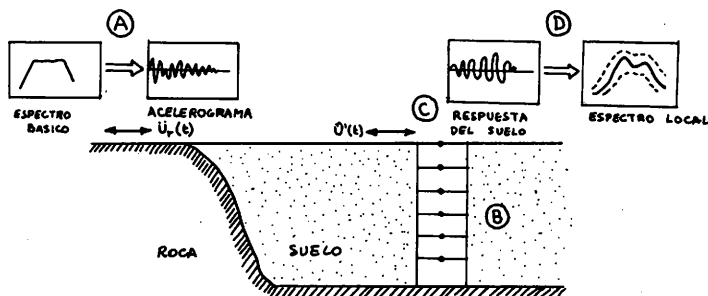


Fig. 1.—Modelo de amplificación espectral.

A) Obtención de una muestra de acelerogramas compatibles con el espectro básico de partida.

El análisis no lineal en el dominio del tiempo exige que el movimiento sísmico de entrada esté definido en términos de una historia temporal de aceleraciones, velocidades o desplazamientos.

Con este propósito se adoptó en este trabajo una técnica de generación de acelerogramas sintéticos desarrollada en el MIT por Gasparini y Vanmarcke (12). Esta técnica permite la generación numérica de acelerogramas que cumplan determinadas condiciones, siendo una de éstas el que su espectro de respuesta se adapte a un espectro prefijado.

B) Elaboración de un modelo discreto del suelo de comportamiento no lineal.

Un modelo unidimensional puede considerarse apropiado para reducir el comportamiento del suelo, puesto que de ordinario, las propiedades de éste varían más rápidamente en dirección vertical que en horizontal (13).

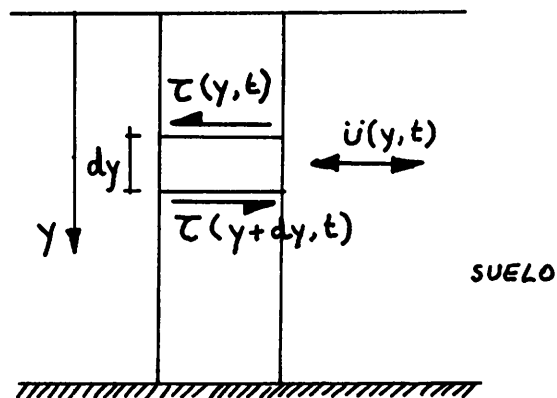


Fig. 2.—Geometría de la amplificación unidimensional.

De acuerdo con la hipótesis de Kanai (14) el movimiento horizontal del suelo puede suponerse ocasionado exclusivamente por la acción de ondas transversales de dirección de propagación vertical. Para un medio unidimensional, la ecuación del movimiento adopta la forma (Fig. 2).

$$\rho(y) \ddot{u}(y, t) - \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} = b(y, t) \quad [1]$$

siendo $\tau(y, t)$ tensión de corte a la profundidad y , que puede, en su caso, incluir el término de viscosidad.

ρ (y) = densidad másica del suelo.

\ddot{u} (y, t) = aceleración horizontal de las partículas del suelo.

b (y, t) = fuerza másica actuante en dirección horizontal.

La ecuación (1) debe resolverse teniendo en cuenta las condiciones de contorno: tensión nula en la superficie del suelo y desplazamiento (o tensión) especificados instantáneamente en un punto del suelo denominado punto de control.

Roesset y Whitman (15) han resuelto la ecuación [1] en el dominio de la frecuencia para un medio multiestratificado de comportamiento elástico o viscoelástico, utilizando las funciones complejas de amplificación del perfil de suelos.

En el presente artículo, por medio de una discretización de elementos finitos del perfil del suelo se ha llegado a plantear la conocida ecuación del movimiento de un sistema discreto.

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = P(t) \quad [2]$$

C) Determinación de la respuesta dinámica del suelo para cada uno de los acelerogramas de la muestra.

Un procedimiento realista de análisis dinámico de un sistema de suelos debe tener en cuenta de alguna manera el comportamiento manifiestamente no lineal, que se acusa en el suelo ante la actuación de un movimiento sísmico, aún de moderada intensidad.

Para ello son posibles tres procedimientos, en orden ascendente de complejidad:

1. Realizar un único análisis lineal (preferiblemente en el dominio de la frecuencia) con propiedades del suelo compatibles con el nivel de deformaciones esperados. Estas propiedades pueden estimarse mediante reglas sencillas (por medio de estudios paramétricos, por ejemplo) a partir de las propiedades del suelo a bajo nivel de deformación y de la intensidad del movimiento sísmico.
2. Realizar un proceso lineal iterativo asimismo en el dominio de la frecuencia. Los programas SHAKE (1-D) (7) y LUSH (2-D) (8) se basan en esta idea. En cada iteración se utilizan las propiedades (módulo de rigidez transversal y amortiguamiento) obtenidas de acuerdo con el

nivel de deformaciones alcanzado en la iteración anterior. El procedimiento presenta las desventajas inherentes a un análisis lineal: fuertes resonancias en torno a las frecuencias principales propias del sistema e incapacidad para reflejar características no lineales, como las deformaciones permanentes.

3. Es posible, por fin, realizar un verdadero análisis no lineal en el dominio del tiempo, utilizando un modelo discreto y unas adecuadas ecuaciones constitutivas del suelo.

Los parámetros que definen las relaciones de tensión-deformación pueden ser ajustados «a priori» a partir de resultados de ensayos de laboratorio relativamente asequibles (ensayo de corte cíclico).

La integración de las ecuaciones del movimiento en el dominio del tiempo por un procedimiento paso a paso asegura la verificación del equilibrio dinámico en una serie de instantes discretos, y la compatibilidad de las características no lineales del material con la deformación instantánea.

D) Obtención de los espectros de respuesta en la superficie del suelo, espectro promedio y relaciones espectrales. La determinación de los espectros de respuesta del movimiento superficial se ha realizado en este trabajo utilizando la técnica de Nigam y Jennings (16), que considera una variación del acelerograma lineal a tramos.

Por otra parte, la determinación de relaciones espectrales (calculadas ordenada a ordenada) entre el espectro en superficie del suelo y el del movimiento de control ha permitido en este trabajo analizar la influencia de distintos factores, y especialmente de la intensidad del movimiento, en la forma de los espectros modificados obtenidos.

2.2. Modelo de comportamiento no lineal

La respuesta dinámica del suelo sometido a la propagación de ondas de corte viene determinada principalmente por dos características del mismo: la relación tensión-deformación a esfuerzo cortante y el factor de amortiguamiento.

De los datos disponibles experimentalmente (17, 18) se concluye:

RESPUESTA SISMICA DE SUELOS ESTRATIFICADOS EN REGIMEN NO LINEAL

- a) Los suelos son materiales no lineales, presentando una considerable fluencia a partir de deformaciones de 10^{-5} m/m. o menores.
- b) Bajo cargas cíclicas presentan un comportamiento histerésico, función del nivel de deformaciones alcanzado, con gran capacidad de disipación de energía.
- c) La rigidez se degrada al aumentar la deformación.

Un ciclo de histéresis simétrico puede caracterizarse en primera aproximación por dos parámetros, el módulo de rigidez secante G y el coeficiente de amortiguamiento por hitéresis D (Fig. 3).

Seed e Idriss (17) ha proporcionado curvas de variación de los parámetros G y D con el nivel de deformación de suelos granulares y cohesivos, para una gran diversidad de los diferentes parámetros geotécnicos.

Evidentemente, el modelo de comportamiento a utilizar en el análisis debe reproducir con suficiente aproximación la variación de los parámetros no lineales hallada.

Entre los modelos de comportamiento propuestos (elastoplástico, multilíneo, hiperbólico, etcétera, el modelo de Ramberg y Osgood (19, 20) resulta lo suficientemente general para englobar, como casos límites, el comportamiento

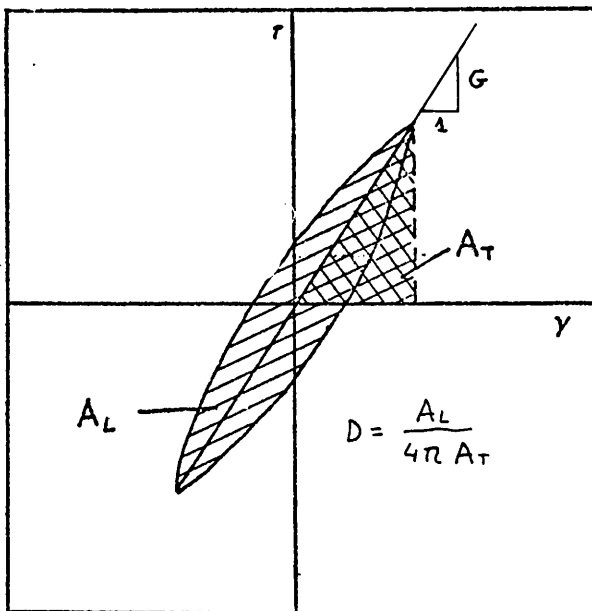


Fig. 3.—Ciclo de histéresis simétrico.

lineal, por un lado, y el elastoplástico, por otro. A la vez, dicho modelo permite, mediante el ajuste de cuatro parámetros similares, una variación del módulo de rigidez transversal G y del coeficiente de amortiguamiento D respecto a la amplitud de la deformación tangencial, semejante a la obtenida experimentalmente en una amplia gama de suelos.

En el modelo de Ramberg y Osgood, la ecuación de tensión deformación para la primera carga se expresa:

$$\frac{\gamma}{\gamma_v} = \frac{\tau}{\tau_v} \left(1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_v} \right|^{r-1} \right) \quad [3]$$

siendo:

- γ deformación de corte.
- τ tensión de corte.
- r, α parámetros positivos.
- γ_v deformación de referencia.
- τ_v tensión de referencia $\tau_v = G_0 \gamma_v$, siendo G_0 en módulo de corte para pequeñas deformaciones.

El significado de los parámetros es el siguiente:

γ_v y τ_v describen la posición del punto de fluencia (entendido en sentido amplio, ya que ésta, en el modelo de Ramberg, Osgood, se produce gradualmente).

r controla el incremento de los efectos no lineales con relación a la deformación.

α es un factor de escalada de las desviaciones con respecto a la linealidad. Para $\alpha = 0$ la no linealidad desaparece, obteniéndose un sistema elástico.

Las ecuaciones de las curvas de descarga y recarga siguen la ley de Masing y pueden expresarse como (figura 4):

$$\frac{\gamma - \gamma_0}{2\gamma_v} = \frac{\tau - \tau_0}{2\tau_v} \left(1 + \alpha \left| \frac{\tau - \tau_0}{2\tau_v} \right|^{r-1} \right) \quad (4)$$

Donde los parámetros tienen el significado descrito anteriormente, y (γ_0, τ_0) son las coordenadas del punto de inversión del signo de la carga (cambio de signo de la velocidad de deformación).

De [3] pueden obtenerse analíticamente las expresiones del módulo de rigidez secante y el factor de amortiguamiento correspondiente a un ciclo de amplitud tensional τ .

RESPUESTA SISMICA DE SUELOS ESTRATIFICADOS EN REGIMEN NO LINEAL

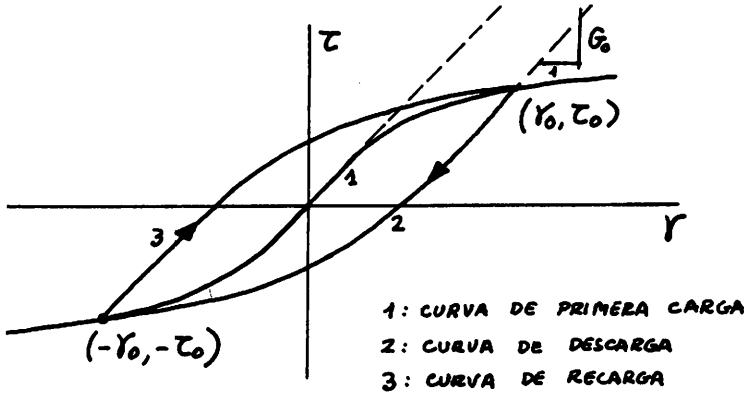


Fig. 4.—Ciclo de histéresis en el modelo de Ramberg y Osgood.

$$G = \frac{G_0}{1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{r-1}} \quad [5]$$

$$D = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{(r-1)}{(r+1)} \frac{G}{G_0} \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{r-1} \quad [6]$$

Por otra parte, el módulo tangente vale:

$$G_{\text{tang}} = \frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{G_0}{1 + \alpha r \left| \frac{\tau - \tau_0}{c \tau_y} \right|^{r-1}} \quad [7]$$

En donde c_i y $\tau_0 = 0$ para la curva de la primera carga, $c = 2$ para las curvas de descarga y recarga.

Las ecuaciones de Ramberg y Osgood no permiten obtener explícitamente la tensión en términos de la deformación. Para ello es necesario recurrir a un proceso iterativo de Newton-Raphson, que se describe a continuación:

Sea

$$y = z (1 + \alpha |z|^{r-1})$$

La iteración $n + 1$, de Newton-Raphson proporciona el valor de z correspondiente a un valor dado de y :

$$Z_{n+1} = \frac{y/|y| \alpha (r-1) |Z_n|^{r-1} + y}{1 + |Z_n|^{r-1}} \quad [8]$$

En la expresión anterior los subíndices hacen referencia al orden de la iteración.

Con ayuda de las expresiones [5] y [6] puede llevarse a cabo el ajuste de los parámetros

del modelo a las curvas de variación de G y D con la amplitud de la deformación halladas experimentalmente. En particular, para las curvas experimentales medias proporcionadas por Seed e Idriss (17) en las figuras [5] se muestran los ajustes conseguidos con los parámetros:

a) Suelos granulares.

$$r = 2.25 \\ \alpha = 0.005 \\ \gamma_y = 2.5 \cdot 10^{-6}$$

b) Suelos cohesivos.

$$r = 1.75 \\ a = 0.10 \\ \gamma_y = 2.5 \cdot 10^{-6}$$

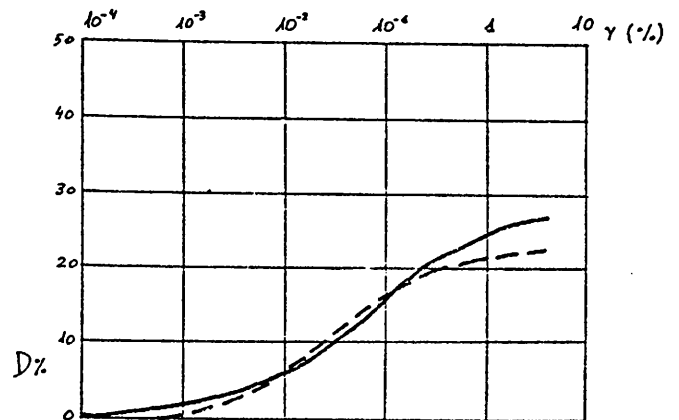
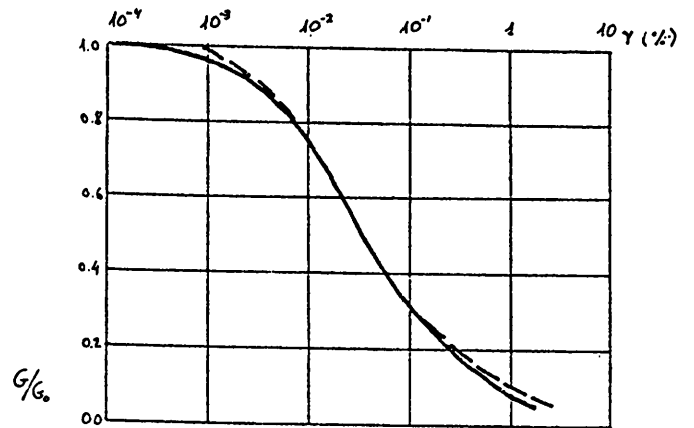


Fig. 5.a.—Ajuste de los parámetros del modelo de Ramberg y Osgood a las curvas experimentales para arenas.

Línea continua.—Curva experimental media (17)
Línea a trazos.—Curva ajustada con los parámetros
 $r = 2,25 \quad \alpha = 0,005 \quad \gamma_y = 2,5 \cdot 10^{-6}$

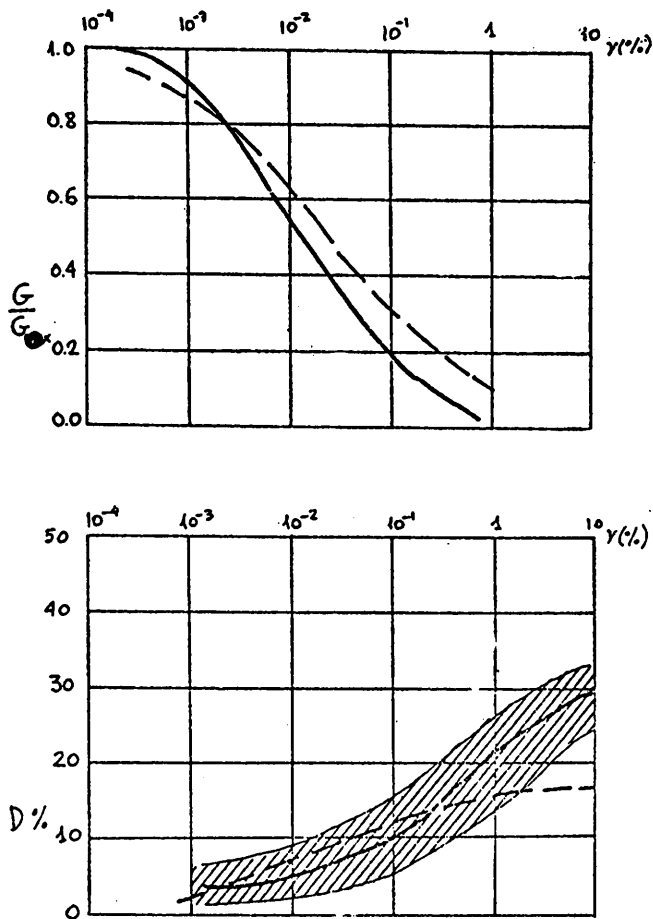


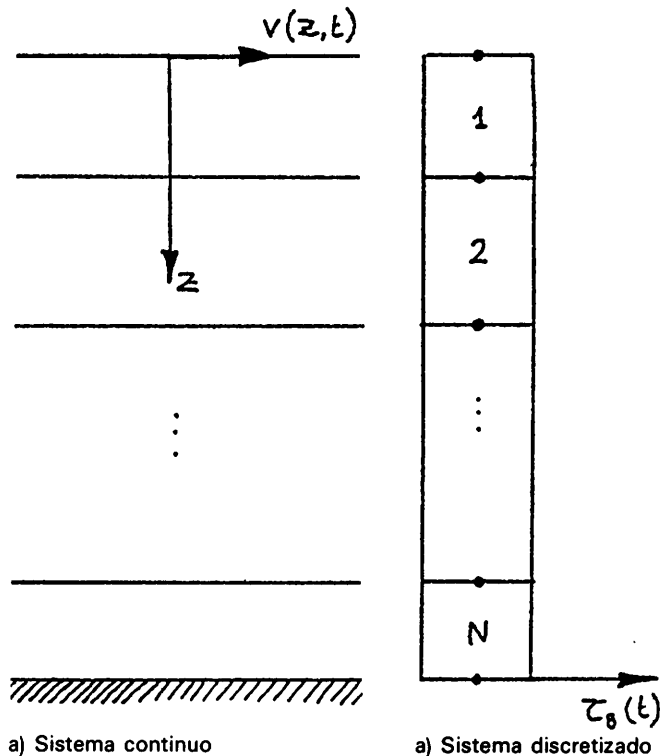
Fig. 5.b.—Ajuste de los parámetros del modelo de Ramberg y Osgood a las curvas experimentales para suelos cohesivos. Línea continua.—Curva experimental media (17). Línea a trazos.—Curva ajustada con los parámetros $r=1,75$ $\alpha=0,10$ $\gamma_y=2,5 \cdot 10^{-6}$

2.3. Ecuaciones del movimiento del sistema discreto

De entre los distintos métodos de análisis aplicables a la determinación de la respuesta dinámica de un medio continuo sometido a una sollicitación de tipo sísmico, es quizá el método de los elementos finitos el de mayor posibilidades por la generalidad de su planteamiento y eficacia en la resolución.

En los últimos años, dicho método ha sido aplicado extensamente a la resolución de diversos problemas de dinámica estructural, particularmente a problemas de interacción suelo-estructura (21, 22), agua-estructura (23).

En este método, el sistema continuo real Γ se reemplaza por uno discreto aproximado Γ^* , dividido en un determinado número de elemen-



a) Sistema continuo a) Sistema discretizado
Fig. 6.—Sistema continuo, su discretización en elementos finitos.

tos finitos, de volumen Γ_e y contorno Ω_e , conectados entre sí por medio de nudos (figura 6).

Algunos modelos utilizados en el análisis (24, 5) especifican la excitación sísmica por medio del movimiento horizontal en el punto B, $U_B(t)$, el cual se hace coincidir con el que se produciría en un afloramiento cercano de la roca base, ignorando, por tanto, el efecto de la interacción suelo-base rocosa.

Sin embargo, si se asimila la roca base a un semiespacio de comportamiento elástico puede determinarse analíticamente la fuerza de corte $\tau_B(t)$ de interacción (figura 7).

El desplazamiento horizontal en cualquier punto de un medio elástico homogéneo ocasionado por la propagación en dirección vertical de una onda armónica de corte de frecuencia ω es:

$$U_r(Z_r, t) = A_2 \exp i\omega \left(t + \frac{Z_r}{C_r} \right) + B_2 \exp i\omega \left(t - \frac{Z_r}{C_r} \right) \quad [9]$$

C_r : velocidad de propagación de la onda en el curso.

G_r : módulo de elasticidad transversal.

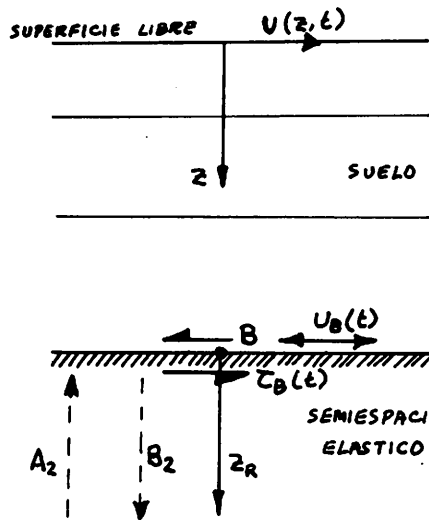


Fig. 7.—Determinación de la fuerza τ_B de interacción.

y la tensión:

$$\tau_r = G_r \frac{\partial U_r(Z_r, t)}{\partial Z_r} = i\omega \left\{ \frac{G_r}{C_r} A_2 \exp i\omega \left(t + \frac{Z_r}{C_r} \right) - B_2 \exp i\omega \left(t - \frac{Z_r}{C_r} \right) \right\} \quad [10]$$

en el punto B ($Z_r = 0$).

$$U_B(t) = U_r(0, t) = (A_2 + B_2) \exp(i\omega t) \quad [11]$$

$$\tau_B(t) = \tau_r(0, t) = i\omega \frac{G_r}{C_r} (A_2 - B_2) \exp(i\omega t) \quad [12]$$

por otra parte, el desplazamiento en la superficie libre de la roca vale:

$$U_s(t) = (A_2 + A_2) \exp(i\omega t) = 2A_2 \exp(i\omega t) \quad [13]$$

de [11], [12] y [13] se deduce, teniendo en cuenta que $G_r = C_r^2 \rho_r$ (ρ_r : densidad másica).

$$\tau_B(t) = i\omega C_r \rho_r (U_s - U_B) = C_r \rho_r (\dot{U}_s - \dot{U}_B) \quad [14]$$

La expresión [14] representa la ecuación simultánea de una fuerza exterior de valor $C_r \rho_r U_s$ y un amortiguador viscoso de constante $c = C_r \rho_r$, ambos aplicados en B. Numéricamente, la primera se introduce como término independiente en la ecuación matricial [2], en tanto que el segundo supone un término adicional en la matriz de amortiguamiento \underline{C} del sistema.

La ecuación matricial del movimiento [2] del sistema discreto Γ^* se plantea expresando, según el procedimiento de Rayleigh-Ritz, el desplazamiento en cada punto en función de los

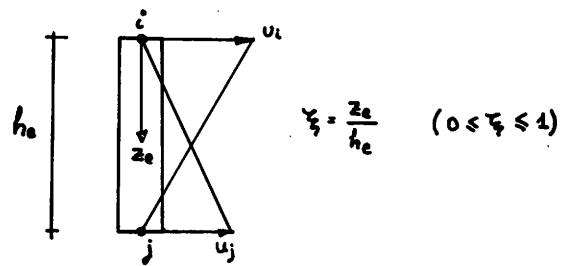


Fig. 8.—Funciones de forma en el elemento unidimensional.

desplazamientos nodales del sistema, considerados como coordenadas generalizadas.

Se han adoptado en cada elemento funciones lineales de interpolación (figura 8).

$$U_\xi = [\xi \quad (1 - \xi)] \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \quad [15.a]$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{h_e} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \quad [15.b]$$

$$\underline{K}_e = \frac{G}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [15.c]$$

$$\underline{M}_e = \rho h_e \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad [15.d]$$

$$\underline{C}_e = \mu h_e \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad [15.c]$$

Por aplicación del principio de trabajo virtual se obtiene la ecuación del movimiento de un elemento genérico:

$$\underline{M}_e \underline{U}_e + \underline{C}_e \underline{U}_e + \underline{K}_e \underline{U}_e = \underline{P}_e(t) \quad [16]$$

En donde $\underline{P}_e(t)$ incluye tanto las fuerzas exteriores aplicadas como las fuerzas nodales interelementales.

Con el fin de conseguir la diagonalización de la matriz de masas \underline{M} del sistema se ha adoptado el procedimiento sugerido por Hinton, Rock y Zienckewicz (25), multiplicando los términos de la diagonal principal de la matriz \underline{M}_e en [15.d] por el factor 3/2 y anulando los términos no principales. Queda así:

$$\underline{M}_e = \rho h_e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad [17]$$

En lo referente a la matriz de amortiguamiento, en lugar de la matriz consistente [15.e] se ha planteado la formulación de Rayleigh, que permite su expresión explícita a partir de los coeficientes de amortiguamiento viscosomomales.

Ensamblando para todos los elementos del sistema la ecuación [16] se obtiene, para el sistema de la figura 6.

$$\underline{M} \underline{U} + \underline{C} \underline{U} + \underline{K} \underline{U} = \underline{J} \rho_r V_{sr} \dot{U}_i(t) \quad [18]$$

siendo $\underline{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- \underline{K} : matriz de rigidez instantánea del sistema.
- \underline{C} : matriz de amortiguamiento que incluye el efecto de amortiguamiento geométrico.
- \underline{M} : matriz de masas del sistema.
- ρ_r : densidad másica.
- V_{sr} : velocidad onda corte.
- $U_i(t)$: movimiento de control en superficie de la roca.

Si se tiene en cuenta que el vector $\underline{K} \cdot \underline{U}$ representa el efecto de las tensiones elementales sobre los nudos, es lícito escribir:

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 - \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_N - \tau_{N-1} \\ -\tau_N \end{bmatrix}$$

Denominando:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_N \end{bmatrix} \text{ (vector de tensiones elementales)}$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ [matriz constante de dimensiones } (N+1) \times N]$$

$$\underline{R} = \underline{M} \underline{U} \text{ (vector de fuerzas de inercia)}$$

la ecuación [18] se puede reformular como sigue:

$$\underline{R} + \underline{C} \underline{U} + \underline{L} \underline{I} = \underline{J} \rho_r V_{sr} U_i(t) \quad [19]$$

Integración de las ecuaciones del movimiento

La integración numérica de la ecuación [19] se ha realizado mediante la técnica de Argyris de variación cúbica de la fuerza de inercia (10).

Este procedimiento supone que la fuerza de inercia $R = M U$ varía como una cúbica en función del tiempo dentro del intervalo de tiempo considerado. La cúbica queda definida si se conocen los valores de la función y sus derivadas al principio y al final del intervalo de tiempo (denotando las primeras con subíndice 0 y los últimos con subíndice 1).

$$R \Big|_{t_0}^{t_0 + \Delta t} = H_{00} R_0 + H_{10} \dot{R}_{10} + H_{01} \dot{R}_{11} + H_{11} \dot{R}_{11} \quad [20]$$

siendo $H_{00}, H_{10}, H_{01}, H_{11}$ los polinomios de interpolación de L'Hermite de tercer orden:

$$H_{00} = 1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3$$

$$H_{10} = (\alpha - 2\alpha^2 + \alpha^3) \Delta t$$

$$H_{01} = 3\alpha^2 - 2\alpha^3$$

$$H_{11} = (-\alpha^2 + \alpha^3) \Delta t \quad \alpha = \frac{t - t_0}{\Delta t} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

Integrando la ecuación $\underline{U} = \underline{M}^{-1} \underline{R}$ sucesivamente, se obtienen las expresiones de la velocidad y el desplazamiento, respectivamente:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_0 + \int_0^1 \underline{M}^{-1} \underline{R} \Delta t \, d\alpha = \dot{U}_0 + \\ &+ \frac{\Delta t}{12} \underline{M}^{-1} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0 + 6\dot{R}_1 - \Delta t \dot{R}_1) \end{aligned} \quad [21]$$

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 + \int_0^1 \dot{U}(\alpha) \Delta t \, d\alpha = U_0 + \dot{U}_0 \Delta t + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{60} \underline{M}^{-1} (21R_0 + 3\Delta t \dot{R}_0 + 9\dot{R}_1 - 2\Delta t \dot{R}_1) \end{aligned} \quad [22]$$

El procedimiento de integración paso a paso trata de conseguir que la ecuación del movimiento [19] se satisfaga en los instantes discretos $0, \Delta t, 2\Delta t \dots K \Delta t$. para ello, supuesto conocidas las condiciones iniciales $U_0, \dot{U}_0, \ddot{U}_0$ se escriben las ecuaciones [21] y [22]:

$$\dot{U}_1 = \frac{\Delta t}{2} M^{-1} R_1 - \frac{\Delta t^2}{12} M^{-1} \dot{R}_1 + P_0 \quad [21']$$

$$U_1 = \frac{3\Delta t^2}{20} M^{-1} R_1 - \frac{\Delta t^3}{30} M^{-1} \dot{R}_1 + Q_0 \quad [22']$$

Siendo P_0 y Q_0 vectores conocidos (ya que dependen de las condiciones iniciales del intervalo).

$$P_0 = U_0 + \frac{\Delta t}{12} M^{-1} (6R_0 + \Delta t \dot{R}_0) \quad [23]$$

$$Q_0 = U_0 + \Delta t \dot{U}_0 + \frac{\Delta t^2}{60} M^{-1} (21R_0 + 3\Delta t \dot{R}_0) \quad [24]$$

se conoce también la ecuación

$$\ddot{U}_1 = M^{-1} R_1 \quad [25]$$

Así como la ecuación del movimiento en el instante $t = t_1$

$$R_1 = -C \dot{U}_1 - L T_1 + J \rho_r V_{sr} \dot{U}_s(t_1) \quad [26]$$

y su derivada en el mismo instante

$$\dot{R}_1 = -C \ddot{U}_1 - L \dot{T}_1 + J \rho_r V_{sr} \ddot{U}_s(t_1) \quad [27]$$

En esta última ecuación intervienen las derivadas temporales de las tensiones elementales τ_i que se determinan por medio de la regla de la cadena:

$$\tau_i = \frac{d\tau_i}{dt} = \frac{d\tau_i}{d\gamma_i} \sim \frac{d\gamma_i}{dt} = G_{TAN_i} \cdot \dot{\gamma}_i \quad [28]$$

El proceso seguido en el esquema implícito de integración puede resumirse como sigue:

Para cada Δt , supuesto conocidos U_0 , \dot{U}_0 , \ddot{U}_0 .

A) Suponer unos valores iniciales $R_1^{(1)}$ y $\dot{R}_1^{(1)}$. Se ha tomado:

$$R_1^{(1)} = R_0 + \dot{R}_0 \Delta t$$

$$\dot{R}_1^{(1)} = \dot{R}_0$$

B) Determinar U_1 , \dot{U}_1 , \ddot{U}_1 , por medio de las ecuaciones (22), (21) y (25), respectivamente.

C) Calcular γ_i y $\dot{\gamma}_i$ (deformación de corte y velocidad de deformación en cada elemento i) por la ecuación 15.b.

D) Se determinan los vectores T_1 y \dot{T}_1 a partir de las deformaciones (ecuaciones 8, 7 y 28). En este punto se comprueba si

existe un cambio de signo de la velocidad de deformación con respecto al intervalo precedente, lo que implica, como se ha visto en la sección 2.2., un cambio de rama del ciclo de histéresis, con la consiguiente variación de parámetros de la ecuación constitutiva del elemento.

E) En esta etapa, es posible ya obtener nuevos valores de $\dot{R}_1^{(n+1)}$ y $\dot{R}_1^{(n+1)}$ por medio de las ecuaciones (26) y (27).

F) Repetir el proceso desde B) hasta verificar el criterio de convergencia. Se ha adoptado el criterio de Argyris, es decir:

$$\frac{\text{norma}(\dot{R}_1^{(n+1)} - \dot{R}_1^{(n)})}{\text{norma}(\dot{R}_1^{(n+1)})} \ll \varepsilon$$

siendo ε el índice de error admitido.

3. APLICACION NUMERICA

3.1. Generalidades

En base a la formulación presentada en el apartado precedente, se ha desarrollado y puesto a punto un programa de cálculo, denominado SWAN (Shear Waves Amplification Analysis), sobre un miniordenador de 16 bits de longitud de palabra. El programa SWAN, que realiza el cálculo en el dominio del tiempo de la respuesta no lineal de un depósito de suelos multiestratificado, constituye el núcleo del proceso propuesto para el estudio de la amplificación de las ordenadas espectrales de respuesta, cuyo diagrama general se presenta en la figura 9. En este proceso, la fase de generación de acelerogramas artificiales compatibles con el espectro de respuesta de partida se ha realizado con ayuda del programa SIMQKE (Simulation of Earthquakes) de D. Gasparini y E. V. Varnmarcke (12), el cual ha sido adaptado convenientemente para su utilización en un ordenador de las características descritas.

Un listado del programa SWAN, así como los detalles de su arquitectura y un manual de usuario del mismo pueden verse en la referencia (11) ya citada.

RESPUESTA SISMICA DE SUELOS ESTRATIFICADOS EN REGIMEN NO LINEAL

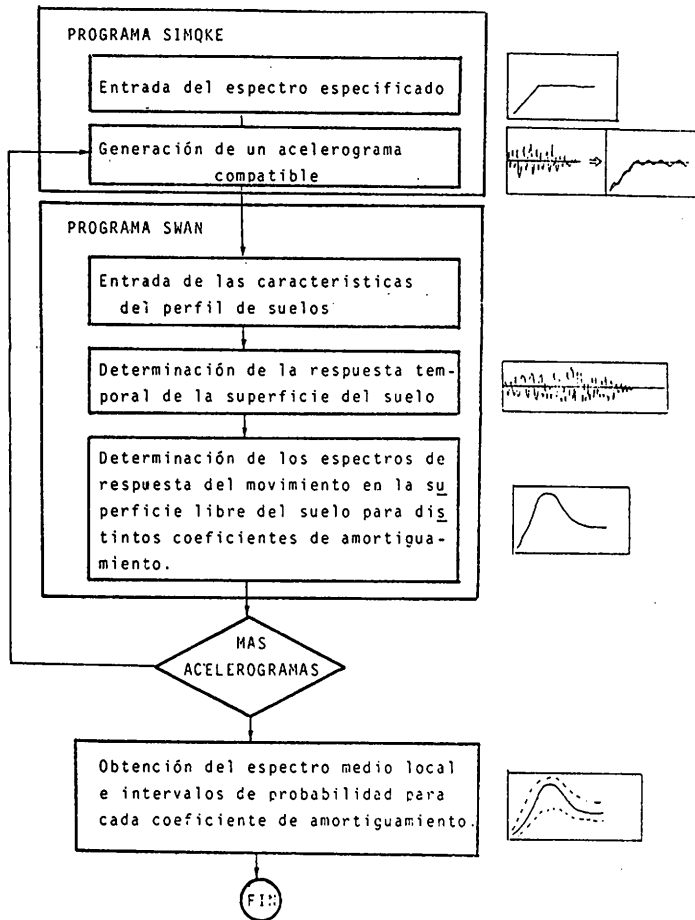


Fig. 9.—Diagrama de proceso general.

3.2. Aplicación a algunos casos concretos

Con ayuda de los programas SIMQKE y SWAN se ha realizado una experimentación numérica consistente en el estudio de la modificación del espectro de diseño propuesto por Newmark, Blume y Kapur (27) y utilizado en el proyecto de Centrales Nucleares, para distintas

TABLA 1

Características de los movimientos considerados en la aplicación numérica

| Movimiento | $a_{máx.}$ (gr) | Distancia focal (Km) | Duración (seg) |
|------------|-----------------|----------------------|----------------|
| A | 0,05 | 75 | 20 |
| B | 0,10 | 45 | 20 |
| C | 0,20 | 25 | 18 |
| D | 0,40 | 10 | 8 |

condiciones de suelo e intensidades de excitación.

Aunque por razones de economía no se ha tratado de realizar un análisis exhaustivo, sí se han conseguido algunos resultados indicativos que han permitido la elaboración de conclusiones de carácter general.

Se han considerado en el estudio cuatro perfiles hipotéticos de suelo alternativamente someros y profundos, compuestos de material granular (G creciente con la profundidad) o cohesivo (G aproximadamente constante con la profundidad) (Fig. 10). Las características de comportamiento no lineal se simularon por medio de unos parámetros del modelo Ramberg-Osgood:

Material granular $\alpha = 0,005$; $r = 2,25$;
 $\gamma_v = 2,5 \cdot 10^{-6}$

Material cohesivo $\alpha = 0,10$; $r = 1,75$;
 $\gamma_v = 2,5 \cdot 10^{-6}$

Como espectros de partida, se adoptaron los correspondientes a cuatro movimientos de aceleraciones máximas 0,05g, 0,10g, 0,20g y 0,40g, (respectivamente movimientos A, B, C, D). Las características de los movimientos, que podrían corresponder a los registrados para un terremoto de magnitud $M = 7,5$ a diversas distancias, se recogen en la tabla 1.

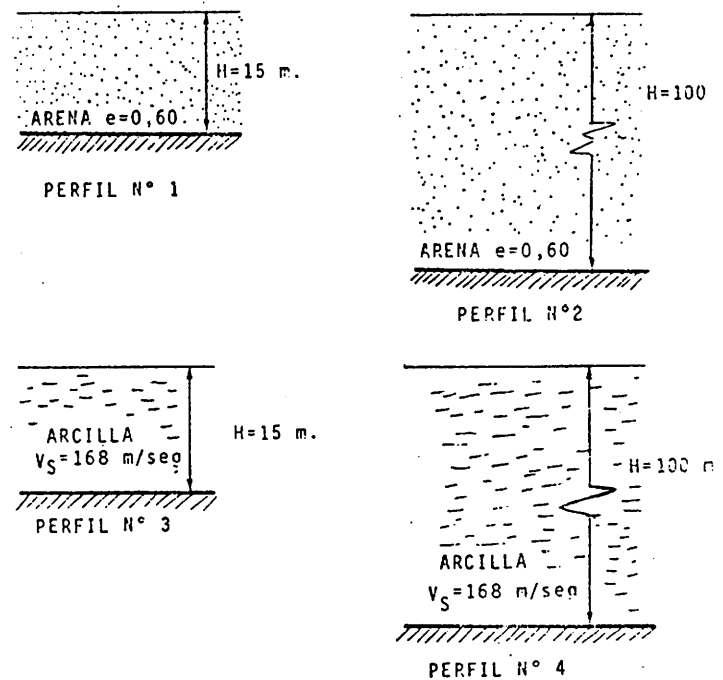
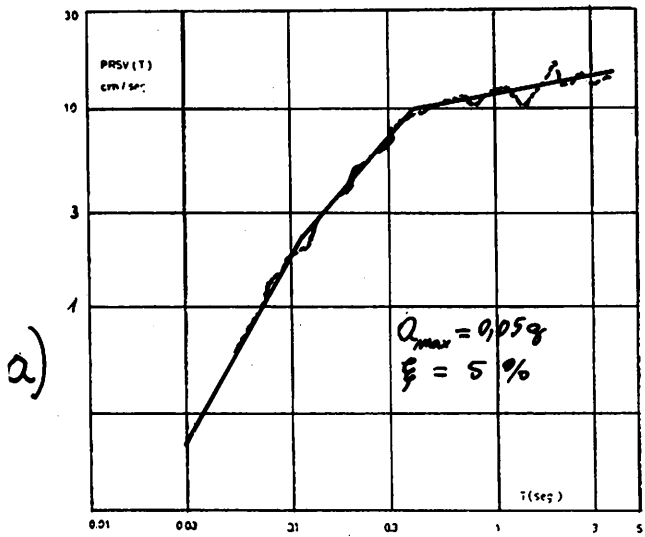
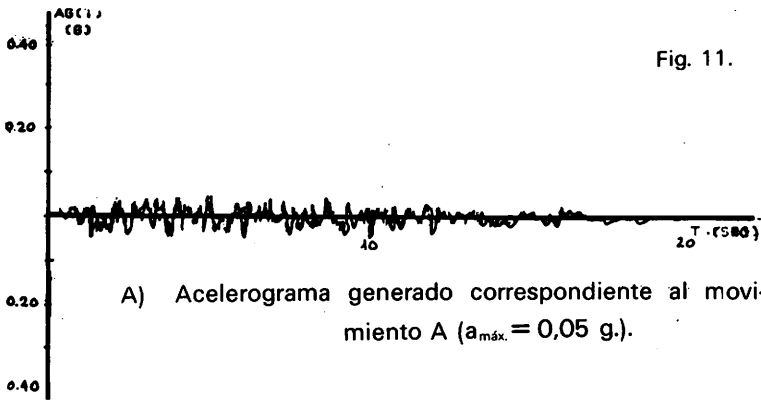
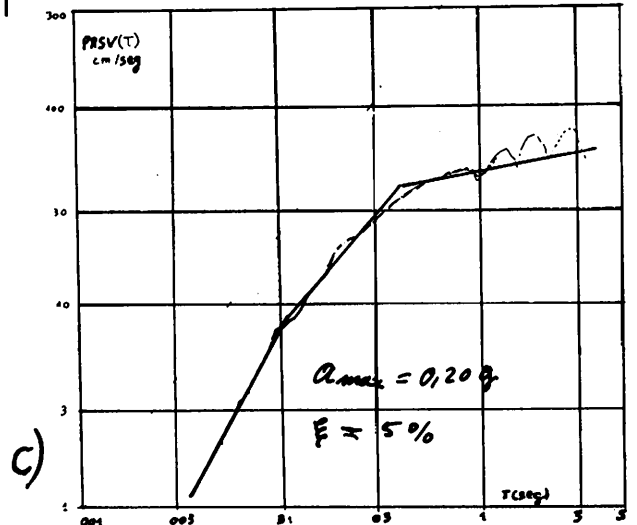
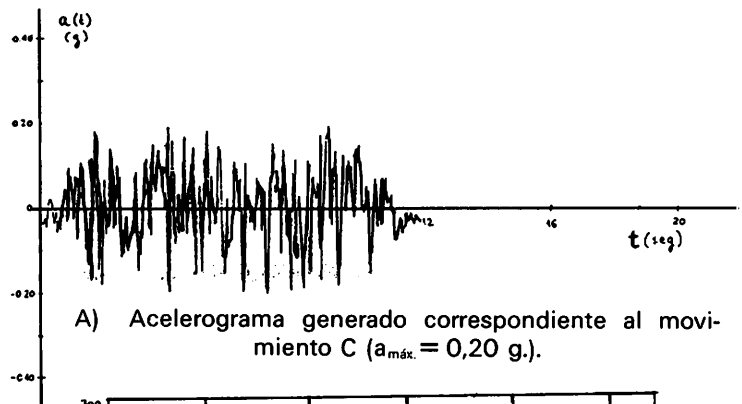


Fig. 10.—Perfiles de suelo adoptados para la aplicación numérica.

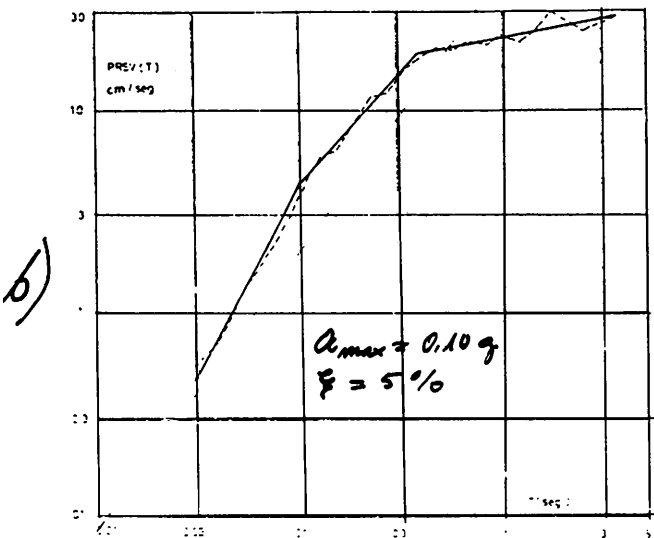
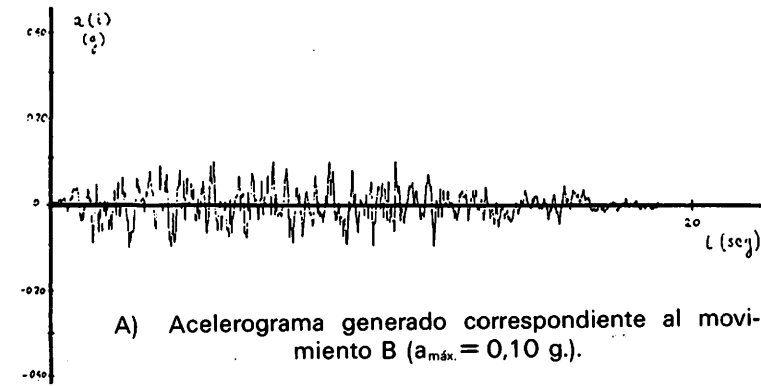
Fig. 11.



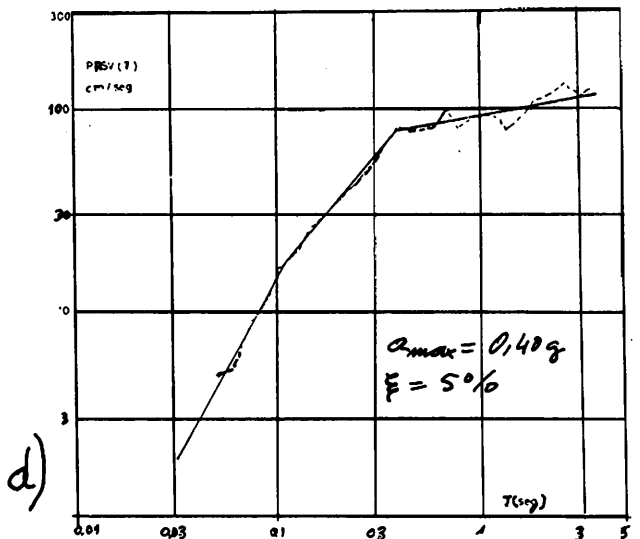
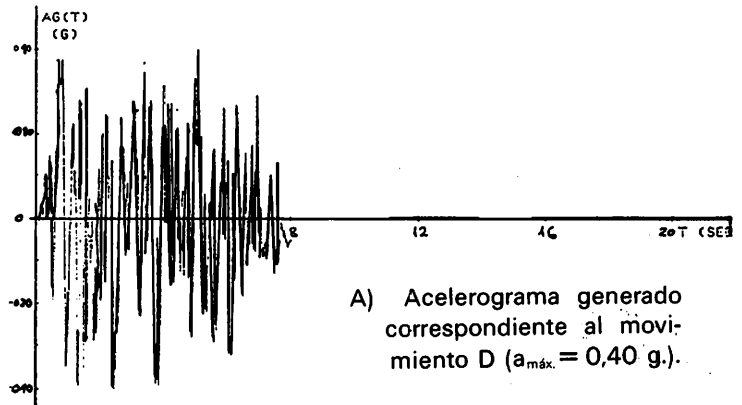
B) Espectro del acelerograma generado y espectro patrón.



B) Espectro del acelerograma generado y espectro patrón.



B) Espectro del acelerograma generado y espectro patrón.



B) Espectro del acelerograma generado y espectro patrón.

RESPUESTA SISMICA DE SUELOS ESTRATIFICADOS EN REGIMEN NO LINEAL

El estudio se ha realizado para los espectros correspondientes a un amortiguamiento $\zeta = 5\%$, variando las abscisas entre:

$$T = 0,05 \text{ seg. y } T = 3,5 \text{ seg.}$$

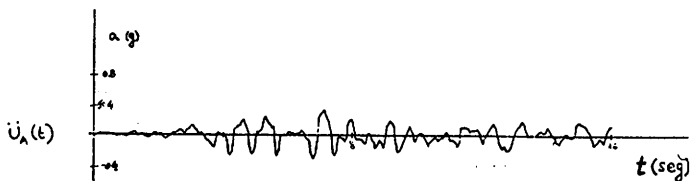
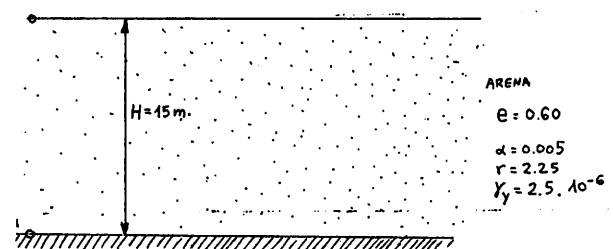
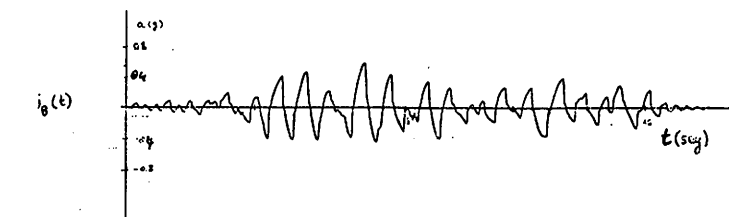
Los acelerogramas generados correspondientes a los movimientos citados junto con sus espectros de respuesta para un amortiguamiento del 5 %, y los espectros de Newmark, blume y Kapur pueden verse en la figura 11.

El perfil 1 fue analizado, también sometido, a un movimiento sísmico real: el acelerograma «PASADENA, 1952», de 16 segundos de dura-

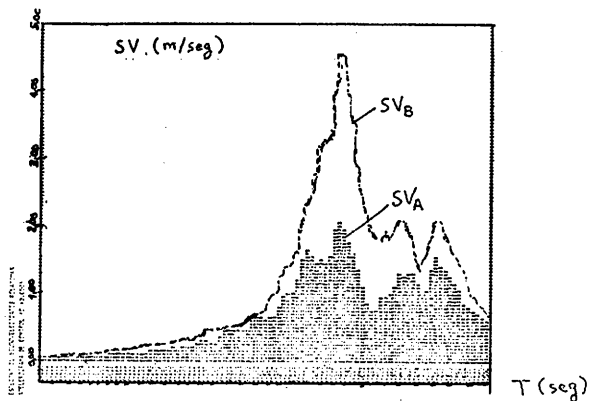
ción y 0,057g de aceleración máxima el cual se representa en la figura 12 multiplicado por un factor de escala de 7, junto al acelerograma calculado en la superficie del suelo.

3.3. Análisis de los resultados

Se ha estudiado la relación de espectros de respuesta (RER) entre las ordenadas del espectro de respuesta calculado en la superficie del suelo y las del espectro de partida. La RER permite apreciar especialmente los efectos de la intensidad del movimiento en la amplificación espectral a causa del comportamiento no lineal del suelo. La representación gráfica de estas curvas para los casos estudiados, puede verse en la figura 13. (Por simplicidad sólo se han



a) Acelerograma «Pasadena 1952» y respuesta no lineal.



b) Espectros de respuesta de pseudovelocidades.

Fig. 12.—Respuesta del perfil 1 a un acelerograma real.

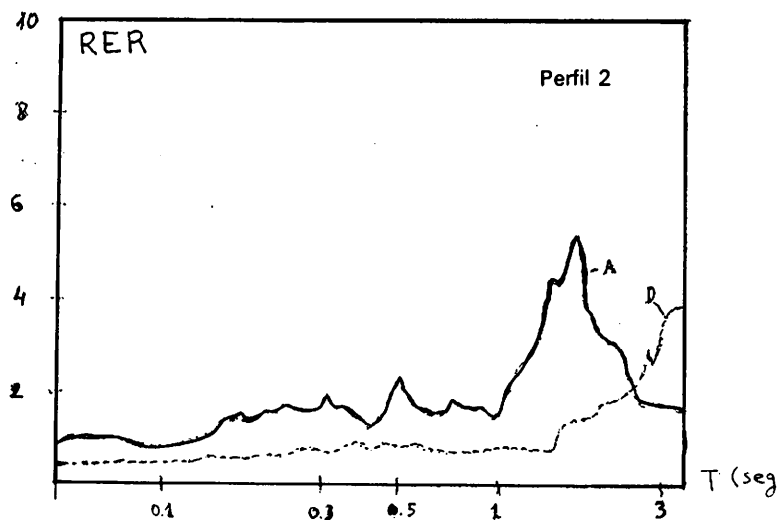
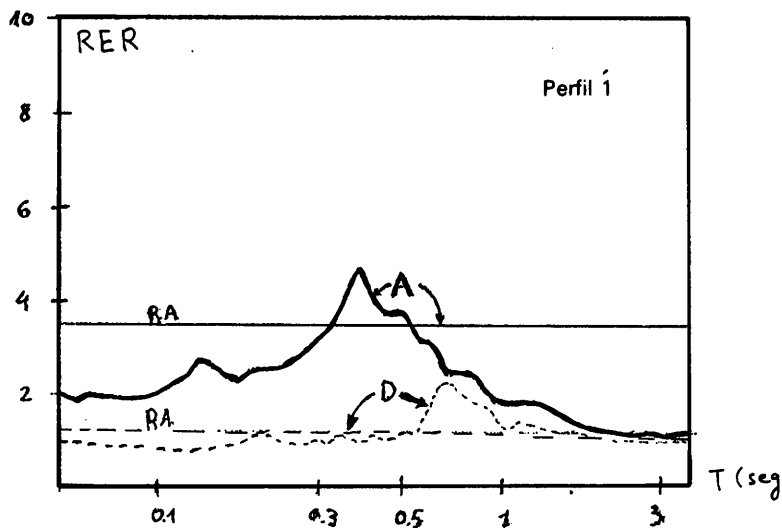


Fig. 13.—Curvas de relación espectral (RER) y relación de aceleraciones máximas del movimiento (RA) para algunos suelos y movimientos estudiados.

RESPUESTA SISMIC DE SUELOS ESTRATIFICADOS EN REGIMEN NO LINEAL

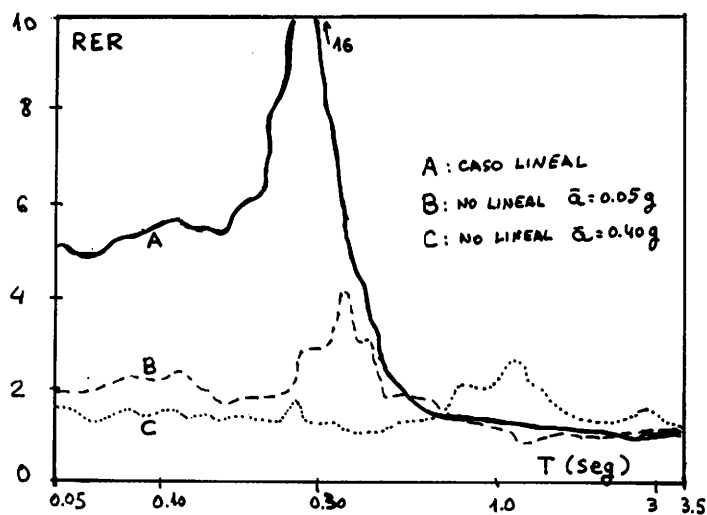
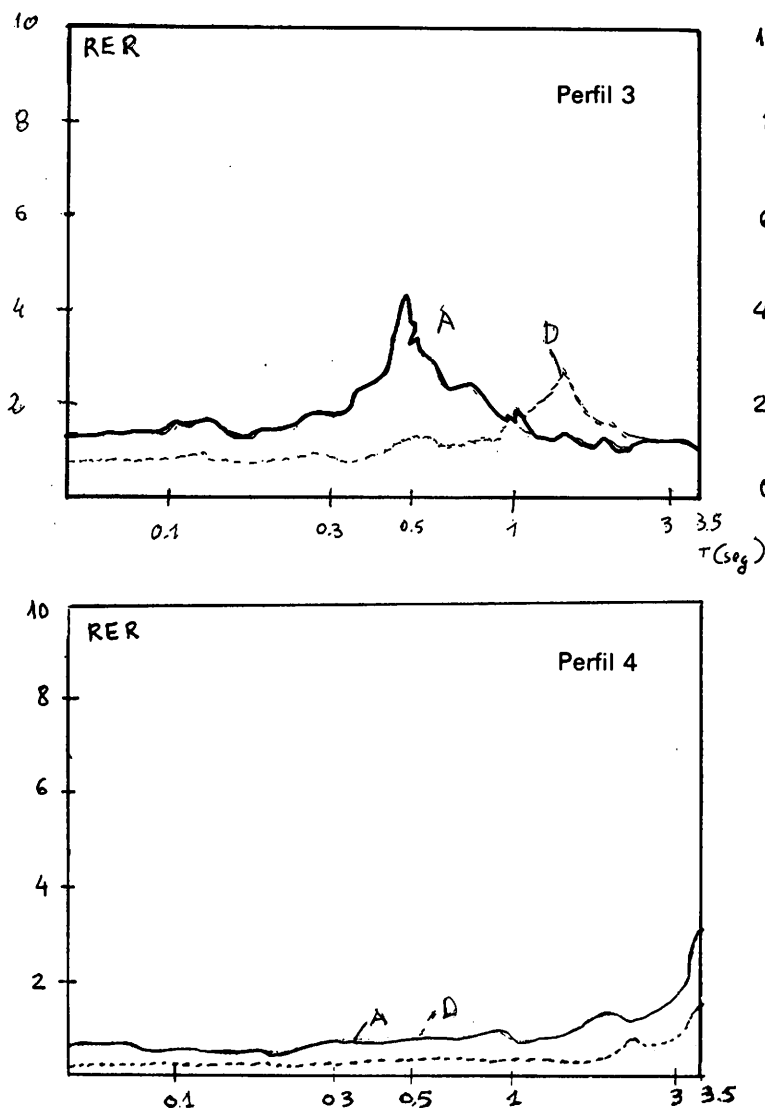


Fig. 14.—Ratios espectro superficie/espectro básico para el perfil 1, y movimiento «pasadena 1952» con distintas intensidades de excitación.

ción de rigidez del suelo, que conlleva un aumento en el período natural del mismo. En los casos estudiados la relación T_p/T_n varió entre 1,2 para movimientos de aceleración máxima 0,05 g. y 3,5 para aceleraciones máximas de 0,40 g.

— El valor máximo de la RER disminuye con la intensidad de la excitación, a causa de la disipación de energía por histéresis. Un aumento en la intensidad del movimiento de 0,05 g. a 0,40 g. produce una caída en el valor pico de la RER de un 30% aproximadamente (figura 15).

Por otra parte, la figura 16 presenta la variación de la relación de aceleraciones máximas RA entre el movimiento en superficie del suelo y el movimiento de control y la relación RER/RA en función de la aceleración máxima del movimiento para los casos estudiados. Esta última relación es aproximadamente independiente de la intensidad del movimiento, manteniéndose en todos los casos superior a 1. Por esta razón, una estimación de la amplificación espectral basada en la relación de aceleraciones máximas del movimiento puede conducir a una subestimación de las ordenadas del espectro modificado para períodos cercanos al período propio del suelo, y una sobreestimación de las restantes ordenadas (figura 13a).

mostrado las curvas correspondientes a los movimientos de aceleración 0,05 y 0,40g para cada perfil). Por otra parte, en la figura 14 se han representado, a efectos comparativos, las RER del perfil 1 relativas al acelerograma PASADENA 1952 y al mismo multiplicado por un factor de escala de modo que la aceleración máxima sea 0,40 gr.

Algunos efectos observados en la forma de las curvas RER son:

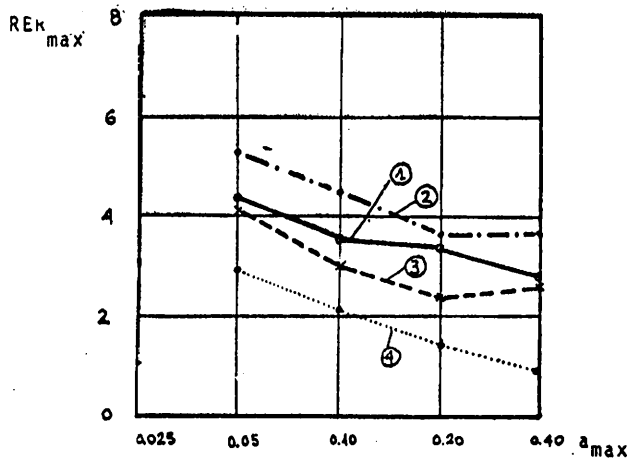
— La abscisa correspondiente al máximo de la curva, T_p (que en un análisis lineal coincide apreciablemente con el período natural T_n del suelo) se desplaza hacia la zona de períodos altos cuando aumenta la intensidad de la excitación. Este efecto puede atribuirse a la degrada-

7.1. Conclusiones

Del análisis de los resultados obtenidos del estudio numérico ha sido posible, a pesar de su carácter limitado, obtener una serie de conclu-

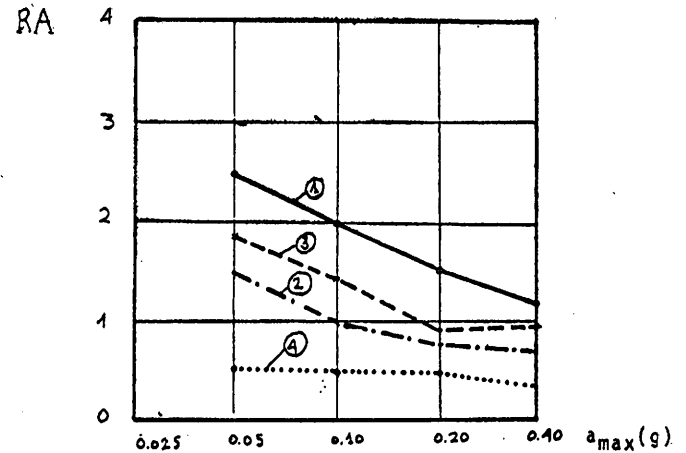
RESPUESTA SISMICA DE SUELOS ESTRATIFICADOS EN REGIMEN NO LINEAL

Fig. 15.—Variación de diversos parámetros representativos de los perfiles estudiados en función de la intensidad del movimiento de entrada.

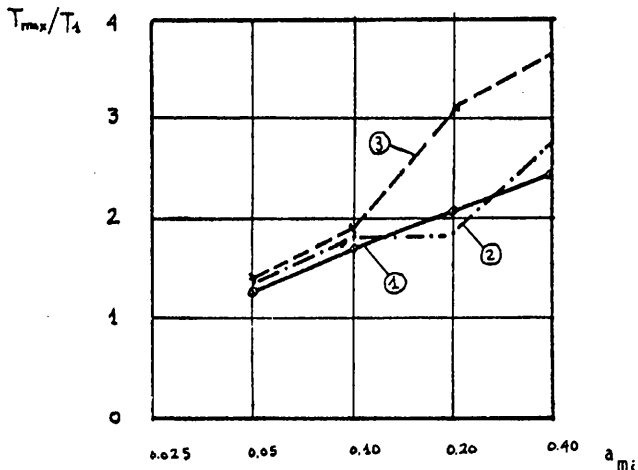


a) Valor máximo de la curva de relación espectral.

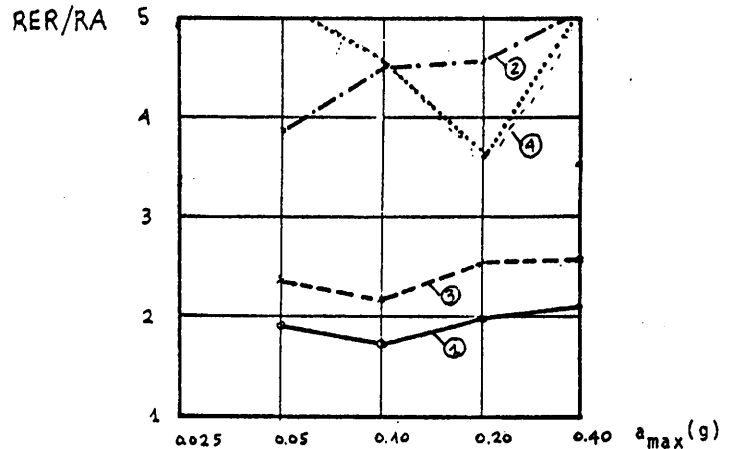
Fig. 16.—Variación de diversos parámetros representativos de los perfiles estudiados en función de la intensidad del movimiento de entrada.



A) Relación de aceleraciones máxima RA.



b) Período correspondiente al máximo factor de ampli-ficación espectral (relativo al período natural del depósito).



B) Relación RER/RA.

siones sobre la respuesta dinámica en la superficie de los suelos (*). Estas conclusiones, que deberían ser confirmadas por una más abundante experimentación numérica posterior se exponen a continuación:

1. La influencia del terreno en la respuesta dinámica es muy importante. Son frecuentes factores de ampli-ficación desde 0,5 hasta superiores a 5 con respecto a la respuesta en terreno firme.
2. Los métodos lineales son claramente inadecuados para el tratamiento de los problemas de ampli-ficación debido a la

fluencia que presentan los suelos para deformaciones tan pequeñas como 10^{-5} m/m. o menores. La utilización de unas propiedades «equivalentes» (módulo de rigidez transversal y coeficiente de amortiguamiento) del suelo, en función de la deformación media que se espera alcanzar representa una simplificación excesivamente drástica para simular el complejo comportamiento no lineal del mismo.

3. Los más usados métodos lineales iterativos presentan gran parte de los inconvenientes antedichos, y una arbitrariedad en la definición de la deformación característica. Por otra parte, son

(*) La respuesta dinámica se entiende en términos del movimiento del campo libre, o movimiento que se registraría en el suelo en ausencia de la estructura.

- incapaces de representar características no lineales como la existencia de deformaciones no recuperables, por ejemplo. Además, el mecanismo de disipación de energía por histéresis es difícil de simular mediante el coeficiente de amortiguamiento equivalente, ya que según su definición, éste sólo tiene sentido cuando el movimiento es de tipo armónico.
4. Un verdadero análisis no lineal elimina las limitaciones del análisis lineal, pudiéndose incluir relaciones de tensión-deformación complicadas. En este tipo de análisis la pérdida de energía por histéresis es tenida en cuenta de forma automática cuando se emplean curvas de tensión-deformación con pérdida de rigidez con la deformación.
 5. En el análisis de sistemas no lineales, las técnicas de resolución numérica tienen una importancia fundamental. En este sentido, la utilización del método de Argyris puede considerarse satisfactoria en los casos estudiados.
 6. El modo probablemente más adecuado de introducir la influencia del terreno en los espectros de respuesta es por medio de la función de relación de espectros de respuesta (RER). Esta curva se obtiene dividiendo, ordenada a ordenada, el espectro de respuesta en la superficie del suelo por el espectro de respuesta en terreno firme.
 7. La forma de la curva de relación espectral depende fundamentalmente de las características del perfil de suelos, y en menor medida de la forma del espectro de respuesta básico. Por otra parte, la influencia del coeficiente de amortiguamiento del espectro de respuesta en la RER ha resultado ser prácticamente insignificante.
 8. Las ordenadas de la RER varían para un mismo perfil de suelos con el período, en la relación de hasta uno a seis. Por esta razón, la utilización de factores de amplificación constantes para todos los períodos según establece la Norma Sismorresistente P.D.S. -1, constituye una excesiva simplificación.
 9. El carácter no lineal se manifiesta en el distinto comportamiento del suelo según la intensidad de la excitación. Por lo tanto, no parece aconsejable la utilización de formas espectrales normalizadas, como ha sido propuesto por algunos autores, ya que la forma del espectro varía con la intensidad de la excitación.
 10. En la curva de RER, el aumento de la intensidad produce, en general, un descenso en el máximo de la curva. Desde este punto de vista, el máximo factor correspondería a los niveles más bajos de excitación. Los descensos en el pico de la curva obtenidos han sido del orden de un 30 %, cuando la intensidad aumentaba de 0,05 g. a 0,40 g.
 11. El segundo efecto fundamental del comportamiento no lineal es alterar la forma de la curva de la RER, desplazando el máximo hacia la zona de períodos altos. Este efecto es consecuencia de la pérdida de rigidez con la deformación. El máximo de la curva, que en el caso lineal (o para intensidades bajas) coincide sensiblemente con el período fundamental del depósito de suelos, se desplaza hasta períodos del orden de dos o tres veces el fundamental para intensidades del orden de 0,40 g.

Por otra parte, los picos de la curva que se presentan en los sucesivos períodos fundamentales de orden superior en un tratamiento lineal suelen desaparecer cuando se incrementa la intensidad de la excitación.
 12. La influencia del espesor del depósito se manifiesta, conjuntamente con su rigidez, en el valor del período fundamental del suelo. No es clara la influencia del espesor en los valores pico de la curva de RER, debido probablemente a la mayor capacidad de absorción de energía que muestran los estratos profundos que pueden compensar una suelta mayor amplificación.
 13. En cuanto a la influencia del tipo de suelo (arcilloso o granular) se ha hallado que, en términos generales:
 - a) Para espesores pequeños la influencia del material es pequeña, proporcionando factores de amplificación del mismo orden para todo el rango de intensidades estudiado.

- b) En espesores grandes e intensidades elevadas los suelos arcillosos (módulo de rigidez transversal aproximadamente constante con la profundidad) han mostrado factores de amplificación mucho más pequeños que los de tipo arenoso (módulo creciente con la profundidad) llegando incluso a una minoración de la respuesta.

BIBLIOGRAFIA

1. LYSMER, J.: «Seismic Site and Soil-Structure Interaction Analysis». Nato Advanced Study Institute on Numerical Methods in Geomechanics. Vimeiro Portugal (agosto-septiembre, 1981). (A publicarse.)
2. THOMSON, N. T.: «Transmisión of Elastic Waves through a Stratified Soil Medium». Journal Appl. Physics, Vol. 21. Febrero, 1950.
3. HARKELL, N. A.: «The Dispersión of Surface Waves in Multi-Layered Media». Bull. Seism. Src. Am. Vol. 43., núm. 1. Febrero, 1953.
4. DESAI, C. S., y CHRISTIAN, J. T.: «Numerical Method in Geotechnical Engineering». Mc Graw-Hill Book Company, 1976.
5. MARTIN, P. P., y SEED, H. B.: «Mash. A computer Program for the Nonlinear Analysis of Vertically Propagating Shear Waves in Horizontally Layered Deposits». Report UCB/EERC-78 123. Universidad de California, Berkeley, 1978.
6. CHEN, J. C.; LYSMER, J., y SEED, H. B.: «Analysis of Local Variations in Freed Field Seismic Ground Motion». Report UCB/EERC, 81-83. Universidad de California, Berkeley, 1981.
7. SCHNABEL, P. B.; LYSMER, J., y SEED, H. B.: «SHAKE A computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites». Report No. EERC 72-12. Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley. Dic., 1982.
8. LYSMER, J.; UDAKA, T.; SEED, H. B., y HUSANY, R.: «LUSH-A Computer Program for Complex Response Analysis of Soil-Structure Systems». Report No. EERC 74-4. University of California, Berkeley, 1974.
9. CONSTANTOPOULOS, I. V.; ROESSET, J. M., y CHRISTIAN, J. T.: «A comparison of linear and exact non linear analysis of Soil Amplification». Proceeding 5-th World conference. Earthquake Engineering. Roma. 1974.
10. ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C., y ANGELOPOULOS, T.: «dynamic Response by Large Step Integration». Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 2, 1983.
11. MIRAGALL, C., SAMARTIN, A.: «Aportación al Estudio de la Respuesta Dinámica de Suelos Estratificados en Régimen no Lineal». Publicación AE-81-2. ETS de ICCP. Universidad de Santander, 1981.
12. GASPARINI, D., VANMARCKE, E. H.: «Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra» MIT Dept. of Civil Engineering. Research Report R76/4 Cambridge, Mass., 1976.
13. IDRIS, I. M., y SEED, H. B.: «Seismic Response of Horizontal Soil Layers». ASCE. Journ. Soil Mechs. and Found. Div. SM4. Julio 1968.
14. KANAI, K.: «Relation Between the Nature of Surface Layer and the amplitudes of Earthquake Motions». Bulletin, Earthquake Research. Institute. Tokyo University., vol., 30, 1952.
15. ROESSET, J. M., y WHITMAN, R. V.: «Theoretical Background for Amplification Studies: Rep. No 5. «Effect of Local Soil Conditions Upon Earthquake Damage». Dept. of Civil Engineering. MIT. Res. Rep. R69-15. Marzo, 1969.
16. NIGAM, N. C., y JENNINGS, P. C.: «Digital Calculation of Response Spectra from Strong-Motion Earthquake Records. Earthquake Eng. Research Laboratory. California Institute of Technology. Pasadena, Cal. Junio, 1978.
17. SEED, H. B., y IDRIS, I. M.: «Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis». Univ. of California. Report No. EERC 70-10. Diciembre, 1970.
18. HARDIN, B. O., y DRNEVICH, P. V.: «Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects». Journal of the Soil Mechs. and Found. Div. ASCE, vol. 98, núm. SM6. Junio, 1972.
19. RAMBERG, W., y OSGOOD, W. R.: «Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters». Technical Note 902. NACA. Julio, 1943.
20. JENNINGS, P. C.: «Periodic Response of a General Yielding Structure». Journal of the Eng. Mechs. Div. ASCE. Abril, 1964.
21. VARISH, A. K., y CHOPRA, A. K.: «Earthquake Analysis of Structure-foundations Systems». Univ. de California. Rep. No EERC 73-9. 1973.
22. CHANG-LIANG, V.: «Dynamic Response of Structures in Layered Soils». MIT Dept. of Civil Eng. Res. Rep. T. 74-10. Enero, 1974.
23. PALLARES HUICI, E.: «Estudio de la Interacción Sólido Líquido en el comportamiento de Torres de Toma de Embalses Actuando Solicitaciones Sísmicas». Tesis doctoral ETSICCP. Madrid, 1979.
24. STREETER, V. L.; WYLIE, E. B., y RICHART, F. E., Jr.: «Soil Motion computations by Characteristics Method». ASCE. Journ. Geot. Eng. Div. GT3. Marzo, 1974.
25. HINTON, E.; ROCK, T., y ZIENKIEWICZ, O. C.: «A note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method». Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol. 4, núm. 3. 1976.
26. KANAI, K.: «Semi-empirical Formula for the seismic characteristics of the Ground». Univ. Tokyo. Bull. Earth. Res. Inst Vol. 35. 1957.
27. NWMARK, N. W.; BLUME, J. A., y KAPUR, K. K.: «Seismic Design Spectra for Nuclear Power Plants». Journal of the Power División, ASCE, Vol. 99. Noviembre, 1973.