



## **EL PARABOLOIDE HIPERBOLICO COMO GENERADOR INAGOTABLE DE FORMAS EN LAS ESTRUCTURAS LAMINARES**

Francisco Cárceles Garralón

Departamento de Construcciones Arquitectónicas y su Control

### **1.- INTRODUCCIÓN**

Las estructuras laminares han encontrado desde el comienzo de su desarrollo dificultades de cálculo ante la complejidad de las ecuaciones diferenciales que definen su equilibrio, y dificultades constructivas dada la singularidad de su forma y de su encofrado.

Pero así como las dificultades de cálculo se han ido superando y simplificando con ayuda de los ordenadores y con ensayos sobre modelos reducidos, las dificultades de definición geométrica y de elaboración de sus encofrados siguen latentes, e incluso agudizadas, por la repercusión cada vez mayor de la mano de obra.

Estas circunstancias han motivado que las estructuras laminares hayan alcanzado un gran desarrollo teórico, con el análisis de sus grandes ventajas estructurales; pero que en la realidad se hayan ejecutado muy pocas y casi siempre con un tratamiento de elemento singular en el cual es posible soslayar los inconvenientes constructivos y económicos

#### **1.1.- ANTECEDENTES EN LA NATURALEZA**

En la Naturaleza, siempre pródiga en motivos para inspirar la intuición artística y creadora del hombre, encontramos ejemplos diversos de láminas de simple y doble curvatura.

En el ámbito del Reino Vegetal son incontables los tipos de hojas y de sépalos con las formas y disposiciones más diversas. Si nos adentramos en el mundo animal aparecen ejemplos abundantes y significativos, muy próximos por forma y constitución a las realizaciones del hombre. El carbonato cálcico que integra las conchas y caparazones de algunos moluscos consigue una gran variedad de diseños y resistencias .

Pero es sin duda la cáscara del huevo de las aves la lámina más sorprendente al conseguir con un espesor tan insignificante resistir las tensiones generadas desde su interior y las posibles acciones exteriores, permitiendo sin embargo una fácil rotura mediante impactos puntuales con el pico.

#### **1.2.- ANTECEDENTES HISTÓRICOS**

Si entrar en el campo de la edificación, encontramos el concepto laminar en las vasijas de barro o de cristal, y en los cestos de caña o de esparto. Pese a esta evidencia tan antigua la Arquitectura ha tardado siglos en incorporar esta realidad de una manera efectiva de la mano del hormigón armado.

Pero incluso esta incorporación ha sido muy escasa si la comparamos con el campo de los coches, aviones, barcos,..., cuyas formas adoptan superficies de doble curvatura adecuadas a su función, consiguiendo dar rigidez a un elemento de tan reducido espesor como es la chapa metálica.

Los antecedentes de los elementos laminares curvos lo encontramos en las construcciones góticas, cuyas ligeras bóvedas nervadas marcan la evolución de la construcción maciza hacia la construcción laminar.

El precedente más directo y más próximo en el tiempo lo constituyen las bóvedas tabicadas constituidas por varias capas de rasilla, la primera de las cuales se coloca con la ayuda de pequeños camones o guías de madera y se recibe con pasta de yeso, constituyendo un encofrado colaborante. Sobre esta hoja, que reproduce la forma del intradós, se superponen las siguientes capas con las juntas contrapeadas y recibidas con mortero de cemento para conseguir una mayor resistencia e impermeabilidad.

Los resultados obtenidos con estas bóvedas son de gran resistencia y ligereza, siendo de destacar por la complejidad y espectacularidad de su trazado las realizadas entre 1.889 y 1.940 por Rafael Guastavino y su hijo en EEUU.

Un paso más lo dio el ingeniero uruguayo Eladio Dieste al incorporar armaduras de acero a las bóvedas tabicadas, mejorando las posibilidades del sistema en su aplicación a obras singulares.

Sin embargo, el paso definitivo no se da hasta que aparece el hormigón armado, el cual con su capacidad de trabajar a compresión y tracción, y su posibilidad de construcción monolítica adoptando la forma de un molde, abre las puertas a la construcción de bóvedas laminares.

## 2.- DESARROLLO

En los años veinte del siglo pasado se inicia la construcción de láminas de hormigón armado con directrices diversas, con las cuales se consigue cubrir grandes espacios con unos pocos centímetros de espesor y sin necesidad de nervios de refuerzo ni de apoyos continuos, tal como había sucedido en las bóvedas clásicas.

A partir de ese momento se suceden varias décadas en las que se ensayan nuevas configuraciones formales, y se superan espectacularmente los antiguos modelos en esbeltez y en luz. Basta citar como ejemplo comparativo la cúpula de San Pedro de Roma, que con una luz de 40 m pesa alrededor de 10.000 t; mientras que una de las primeras cúpulas de hormigón armado, la que cubre la factoría de la Casa Schott en Jena, con la misma luz, pesa tan sólo 330 t, es decir treinta veces menos.

La construcción de láminas de hormigón armado se convirtió en un proceso de estudio, experimentación y atrevimiento, en el cual fueron decisivas las aportaciones que realizaron Eduardo Torroja, Félix Candela y sus discípulos José Enrique-Ruiz Castillo y Ricardo Urgoiti.

Eduardo Torroja, como pionero en diseñar formas estructurales nuevas y sorprendentes, utilizó magistralmente las estructuras laminares, siendo pronto reconocido como un experto en el tratamiento de estas construcciones, de las que destacan la lámina cilíndrica del Frontón Recoletos, los sectores de hiperboloide de la tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, y la cúpula semiesférica del Mercado de Algeciras.

Félix Candela ha sido sin duda el mayor impulsor de las estructuras laminares. Establecido en México el año 1.939, tras realizar diferentes trabajos, fundó con su hermano en 1.950 su propia empresa constructora y se dedicó al diseño y construcción de numerosas estructuras con cascarones de hormigón, convirtiéndose en poco tiempo en el líder mundial de tales estructuras, con obras tan emblemáticas

como el Restaurante Manantiales en Xochimilco, cerca de la ciudad de Méjico, o la Capilla de Lomas de Cuernavaca.

En España la construcción de láminas de hormigón alcanzó un gran desarrollo en los años sesenta y setenta del siglo pasado, a impulso sobre todo de la empresa "Construcciones Laminares", fundada por los arquitectos José Enrique Ruiz-Castillo y Ricardo Urgoiti el año 1964.

Ambos habían estado varios años antes, becados por la Fundación Juan March, en el Estudio de Felix Candela en Méjico, aprendiendo del maestro los entonces complejos y laboriosos sistemas de cálculo, y las incipientes técnicas de ejecución.

A su regreso a España vislumbraron la posibilidad de aplicar las láminas de hormigón a la construcción de cubiertas para grandes espacios y grandes luces, sustituyendo a las arcaicas cerchas metálicas, por entonces el recurso más habitual.

Con este planteamiento la empresa se especializó en la ejecución de cubiertas laminares para naves industriales, almacenes, talleres, mercados, aparcamientos, etc., siendo muy larga la lista de obras realizadas en toda España desde 1964 a 1979.

Sin embargo esta especialización no fue obstáculo para que sus directores, los arquitectos Ruiz Castillo y Ricardo Urgoiti se ofrecieran a calcular y ejecutar cualquier lámina singular integrada en el proyecto de un compañero. De esta colaboración surgieron obras espectaculares, como la iglesia de Becerril de la Sierra, el Gimnasio del Instituto español en Algés (Lisboa), o la cubierta de la tribuna en el estadio de Balaidos, en Vigo.

### 3.- FUNDAMENTO DE LAS ESTRUCTURAS LAMINARES

La idea fundamental de las estructuras laminares, tal como decía Félix Candela es : *"Evitar en la medida de lo posible los esfuerzos de flexión mediante la forma adecuada"*.

Así es como la curvatura de la lámina transforma las fuerzas externas en esfuerzos directos o de membrana, situados exclusivamente en la superficie de la cáscara, de tal modo que pueden ser resistidos con un espesor mínimo, de escasos centímetros.

La eficacia de la lámina como elementos estructurales se basa en su capacidad para transmitir fuerzas actuando como una membrana, es decir mediante un flujo de fuerzas actuando en su plano medio sin flexión.

Por tanto la lámina debe ser diseñada para que se aproxime lo más posible al estado de tensión de membrana, de modo que se reduzca al mínimo la flexión, y pueda considerarse como una perturbación local o una tensiones secundarias.

### 4.- TIPOLOGÍA DE LOS ELEMENTOS LAMINARES

Los elementos laminares han encontrado en las superficies curvas las formas más adecuadas para conseguir la reducción de espesor, aunque también es posible conseguirlo con superficies planas si están solicitadas por fuerzas contenidas en el plano de su superficie media.

Dentro de las superficies curvas, son las de doble curvatura las que mejor se adaptan al estado ideal de membrana, sobre todo si ambas curvaturas tienen sentidos opuestos, como sucede en el paraboloide hiperbólico, el cual puede servir de base



para el estudio geométrico y de referencia para el análisis constructivo de cualquier lámina en general.

#### 4.1.- GENERACIÓN DEL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

El paraboloides hiperbólico se engendra a partir de dos parábolas mediante el deslizamiento de una de ellas, paralelamente a sí misma, sobre la otra. A la primera parábola se la denomina generatriz, porque “genera” la superficie, y a la segunda se le llama directriz, ya que “dirige” la operación.

Según que las dos parábolas tengan igual o distinta curvatura, que estén o no contenidas en planos verticales, y que éstos formen entre sí un ángulo recto o un ángulo cualquiera, resultan las siguientes combinaciones con sus correspondientes plantas :

<u>Parábolas</u>	<u>Planos</u>	<u>Angulo</u>	<u>Planta</u>
Igual curvatura	verticales	recto	cuadrado
Distinta curvatura	verticales	no recto	rombo
Igual curvatura	verticales	recto	rectángulo
Distinta curvatura	verticales	no recto	romboide
Igual/distinta curvatura	Inclinado uno	recto	cuadrilátero simétrico
Igual/distinta curvatura	Inclinados	recto	cuadrilátero asimétrico

La versión más sencilla es la que resulta de parábolas de igual curvatura, contenidas en planos verticales y perpendiculares entre sí, que además tienen como planta proyección un cuadrado.

Este paraboloides es el que nos va a servir de referencia para el estudio y análisis de sus características geométricas, extensible a todas las demás situaciones.

#### 4.2.- CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

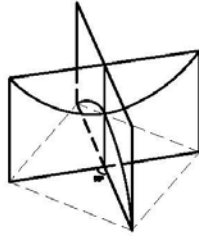
El vértice del paraboloides obtenido coincide con el vértice de la parábola directriz y con el de la parábola generatriz en su posición más baja.

Por cada punto de la superficie así obtenida pasan dos rectas que pertenecen a la superficie, y justamente las que se cortan en el vértice común son horizontales.

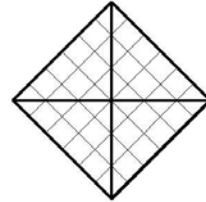
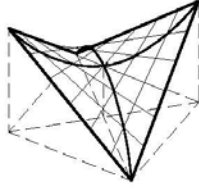
Las secciones verticales son parábolas que, según la orientación del corte, tienen curvatura positiva o negativa, y que para una posición intermedia se convierten en rectas.

Las secciones horizontales son hipérbolas cuyo eje disminuye al aumentar la altura de la sección, y que en el vértice del paraboloides se convierten en dos rectas que se cortan.

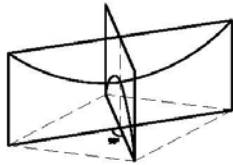
GENERACION DE PARABOLOIDES HIPERBOLICOS DE BORDES RECTOS



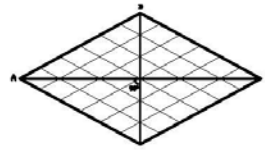
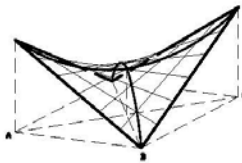
LAS DOS PARABOLAS DE IGUAL CURVATURA Y CONTENIDAS EN PLANES VERTICALES FORMANDO ENTRE SI UN ANGULO RECTO



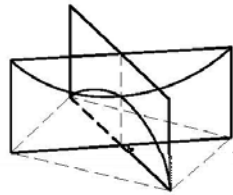
CUADRADO



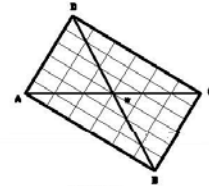
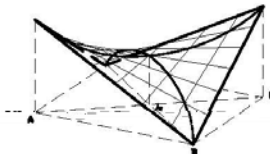
LAS DOS PARABOLAS DE DISTINTA CURVATURA Y CONTENIDAS EN PLANES VERTICALES FORMANDO ENTRE SI UN ANGULO RECTO



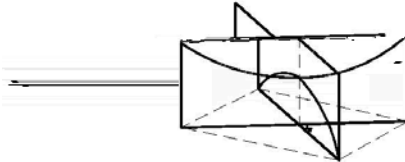
ROMBO



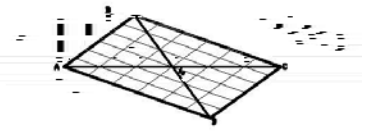
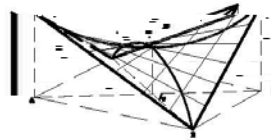
LAS DOS PARABOLAS DE IGUAL CURVATURA Y CONTENIDAS EN PLANES VERTICALES FORMANDO ENTRE SI UN ANGULO OBLICUO



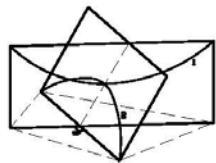
RECTANGULO



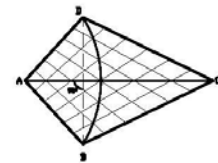
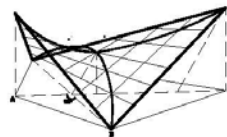
LAS DOS PARABOLAS DE DISTINTA CURVATURA Y CONTENIDAS EN PLANES VERTICALES FORMANDO ENTRE SI UN ANGULO O



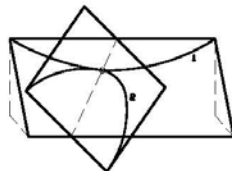
ROMBOIDE



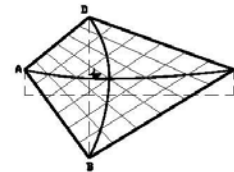
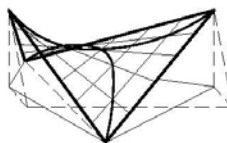
LA PARABOLA 1 CONTIENE EN UN PLANO VERTICAL, Y LA PARABOLA 2 CONTIENE EN UN PLANO INCLINADO



CUADRILATERO SIMETRICO



LAS PARABOLAS 1 Y 2 CONTIENEN EN PLANES INCLINADOS



CUADRILATERO ASIMETRICO

## 5.- PARABOLOIDE DE BORDES RECTOS

Si en la superficie general del paraboloides cortamos por cuatro generatrices y separamos el trozo, habremos obtenido una superficie de paraboloides con los bordes rectos, que es la forma más elemental.

### 5.1.- PLANTAS DE CUADRADO, RECTÁNGULO, ROMBO Y ROMBOIDE

En estos paraboloides las cuatro generatrices de los bordes se proyectan en planta según las formas anteriores, y todas las secciones dadas por planos verticales paralelos a los bordes son líneas rectas, que constituyen los dos haces de generatrices.

De hecho, para su proceso de formación y definición gráfica basta dividir cada dos lados opuestos en un mismo número de partes iguales y unir entre sí los puntos de división. Aunque sólo se dibujan líneas rectas se reconoce siempre la curvatura parabólica, siendo mayor la aproximación a las curvas cuanto más densa sea la red de rectas. En todas las representaciones a realizar se va a dividir cada lado en seis partes iguales, que he considerado el número óptimo para llegar a un equilibrio entre la sensación de curvatura y la claridad de la figura.

Las secciones diagonales y todas las paralelas a ellas reproducen las correspondientes parábolas, pertenecientes a dos familias con curvaturas inversas.

El cuadrado de la planta es la proyección horizontal del cuadrilátero alabeado que forman en el espacio los cuatro vértices de la superficie reglada. Por tanto es posible construir sobre una base cuadrada un paraboloides hiperbólico de bordes rectos siempre que los cuatro vértices del cuadrilátero alabeado no se encuentren a la misma altura, ya que entonces resultaría una superficie plana.

### 5.2.- PLANTA DE CUADRILÁTERO CON UN EJE DE SIMETRÍA

Si el cuadrilátero de la planta tiene un eje de simetría, el elemento que la cubre pertenece a la superficie general del paraboloides hiperbólico, pero ha sido necesario que experimente un giro con respecto al eje diagonal de una de las parábolas.

Para conocer la magnitud del giro o, lo que es lo mismo, la nueva posición de la parábola en la planta basta trazar las dos familias de generatrices y unir los puntos de intersección. En la dirección del eje de simetría resulta una recta, mientras que en la dirección ortogonal resulta una parábola que va de apoyo a apoyo. Esto nos dice que la primera parábola está contenida en un plano vertical, y que la segunda ha experimentado un giro y por tanto un desplazamiento de su vértice.

En la figura se ve claramente como al girar la parábola BVD se modifica la posición y la proyección de los otros dos vértices A y C, de modo que la planta se deforma y pasa de ser un cuadrado a ser un cuadrilátero con un eje de simetría.

### 5.3.- PLANTA DE CUADRILÁTERO ASIMÉTRICO

Si la planta no tiene ningún eje de simetría significa que las dos parábolas han experimentado un giro, cada una con respecto a su eje diagonal, de modo que ambas quedan contenidas en planos inclinados.

Las intersecciones en planta de los dos haces de generatrices nos muestra las dos parábolas separadas de las diagonales, expresando claramente la magnitud de los giros.

## 6.- ASOCIACIÓN DE PARABOLOIDES DE BORDES RECTOS

Los paraboloides de bordes rectos presentan una características geométricas de tal sencillez que simplifican la representación gráfica de su forma, facilitan su asociación, y por supuesto su construcción.

Las posibilidades de combinación de los paraboloides de bordes rectos son prácticamente inagotables. Con objeto de mostrarlo se ha partido de los módulos más sencillos, de planta triangular, cuadrada y rectangular, y se ha realizado un estudio sistemático de los acoplamientos encaminados a conseguir plantas compuestas de mayor complejidad.

### 6.1.- PLANTA TRIANGULAR

*MÓDULO : Triángulo rectángulo*

*MÓDULO : Triángulo equilátero*

*MÓDULO : Triángulo isósceles*

*MÓDULO : Triángulo irregular*

### 6.2.- PLANTA CUADRADA

*MÓDULO : Cuadrado con un vértice más bajo*

*MÓDULO : Cuadrado con un vértice más alto*

*MÓDULO : Cuadrado con dos vértice más alto*

### 6.3.- PLANTA RECTANGULAR

Las asociaciones son similares a los de planta cuadrada, resultando siempre plantas rectangulares con las mismas características de contorno y apoyos.

### 6.4.- PLANTA DE ROMBO

*MÓDULO : Rombo*

### 6.5.- PLANTA DE CUADRILÁTERO SIMÉTRICO

*MÓDULO : Cuadrilátero simétrico*

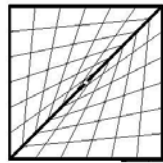
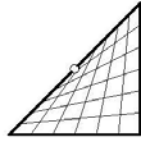
### 6.6.- PLANTA DE CUADRILÁTERO ASIMÉTRICO

*MÓDULO : Cuadrilátero asimétrico*

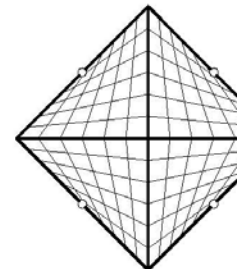
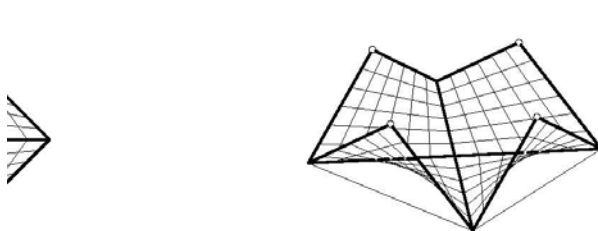
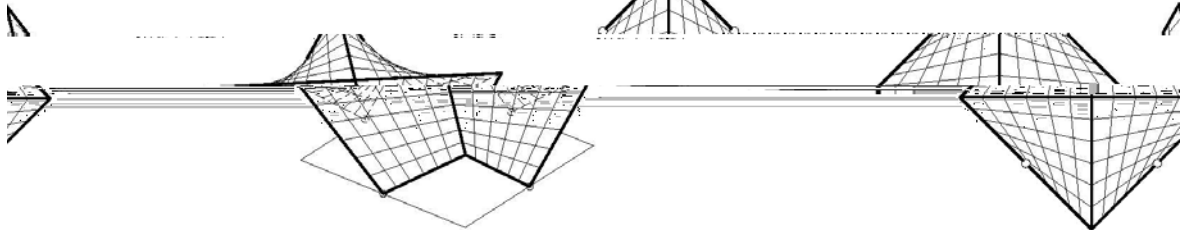
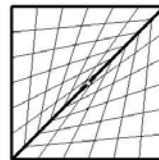
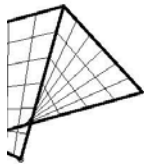
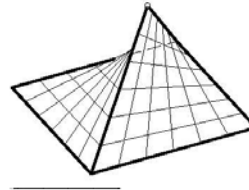
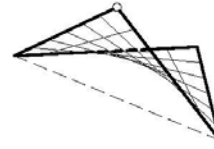
Al carecer la planta de un eje de simetría las asociaciones dan lugar a formas irregulares, que en general se tratan de evitar y que por consiguiente tienen poca importancia.

ASOCIACION DE PARABOLOIDES  
PLANTA DEL MODULO BASICO : TRIANGULO RECTANGULO

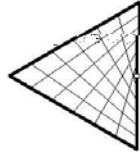
PLANTA



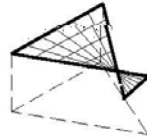
PERSPECTIVA



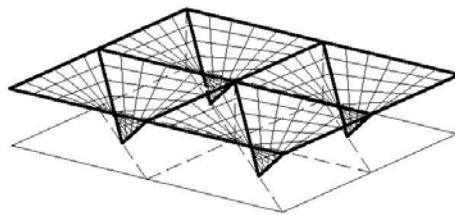
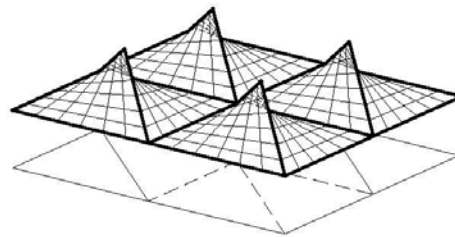
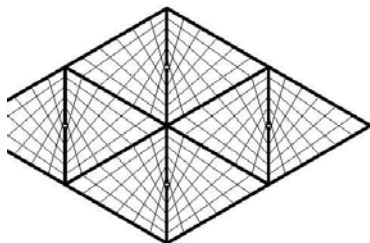
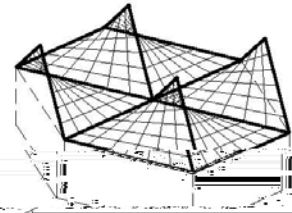
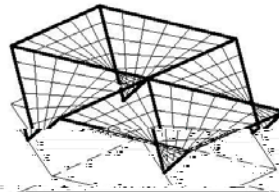
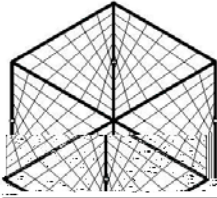
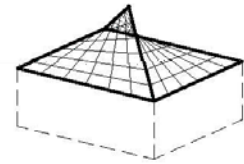
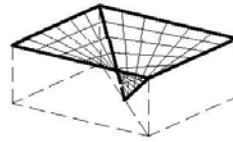
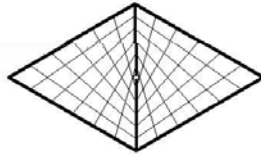
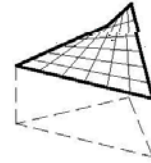
**ASOCIACION DE PARABOLOIDES**  
**PLANTA DEL MODULO BASICO : TRIANGULO EQUILATERO**



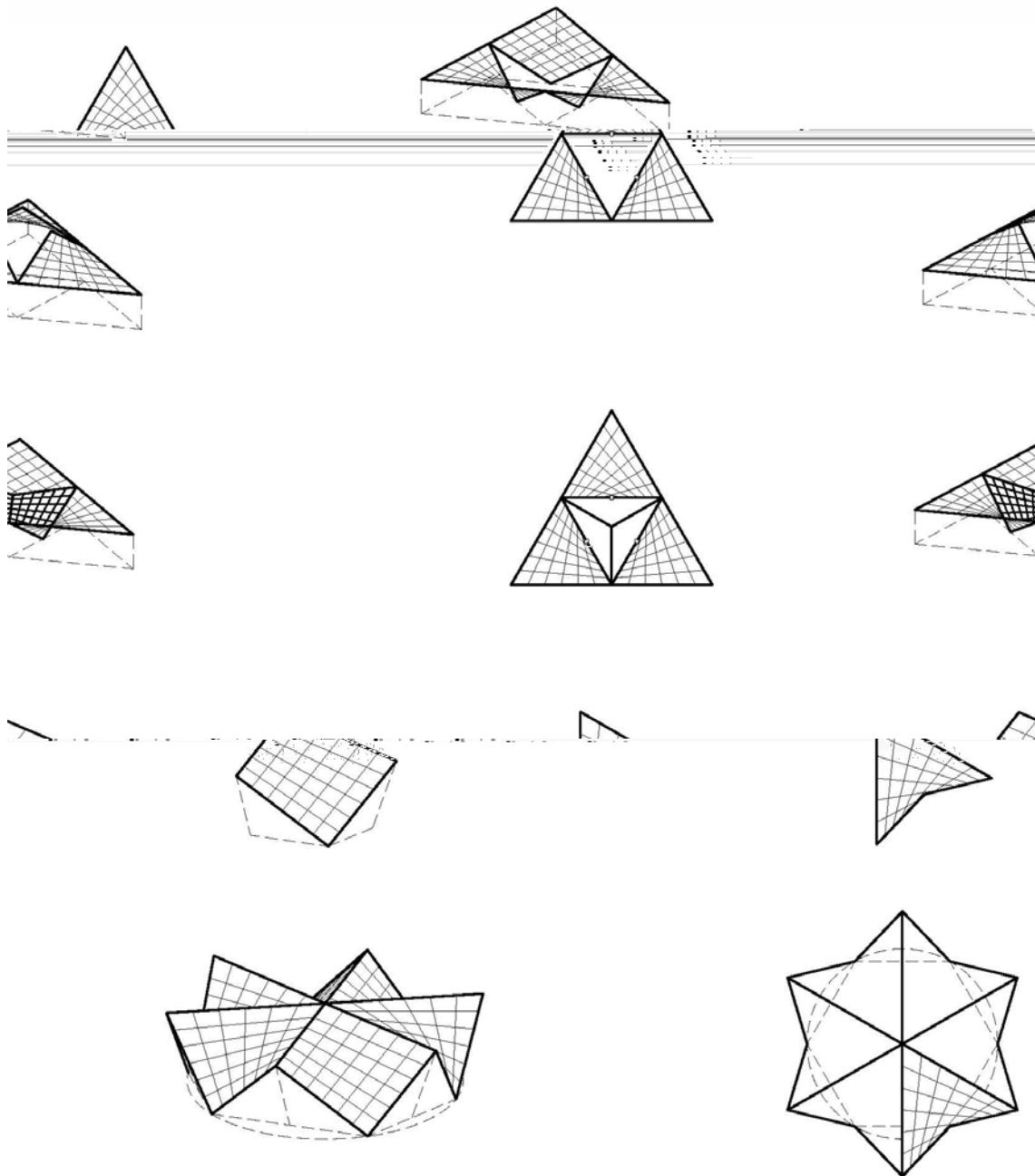
PLANTA



PERSPECTIVA

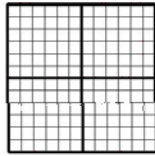


ASOCIACION DE PARABOLOIDES  
PLANTA DEL MODULO BASICO : TRIANGULO EQUILATERO



ASOCIACION DE PARABOLOIDES  
PLANTA DEL MODULO BASICO : CUADRADO

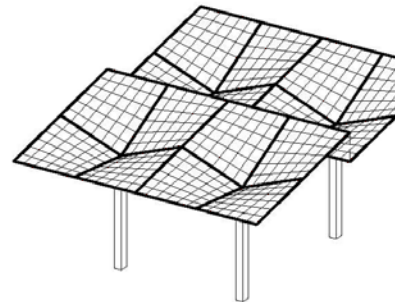
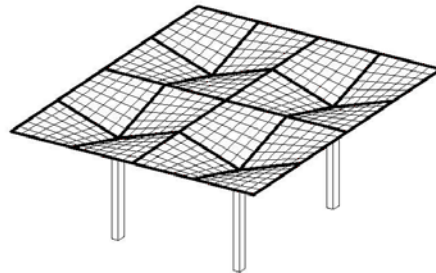
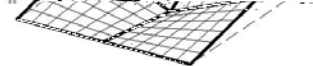
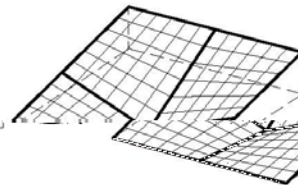
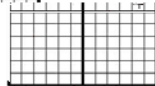
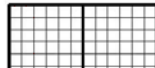
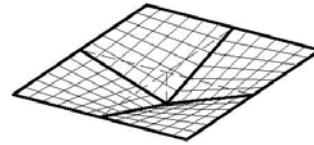
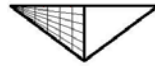
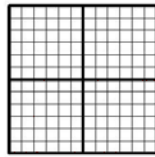
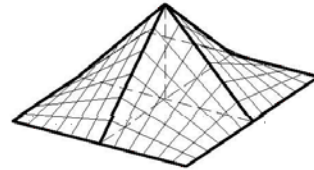
PLANTA.



ALZADO.



PERPECTIVA.





## 7.- CONCLUSIONES

Las superficies de doble curvatura, de las que el paraboloides hiperbólico es el mayor exponente, ofrecen una inagotable variedad de formas, capaces de cubrir una gran diversidad de plantas, y de crear nuevos espacios.

El análisis de su geometría y el estudio sistemático de su tipología pueden acercarnos a un mundo de formas hasta ahora poco aprovechado por desconocido.

La posibilidad de aplicar estas láminas de hormigón a la construcción de cubiertas viene avalada por una serie de cualidades, entre las que se pueden destacar :

- Buen comportamiento frente al fuego, como corresponde al hormigón armado.
- Excelente iluminación natural en todo el espacio interior, aprovechando las diferencias de nivel entre sus bordes o entre módulos contiguos.
- Evacuación fácil de las aguas de lluvia, conseguida por la propia geometría.
- Espectacularidad, resultante de la singularidad de las formas y espacios creados, y sobre todo por el alarde técnico que suponen los pocos centímetros de espesor de la lámina frente a luces entre apoyos de más de 20 metros.

## 8.- LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Puesto que el mayor obstáculo para la construcción de las estructuras laminares de hormigón es el elevado coste de su encofrado, la investigación debe centrarse en la búsqueda de un sistema que evite la excesiva intervención de mano de obra en su proceso.

Como primera línea abierta se ha pensado en un molde único que mediante sencillos movimientos de descenso y traslación permita su utilización sucesiva en módulos de idéntica geometría. Para este planteamiento es imprescindible que la lámina esté formada por varios módulos iguales, lo cual suele ser habitual en las asociaciones de paraboloides hiperbólicos.

## 9.- BIBLIOGRAFÍA

HASS, A. M. *Láminas de hormigón* Madrid : I. Eduardo Torroja, 1971

CANDELA, FELIX *Estructuras laminares parabólico – hiperbólicas*  
Journal of the American Concrete Institute

HENGEL, HEINO *Sistemas de estructuras* Gustavo Gili

ANGERER, FRED *Construcción laminar* Barcelona : Gustavo Gili, 1961

SALVADORI, MARIO *Estructuras laminares en la Arquitectura moderna* Madrid :  
Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, 1959

TONDA, JUAN ANTONIO Y EDUARDO *Paraboloides hiperbólicos. Monogramas para el cálculo de esfuerzos de membrana* Mejico : Editorial Limusa – Wiley, 1972

REGALADO TESORO, FLORENTINO *Breve introducción a las estructuras y a sus mecanismos resistentes* Madrid : CYPE Ingenieros, 1991

SARRABLO, VICENTE *La construcción de formas complejas*  
Madrid : ATC Ediciones, Tectónica Septiembre 2004